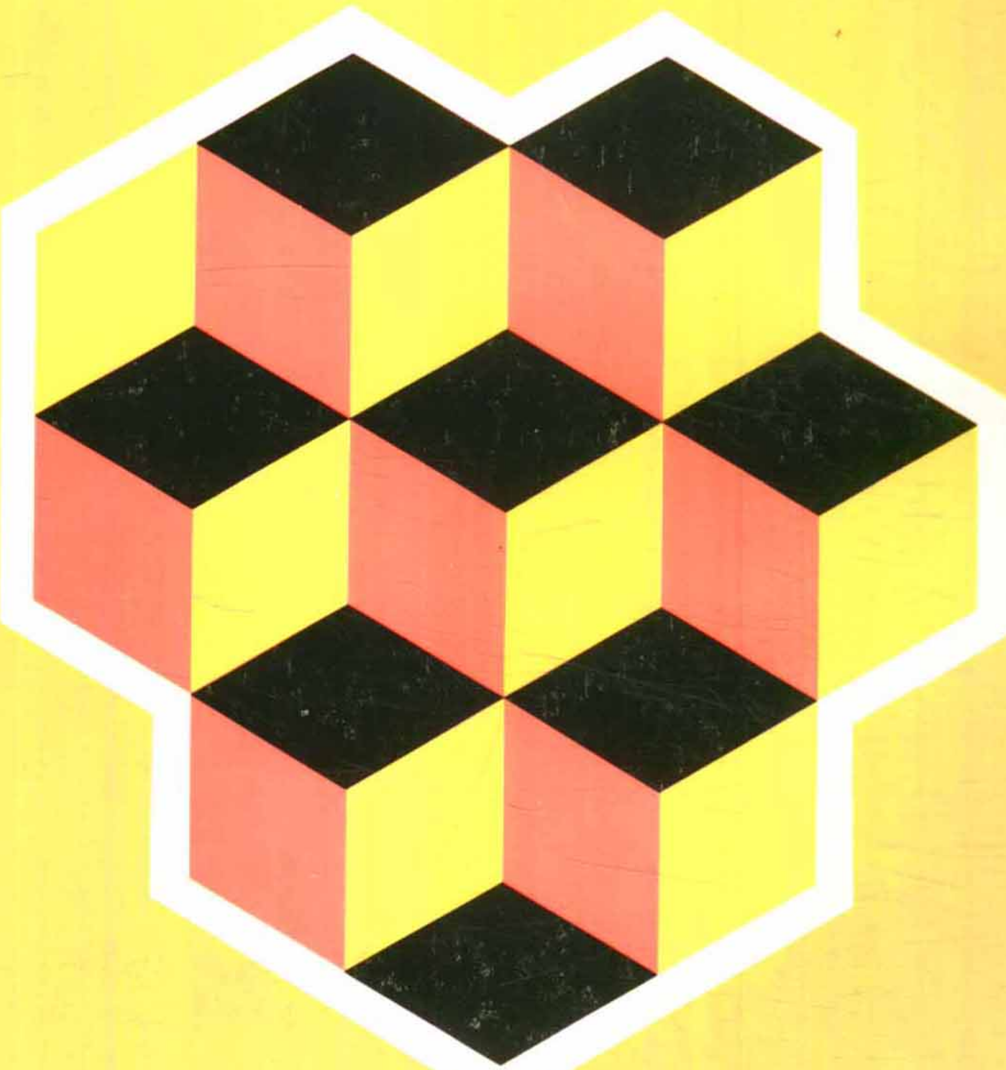
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۱

سال چهارم، پاییز ۱۳۷۳، شمارهٔ اول، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی • سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:

آقایان: • حمیدرضا امیری • محمدهاشم رستمی

• احمد قندهاری • سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

• غلامرضا یاسی‌پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو

• حروفچینی: یگانه

سال چهارم، پاییز ۱۳۷۳ ، شمارهٔ اول

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)

۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن

۴ـ طرح معماهای ریاضی

۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.

• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اوّل ۱

• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید(۱۱)/ پرویز شهریاری ۲

• معادلهٔ درجه دوم/ احمد قندهاری ۹

• آموزش ترجمه متون ریاضی (۷)/ حمیدرضا امیری ۲۲

• تاریخچه مجلات ریاضی در ایران(۱۰)/ ۲۶

• اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر/ غلامرضا یاسی‌پور ۳۲

• عمل حاصلضرب دکارتی بین مجموعه‌ها/ ۳۶

• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی(۹)/ غلامرضا یاسی‌پور ۴۱

• ادامه گزارش بیست‌وپنجمین کنفرانس ریاضی کشور/ ۴۳

• تعیین علامت عبارتهای جبری وحل نامعادلات ودستگاه‌توأم/ سید محمدرضا هاشمی موسوی ۴۶

• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۹)/ غلامرضا یاسی‌پور ۵۳

• مکان هندسی / محمد هاشم رستمی ۵۷

• مثلث ارتفاعیه/ ۶۳

• معرفی کتاب / ۶۹

• جواب نامه‌ها/ ۷۱

• حل مسائل مسابقه‌ای برهان (۹)/ ۷۵

• مسائل مسابقه‌ای / ۷۵

• مسائل برای حل / ۷۶

• حل مسائل برهان ۱۰ / ۸۲

■ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه بهرام‌چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ــ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اوّل

با چاپ این شماره از مجله، وارد چهارمین سال انتشار فصلنامه ریاضی «برهان» شده‌ایم از روزی که تصمیم به انتشار این مجله گرفتیم، با امید به توفیقات الهی، هدفی جز خدمت به جامعه فرهنگی و علمی کشور و بالاخص ریاضیات دبیرستانی در سر نداشتیم. در این راه همیشه از پیشنهادات، انتقادات و دلگرمیها و تشویقهای شما عزیزان سود برده و آنها را توشهٔ راهمان ساخته‌ایم. در آغاز چهارمین سال انتشار «برهان» لازم می‌دانم نکاتی را به عرض شما خوانندگان عزیز و دانش‌آموزان گرامی برسانم.

۱ ـ نظر به اینکه از امسال بخش وسیعی از آموزش متوسطه (دبیرستانی) تحت پوشش نظام جدید آموزش و پرورش قرار می‌گیرد، تصمیم گرفته شد از این به بعد، بخش قابل توجهی از مقالات و مسائل مطرح شده به نظام جدید اختصاص داده شود و مقالات حتی‌الامکان از میان مباحث و موضوعهایی انتخاب شوند که در کتب نظام جدید و قدیم مشترک باشند.

۲ ـ نظر به درخواست و پیشنهاد شما عزیزان، بخش مسائل برای حل را گسترش داده و در هر مقطع تعداد مسائل مطرح شده را افزایش می‌دهیم.

۳ ـ تصمیم گرفته‌ایم که از این شماره، بخش کامپیوتر مجله را در زمینهٔ آموزش مبانی کامپیوتر فعالتر کنیم و مقالات بیشتری به چاپ برسانیم.

۴ ـ سعی بر این است که از این شماره، مقالات درسی و کمک درسی را افزایش داده و همچنین تعداد صفحات بیشتری را به بخش جواب نامه‌ها اختصاص دهیم.

در انتها و با توجه به فصل بازگشایی مدارس و شروع فعالیتهای تحصیلی شما عزیزان، موفقیت و کامیابی همهٔ شما آینده‌سازان ایرانِ اسلامی را از خداوند خواستاریم و توصیه می‌کنیم از همین امروز و از همین آغاز سالِ تحصیلی پایه‌های درسیِ خود را محکم کرده و در شیوهٔ مطالعات کتب درسی و کمک آموزشی، برنامه‌ریزیِ دقیق و مؤثری داشته باشید تا به موفقیت بیشتری دست یابید. إن شاءا...

والسلام. سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۱)

پرویز شهریاری



دربارهٔ روش انجام تکلیفها صحبت می‌کردیم. اهمیت موضوع، آن‌قدر زیاد است که نمی‌توان بسادگی آن را کنار گذاشت.

دو نوع مسأله وجود دارد: ۱) تمرینهای ساده و یکنواختی که برای به‌خاطر سپردن دستورها و تسلط بر قضیّه‌ها، به‌طور معمول، در پایان هر فصل کتاب درسی آمده است و، راه حل آنها، کم و بیش از قبل معلوم است و ۲) مسأله‌هایی که برای حلِ آنها، باید دستورها و قضیّه‌های لازم را خودمان و با توجه به داده‌های مسأله، کشف کنیم.

مسأله‌های نوع اوّل، مسأله‌هایی «بی مضمون» هستند و به تفسیر و توضیحی نیاز ندارند. هرجا، در این رشته مقاله‌ها، از مسأله نام می‌بریم منظورمان مسأله‌های نوع دوم، یعنی مسأله‌های «با مضمون» است.

البته، در نوع اوّل، یعنی در تمرینهای پایان هر بخش کتاب درسی هم، ممکن است مسأله‌هایی گذاشته شده باشد که «اندک مضمونی» داشته باشند. سه مثال از این نوع می‌آوریم:

مثال ۱: در پایان بخش مربوط به معادلهٔ درجه دوم، برای تمرین در استفاده از دستور کلی حل معادلهٔ درجه دوم، این معادله، برای حل، داده شده است:

$$x^۳ - ax^۲ + x + a^۲ - ۳a + ۲ = ۰ \qquad (*)$$

که معادله‌ای درجه سوم است. ولی، چون در فصل مربوط به معادلهٔ درجه دوم آمده است، باید ارتباطی با آن داشته باشد ... چه رابطه‌ای؟ ... بله! این معادله، نسبت به پارامتر a، از درجهٔ دوم است. آن را نسبت به a منظم می‌کنیم:

$$a^۲ - (x^۲ + ۳)a + x^۳ + x + ۲ = ۰$$

بنابراین، می‌توان a را برحسب x به‌دست آورد؛ و اگر ریشه‌ها (نسبت به مجهول a) عبارتهایی گویا باشند؛ این راه حل، ما را به‌نتیجه می‌رساند. مبین معادله چنین است:

$$\Delta = (x^۲ + ۳)^۲ - ۴(x^۳ + x + ۲)$$
$$= x^۴ - ۴x^۳ + ۶x^۲ - ۴x + ۱ = (x^۲ - ۲x + ۱)^۲$$

یعنی برای a، دو جواب گویا به‌دست می‌آید:

$$a = x + ۱ \,,\, a = x^۲ - x + ۲$$

به این ترتیب $x_۱ = a - ۱$ و برای دو جواب دیگر، باید این معادلهٔ درجه دوم را حل کنیم:

$$x^۲ - x + ۲ - a = ۰ ;$$

$$x_{۲,۳} = \frac{۱ \pm \sqrt{۴a - ۷}}{۲}$$

تکلیف ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (*) معلوم شد. این معادلهٔ درجه سوم به ازای $a < \frac{۷}{۴}$، تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد: $x = a - ۱$

به ازای $a = \frac{۷}{۴}$، یک ریشهٔ ساده و یک ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x_۱ = -\frac{۱۱}{۴} \,،\, x_۲ = x_۳ = \frac{۱}{۲} \,،$$

و به ازای $a > \frac{۷}{۴}$، سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد:

$$x_۱ = a - ۱ , x_۲ = \frac{۱}{۲} + \sqrt{a - \frac{۷}{۴}} \;,\; x_۳ = \frac{۱}{۲} - \sqrt{a - \frac{۷}{۴}}$$

مثال ۲: در پایان بخش مربوط به بخش‌پذیر بودن $a^n - b^n$ بر $a - b$ و $a^n + b^n$ بر $a + b$ (به شرط فرد بودن n)، این تمرین داده شده است:

چند جمله‌ای زیر را، به تفاضل مجذورهای دو چند جمله‌ای تبدیل کنید:

$$x^۸ + x^۶ + x^۴ + x^۲ + ۱$$

بی‌تردید به فکر می‌افتید؛ این تمرین، به چه مناسبت در این فصل داده شده است؟ ... چرا همهٔ توانها زوج است؟ ... خوب، با فرض $x^۲ = y$، به عبارت ساده‌تری می‌رسیم:

$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$

و این، خارج قسمتِ $1 - y^5$ بر $1 - y$ است. و دیگر، به خودی خود، حل مسأله دنبال می‌شود:

$$y^4+y^3+y^2+y+1=\frac{y^5-1}{y-1}=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^5+1}{x+1}$$

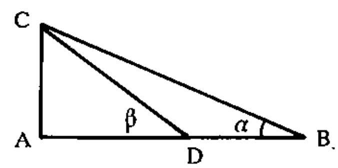
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$=(x^4+x^2+1)^2-(x^3+x)^2$$

مثال ۳: درپایان‌بخش مربوط به تشابه مثلثها، این تمرین داده‌شده است:

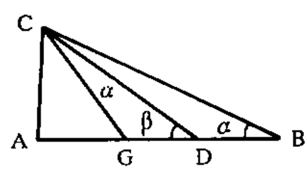
در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، می‌دانیم طول ضلع AB، سه برابر طول ضلع AC و طول پاره‌خط راست DB، یک سوم طول ضلع AB است (شکل را ببینید). ثابت کنید، مجموع دو زاویهٔ α و β برابر ۴۵ درجه است.

شکل ۱



کلید حلِ مسأله این است که از نقطهٔ C به وسط پاره‌خط راست AD وصل کنیم و ثابت کنیم، دو مثلث CED و BCE متشابه‌اند.

شکل ۲



این دو مثلث، در زاویهٔ $\hat{E}$ (CEB) مشترکند؛ در ضمن داریم (طول ضلع AC را واحد گرفته‌ایم):

$$\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}\ ;$$

$$\frac{|EB|}{|CE|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

یعنی؛ مثلثها، در یک زاویه مشترکند و ضلعهایی از دو مثلث که مجاور این زاویه‌اند، طولهایی متناسب دارند، پس مثلثها متشابه‌اند. بنابراین، زاویه‌های نظیر در دو مثلث، با هم برابرند:

$$E\hat{C}D = E\hat{B}C = \alpha$$

اکنون، اگر به مثلث CEB توجه کنیم، روشن می‌شود:

$$\alpha + \beta = A\hat{E}C = 45^\circ$$

ولی حتی در این‌گونه مسأله‌ها، که «بی مضمون» هم نیستند، همان‌طور که دیدید، خود درس می‌تواند راهنمایی برای یافتن راه حل باشد. مسأله‌های واقعی «مضمون دارد» ، آنهایی هستند که هیچ‌گونه دستور یا قضیّهٔ راهنما ، چه مستقیم و چه غیر مستقیم، به همراه نداشته باشند. قبول کنید که اغلب مسأله‌های زندگی هم، چنین‌اند.

□

دو راه برای پی بردن به حل مسأله وجود دارد: راه اوّل این است که کتاب حل مسأله‌ها را باز کنیم و راه حل آن را ببینیم، یا منتظر جلسهٔ بعدی کلاس بمانیم تا دبیر ریاضی (یا یکی از دانش‌آموزان) آن را حل کند و «کلید حل مسأله» را به ما بدهد (و دریغ، که اغلب همین راه را انتخاب می‌کنند). این، برخورد «غیرفعال» با مسأله است، شیوه‌ای که هرگز ما را برای حلّ مسأله‌های تازه (چه در ریاضیات و چه در زندگی) آماده نمی‌کند، استفاده از کتابهای حل مسأله یا رونویس کردن آنچه بر تختهٔ سیاه نوشته می‌شود، نقش دو «چوب دستی» را به‌عهده دارند که بخواهیم تنها به یاری آنها راه برویم و، طبیعی است، اگر به زیر بغل گرفتن «چوب دستیها» عادت کرده باشیم، بتدریج راه رفتن عادی را فراموش می‌کنیم و، بدون «چوب دستیها» به زمین می‌خوریم.

روش دوم؛ «برخورد فعال» با مسأله است. در آینده، دربارهٔ برخورد فعال با مسأله‌های ریاضی، با تفصیل بیشتری صحبت خواهیم کرد و در این‌جا، تنها به جنبه‌ای از آن ـ که برای همه، اهمیتی جدی دارد ـ اشاره می‌کنیم.

اندیشه یا تفکر، و بویژه اندیشهٔ علمی، تنها با آگاهیهای پراکنده‌ای که از این‌جا و آن‌جا به‌دست می‌آوریم، پدید نمی‌آید. اگر ذهن آدمی، فعالیت نداشته باشد و اگر، با تکیه بر آنچه در اختیار دارد و آنچه پیشتر یاد گرفته است، تلاش برای پیدا کردن بستگیهای

ممکنِ بین عنصرهای به‌ظاهر جدا از هم نکند؛ اگر با تجزیه و تحلیل داده‌ها، به‌تدریج و گام‌به‌گام، راه را برای رسیدن به مقصود نگشاید ...، هرگز رشد نمی‌کند و استعداد رفع دشواریها را بدست نمی‌آورد.

اندیشه، بویژه اندیشهٔ ریاضی، ضمن جدا کردن و شناختن پدیده‌ها و حقیقتهای موجود (تجزیه)، جست و جوی بستگیهای بین آنها (ترکیب یا تحلیل) و عبور از حالتهای خاص به حالت کلی (تعمیم) پدید می‌آید و رشد می‌کند؛ و «برخورد فعال با مسأله» یعنی همین

تجزیه و تحلیل و تعمیم، خمیرمایه‌هایی هستند که «اندیشه» را بارور می‌کنند، موجب افزایش آگاهیها و بالا رفتن استعداد کار می‌شوند و به ما امکان می‌دهند تا، به کمک اندیشهٔ خود، حلقهٔ مجهول یک موقعیت (یعنی آنچه را که به‌طور مستقیم به ما نداده‌اند) پیدا کنیم.

اندیشه، نه از راه به‌خاطر سپردن و حفظ کردن بلکه از طریق تلاش ذهن و جست و جوی بستگیهای تازه به دست می‌آید.

اندیشه، از ساده‌ترین آگاهیها آغاز می‌شود و با فعالیت خود ـ و بر پایهٔ تجربه‌های پیشین ـ آگاهیهای مناسب دیگری را به یاد می‌آورد، آنها را به هم نزدیک می‌کند و با ارزیابی موردهای مشابه و توجه به حالت خاص، خود را از «بن‌بست» خارج می‌کند. با یکی دو مثال، مطلب را روشنتر می‌کنیم.

مثال ۱: n عدد طبیعی داریم که همهٔ آنها، با رقم a نوشته شده‌اند (a می‌تواند یکی از رقمهای ۱، ۲، ...، ۹ باشد). کوچکترین عدد، k رقم و، هر عدد بعدی، یک رقم بیشتر از عدد قبل از خود دارد. مجموع این n عدد را پیدا کنید.

مجموع مجهول را می‌توان این‌طور نوشت (عددها در عدد ـ شماری به مبنای ۱۰):

$$A=\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{k\text{ مرتبه}}+\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(k+1)\text{ مرتبه}}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{(k+n-1)\text{ مرتبه}}$$

باید مجموع n جمله را پیدا کنیم. تنها برای مجموعهایی قاعدهٔ کلی داریم که، جمله‌های آنها، به تصاعد حسابی یا تصاعد هندسی باشند. ولی در این‌جا، با تصاعد سر و کار نداریم. چه باید کرد؟ ... ساده‌ترین حالت را، وقتی $a = 1$ و $k = 1$ باشد، درنظر بگیریم:

$$1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ مرتبه}}$$

باز هم نشد. اگر این مجموع به‌صورت:

$$1+11+101+1001+\ldots+\underbrace{100\ldots01}_{n\text{ رقم}}$$

بود، می‌شد واحدها را جدا کرد، آن وقت بقیّه به‌صورت مجموعی از توانهای متوالی ۱۰، یعنی به‌صورت مجموعی از جمله‌های یک تصاعد هندسی، درمی‌آمد و مسأله حل می‌شد ... عجب! فهمیدم! در این‌جا، ساده‌ترین حالت، نمی‌تواند به ما کمک کند. ولی مجموع زیر، ساده‌تر ما را به هدف می‌رساند:

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ رقم}}$$

زیرا:

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ رقم}}=10^n-1$$

به این ترتیب، برای مجموع مورد نظر داریم:

$$A=\frac{a}{9}\Big(\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ رقم}}+\underbrace{99\ldots9}_{(k+1)\text{ رقم}}+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{(k+n-1)\text{ رقم}}\Big)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(10^k-1+10^{k+1}-1+\ldots+10^{k+n-1}-1\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(10^k+10^{k+1}+\ldots+10^{k+n-1}-n\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\left(\frac{10^{k+n}-10^k}{9}-n\right)$$

$$=\frac{a}{81}\left(10^{k+n}-10^k-9n\right)$$

به این ترتیب، برای حل مسأله، ابتدا مجموع مجهول را به‌صورت مجموع A نوشتیم، سپس به‌حالت خاص پرداختیم و در حالت خاص $a = 9$ و $k = 1$، کلید حل مسأله را به‌دست آوردیم؛ بعد این راه حل را تعمیم دادیم و، با استفاده از قانون مجموع در تصاعد هندسی، خود را به جواب مسأله در حالت کلی رساندیم.

اندیشهٔ ما، از حالت کلی مجموع A، متوجه تصاعد شد؛ سپس خود را به تصاعد هندسی با جمله‌های 10، 10^2، 10^3، ...، 10^k رساند و از آن جا، با این تجزیه و تحلیل و استفاده از مسأله‌های کمکی، راه را برای حل مسأله (که تعمیمی از مسأله‌های کمکی بود) باز کرد.

مثال ۲: روی ضلعهای مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقینی، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر a، مربعهای در بیرون مثلث ساخته‌ایم و مرکزهای این مربعها را، با پاره خطهای راست به هم وصل کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مثلثی که به این ترتیب به‌دست می‌آید.

برای به حرکت درآوردن اندیشه، ابتدا عنصرهای صورت مسأله را، مشخص و تعریف هر یک از آنها را مرور می‌کنیم: «مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین»، «ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه»، «مربع»، «مرکز مربع». بعد شکل را رسم و داده‌های مسأله را یادداشت می‌کنیم.

پاره خطهای راست AB و AC، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه؛

$|AB| = |AC|$؛

AA_1B_1B، BB_2C_2C و AA_2C_1C مربع؛

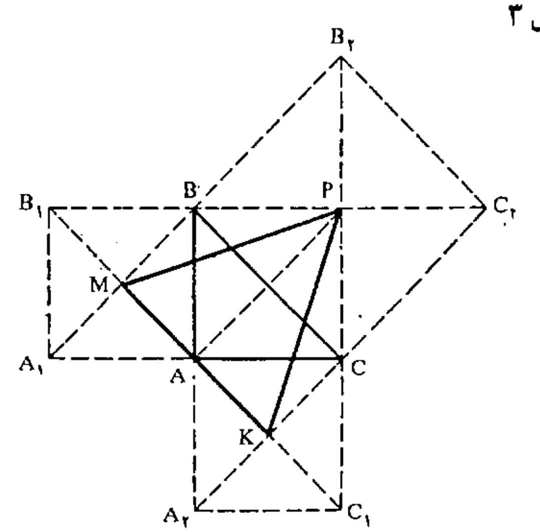
$|AA_1| = |A_1B_1| = |B_1B| = |AB|$؛

$|BB_2| = |B_2C_2| = |C_2C| = |BC|$؛

$|AC| = |CC_1| = |C_1A_2| = |A_2A|$؛

نقطه‌های M، P و K، مرکزهای مربعها.

شکل ۳



چون باید مساحت مثلث MPK را پیدا کنیم، به‌طور طبیعی اندیشهٔ ما، متوجه تعیین قاعدهٔ مثلث و ارتفاع وارد بر این قاعده می‌شود. برای این که حرکت اندیشه را در جست و جوی بستگیهایی که بین داده‌ها (ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث ABC) و مجهولها (قاعده و ارتفاع مثلث MPK) وجود دارد، ساده‌تر کنیم، باید آنها را در دستگاهی از بستگیها وارد کنیم که معرف ویژگی مورد نظر ما باشند. در این مسأله، تقارن تمامی شکل و بخشی از آن؛ یعنی مثلث MPK، نسبت به خط راست AP ثابت می‌شود.

حرکت بعدی اندیشه، برای تعیین طول پاره‌خطهای مجهول، دقت در ویژگیهایی است که شکلهای متقارن دارند (برابر بودن پاره‌خطهای راست متناظر، عمود بودن محور تقارن بر پاره خط راستی که دو نقطهٔ متناظر را به هم وصل می‌کند و نصف شدن این پاره‌خط راست به‌وسیلهٔ محور تقارن). در نتیجه:

$[MK] \perp [AP]$ و $|MK| = |BC| = |AP|$

سرانجام، با بررسی مساحت مربع و مثلث، به این نتیجه می‌رسیم که مربع ABPC و مثلث MPK هم ارزند (یعنی مساحتهای برابر دارند) که، از آن‌جا، مساحت مجهول، برابر a^2 واحد مربع می‌شود.

اشاره‌ای به یک نکتهٔ مهم: مسأله را کامل حل کنید.

وقتی معادلهٔ ساده‌ای مثل $mx = a$ روبه روی شماست، برای حل آن و پیدا کردن مقدار مجهول x چه می‌کنید؟ خیلی ساده است: می‌گویید دو طرف معادله را بر m تقسیم می‌کنیم، مقدار x به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{a}{m}$$

آیا حل مسأله تمام شده است؟ نه! می‌دانید، دو طرف برابری را، تنها وقتی می‌توان بر m تقسیم کرد که، m، برابر صفر نباشد. پس جوابی که به‌دست آورده‌اید، همیشه قابل قبول نیست و باید آن را این‌طور نوشت:

اگر $m \neq 0$، آن‌گاه $x = \frac{a}{m}$

هنوز کار حل مسأله تمام نشده است؛ زیرا باید به این پرسش هم پاسخ داد که: اگر m برابر صفر باشد، تکلیف x چه می‌شود؟ پاسخ را می‌دانید. بنابراین، تنها وقتی می‌توان حل معادله را کامل دانست که به پرسش اخیر هم، پاسخ داده باشیم:

اگر $m \neq 0$، آن‌گاه $x = \frac{a}{m}$

اگر $m = 0$ و $a = 0$، آن‌گاه x می‌تواند هر عدد دلخواه باشد؛

اگر $m = 0$ و $a \neq 0$، آن‌گاه معادله ریشه‌ای ندارد.

در برخی متنها و به‌ویژه در برخی کتابهای سطحی «حل‌المسائل»، این روند کار را به دو بخش تقسیم کرده‌اند: ۱) حل مسأله؛ ۲) بحث. اغلب، درصورت مسأله هم، همین دو بخش را یادآوری می‌کنند:

«معادلهٔ $mx = a$ را حل و بحث کنید».

که برخوردی سطحی و حتی بی‌معنی با یک مسألهٔ ریاضی است. حل یک مسألهٔ ریاضی، و مثلاً حل یک معادله، به‌معنای آن است که جواب یا جوابهای ممکن را، در همهٔ حالتهایی که پیش می‌آید، پیدا

کنیم. «بحث» دربارهٔ جواب، جزو حل مسأله است، نه بخشی اضافی و بیرون از حل. اگر از شما بپرسند: x بزرگتر است یا x^2؟ چه پاسخی می‌دهید؟ چاره‌ای جز این ندارید که در پاسخ، از همهٔ حالتهای ممکن نام ببرید:

اگر $x = 0$ یا $x = 1$، آن‌گاه $x^2 = x$؛

اگر $x < 0$ یا $x > 1$، آن‌گاه $x^2 > x$؛

اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه $x^2 < x$.

و روشن است، حذف هر کدام از این حالتها و توجه نکردن به آن، به‌معنای آن است که پاسخ را کامل نداده‌ایم.

حل یک مسأله در کجا تمام می‌شود؟ وقتی که به این پرسشها، پاسخ داده باشیم، آیا جوابی که به‌دست آورده‌ایم، قابل قبول است؟ از بین جوابهایی که به دست آورده‌ایم، کدام را باید پذیرفت و کدام را کنار گذاشت؟ آیا جوابی را از دست نداده‌ایم؟ موقعیت جواب، در حالتهای خاص چه می‌شود؟ ...

قبل از هر کار، باید عملها و استدلالها را بازبینی کرد. بازبینی درستی محاسبه‌ها و دقت در منطقی بودن استدلالها، از بسیاری اشتباهها جلوگیری می‌کند. ولی با گذشتن از این مرحله، باز هم ممکن است، جوابی که به دست آورده‌ایم، قابل قبول نباشد، یا نیاز به تفسیر داشته باشد و یا بجز آن، جواب یا جوابهای دیگری هم وجود داشته باشد و ...

مثل همیشه، موضوع را با مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱: معادلهٔ $x^{2x} = (2x)^x$ را حل کنید.

اگر از دو طرف معادله، در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$2x \log x = x (\log 2 + \log x) \Rightarrow x \log x - x \log 2 = 0$$

از آن‌جا $x(\log x - \log 2) = 0$، یعنی $x = 0$ یا $x = 2$. ریشهٔ $x = 0$ قابل قبول نیست (دست کم برای ما).

$x = 0$ به‌شرطی قابل قبول است که بتوانیم ثابت کنیم:

$$\lim_{x \to 0} (x^{2x}) = \lim_{x \to 0} (2x)^x$$

و ما از عهدهٔ این محاسبه برنمی‌آییم. $x = 2$ ریشه‌ای از معادله است و در آن صدق می‌کند، زیرا $4^2 = 2^4$.

آیا مسأله حل شد؟ دوباره جزء‌به جزء حل را مورد بررسی قرار می‌دهیم ... از دو طرف لگاریتم گرفتیم ... آیا اگر دو عدد برابر باشند، همیشه لگاریتمهای آنها یکی است؟ ... نه! ممکن است دو عدد برابر، منفی باشند، آن‌وقت لگاریتم عدد منفی معنا ندارد ... پس عمل لگاریتم گرفتن به شرطی درست است که x، عددی مثبت باشد. ولی درصورت مسأله، شرطی برای مثبت بودن x وجود ندارد. در واقع $\log|x|$ معنا دارد، ولی $\log x$ ممکن است معنا نداشته باشد.

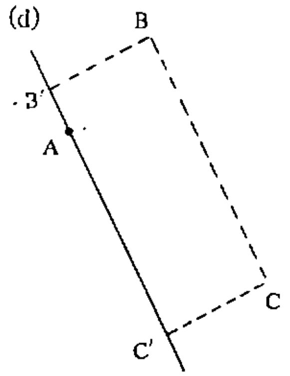
اگر $\log|x| = \log 2$، آن وقت به‌دست می‌آید $x = \pm 2$.

آیا $x = -2$ در معادله صدق می‌کند ... بله!

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \; ; \; (-4)^{-2} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

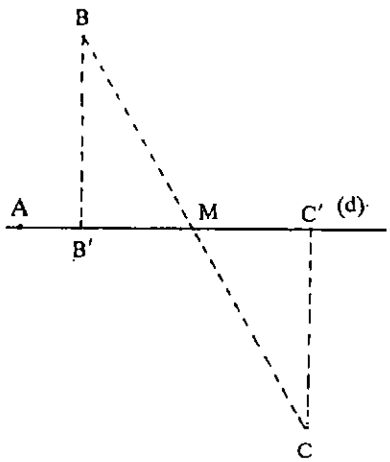
مثال ۲: سه نقطهٔ A، B و C روی یک صفحه واقعند. از نقطهٔ A خط راستی بگذرانید که، دو نقطهٔ B و C، از آن به یک فاصله باشند.

شکل ۴



مسألهٔ ساده‌ای است: اگر خط راست مجهول را که از A می‌گذرد، d بنامیم، چون طول عمودهای وارد از B و C بر d با هم برابرند، بنابراین d با خط راست BC موازی است. پس از نقطهٔ A، خط راستی موازی خط راست BC رسم می‌کنیم، خط راست مجهول به‌دست می‌آید ... در درستی این جواب شکی نیست. ولی مگر

شکل ۵



نمی‌شود دو نقطهٔ B و C در دو طرف خط راست d و، در ضمن، از آن به یک فاصله باشند؟...

... بله، درست است، اگر خط راست d را از نقطهٔ A و نقطهٔ M (وسط پاره‌خط راست BC) بگذرانیم، باز هم جوابی از مسأله، به‌دست می‌آید. پس مسأله دو جواب دارد: ۱) خط راستی که از A موازی BC رسم شود؛ ۲) خط راستی که از A و وسط پاره‌خط راست BC عبور کند.

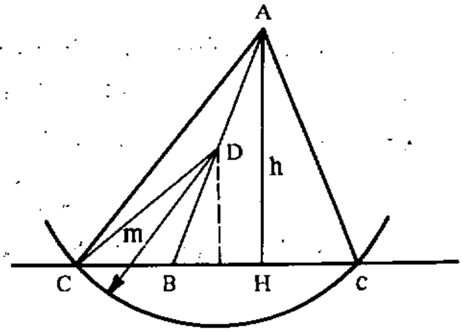
در ضمن، روشن می‌شود که، اگر A بر M منطبق باشد، مسأله بی‌نهایت جواب دارد، یعنی هر خط راستی که از M (یعنی A) بگذرد، جواب مسأله است. ولی اگر A روی خط راست BC و در جایی غیر از M باشد، آن‌وقت مسأله تنها یک جواب دارد: خود خط راست BC.. مسأله به‌طور کامل حل شد.

مثال ۳: مطلوب است رسم مثلث ABC، به‌شرطی که از آن، طول ضلع AB، طول میانهٔ CD و طول ارتفاع AH معلوم باشد:

$$|AH| = h, |CD| = m, |AB| = C.$$

ABC را مثلث مجهول می‌گیریم. خود مثلث ABC را، بلافاصله، نمی‌توان ساخت. ولی مثلث قائم الزاویهٔ AHB قابل رسم است، زیرا از آن، طولهای وتر AB و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه AH معلوم است. نقطهٔ D، وسط ضلع AB است و اگر به مرکز D و شعاع برابر

شکل ۶



m دایره‌ای رسم کنیم تا خط راست BH را قطع کند، نقطهٔ C، رأس سوم مثلث ABC به‌دست می‌آید (شکل ۶). روی شکل دیده می‌شود که مسأله، در حالت کلی، دو جواب دارد.

مسأله را حل کردیم و جواب را به‌دست آوردیم، ولی هنوز حل مسأله کامل نیست. حل را از آغاز مورد بازبینی قرار می‌دهیم. اوّل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را رسم کردیم، ولی این مثلث، وقتی وجود دارد که داشته باشیم $c>h$. حالت $c = h$ هم قابل قبول است: در این حالت، نقطهٔ B بر نقطهٔ H منطبق و مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود. دایرهٔ به مرکز D و شعاع برابر m، وقتی خط راست BH (و در حالت انطباق B بر H، خط راست عمود بر AH در نقطهٔ H) را قطع می‌کند که داشته باشیم: $m\geq\frac{1}{2}h$، یا $h<2m$. به این ترتیب، به حالتهای زیر برخورد می‌کنیم:

۱) در حالت $h>c$، مسأله جواب ندارد.

۲) در حالت $h<c$: الف) اگر $2m<h$، آن‌وقت مسأله جواب ندارد؛ ب) اگر $2m = h$، مسأله یک جواب دارد؛ ج) اگر $2m>h$، آن‌وقت دایرهٔ به مرکز D و شعاع برابر m، با خط راست BH، دو نقطهٔ مشترک دارد؛ با وجود این، ممکن است این نقطهٔ مشترک، مثلثی را مشخص نکند؛ این وضع، وقتی پیش می‌آید که نقطهٔ مشترک، منطبق بر B باشد. بنابراین، در این حالت، بازای $m>\frac{1}{2}c$ یا $m<\frac{1}{2}c$، مسأله دو جواب و به ازای $m = \frac{1}{2}c$، یک جواب دارد.

۳) $h = c$. در این‌حالت، نقطه‌های B و H بر هم منطبق می‌شوند. اگر $2m\leq h$، آن‌وقت مسأله جواب ندارد؛ اگر $2m>h$ مسأله یک جواب دارد (زیرا دو مثلثی که به‌دست می‌آید، با هم برابرند).

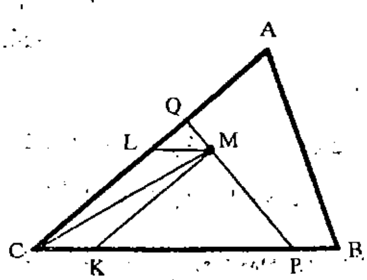
□

البته، مسأله‌هایی هستند که، گرچه می‌توان راه حل آنها را با روشهای مقدماتی دبیرستانی پیدا کرد، بحث دربارهٔ حالتهای مختلف و تعداد جوابها، از مرز ریاضیات دبیرستانی خارج می‌شود. در چنین صورتی، که برای شما کمتر پیش می‌آید (زیرا بی‌شک مسأله‌ای را به شما می‌دهند که از عهدهٔ حل کامل آن برآیید)، باید توضیح بدهید که حل مسأله ناتمام مانده است. ذکر جمله «ناتمام» در پایان حل مسأله، به‌معنای درک شما از مفهوم «حل مسأله» است.

برای آشنایی شما، نمونه‌ای از این‌گونه مسأله‌ها را می‌آوریم.

از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC، خط راستی رسم کنید که مثلث را به دو بخش هم ارز (با مساحتهای برابر) تقسیم کند.

شکل ۷



در این مسأله حتی پیدا کردن نمونه‌ای از جواب هم، کار چندان ساده‌ای نیست و باید از جبر و مثلثات کمک بگیریم.

خط راست مجهول را PQ فرض می‌کنیم (شکل ۷) که ضلعهای $|CA| = b$ و $|CB| = a$ را، به‌ترتیب، در نقطه‌های Q و P قطع کرده است. $|CP| = x$ و $|CQ| = y$ می‌گیریم. بنا بر فرض، باید داشته باشیم:

$$xy = \frac{1}{2}ab \qquad (1)$$

برای به‌دست آوردن مقدارهای x و y، به معادلهٔ دیگری هم نیاز داریم. خطهای راست MK و ML را، به‌ترتیب، موازی ضلعهای CA و CB رسم و M را به C وصل می‌کنیم. $|CK| = k$ و $|CL| = l$ می‌گیریم (چون نقطهٔ M مفروض است، بنابراین طولهای k و l هم، مقدارهایی معلومند). روشن است که

$$S_{PCQ} = S_{CMQ} + S_{CMP}$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۷، داریم:

$$S_{CMQ} = \frac{1}{2}|CQ|.|CK|\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ky\sin\hat{C};$$

$$S_{CMP} = \frac{1}{2}lx\sin\hat{C} \quad ; \quad S_{PCQ} = \frac{1}{2}xy\sin\hat{C}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$ky + lx = xy \qquad (2)$$

اکنون باید، به کمک معادله‌های (۱) و (۲)، راهی برای رسم پاره‌خطهای راست x و y پیدا کرد. این رسم را می‌توان، مثلاً با روش زیر انجام داد. ابتدا، این پاره‌خط راست را می‌سازیم:

$$C = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$$

سپس، مجهولهای کمکی u و v را، با توجه به تناسبهای

$$\frac{u}{k} = \frac{c}{x}\,;\,\frac{v}{l} = \frac{c}{y} \qquad (3)$$

در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، دستگاه معادله‌های (۱) و (۲)، منجر به این دستگاه می‌شود:

$$uv = kl \;\text{و}\; u + v = c \qquad (4)$$

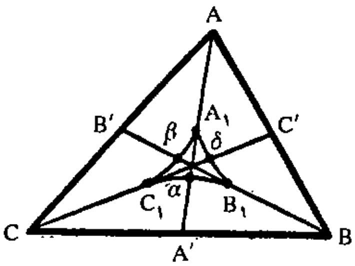
با توجه به معادله‌های (۴)، می‌توان پاره‌خطهای راست u و v و سپس، با توجه به معادله‌های (۳)، پاره خطهای راست x و y را ساخت.

اگر $a \leq x$ و $b \leq y$ باشد، آن‌وقت پاره خطهای راست $|CP| = x$ و $|CQ| = y$ را جدا می‌کنیم، خط راست مجهول به‌دست می‌آید.

جواب را با این فرض به دست آوردیم که، خط راست مجهول، ضلعهای CA و CB را قطع کرده باشد. به همین ترتیب، می‌توان دو حالت دیگر را درنظر گرفت و دو جواب دیگر به‌دست آورد. درنتیجه، در حالت کلی، سه جواب پیدا می‌شود.

همان‌طور که می‌بینیم، مسأله، با روشهای ریاضیات دبیرستانی به جواب رسید. ولی بحث دربارهٔ تعداد جوابها، چه از نظر کمّی و چه از نظر کیفی، نسبت به حل کلی مسأله، بغرنجتر است و از محدودهٔ ریاضیات دبیرستانی بیرون می‌رود. نتیجهٔ این بحث را، در این‌جا می‌آوریم.

شکل ۸



هذلولی $C_1\alpha B_1$ را (شکل ۸) مماس بر میانه‌های BB' و CC'، به‌ترتیب در نقطه‌های وسط آنها، یعنی B_1 و C_1 رسم می‌کنیم (این هذلولی، روی میانهٔ AA'، پارهٔ خط راست به طول $|A\alpha| = |AA'|\frac{\sqrt{2}}{2}$ را جدا می‌کند، مجانبهای این هذلولی، عبارتند از: خطهای راست AC و AB.به همین ترتیب، هذلولیهای A_1BC_1 و $A_1\delta B_1$ را رسم می‌کنیم. مسأله، وقتی سه جواب دارد که نقطهٔ M، در درون مثلث منحنی الضلع $A_1B_1C_1$ واقع باشد. اگر M روی محیط مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، به‌شرطی بر یکی از رأسهای مثلث منطبق نشود، مسأله دو جواب دارد. مسأله، در همهٔ حالتهای دیگر، دارای یک جواب است.

تا بعد

یادداشت. اغلب، ضمن تعریف تابع نمایی به‌صورت

$$[f(x)]^{\varphi(x)} \qquad (4)$$

شرط $f(x) > 0$ را می‌پذیرند، یعنی دامنهٔ مقدارهای قابل قبول x، با شرط $f(x) > 0$ به دست می‌آید. اگر این تعریف را برای تابع نمایی قبول داشته باشیم، آن‌وقت $x = -2$ نمی‌تواند به‌عنوان ریشه‌ای از معادلهٔ $(2x)^x = x^{2x}$ پذیرفته شود. با وجود این ضمن تعیین ریشه‌های این معادله، باید به این مطلب اشاره شود: اگر مقدارهای منفی x را جزو دامنهٔ معادله به‌حساب آوریم، معادله دو ریشه دارد: $x = \pm 2$؛ ولی اگر تنها مقدارهای مثبت به‌عنوان دامنهٔ مقدارهای قابل قبول x پذیرفته شود، آن‌وقت معادله تنها یک جواب دارد: $x = 2$.

معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

● احمد قندهاری

۱ - بررسی حالتهای ناقص معادله:

الف) اگر در معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $c = ۰$، آنگاه یک ریشه معادله صفر و ریشه دیگر $(-\frac{b}{a})$ است.

$$c = ۰ \Rightarrow ax^۲ + bx = ۰ \Rightarrow x(ax+b) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر در معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$، b و c هر دو صفر باشد، آنگاه هر دو ریشه معادله صفر است.

$$b = ۰, c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x.x = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۰ \end{cases}$$

ج) اگر در معادلهٔ درجه دوم $b = ۰$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، آنگاه معادله دو ریشه قرینه دارد.

$$b = ۰ \Rightarrow ax^۲+c = ۰ \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a}$$

چون a و c مختلف‌العلامه‌اند، پس کسر $(-\frac{c}{a})$ عددی است مثبت.

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

مسأله: معادلهٔ $mx^۲+(m-۱)(m+۱)x+(m-۳)(m+۱)=۰$ مفروض است. m را چنان بیابید تا اوّلاً: یک ریشه معادله صفر باشد. ثانیاً: هر دو ریشه معادله صفر باشد. **ثالثاً:** معادله دو ریشه قرینه داشته باشد ضمناً در هر مورد ریشه‌ها را بیابید.

حل: اولاً: باید $c = ۰$ ولی باید توجه داشت که $b \neq ۰$ بنابراین:

$$\boxed{m = ۳}$$

اگر $m = ۳ \Rightarrow ۳x^۲ + (۳ - ۱)(۳ + ۱)x = ۰$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۸x = ۰ \Rightarrow x(۳x + ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

ثانیا: برای آن که هر دو ریشه معادله صفر باشد، باید $b = ۰$ و $c = ۰$ پس: $\boxed{m = -۱}$

اگر $m = -۱ \Rightarrow -x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x.x = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۰ \end{cases}$$

ثالثا: برای آن که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد، باید $b = ۰$ و a و c مختلف‌العلامه باشد، پس: $\boxed{m = ۱}$

اگر $m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = +۱ \\ c = -۴ \end{cases}$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow \boxed{x = \pm ۲}$$

۲ ـ حل معادله درجهٔ دوم کامل: $ax^{2} + bx + c = 0$

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم $(a \neq 0)$.

$$\Rightarrow x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^{2} + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

به طرفین تساوی عبارت $\frac{b^{2}}{4a^{2}}$ را اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{2}}{4a^{2}} = \frac{b^{2}}{4a^{2}} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^{2} = \frac{b^{2} - 4ac}{4a^{2}}$$

از طرفین تساوی ریشهٔ دوم می‌گیریم.

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

عبارت $(b^{2} - 4ac)$ مبیّن معادله یا دلتای معادله گوییم و آن را با نماد (Δ) نشان می‌دهیم.

الف) اگر $\Delta > 0$ یا $b^{2} - 4ac > 0$، آنگاه x' و x'' وجود دارد، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

ب) اگر $\Delta = 0$ یا $b^{2} - 4ac = 0$، آنگاه x' و x'' مساویند، در این‌صورت می‌گوییم معادله دو ریشه حقیقی مساوی دارد.

$$\boxed{x' = x'' = \frac{-b}{2a}}$$

ج) اگر $\Delta < 0$ یا $b^{2} - 4ac < 0$، آنگاه معادله دو ریشهٔ غیر حقیقی دارد که از بحث ما خارج است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$(1) \quad 2x^{2} - 5x + 2 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(2)}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{5+3}{4} = 2 \\ x' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2) \quad x^{2} - (3 - \sqrt{3})x + 2 - \sqrt{3} = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -(3 - \sqrt{3}) \\ c = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})^{2} - 4(1)(2 - \sqrt{3})}}{2}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{9 + 3 - 6\sqrt{3} - 8 + 4\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^{2}}}{2}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1}{2} \\ x'' = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{x' = 1}$$

$$\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'' = 2 - \sqrt{3}}$$

۳) $x^2 - 2(m-1)x + (1-2m) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2(m-1) \\ c = 1-2m \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2(m-1) \pm \sqrt{4(m-1)^2 - 4(1-2m)}}{2}$$

$$x = \frac{2(m-1) \pm \sqrt{4(m^2 - 2m + 1) - 4 + 8m}}{2}$$

$$= \frac{2(m-1) \pm \sqrt{4m^2 - 8m + 4 - 4 + 8m}}{2}$$

$$x = \frac{2(m-1) \pm \sqrt{4m^2}}{2} = \frac{2(m-1) \pm 2m}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2(m-1) + 2m}{2} = \dfrac{2(2m-1)}{2} \\ x'' = \dfrac{2(m-1) - 2m}{2} = \dfrac{-2}{2} \end{cases}$$

$$= 2m - 1 \Rightarrow \boxed{x' = 2m - 1}$$

$$= -1 \Rightarrow \boxed{x'' = -1}$$

۴) $m^2x^2 - 2m^2x + (m^2 - n^2) = 0 \quad \begin{cases} a = m^2 \\ b = -2m^2 \\ c = m^2 - n^2 \end{cases}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2m^2 \pm \sqrt{4m^4 - 4m^2(m^2 - n^2)}}{2m^2}$$

$$= \frac{2m^2 \pm \sqrt{4m^4 - 4m^4 + 4m^2n^2}}{2m^2}$$

$$x = \frac{2m^2 \pm 2mn}{2m^2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2m^2 + 2mn}{2m^2} \\ x'' = \dfrac{2m^2 - 2mn}{2m^2} \end{cases}$$

$$= \frac{2m(m+n)}{2m^2} = \frac{m+n}{m} \Rightarrow \boxed{x' = \frac{m+n}{m}}$$

$$= \frac{2m(m-n)}{2m^2} = \frac{m-n}{m} \Rightarrow \boxed{x'' = \frac{m-n}{m}}$$

تذکر: اگر در معادله درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$، b عدد زوج باشد، یا عبارتی شامل مضرب (۲) باشد، نصف آن را (b') می‌نامیم. در این صورت $b = 2b'$.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}} \quad \text{فرمول } b'$$

نتیجه: اگر b زوج باشد و نصف آن را b' بنامیم، بهتر است معادله را از فرمول (b') حل کنیم.

عبارت $b'^2 - ac$ را مبین معادله گوییم و آن را با نماد (Δ') نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $x^2 - 2\sqrt{3}x - (2\sqrt{3} + 1) = 0$ را حل کنید.

$a = 1 \quad b' = -\sqrt{3} \quad c = -(2\sqrt{3} + 1)$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + (2\sqrt{3} + 1)}}{1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}}}{1}$$

$$x=\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\sqrt{3}+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}+1\\ x''=\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=-1\end{cases}$$

مسأله: به‌ازای چه‌مقادیر m معادله $mx^2+2(m-1)x+(m+1)=0$ دو ریشه حقیقی متمایز یا دو ریشه حقیقی مساوی دارد؟

حل: باید مبیّن معادله مثبت یا صفر باشد، یعنی:

$b^2-4ac\geq 0$ یا $b'-ac\geq 0$

$a=m$ ، $b'=m-1$ ، $c=m+1$

$$\Delta'\geq 0\Rightarrow b'^2-ac\geq 0\Rightarrow (m-1)^2-m(m+1)\geq 0$$

$$\Rightarrow m^2-2m+1-m^2-m\geq 0\Rightarrow -3m+1\geq 0$$

$$\Rightarrow -3m\geq -1\Rightarrow \boxed{m\leq\frac{1}{3}\ ,m\neq 0}$$

زیرا، اگر $m=0$ ، آنگاه معادله به معادله درجه اوّل تبدیل می‌شود.

۳ـ روابط بین‌ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$

c و b و a را ضرایب معادله درجه دوم گوییم و x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله‌اند. روابط بین x'' و x' و c و b و a را روابط بین ریشه‌ها و ضرایب گوییم.

داریم: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ یا $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad ,\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

الف) $x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

ب) $x'.x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}}\quad ,\quad \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}}$$

توجه: مجموع دو ریشه، یعنی؛ $(x'+x'')$ را با S و حاصل ضرب دو ریشه، یعنی؛ $x'.x''$ را با P هم نشان می‌دهیم.

$$\Rightarrow \boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}=S}\quad ,\quad \boxed{x'.x''=\frac{c}{a}=P}$$

قدر مطلق:
$$|x|=\begin{cases}+x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

مثال:
$$\begin{cases}|+5|=5\\ |-5|=-(-5)=5\end{cases}\Rightarrow |-5|=|5|$$

$$|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$

$$|1-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$

قدر مطلق هر عدد برابر است با مقدار مثبت آن عدد.

مثال:

$a=2,b=5\Rightarrow |a-b|=|2-5|=|-3|=3$

$x'=4,x''=6\Rightarrow |x'-x''|=|4-6|$

$=|-2|=2$

$x'=-2,x''=-5\Rightarrow |x'-x''|=|-2+5|$

$=|3|=3$

$x'=-1,x''=5\Rightarrow |x'-x''|=|-1-5|$

$=|-6|=6$

در سال سوم قدر مطلق را به‌طور کامل خواهید داشت.

۱) $x'+x''=-\frac{b}{a}=S$

۲) $x'.x''=\frac{c}{a}=P$

۳) $|x'-x''| = \left| \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \right|$

$= \left| \frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $x'^{۲}+x''^{۲} = (x'+x'')^{۲} - ۲x'x''$

$= (S)^{۲} - ۲P = S^{۲}-۲P$

۵) $x'^{-۲}+x''^{-۲} = \frac{۱}{x'^{۲}} + \frac{۱}{x''^{۲}} = \frac{x''^{۲}+x'^{۲}}{x'^{۲}.x''^{۲}}$

$= \frac{x'^{۲}+x''^{۲}}{(x'x'')^{۲}} = \frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}$

۶) $|x'^{۲}-x''^{۲}| = |(x'-x'')(x'+x'')|$

$= \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \times S \right|$

۷) $x'^{۳}+x''^{۳} = (x'+x'')(x'^{۲}+x''^{۲}-x'x'')$

$= S(S^{۲}-۲P-P) = S^{۳}-۳PS$

۸) $x'^{-۳}+x''^{-۳} = \frac{۱}{x'^{۳}} + \frac{۱}{x''^{۳}} = \frac{x''^{۳}+x'^{۳}}{x'^{۳}.x''^{۳}} = \frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}$

۹) $|x'^{۳}-x''^{۳}| = |(x'-x'')(x'^{۲}+x''^{۲}+x'x'')|$

$= \left| \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S^{۲}-۲P+P) \right|$

$= \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S^{۲}-P) \right|$

۱۰) $x'^{۴}+x''^{۴} = (x'^{۲}+x''^{۲})^{۲} - ۲x'^{۲}x''^{۲}$

$= (S^{۲}-۲P)^{۲} - ۲P^{۲}$

۱۱) $x'^{-۴}+x''^{-۴} = \frac{۱}{x'^{۴}} + \frac{۱}{x''^{۴}} = \frac{x''^{۴}+x'^{۴}}{x'^{۴}x''^{۴}}$

$= \frac{(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}}{P^{۴}}$

۱۲) $|x'^{۴}-x''^{۴}| = |(x'^{۲}-x''^{۲})(x'^{۲}+x''^{۲})|$

$= \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S(S^{۲}-۲P) \right|$

۱۳) $\begin{cases} x'>۰ \\ x''>۰ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x'}+\sqrt{x''}$

$= \sqrt{S+۲\sqrt{P}} = \sqrt{x'+x''+۲\sqrt{x'x''}}$

۱۴) $\begin{cases} x'>۰ \\ x''>۰ \end{cases} \Rightarrow |\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$

$= \sqrt{x'+x''-۲\sqrt{x'x''}} = \sqrt{S-۲\sqrt{P}}$

۱۵) $\begin{cases} x'>۰ \\ x''>۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{x'+x''}{\sqrt{x'x''}} = \frac{S}{\sqrt{P}}$

مسأله: در معادله درجه دوم $x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشند، موارد پانزده رابطه‌های فوق را محاسبه کنید.

$a = ۱ \quad b = -۳ \quad c = ۱$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۹ - ۴ = ۵$

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-۳}{۱} = ۳$

$P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱} = ۱$

۱) $x'+x'' = S = ۳$ ۲) $x'.x'' = P = ۱$

۳) $|x'-x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۵}}{|۱|} = \sqrt{۵}$

$$۴)\ x'^{۲}+x''^{۲}=S^{۲}-۲P=(۳)^{۲}-۲=۹-۲=۷$$

$$۵)\ x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{۷}{۱}=۷$$

$$۶)\ \left|x'^{۲}-x''^{۲}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S\right|=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳\right|=۳\sqrt{۵}$$

$$۷)\ x'^{۳}+x''^{۳}=S^{۳}-۳PS=(۳)^{۳}-۳(۱)(۳)=۲۷-۹=۱۸$$

$$۸)\ x'^{-۳}+x''^{-۳}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}=\frac{۱۸}{۱}=۱۸$$

$$۹)\ \left|x'^{۳}-x''^{۳}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.(S^{۲}-P)\right|=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}(۹-۱)\right|=۸\sqrt{۵}$$

$$۱۰)\ x'^{۴}+x''^{۴}=(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}=(۹-۲)^{۲}-۲=۴۹-۲=۴۷$$

$$۱۱)\ x'^{-۴}+x''^{-۴}=\frac{(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}}{P^{۴}}=\frac{(۹-۲)^{۲}-۲}{(۱)^{۴}}=\frac{۴۹-۲}{۱}=۴۷$$

$$۱۲)\ \left|x'^{۴}-x''^{۴}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.S(S^{۲}-۲P)\right|=\left|\frac{\sqrt{۵}}{|۱|}\times ۳(۹-۲)\right|=۲۱\sqrt{۵}$$

$$۱۳)\ \sqrt{x'}+\sqrt{x''}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$$

$$۱۴)\ \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}=\sqrt{۳-۲\sqrt{۱}}=۱$$

$$۱۵)\ \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}}+\frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\frac{۳}{\sqrt{۱}}=۳$$

مسأله: در معادلهٔ $x^{۲}-۵x+(m+۱)=۰$، m را چنان بیابید که داشته باشیم: $x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{۱۷}{۱۶}$

حل:

$$\begin{cases}S=۵\\ P=m+۱\end{cases}$$

$$x'^{-۲}+x''^{-۲}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{(۵)^{۲}-۲(m+۱)}{(m+۱)^{۲}}=\frac{۱۷}{۱۶}$$

$$\frac{۲۵-۲m-۲}{m^{۲}+۲m+۱}=\frac{۱۷}{۱۶}\Rightarrow ۱۷m^{۲}+۳۴m+۱۷$$

$$=۳۶۸-۳۲m\Rightarrow ۱۷m^{۲}+۶۶m-۳۵۱=۰$$

$$\Delta'=b'^{۲}-ac=(۳۳)^{۲}+۱۷(۳۵۱)$$

$$=۱۰۸۹+۵۹۶۷=(۷۰۵۶)=(۸۴)^{۲}$$

$$m=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{-۳۳\pm۸۴}{۱۷}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m'=۳\\ m''=\frac{-۱۱۷}{۱۷}\end{cases}$$

۴ ـ چند نکته دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $ax^{۲}+bx+c=۰$

الف) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، مجموع ضرایب صفر باشد، یعنی؛ $a+b+c=۰$ آنگاه یک ریشه عدد ۱ و ریشه دیگر برابر $(\frac{c}{a})$ است.

اثبات:

$$a+b+c=۰\Rightarrow c=-(a+b)$$

$$\Rightarrow ax^{۲}+bx-(a+b)=۰$$

$$\Delta=b^{۲}+۴a(a+b)=b^{۲}+۴a^{۲}+۴ab=(۲a+b)^{۲}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm(2a+b)}{2a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{-b+2a+b}{2a}=1\\[2mm] x''=\dfrac{-b-2a-b}{2a}=\dfrac{-2(a+b)}{2a}=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $2x^2-(2-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله مجموع ضرایب صفر است، زیرا

$$2-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x'=1},\ x''=\frac{c}{a}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow \boxed{x''=\frac{-\sqrt{3}}{2}}$$

ب) اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $a+c=b$، آنگاه یک ریشه -1 و ریشهٔ دیگر $(-\frac{c}{a})$ است.

اثبات: $c=b-a\Rightarrow ax^2+bx+b-a=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(b-a)}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab+4a^2}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{(2a-b)^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm(2a-b)}{2a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{-b-2a+b}{2a}=\dfrac{-2a}{2a}=-1\\[2mm] x''=\dfrac{-b+2a-b}{2a}=\dfrac{-2(b-a)}{2a}\end{cases}$$

$$=\frac{-2(c)}{2a}=-\frac{c}{a}$$

مثال: معادلهٔ $(\sqrt{2}-1)x^2+2\sqrt{2}x+(\sqrt{2}+1)=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a+c=b$ زیرا

$$\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=-1\\[2mm] x''=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\end{cases}$$

ج) اگر در معادله درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$، یک ریشه (k) برابر ریشه دیگر باشد داریم: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

اثبات:

$$\begin{cases}x''=kx'\\[2mm] x'+x''=-\dfrac{b}{a}\end{cases}\Rightarrow kx'+x'=-\frac{b}{a}\Rightarrow(k+1)\ x'=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b}{a(k+1)}\quad,\quad x''=\frac{-bk}{a(k+1)}$$

$$x'.x''=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{-b}{a(k+1)}\times\frac{-bk}{a(k+1)}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{b^2k}{a^2(k+1)^2}=\frac{c}{a}$$

$$ab^2k=a^2c(k+1)^2\Rightarrow b^2k=ac(k+1)^2$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}}$$

مثال: در معادله $x^2-(m+1)x+2(m-2)=0$ اگر $x''=4x'$ باشد، m را بیابید.

حل: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}\Rightarrow\frac{(m+1)^2}{2(m-2)}=\frac{(4+1)^2}{4}$

$$\Rightarrow 2(m+1)^2=25(m-2)$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 21m + 52 = 0 \Rightarrow m = \frac{21 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{13}{2}\,,\,4}$$

د) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، $\frac{c}{a} < 0$، آنگاه (Δ) خود به خود مثبت و معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

اثبات:

$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ c, a مختلف العلامه‌اند $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$x'.x'' = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 < x''$

مسأله: حدود m را چنان بیابید تا معادله

$$(2\sqrt{2} + 1)x^2 - 4mx + (2m - 6) = 0$$

دو ریشه مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m - 6}{2\sqrt{2} + 1} < 0 \Rightarrow 2m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow 2m < 6 \Rightarrow m < 3$$

۵ـ بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$ax^2 + bx + c = 0$

۱) Δ یا $\Delta' > 0 \Rightarrow x' < x''$ معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow & \text{(1) هر دو ریشه متحدالعلامه‌اند} \\ \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow & \text{(2) دو ریشه مختلف العلامه‌اند } x' < 0 < x'' \\ \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow & \text{(3) یک ریشه صفر و ریشه دیگر } \left(-\frac{b}{a}\right) \text{ است.} \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x' < x'' & \text{هر دو ریشه مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < x'' < 0 & \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases} \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x'' = -x' \end{cases}$$

$$3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x' = 0 < x'' \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 = x'' \end{cases}$$

۲) Δ یا $\Delta' = 0 \Rightarrow x' = x'' = -\frac{b}{2a}$

معادله دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow 0 < x' = x'' \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow x' = x'' < 0 \\ -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x' = x'' = 0 \end{cases}$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید.

$$mx^2 - 2(m + 1)x + (m - 1) = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (m + 1)^2 - m(m - 1)$$

$$= m^2 + 2m + 1 - m^2 + m = 3m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m - 1}{m} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \boxed{m = 1, 0}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{2(m + 1)}{m} \quad \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \boxed{m = -1, 0}$$

m	مقادیر کوچکتر از −۱	−۱ تا $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ تا ۰	۰ تا ۱	مقادیر بزرگتر از ۱
Δ	−	−	∘ +	+	+
$\frac{c}{a}$	+	+	+	تعریف‌نشده − ∘	+
$-\frac{b}{a}$	+	∘ −	−	تعریف‌نشده +	+
	معادله ریشه‌های حقیقی ندارد.		$x'<x''<0$	$x'<0<x''$ $\lvert x''\rvert>\lvert x'\rvert$	$0<x'<x''$
			۱	۲	۳

روی خط (۱):

$$\Delta=0 \Rightarrow x'=x''=-\frac{b}{2a}=\frac{2(m+1)}{2m}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

روی خط (۲):

$$m=0 \Rightarrow \text{معادلهٔ}: -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

روی خط (۳):

$$\frac{c}{a}=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ x''=-\frac{b}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow x'=0<x''$$

تمرین: به ازای مقادیر مختلف m، در تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید:

۱) $(m-1)x^2+2mx+(m-2)=0$

۱) $(m-1)x^2-2mx+(m-4)=0$

۱) $(m-1)x^2-2mx+(m-6)=0$

۶ ـ تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x)+ax^2+bx+c$

الف ـ تجزیه:

ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ را صفرکننده‌های $f(x)$ می‌نامیم. و Δ یا مبیّن معادله $ax^2+bx+c=0$ را Δ یا مبیّن $f(x)$ می‌نامیم.

حالت اوّل: فرض می‌کنیم: $\Delta>0$ پس معادله $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه حقیقی متمایز x' و x'' است.

$$\Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')(x-x'')}$$

این تجزیه را حاصل‌ضرب دو عامل درجه اوّل گوییم:

حالت دوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta=0$ پس معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دو ریشهٔ حقیقی مساوی دارد.

$$x'=x''=-\frac{b}{2a}$$

این تجزیه را مربع کامل گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a(x-x')^2=a(x-x'')^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

حالت سوّم: فرض می‌کنیم: $\Delta<0$ پس معادله $ax^2+bx+c=0$، ریشه‌های حقیقی ندارد.

$$\Rightarrow f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

این عبارت را مجموع مربعات دو عبارت گوییم.

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]}$$

ب ـ تعیین علامت

حالت اوّل: داریم: $\Delta>0$ و $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ فرض می‌کنیم:

$x'<x''$

$$a(x-x')(x-x'')=(ax-ax')(x-x'')=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=x' \\ x_2=x'' \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از x'	x'	مقادیر بزرگتر از x'، x''	x''	مقادیر بزرگتر از x''
$ax - ax'$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a		موافق علامت a
$x-x''$	$-$		$-$	۰	$+$
f(x)	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

حالت دوّم: $\Delta = ۰$ و $f(x) = a(x - x')^۲$.

عبارت $(x - x')^۲$ به‌ازای $x=x'$ صفر و دربقیّه‌موارد مثبت است.

پس می‌توان گفت:

عبارتِ $f(x) = a(x - x')^۲$ به‌ازای $x=x'$ صفر و در بقیّهٔ موارد موافق علامت a است.

x	مقادیر کوچکتر x'	x'	مقادیر بزرگتر از x'
f(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

حالت سوّم: $\Delta < ۰$ و

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۴ac - b^۲}}{۲a}\right)^۲\right]$$

عبارت داخل کروشه همواره مثبت است، پس علامت f(x) همواره موافق علامت (a) است.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوّم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ چه‌وقت همواره مثبت است.

جواب: وقتی که: $\Delta' < ۰$ یا Δ و $a > ۰$.

سؤال: یک سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ چه‌وقت همواره منفی است.

جواب: وقتی که $\Delta' < ۰$ یا Δ و $a < ۰$.

مسأله: بــه ازای چــه مــقادیر m، ســه جــمله‌ای $f(x) = (m - ۱)x^۲ - ۲mx + (m - ۲)$ همواره منفی‌است.

حل:

$$\begin{cases}\Delta' < ۰ \\ a < ۰\end{cases} \Rightarrow b'^۲ - ac < ۰ \Rightarrow m^۲ - (m-۱)(m-۲) < ۰$$

$$\Rightarrow ۳m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < \frac{۲}{۳} \quad m - ۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱$$

$$\begin{cases} m < \frac{۲}{۳} \\ m < ۱\end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک جوابها} \Rightarrow \boxed{m < \frac{۲}{۳}}$$

مسأله: بــه ازای چــه مــقادیر m، ســه جــمله‌ای $f(x) = (m - ۲)x^۲ - ۲mx + (m - ۴)$ به صورت مجموع مربعات دو عبارت خواهدشد.

حل: باید $\Delta < ۰$ یا Δ'.

$$\Delta' = b'^۲ - ac < ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - (m - ۲)(m - ۴) < ۰$$

$$\Rightarrow ۶m - ۸ < ۰ \Rightarrow m < \frac{۴}{۳}$$

۷ـ تشکیل معادله:

الف) اگر مجموع دو عدد یعنی S و حاصل‌ضرب دو عدد یعنی P معلوم باشد و بخواهیم آن دو عدد را پیدا کنیم معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش، آن دو عدد باشد:

طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم $ax^۲ + bx + c = ۰$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \quad \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^۲ - Sx + P = ۰}$$

در معادله $x^۲ - Sx + P = ۰$، مقادیر P و S را قرار دهیم سپس معادله حاصل را حل می‌کنیم.

مسأله: مــجموعه دو عــدد حــقیقی (-۱) و حــاصل‌ضرب آنــها $(\sqrt{۳} - ۳)$ است. آن دو عدد را بیابید.

$$S = -۱ \qquad P = \sqrt{۳} - ۳$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x + (\sqrt{۳} - ۳) = ۰$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴\sqrt{۳} + ۱۲}}{۲}$$

$$= \frac{-۱ \pm \sqrt{(۲\sqrt{۳} - ۱)^۲}}{۲} = \frac{-۱ \pm (۲\sqrt{۳} - ۱)}{۲}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-۱+۲\sqrt{۳}-۱}{۲} = \dfrac{۲\sqrt{۳}-۲}{۲} = \boxed{\sqrt{۳}-۱} \\ x'' = \dfrac{-۱-۲\sqrt{۳}+۱}{۲} = \dfrac{-۲\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{-\sqrt{۳}} \end{cases}$$

ب) تشکیل معادله درجه دوم وقتی یک ریشه آن معلوم است.

آن ریشه را مساوی x قرار می‌دهیم، سپس طرفین را به‌توان (۲) می‌رسانیم.

مسأله: معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهید که یک ریشهٔ آن $(۲ - \sqrt{۳})$ باشد.

راه‌اوّل:

طرفین‌رابه‌توان (۲)می‌رسانیم: $x = ۲ - \sqrt{۳} \Rightarrow x - ۲ = -\sqrt{۳}$

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۳ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

راه دوّم: اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دوّمی با ضرایب گویا تشکیل دهیم که یک ریشهٔ آن $(۲ - \sqrt{۳})$ باشد، باید ریشهٔ دیگر $(۲ + \sqrt{۳})$ باشد تا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، اعدادی گویا باشند.

بنابراین: $P = ۱ \ , \ S = ۴$

در نتیجه: $x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

ج) تشکیل معادله درجه دوم جدید از روی معادله مفروض تحت شرایط مسأله

مسأله: معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ مفروض‌است، اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد؛ معادلهٔ درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که ریشه‌های آن از نصف ریشه‌های این معادله (۲) واحد کمتر باشد.

ریشه معادله مفروض $= x$

ریشه معادله جدید $= y$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{۲} - ۲ \Rightarrow x = ۲y - ۴$$

در معادله مفروض به‌جای x، $(۲y - ۴)$ را قرار می‌دهیم.

$$(۲y - ۴)^۲ - ۵(۲y - ۴) - ۲ = ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۲۶y + ۳۴ = ۰$$

مسأله: معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ مفروض است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی این معادله باشد، معادلهٔ درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های این معادله باشد.

در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

ریشه معادله مفروض $= x$

ریشه معادله جدید $= y$

$$\Rightarrow y = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y}$$

طرفین را به‌توان (۳) می‌رسانیم:

$$\sqrt[۳]{y^۲} - ۴\sqrt[۳]{y} - ۱ = ۰ \Rightarrow \underbrace{\sqrt[۳]{y^۲}}_{a} - \underbrace{۴\sqrt[۳]{y}}_{b} = ۱$$

$$a - b = ۱$$

$$a^۳ - b^۳ - ۳ab\overbrace{(a - b)}^{۱} = ۱$$

$$y^۲ - ۶۴y - ۳\sqrt[۳]{y^۲}(+۴\sqrt[۳]{y})(\sqrt[۳]{y^۲} - ۴\sqrt[۳]{y}) = ۱$$

$$y^۲ - ۶۴y - ۱۲y(۱) = ۱ \Rightarrow y^۲ - ۷۶y - ۱ = ۰$$

مسأله: معادله $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ مفروض‌است. اگر x' و x'' ریشه‌های حقیقی معادله باشد، معادله درجه دوم جدیدی بسازید که ریشه‌هایش $۲x' + ۳x'' - ۴$ و $۲x'' + ۳x' - ۴$ باشد.

حل: یکی از روابط را مساوی y قرار می‌دهیم.

$$y = ۲x' + ۳x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲x' + ۲x'' + x'' - ۴$$

$$\Rightarrow y = ۲(x' + x'') + x'' - ۴$$

$$y = ۲\left(-\frac{b}{a}\right) + x'' - ۴ \Rightarrow y = ۲(۳) + x'' - ۴$$

$$= y = x'' + ۲ \Rightarrow x'' = y - ۲$$

در معادله مفروض قرار می‌دهیم.

$$(y - ۲)^۲ - ۳(y - ۲) - ۱ = ۰ \Rightarrow y^۲ - y - ۳ = ۰$$

۸ ـ رابطه S ها در معادله درجه دوم:

معادله درجه دوّم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را درنظر می‌گیریم و قرارداد می‌کنیم که

$$S_۱ = x'^۱ + x''^۱, S_۲ = x'^۲ + x''^۲, S_۳ = x'^۳ + x''^۳, \ldots,$$

$$S_n = x'^n + x''^n$$

طرفین معادله را در $x^{n-۲}$ ضرب می‌کنیم. $n \in N$

$$ax^n + bx^{n-۱} + cx^{n-۲} = ۰$$

در این معادله یکبار به‌جای x، x' و یکبار بـجای x، x'' را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} ax'^n + bx'^{n-1} + cx'^{n-2} = 0 \\ ax''^n + bx''^{n-1} + cx''^{n-2} = 0 \end{cases}$$ جمع می‌کنیم

$$a(x'^n + x''^n) + b(x'^{n-1} + x''^{n-1}) + c(x'^{n-2} + x''^{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0}$$

مسأله: اگر در معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$، $S_3 = 14$ و $S_4 = 34$ باشد S_5 را بیابید.

$$n = 5 \Rightarrow a\,S_5 + b\,S_4 + c\,S_3 = 0$$

$$S_5 - 2(34) - 1(14) = 0 \Rightarrow \boxed{S_5 = 82}$$

مسأله: اگر در معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$، $S_{10} = k$، آنگاه S_{30} را بیابید.

حل: طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$$S_{10} = k \Rightarrow \underbrace{x'^{10}}_{a} + \underbrace{x''^{10}}_{b} = k \qquad a + b = k$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = k^3$$

$$x'^{30} + x''^{30} + 3x'^{10}x''^{10}(x'^{10} + x''^{10}) = k^3$$

$$S_{30} + 3(x'x'')^{10}(k) = k^3$$

$$S_{30} + 3(-1)^{10}(k) = k^3 \Rightarrow \boxed{S_{30} = k^3 - 3k}$$

ب: هر معادله که به‌صورت $ax^{2n} + bx^n + c = 0$، $n \in N$ باشد، با فرض $x^n = y$ قابل حل است.

مسأله: معادله $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $x^4 = y$.

$$\Rightarrow 16y^2 - 17y + 1 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

ج: معادله $(2-\sqrt{3})^{tgx} + (2+\sqrt{3})^{tgx} = 2$ را حل کنید.

حل: فرض می‌شود: $(2-\sqrt{3})^{tgx} = A$

$$(2+\sqrt{3})^{tgx} = \left(\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}\right)^{tgx}$$

$$= \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{tgx} = \frac{1}{(2-\sqrt{3})^{tgx}} = \frac{1}{A}$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{A} = 2 \Rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

می‌دانیم: $\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{tgx} = 1,\ (2-\sqrt{3})^0 = 1$

$$\Rightarrow tgx = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

۹ـ معادلات تبدیل‌پذیر به معادله درجه دوم:

الف) معادله $(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 5)$ را حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم: $x^2 + x = A$

$$\Rightarrow (A - 5)(A - 3) = 8 \Rightarrow A^2 - 8A + 15 = 8$$

$$\Rightarrow A^2 - 8A + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = 7 \end{cases}$$

مجموع ضرایب صفر است

$$\Rightarrow x^2 + x = 1 \qquad x^2 + x = 7$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

۱۰ـ نامعادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$

باید اوّل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را حل کرد سپس آن را در جدولی تعیین علامت نمود، سپس محدوده جواب را پیدا کرد.

مسأله: نامعادله $2x^2 + 7x + 5 > 0$ را حل کنید.

$$f(x) = 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$a + c = b \qquad \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از $-\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۵}{۲}$		-۱	مقادیر بزرگتر از -۱
f(x)	+		−		+
	جواب				جواب

$x < -\frac{۵}{۲}$ یا $-۱ < x$

مسأله: اگر $n \in N$ ، نامعادله $۲n^۲ - ۲۷n + ۲۵ < ۰$ چند جواب دارد.

$$f(n) = ۲n^۲ - ۲۷n + ۲۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۱ \\ n = \frac{۲۵}{۲} \end{cases}$$

n	مقادیر کوچکتر از ۱	۱		$\frac{۲۵}{۲}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{۲۵}{۲}$
f(n)	+		−		+
			جواب		

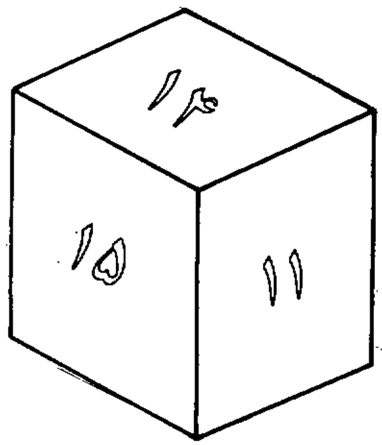
$۱ < n < \frac{۲۵}{۲}$

$n = ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲$

پس این نامعادله (۱۱) جواب دارد.

تفریح اندیشه ۱

عددهای واقع بر وجه‌های مکعب زیر عددهای درست متوالی‌اند. مجموعهای دو عدد واقع بر هر یک از سه جفت وجه مقابل آن برابرند. مجموع شش عدد واقع بر این مکعب چه قدر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

ناسازگاری میان امور فنی و حکمت، همان گونه که اکنون وجود دارد، در گذشته نیز موجود بوده، و در آن گذشته نیز مانند امروز، گروه فراوانی از مردم نادان بوده‌اند که چیزهای اساسی را فدای چیزهای پیش‌پا افتاده و بی‌مقدار کرده‌اند.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام



آموزش ترجمه متون ریاضی (۷)

حمیدرضا امیری

The remainder theorem

When the polynomial $P(x)$ is divided by the polynomial $\varphi(x)$, it is clear that the remainder $R(x)$ must have degree less than that of $\varphi(x)$. (If this is not so, the division is not complete.)

In particular, if $P(x)$ is of degree n and we divide it by $(x - \alpha)$, then the quotient $Q(x)$ will be a polynomial of degree $(n - 1)$ and the remainder $R(x)$ will be a constant. Thus,

$$P(x) \equiv (x - \alpha)Q(x) + R. \qquad (2.3)$$

قضیهٔ باقیمانده

هرگاه چند جمله‌ای $P(x)$ را بر چند جمله‌ای $\varphi(x)$ تقسیم کنیم، واضح است که $R(x)$ باقیماندهٔ تقسیم می‌بایست دارای درجه‌ای کمتر از درجهٔ $\varphi(x)$ باشد. (در صورتی که چنین نباشد تقسیم تمام نمی‌شود.)

بویژه، اگر $P(x)$ ازدرجهٔ n وبر $(x - \alpha)$ تقسیم‌شود، دراین‌صورت $Q(x)$ خارجِ‌قسمت تقسیم از درجهٔ $(n - ۱)$ بوده و $R(x)$ باقیمانده تقسیم عددی ثابت خواهد بود. بنابراین:

$$P(x) \equiv (x - \alpha)\, Q(x) + R \qquad (۲.۳)$$

If we substitute $x = \alpha$, then we see that

$$P(\alpha) = R. \qquad (2.4)$$

اگر (دررابطهٔبالا) قراردهیم؛ $x = \alpha$، در این‌صورت خواهیم دید که:

$$P(\alpha) = R \qquad (۲.۴)$$

This result enables us to find the remainder without carrying out the division. It is known as the *remainder theorem*.

A slightly more general result is obtained by considering division by $(ax + b)$. Then

$$P_1(x) \equiv (ax + b)Q_1(x) + R_1. \qquad (2.5)$$
$$\Rightarrow P_1(-b/a) = R_1. \qquad (2.6)$$

(The value $(-b/a)$ is obtained by setting $ax + b = 0$.)

این نتیجه به ما این امکان را می‌دهد که باقیماندهٔ تقسیم را بدون انجام عمل تقسیم بیابیم و این همان قضیهٔ تقسیم است.

در صورتی که (به جای تقسیم $P(x)$ بر $(x - \alpha)$) این تقسیم را بر $(ax + b)$ درنظر بگیریم نتیجه‌ای تا حدودی کلّی‌تر به‌دست می‌آید. بنابراین (خواهیم داشت):

$$P_1(x) = (ax + b)\, Q_1(x) + R_1 \quad (۲.۵)$$
$$\Rightarrow P_1\left(-\frac{b}{a}\right) = R_1 \quad (۲.۶)$$

(مقدار $-\frac{b}{a}$ از حل معادلهٔ $ax + b = ۰$ حاصل شده است.)

Example 7 Find the remainder when $P(x)$, where $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 12x - 8$, is divided by (a) $(x - 1)$, (b) $(2x - 1)$.

(a) The remainder is $P(1) = 6 - 7 + 12 - 8 = 3$.

(b) The remainder is $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = -3$.

مثال ۷:

باقیماندهٔ تقسیم $P(x) \equiv ۶x^۳ - ۷x^۲ + ۱۲x - ۸$ را بر (الف) $(x - ۱)$، (ب) $(۲x - ۱)$ پیدا کنید:

(الف) باقیمانده عبارت است از $\rightarrow P(۱) =$

$$۶ - ۷ + ۱۲ - ۸ = ۳$$

(ب) باقیمانده عبارت است از $\rightarrow P(\frac{۱}{۲}) =$

$$۶(\frac{۱}{۲})^۳ - ۷(\frac{۱}{۲})^۲ + ۱۲(\frac{۱}{۲}) - ۸ = -۳$$

The factor theorem
From Equation (2.6) we see that, if $P_1(-b/a) = 0$, then $R_1 = 0$

$\Rightarrow$ there is no remainder when $P_1(x)$ is divided by $ax + b$
$\Rightarrow$ $ax + b$ is a factor of $P_1(x)$.

This is known as the *factor theorem*.
From Equation (2.4) we see the result: 'If $P(\alpha) = 0$, then $(x - \alpha)$ is a factor of $P(x)$.'

قضیهٔ فاکتور (تجزیه)

با توجه به معادلهٔ (۲.۶) مشاهده می‌شود که اگر $P_1 = (-\frac{b}{a}) = ۰$، دراین‌صورت $R_1 = ۰$.

$\Leftarrow$ وقتی‌که $P_1(x)$ بر $(ax + b)$ بخش‌پذیر باشد باقیمانده‌ای وجود ندارد.

$\Leftarrow$ $(ax + b)$ یک فاکتور یاعاملِ $P_1(x)$ می‌باشد.

این مطالب به قضیهٔ فاکتور (تجزیه) معروف است.

با توجه به معادلهٔ (۲.۴) این نتیجه‌را مشاهده‌می‌کنیم‌که: «اگر $P(\alpha) = ۰$، دراین‌صورت: $(x - \alpha)$ یک عامل یا فاکتورِ چندجمله‌ایِ $P(x)$ است.»

Example 8 Show that $(x - 3)$ is a factor of $P(x)$, where $P(x) \equiv 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27$.

$$P(3) = 2.27 - 6.9 + 9.3 - 27 = 0.$$

Therefore, $(x - 3)$ is a factor.

مثال ۸:

درصورتی‌که $P(x) \equiv ۲x^۳ - ۶x^۲ + ۹x - ۲۷$، نشان دهید که $(x - ۳)$ یک عامل $P(x)$ است:

$$P(۳) = ۲ \times ۲۷ - ۶ \times ۹ + ۹ \times ۳ - ۲۷ = ۰$$

بنابراین؛ $(x - ۳)$ یک عامل $P(x)$ است.

Example 9 Show that $(3x + 1)$ is a factor of $P(x)$, where $P(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 19x - 6$.

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

We consider, therefore, $P(-\frac{1}{3})$:

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 19\left(-\frac{1}{3}\right) - 6$$
$$= -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{19}{3} - 6 = 0.$$

Therefore, $(3x + 1)$ is a factor.

مثال ۹:

درصورتی‌که $P(x) \equiv ۶x^۳ - x^۲ - ۱۹x - ۶$، نشان دهید که $(۳x + ۱)$ یک عاملِ $P(x)$ است:

$$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$$

بنابراین؛ ما $P(\frac{-۱}{۳})$ را درنظر می‌گیریم:

$$P(\frac{-۱}{۳}) = ۶(-\frac{۱}{۳})^۳ - (-\frac{۱}{۳})^۲ - ۱۹(-\frac{۱}{۳}) - ۶$$
$$= -\frac{۲}{۹} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱۹}{۳} - ۶ = ۰$$

پس؛ $(۳x + ۱)$ یک عاملِ $P(x)$ است.

Example 10 For what value of k is $(x + 3)$ a factor of $P(x)$, where

$$P(x) \equiv x^4 - 3x^2 + k.$$

If $(x + 3)$ is a factor, $P(-3) = 0$.

$$P(-3) = 0 \Rightarrow 81 - 27 + k = 0$$
$$\Rightarrow k = -54.$$

مثال ۱۰:

هرگاه داشته‌باشیم؛ $P(x) \equiv x^۴ - ۳x^۲ + k$، معین‌کنید به‌ازای چه‌مقداری برای k، $(x + ۳)$ یک عاملِ $P(x)$ است.

اگر $(x + ۳)$ یک عامل $P(x)$ باشد، $P(-۳) = ۰$.

$$P(-۳) = ۰ \Rightarrow ۸۱ - ۲۷ + k = ۰ \Rightarrow k = -۵۴$$

Example 11 Given that $(x + 1)$ and $(x - 2)$ are factors of $P(x)$, where

$$P(x) \equiv ax^3 - bx^2 + ax + 6,$$

find the constants a and b.

Since $(x + 1)$ is a factor, $P(-1) = 0$,

$$\Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \Rightarrow -2a - b + 6 = 0.$$

Since $(x - 2)$ is a factor, $P(2) = 0$,

$$\Rightarrow 8a - 4b + 2a + 6 = 0 \Rightarrow 10a - 4b + 6 = 0.$$

Solving these simultaneous equations, we obtain $a = 1$ and $b = 4$.

مثال ۱۱:

هرگاه $P(x) \equiv ax^۳ - bx^۲ + ax + ۶$، بافرض این‌که $(x + ۱)$ و $(x - ۲)$ عاملهای $P(x)$ می‌باشند ($P(x)$ بر $(x + ۱)$ و $(x - ۲)$ بخش‌پذیر است)، عددهای ثابت a و b را پیدا کنید.

چون: $(x + ۱)$ عاملِ $P(x)$ است، $P(-۱) = ۰$.

$$\Rightarrow -a - b - a + ۶ = ۰ \Rightarrow -۲a - b + ۶ = ۰ \ (۱)$$

چون: $(x - ۲)$ عاملِ $P(x)$ است، $P(۲) = ۰$.

$$\Rightarrow ۸a - ۴b + ۲a + ۶ = ۰ \Rightarrow ۱۰a - ۴b + ۶ = ۰ \ (۲)$$

(با توجه به معادلات (۱) و (۲) دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که) از حلِ این دستگاه معادلات $a = ۱$ و $b = ۴$، به‌دست می‌آید.

Finding factors of polynomials

The factor theorem provides an important aid to finding factors of polynomials. To find linear factors, we seek values of λ such that $(x - \lambda)$ divides $P(x)$. As a consequence of the factor theorem, this is equivalent to finding values of λ for which $P(\lambda) = 0$.

If the polynomial is written in such a way that the coefficients are all integers, then it is suggested that one considers those values of λ which are a factor of the constant term a_0 in the polynomial.

تشخیص عاملهای چندجمله‌ایها

قضیهٔ عامل (تجزیه) جهتِ تشخیص عاملهای چندجمله‌ایها کمک مهمّی است. برای پیدا کردنِ عاملهای خطی، ما در جستجوی مقادیری برای λ هستیم به‌طوری که $P(x)$ بر $(x - \lambda)$ بخش‌پذیر باشد. یکی از نتایج حاصل از قضیهٔ عامل، معادل با تشخیص مقادیر λ است به‌طوری که $P(\lambda) = ۰$.

اگر یک چندجمله‌ای به شکلی نوشته‌شود که همهٔ ضرایب آن عددهای صحیح باشند، در این‌صورت پیشنهاد می‌شود مقادیری‌را برای λ درنظربگیریم که عدد ثابت چندجمله‌ای یعنی a_0 بر آنها بخش‌پذیر باشد.

Example 12 Find the factors of $P(x)$, where $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6$. The only integer factors of 6 are ±1, ±2, ±3, ±6 and so these are the values of λ we consider.

Trial factor $(x - \lambda)$	$P(\lambda)$	Comment
(i) $(x - 1)$	$1 - 4 + 1 + 6 = 4$	Not zero, not a factor
(ii) $(x + 1)$	$-1 - 4 - 1 + 6 = 0$	$(x + 1)$ is a factor
(iii) $(x - 2)$	$8 - 16 + 2 + 6 = 0$	$(x - 2)$ is a factor
(iv) $(x + 2)$	$-8 - 16 - 2 + 6 = -10$	Not zero, not a factor
(v) $(x - 3)$	$27 - 36 + 3 + 6 = 0$	$(x - 3)$ is a factor
(vi) $(x + 3)$	$-27 - 36 - 3 + 6 = -60$	Not zero, not a factor

The factors are $(x + 1)$, $(x - 2)$ and $(x - 3)$ and the factorisation of $P(x)$ is

$$P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x - 3).$$

At stage (ii), having found that $(x + 1)$ is a factor, we could, of course, divide $P(x)$ by $(x + 1)$ and deal with the remaining quadratic $x^2 - 5x + 6$, which immediately factorises into $(x - 2)(x - 3)$.

Also, at stage (iii) we have a factor $(x + 1)(x - 2)$ and the remaining factor can be obtained by dividing out or by inspection.

Stage (vi) is, of course, not necessary, as we have already found three factors of the cubic polynomial. For the same reason we need not consider $\lambda = \pm6$.

مثال ۱۲:

هرگاه $P(x) \equiv x^۳ - ۴x^۲ + x + ۶$، در این‌صورت عاملهای $P(x)$ را پیدا کنید.

تنها عاملهای صحیح عددِ ۶ عبارتند از: ۱± ، ۲± ، ۳± ، ۶± و بنابراین ما می‌بایست این مقادیر را برای λ درنظر بگیریم.

نتیجه	$P(\lambda)$	امتحان عامل $(x - \lambda)$
مخالف صفر، عامل نمی‌باشد	۱ - ۴ + ۱ + ۶ = ۴	(۱) (x - ۱)
(x + ۱) یک عامل است.	- ۱ - ۴ - ۱ + ۶ = ۰	(۲) (x + ۱)
(x - ۲) یک عامل است.	۸ - ۱۶ + ۲ + ۶ = ۰	(۳) (x - ۲)
مخالف صفر، عامل نمی‌باشد	-۸ - ۱۶ - ۲ + ۶ = -۱۰	(۴) (x + ۲)
(x - ۳) یک عامل است.	۲۷ - ۳۶ + ۳ + ۶ = ۰	(۵) (x - ۳)
مخالف صفر، عامل نمی‌باشد	-۲۷ - ۳۶ - ۳ + ۶ = -۶۰	(۶) (x + ۳)

عاملهای $P(x)$ عبارتند از: $(x + ۱)$، $(x - ۲)$ و $(x - ۳)$ و تجزیهٔ $P(x)$ به‌صورت $P(x) \equiv (x + ۱)(x - ۲)(x - ۳)$ می‌باشد.

در مرحلهٔ (۲)، $(x + ۱)$ به‌عنوان یک عامل $P(x)$ یافت می‌شود، پس قطعاً، می‌توانیم $P(x)$ را بر $(x + ۱)$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت، عبارتِ درجهٔ دوم $x^۲ - ۵x + ۶$ خواهدبود، که

بلافاصله به (x − ۳) (x − ۲) تجزیه می‌شود.

همچنین در مرحلهٔ (۳) ما یک عامل (x − ۲) (x + ۱) را داشته و عامل باقیمانده می‌تواند از طریق تقسیم خارج شود یا با یک بررسی دقیق این‌کار صورت گیرد.

البته، با توجه به این‌که ما سه عامل برای چندجمله‌ای درجهٔ سوم P(x) یافته‌ایم مرحلهٔ (۵) لزومی ندارد. به‌عنوان مثال : ما، نیازی برای درنظر گرفتن ۶± = λ نداریم.

The use of factors

There are several circumstances where it is advantageous to be able to write a polynomial $P(x)$ in terms of its factors. We will illustrate this by using the polynomial $P(x)$ considered in Example 12 above. We found that

$$P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x + 6 \equiv (x+1)(x-2)(x-3).$$

استفاده از عاملها

شرایط متعددی وجود دارد که توانایی نوشتنِ یک چندجمله‌ای مانند P(x) را برحسبِ عاملهایش، سودمند می‌سازد. این مطلب را با استفاده از چندجمله‌ای P(x) که در مثال ۱۲ درنظر گرفته شده است، توضیح می‌دهیم. ما یافتیم که :

$$P(x) \equiv (x^{۳} - ۴x^{۲} + x + ۶) \equiv (x+۱)\,(x-۲)\,(x-۳)$$

ادب ریاضی

این فکر بسیار کودکانه است که انسان چنان تصور کند علم با یونان آغاز کرده است؛ بر «معجزهٔ» یونان هزاران سال کار مصر و بین‌النّهرین و احتمالاً سرزمینهای دیگر مقدم بوده است، و علم یونان بیشتر جنبهٔ تجدید حیات داشته است تا جنبهٔ اختراع.

تاریخ علم، جورج سارتن، احمد آرام



تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۰)

مجلهٔ «یکان» مجله‌ای ماهانه بود و در هر ماه، یک شماره از آن بر بساط روزنامه‌فروشان ظاهر می‌شد، اما مانند بعضی از مجله‌های علمی دیگر ویژه‌نامه هم داشت.

اوّلین ویژه‌نامهٔ «یکان» تحت عنوان **شمارهٔ فوق‌العادهٔ یکان مجلهٔ ریاضیات** در فروردین ۱۳۴۴ شمسی انتشار یافت.

در این شماره با نویسندگانی چون دکتر محسن هشترودی، احمد بیرشک، جهانگیر شمس‌آوری، جلیل قراگزلو، محمدعلی شیخان، مهدی مدغم، هوشنگ شریف‌زاده، محمدحسن رزّاقی خمسی و عبدالحسین مصحفی مواجه می‌شویم.

از کلاس پنجم ابتدایی به بعد شاگردان با استعداد و موفق را برای شرکت در کلوپهای ریاضی کلاسشان تشویق می‌کنند. کلوپ کلاس پنجم (سن ۱۱ و ۱۲) معمولاً به نام کلوپ ریاضی‌دانان شاد در حدود پانزده نفر عضو دارد و هفته یا دوهفته‌ای یکبار، عصرها، تشکیل می‌شود. در این کلوپها دانش‌آموزان نحوهٔ خواندن ریاضیات را به طور مستقل و منقدانه زیر نظر و راهنمایی معلمان فرا می‌گیرند.

موضوعات ریاضی را به زبان ریاضیات مورد بحث قرار می‌دهند و معلومات کلاسی خود را کامل می‌کنند و بتدریج به‌وسیلهٔ حل مسائل جالب و مشکل رابطهٔ فعالانه‌ای با ریاضیات برقرار می‌کنند. گرچه روش معمولی تدریس در شوروی تا اندازه‌ای خشک و بر طبق سنت دیرین است، اما فرضیه‌های جدید آموزشی در کلوپها تأثیر گذاشته و در آنها از روشی مبتنی بر تبادل آزادانهٔ افکار و بحث میان شرکت‌کنندگان پیروی می‌شود. در میان سایر فعالیتهای منظم فوق برنامه‌ای دانش‌آموزان شوروی می‌توان از کلاسهای ریاضی شب برای کلیهٔ دانش‌آموزان و نشریه و روزنامهٔ دیواری ریاضیات نام برد.

بیشتر از فعالیتهای فوق برنامه و بویژه کار در کلوپهای ریاضی براساس کتابهای آموزشی متنوع و فراوانی است که در دسترس شاگردان و معلمان قرار دارد. هرقدر که فعالیتهای فوق برنامه‌ای در ریاضیات زیادتر شود، دامنهٔ تهیهٔ مواد مکمل آموزش ریاضی نیز وسعت می‌یابد و استقبال جوانان شوروی از آن افزونتر می‌شود. تیراژ یک میلیونی بعضی از کتابهای علمی عموم‌پسند مؤید این نظر می‌باشد.

برای معلمان نیز جزواتی دربارهٔ روش طرح‌ریزی و تشکیلات و اداره کردن کلوپهای ریاضیات و فعالیتهای فوق برنامه از قبیل کلاسهای ریاضیات در شب، چاپ شده در دسترسشان قرار می‌گیرد. ادارهٔ کل امور اداری مدارس در وزارت فرهنگ جمهوری سوسیالیستی روسیه که مرکز پژوهشهای تربیتی در شوروی است، در طرح‌ریزی فعالیتهای فوق برنامه تشریک مساعی می‌کند. یکی از اعضای برجستهٔ بخش ریاضیات انستیتوی روشهای تدریس این آکادمی در نشریه‌ای ضمن بیان مقصد و اهمیت کارهای فوق‌برنامهٔ ریاضی، هدف کار کلوپها را چنین تشریح می‌کند:

۱- بالا بردن معلومات ریاضی شاگردان به وسیلهٔ مطالعهٔ جدی و عمیق در رشته‌های مختلف ریاضیات و تاریخ آن و همچنین به وسیلهٔ آشنایی با بعضی از مسائل ریاضیات معاصر

و غیره.

۲ـ توسعه دادن استعدادهای منطقی و تصور فضایی شاگردان به‌وسیلهٔ حل مسائل و معماهای جالب توجه و تجزیه و تحلیل استدلالات سفسطی و قضایای ناصحیح و غیره.

۳ـ شناختن و جمع کردن گروهی از شاگردان با استعداد و هواخواه با حرارت و جدی ریاضیات به منظور کمک به معلم در کارهای روزانه از قبیل کار کردن با شاگردان کندآموز، تهیهٔ وسایل بصری متنوع، رهبری کارهای مربوط به طرحهای بزرگ، مانند نوشتن روزنامهٔ دیواری ریاضی در مدرسه و غیره.

۴ـ و بالاخره کشف استعدادهای ریاضی خارق‌العاده و استثنایی ضمن کار در کلوپ.

فعالیتهای این کلوپها برای کمک به دانش‌آموزان جهت بسط استعدادهای طبیعی و کسب مهارتهای لازم برای انجام کارهای جدی علمی درآتیه می‌باشد.

در سپتامبر ۱۹۵۹ میلادی انستیتوی تربیتی ایوانف یک باب مدرسهٔ ریاضی برای جوانان تأسیس کرده است. این مدرسه شامل سه کلاس مضاعف ۱۵ نفری است که شاگردان کلاسهای هشتم و نهم و دهم مدارس روزانه در آن شرکت می‌کنند. هر شاگرد باید دو شب در هفته و هر شب در دو کلاس شرکت کند. برنامهٔ این کلاسها شامل جبر، هندسه، مثلثات، هندسهٔ تحلیلی و محاسبات ریاضی (برای سال هشتم) و منطق ریاضی (برای سال دهم) می‌باشد. همچنین دروس تئوری و طرز کار با ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی نیز جزء برنامه این کلاسها منظور شده است.

برای تعیین کیفیت کار این مدرسه همین بس که گفته شود که منطق ریاضی در سال دهم به‌وسیلهٔ پروفسور ا.ای مالتف عضو آکادمی علوم شوروی و جبردان برجسته تدریس می‌شود. مطالب درسی در این مدرسه به طرز نوینی مورد بحث قرار می‌گیرد و ضمن کار، شاگردان با استعداد در ریاضیات شناخته و تربیت می‌شوند.

کارانستیتوی تربیتی ایوانف نمونهٔ خوبی برای «ادارهٔ مکانیک ـ ریاضی» دانشگاه مسکو قرار گرفت و این اداره با همکاری جامعهٔ ریاضیات مسکو و بخش تعلیم و تربیت ملی شهرداری مسکو در پاییز ۱۹۵۹ پنج دبیرستان شبانه برای ریاضی‌دانان جوان در ۵ ناحیهٔ مختلف مسکو تأسیس کرد.

برنامهٔ دو سالهٔ این دبیرستانها شامل جبر و هندسه و آنالیز ریاضی می‌باشد. هیأت اداره کنندهٔ این مدارس از ۵ نفر عضو آموزشی دانشگاه مسکو و ۲۰ داوطلب صلاحیتدار و ۲۰ شاگرد سال پنجم و ۱۶ شاگرد سال چهارم رشتهٔ ریاضی تشکیل یافته است. از میان ریاضی‌دانانی که در تدوین برنامه این مدارس و نظارت بر آن مستقیماً دست دارند می‌توان از پروفسور ای. ب. ودین.کین، وج. ای. شیلف، وای.م. یاک لوم نام برد.

یکی از نتایج مستقیم فعالیت بخشهای انجمن ریاضیات به وجود آمدن یک دورهٔ کتاب متحدالشکل به عنوان «کتابخانهٔ انجمن ریاضیات» است. در کتابهای این دوره مطالب بحث شده در بخشها به تفصیل و استادانه نوشته شده است. شیوهٔ نگارش این کتابها همان شیوهٔ تدریس در بخشها است، به این معنی که پس از مقدمه‌ای بسیار مختصر تعاریف اصلی شرح داده شده و بعد به صورت مسائل مطرح شد.، و ضمن حل آنها مستنبط قضیه کشف گشته و تمرینهای متنوع و متعددی به دنبال آن آمده است.

هدف از به کار بردن این روش آن نیست که توجه خواننده منحصراً به نتیجهٔ نظریهٔ جدیدی که مطرح شده است معطوف شود، بلکه آن است که به رغم یک یکنواختیی که در بیان معمولی ریاضیات هست وی را به انجام کاری مستقل و ابتکاری تشجیع کند. این کتابها به این منظور تألیف شده که در خواننده مهارتهایی که لازمهٔ کار تولیدی است به وجود آید. مطالبی که برای تکلیف شاگرد در آنها جمع‌آوری شده به نحوی است که او را بیشتر از نتایج به دست آمده مجبور به دقت در روشهای به کار رفته می‌کند.

فکر اساسی که سبب تهّیه و تدوین این کتابها گشته آن بوده است که درک واقعی ریاضیات زمانی حاصل می‌شود که شخص مستقلاً قادر به پاسخ دادن سؤالات ریاضی گردد؛ و هر مسأله و مجموعه مسائلی که مستقلاً حل شود گنجینهٔ روشهایی را که در دسترس خواننده است غنیتر می‌کند. حتی وقتی را که خواننده برای فکرکردن و یافتن راه حل مسأله‌ای صرف می‌کند، ولو موقعیتی به دست نیاورده هدر نداده است، چه درصدد فهم علل عدم موفقیت خود برمی‌آید و در

نتیجه توانایی این را خواهد یافت که استدلال مربوط به روش مخصوص آن مسأله را تشخیص دهد.

علاوه بر بخشهایی که در دانشگاه فعالیت دارند، در سال ۵۷ ـ ۱۹۵۶ پانزده انجمن بەوسیلهٔ دانشگاه در دبیرستانهای نواحی مسکو تشکیل یافته است.و برحسب تقاضای دبیرستانها و دانشجویان رشتهٔ مکانیک ـ ریاضیات دانشگاه مسکو سخنرانیهای فراوانی در آن انجمنها ایراد و جلسات را رهبری کرده‌اند.

عناوین سخنرانیهایی که در آن سال ایراد گشته چنین بوده است.

چگونه علم، پدیده‌های اتفاقی را بررسی می‌کند.
تئوری اعداد صحیح.
هندسهٔ لباچفسکی.
سریعتر از فکر (دربارهٔ ماشینهای محاسبهٔ الکترونیکی).
زنان ریاضی‌دان.
دربارهٔ شغل ریاضی‌دان.
ادارهٔ مکانیک ـ ریاضیات (در دانشگاه مسکو).
تاریخ حل معادلات.

مقالهٔ **ریاضیات و منطق** این شماره از **سر ادموند تیلور ویتیکر** « Sir Edmond Taylor Whittaker » است با ترجمهٔ **جهانگیر شمس‌آوری**، که در آن ابتدا از نخستین ریاضی‌دانان یاد شده و از مقام منطق در هندسه ذکری به میان آمده و از کشف اعداد اصم توسط فیثاغورسیان و پارادکسهای زنون و پیدایش هندسهٔ فضایی در مکتب اتمی و اصل توازی و هندسهٔ فضای نجومی و نسبیت عمومی مطالبی آورده شده است.

در بخشهای هندسه‌های غیراقلیدسی و توپولوژی این مقاله چنین می‌خوانیم که:

مااکنون بعضی از مشخصات هندسه های غیراقلیدسی راکه با انکار اصل توازی در هندسهٔ مسطحه به‌دست می آید شرح می‌دهیم:

اگر خط CD و نقطهٔ P را در خارج آن در نظر بگیریم دو اصل را می توانیم بپذیریم.

(۱) یا غیرممکن است که از نقطهٔ P خط مستقیمی بتوان کشید که CD را قطع نکند، که در این حال هندسه بیضوی است.

(۲) یا ممکن است که از نقطهٔ P تعداد خطوط نامحدودی کشید که CD را قطع نکند، که در این حال هندسه هیپربولیک است.

در میان این امکانات حالت میانه‌ای نیز وجود دارد که در آن ممکن است که از نقطهٔ P فقط یک خط کشید که CD را قطع نکند، این حالت با هندسهٔ اقلیدسی معمولی مطابقت دارد.

در هندسهٔ بیضوی مجموع زوایای یک مثلث همیشه بزرگتر از دو قائمهٔ است. هر خط مستقیمی را که امتداد دهیم، وقتی که به طول معینی رسید، مانند خط استوا، باز به نقطهٔ آغاز خود برمی‌گردد. بزرگترین فاصلهٔ ممکن میان دو نقطه در روی یک خط، نصف طول این خط است. عمودهایی که از نقاط مختلف یک خط بر آن اخراج می‌شوند، همه در یک نقطه متقاطعند.

در هندسهٔ هیپربولیک، مجموع سه زاویهٔ مثلث همیشه از دو قائمه کمتر است. به این معنی که هرقدر مساحت مثلث بیشتر باشد، مجموع زوایای آن کمتر است. اگر خط CD و نقطهٔ P را در خارج آن در نظر بگیریم، می‌توانیم دو خط مستقیم از نقطهٔ P رسم کنیم (PA و PB) که بر یک امتداد نباشند و: (۱) هر خط ماربر نقطهٔ P که تماماً خارج زاویهٔ APB است، خط CD را قطع نکند، (۲) هر خط ماربر نقطهٔ P که داخل زاویهٔ APB است، خط CD را در نقطه‌ای به فاصلهٔ محدود از P قطع کند، (۳) دو خط PA و PB ، مجانبی وار به یک انتهای خط CD میل کنند، در این حال می‌توان گفت که آنها در بی‌نهایت یکدیگر را قطع می‌کنند واین کم یا بیش شباهتی با موازیهای اقلیدس دارد. در حقیقت به PA و PB موازیهای مرسوم از نقطهٔ P به موازات خط CD گفته می‌شود. دو خط متوازی در همه‌جا متساوی‌الفاصله نیستند. فاصلهٔ بین آنها در سوی یک انتها به سمت صفر و در سوی انتهای دیگر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

توپولوژی

همان طور که دیدید این عقیده که جهان مادی متشکل از اتمهایی است جاودانی و تغییرناپذیر، از طرف بسیاری از فلاسفهٔ یونان قدیم اظهار شده است. در قرن نوزدهم، این

عقیده به طور کلی مورد قبول فیزیک‌دانان قرار گرفت و برای توضیح ریاضی آن در ۱۸۸۷، کوششی از جانب ویلیام تامسون (William Thomson)، لردکلوین(Lord Kelvin) پس از مشاهدهٔ نمود حلقه‌های دود در آزمایشگاه، انجام گرفت. وی اظهار داشت که اگر اتمهای مادهٔ لازمهٔ حلقه‌های پیچدار در یک سیال کامل باشد، بقای ماده را بلادرنگ می‌توان توضیح و عمل متقابل مابین اتمها را نمایش داد. در ۱۸۷۶ پی.جی، تیت (Tait)، فیزیک و ریاضی‌دان اسکاتلندی، با این فکر که ممکن است انواع مختلف اتم مربوط به انواع مختلف حلقه‌های پیچدار گره خورده باشد. به مطالعهٔ گره‌ها به عنوان اشکال هندسی پرداخت، این نوع مسأله تازگی داشت. زیرا در این باره هرگز به تشریح دقیق نوع منحنی گرهٔ طناب توجه نمی‌شد و فقط به تعیین ممیزه‌های اصلی میان انواع گره‌ها اکتفا می‌شد. بخصوص تبدیلاتی که موجب تغییر منحنی طناب می‌شود ولی سیرت اصلی گره را تغییر نمی‌دهد مورد مطالعه قرار گرفت. روابطی از این نوع یعنی روابطی که با اصطلاحاتی از این قبیل بیان می‌شوند: «خارج آن»، «راست دست»، «متصل است با»، «مشترک است با»، «محصور است به»، «متصل است با یک راه» اصطلاحات **توپولوژیکی** هستند و مطالعهٔ این روابط توپولوژیکی، به طور کلی **توپولوژی** نامیده می‌شود.

مسألهٔ توپولوژیکی دیگری که در همان اوان عرضه شدن این شاخه از ریاضیات مطرح گشت مربوط به جاری شدن یک جریان الکتریکی به وسیلهٔ شبکهٔ خطی هادیها بود. شبکه عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط (رؤوس) که دو به دو به یکدیگر به وسیلهٔ هادیها مربوطند. مسأله عبارت از این است که حداکثر تعداد هادیهایی را که می‌توان از شبکه‌ای برداشت و رأسهای شبکه به وسیلهٔ باقیماندهٔ هادیها در ارتباط خطی باشند چیست. عددی که به دست آمد، در مسألهٔ کلی جریان الکتریک در شبکه فوق‌العاده مهم است.

بخشهای دیگر این مقاله عبارتند از: **نظرهای تازه‌ای دربارهٔ اصول موضوعه، خطرات اشراق در ریاضیات، طرح یک هندسهٔ دقیق، اعداد، اعداد در ورای حد، تعداد نقاط در فضای سه بعدی، کمیتهای موهوم، دستگاه شمار، منطق علامتی، دستگاه علامات پئانو، پیشرفتهای مربوط به وایتهد و راسل، پارادوکس راسل، طرفداران اشراق، احتمالات، آمار، دستگاه حدسی، فلسفهٔ ریاضیات و فلسفهٔ علم.**

در قسمتی از مقالهٔ **بنیان ریاضیات جدید** از دکتر محسن هشترودی چنین آمده است که:

دسته‌بندی و اجتماع افرادی در یک طبقه‌همواره به صورت دلخواه ممکن است، اما مجموعه‌ای که به این صورت به دست می‌آید مجموعه‌ای نامشخص و کم یا بیش مبهم است. با تعریفی خاص که شامل کلّیهٔ افراد مجموعه گشته وافراد غیر عضو را خارج کند می‌توان مجموعه رامشخص ومعین کرد (توجه شود که در این باره تعریف منطقی جامع و مانع ضروری نیست، هر تعریفی که نتیجه را متضمن باشد کفایت می‌کند و چنین تعاریفی معادلند). پیدا است می‌توان مجموعه‌هایی تعریف کرد که به ظاهر خود مجموعه نیز از افراد مجموعه باشد.

مثلاً، اگر مجموعهٔ کلیهٔ نامهای زبان فارسی را تشکیل‌دهیم و به این مجموعه نامی دهیم چنین به نظر می‌رسد که خود مجموعه عضو مجموعه است. بیشتر تعارضات منطقی در نظریهٔ مجموعه‌ها از این نقطه شروع می‌شود. رفع چنین مشکلاتی برای ریاضی‌دانان بود که غلبهٔ بر آن ممتنع می‌نمود. بعدها روشن شد که این قبیل تعارضات به حوزهٔ ریاضی منحصر نیست و در حوزهٔ منطق نیز روی می‌دهد، من باب مثال چند مورد از این تعارضات در حوزهٔ منطق در این‌جا ذکر می‌شود:

اوّل تعارض حکم منفرد ـ این تعارض را از قدیم شناخته‌اند و از ارسطو منقول است:

غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گوید که «کاشانیان دروغگویند». بدیهی است که این حکم موجب دور می‌شود، چه این‌قول از طرف یک کاشانی گفته شده است، پس مشمول خود حکم می‌شود و آن جمله صحیح نیست یعنی کاشانیان راستگویند. و چون گوینده کاشانی است حکم صحیح خواهد بود و دور بارز می‌شود.

باید متوجه بود که در حقیقت این حکم منفرد نیست و از دو حکم تشکیل شده است: الف ـ غیاث‌الدین جمشید اهل کاشان است. ب ـ او مدعی است که کاشانیان دروغگویند. تعارض از این جهت پیدا می‌شود و موجب دور می‌شود که

دروغ گروه تشکیل نمی‌دهد، چه دروغ دروغ معادل راست است نه دروغ، اگر غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌گفت «کاشانیان راستگویند» تعارضی رخ نمی‌داد، چه راست راست معادل راست است و گروه تشکیل می‌دهد.

دوم تعارض احکام مستند بر تعریف ـ برای هر عدد می‌توان هم تعریفی ریاضی ذکر کرد و هم تعریف دیگری داد که بی‌آن‌که ریاضی باشد آن عدد را مشخص کند. مثلاً، عدد (الف) را چنین تعریف می‌کنیم: «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» بدیهی است اعدادی که با کمتر از ده کلمه تعریف می‌شوند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند (محدود یا نامحدود) که بین آنها، با مقایسه، کوچکترینشان را تعیین می‌کنیم و عدد «الف» را مشخص می‌شود. فی‌المثل عدد π چنین تعریف می‌شود: «نسبت محیط دایره به قطر آن» این جمله یا (حکم) شش کلمه دارد، یعنی حکمی است که از ده کلمه کمتر است، پس عدد «پی» از این قبیل اعداد است. همچنین عدد ۹ (تعداد سیارات منظومهٔ شمسی) چون حکم «تعداد سیارات منظومهٔ شمسی» کمتر از ده کلمه دارد، از این احکام است. اگر به همین دو عدد قناعت شود، عدد «الف» عدد π خواهد بود که از دو عدد ۹ و π کوچکترین آنها است. به هر حال اگر تعاریف دیگری نیز برای اعدادی از این قبیل ذکر شود، همواره می‌توان عدد «الف» را مشخص ساخت. اکنون ملاحظه می‌کنیم که عدد «الف» خود با جملهٔ «کوچکترین عددی که تعریف آن کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد» تعریف شده است که دوازده کلمه دارد. این‌جاست که تعارض رخ می‌دهد، زیرا عدد «الف» باید با جمله‌ای (یا حکمی) که کمتر از ده کلمه داشته باشد تعریف شود؛ یعنی بنا به مدلول تعریف فوق عدد «الف» وجود دارد و بنا بر صورت حکم این عدد جزء مجموعهٔ اعدادی که به موجب این تعریف مشخص می‌شوند نمی‌باشد. با کمی توجه می‌توان دریافت که مجموعهٔ اعدادی که تعریف آنها کمتر از ده کلمه لازم داشته باشد یک رشته عدد است (محدود یا نامحدود، از نظر تعداد) و تعریف عدد «الف» در واقع چنین است: «کوچکترین عدد این مجموعه» و در این صورت تعارضی در کار نخواهد بود، چه حکم اخیر کمتر از ده کلمه دارد.

در نظریهٔ مجموعه‌ها این تعارضها قبلاً مشهود شده بود و تعلق آنها به حوزهٔ منطق بعداً روشن شد. مبنا و پایهٔ منطق ریاضی براساس حساب احکام و قضایا و حساب طبقات است.

اگر بین افراد مجموعه‌ای (محدود یا نامحدود) روابطی به قسمی وجود داشته باشد که حاصل به کار بستن این روابط برای دو فرد آن مجموعه فرد دیگری از مجموعه را به دست دهد، آن مجموعه را یک سازمان «structure» می‌نامند.

مثلاً، اگر مجموعهٔ اعداد صحیح و عمل جمع را در نظر بگیریم، چون مجموع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است، مجموعهٔ اعداد صحیح را با عمل جمع یک سازمان می‌نامند. بی‌آن‌که بر کلیّات سازمان در ریاضیات اشاره‌ای شود، به همین مختصر اکتفا و به تعادل این سازمان با سازمان حاصل از مجموعهٔ اعداد صحیح با عمل ضرب قناعت می‌کنیم، چه مجموعهٔ اعداد صحیح باعمل ضرب نیز یک سازمان تشکیل می‌دهد. (در عمل جمع سازمان اوّل، عدد صفر عنوان واحد دارد، چه افزون آن به هر عددی آن عدد را محفوظ نگاه می‌دارد. اما در عمل ضرب سازمان دوم، همین عنوان را عدد یک دارد، چه ضرب کردن آن در هر عددی، آن عدد را محفوظ نگاه می‌دارد.) ممکن است در سازمانی دو رابطه بین افراد مجموعه، قابل تصور باشد (مانند مجموعهٔ اعداد صحیح و اعمال جمع و ضرب)، در این صورت چنین سازمانی را حلقه می‌نامند. تعادل بین حلقه‌ها با سازمان دوگانهٔ جمع و ضرب همواره محقق است. سازمان معادل با رابطهٔ جمع را مدول و سازمان معادل با عمل ضرب را گروه می‌نامند. به این ترتیب حلقه در حقیقت سازمانی است که هم مدول و هم گروه باشد. هیأت اعداد (Corps denombers) مجموعه‌ای است که حاصل اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب دربارهٔ افراد آن، آن مجموعه را محفوظ نگاه دارد (جز عمل تقسیم بر صفر مدول که استثناء می‌شود). مثلاً، مجموعهٔ اعداد گویا یک هیأت اعداد تشکیل می‌دهد، چه حاصل چهار عمل اصلی دربارهٔ اعداد گویا عددی گویا است. مجموعهٔ اعداد موهوم نیز یک هیأت اعداد است. اگر عددی موهوم را که اجزای حقیقی و موهومی آن اعداد صحیحند عدد موهوم صحیح بنامیم، شاهده می‌شود که مجموعهٔ اعداد موهوم

صحیح هیأت اعداد نیست و بلکه تنها حلقه است. بدین قسم سازمانهای اصلی نمونه‌بندی ریاضی عبارت است از:

۱- مدول (Module) که به آن گروه جمعی (Groupe additif) نیز گفته می‌شود و همچنین گروه که مراد گروه ضربی است (Groupe multiflicatif) و به‌طور خلاصه گروه نامیده می‌شود. در صورتی که در چنین سازمانی a.b = b.a باشد، گروه را گروه آبلی Groupe abélien می‌نامند. تعادل بین مدول و گروه محقق است یعنی این دو سازمان در حقیقت متوازنند.

۲- حلقه (Anneou یا Ring) سازمانی است که هم مدول است و هم گروه، یعنی اعمال سه‌گانه جمع و تفریق و ضرب در آن میسر است.

۳- هیأت اعداد (Corps de nombres یا field) که اعمال چهارگانهٔ اصلی حساب در آن میسراست.

سازمانها به دو دسته اساسی، **سازمانهای جبری** (آنچه تاکنون اشاره شد سازمانهای جبری است) و **سازمانهای منطقی** (structure logique) تقسیم می‌شوند. برای هر سازمان منطقی محاسبهٔ خاصی جبری وجود دارد که **سازمان متناظر** آن نامیده می‌شود. مثلاً جبر بول Boole اصول محاسبهٔ سازمان منطقی ارسطو (یعنی منطق دو ارزشی) است.

اهمیت این سازمانها در ریاضیات جدید بسیار است و اصول ماشینهای الکترونیکی یا دستگاههای خودکار براین سازمانها است.

از جمله مطالبی که برای هر مجلهٔ علمی و در حالت خاص ریاضی لازم و واجب می‌نماید وجود معماها و چیستانهای ریاضی است.

این معماها طوری مطرح شده‌اند که در عین فرح‌انگیزی با استدلال سروکار دارند و چنان‌هستند که علاوه بر استدلال گاه‌گاه به هوش و سرعت انتقال نیز نیاز دارند.

مجلهٔ یکان، از آوردن این گونه معماها خودداری نکرده و جای جای از معماهای جالب و سروربار سخن به میان آورده است.

حل این معماها، همان گونه که مرسوم است به دانش ریاضی بسیار نیاز ندارد و بیش از آن‌که طالب معلومات ریاضی باشد در طلب دقت و فایده گرفتن از قوای ذهنی است. در این مورد باید شش دانگ حواس خود را جمع کنیم و به‌عبارت دیگر تمرکز حواس داشته‌باشیم.

در این‌جا به‌ذکر یکی از معماهای آن،که تحت عنوان **چگونه فهمیده بود؟** در همین شمارهٔ مورد بحث آمده است. می‌پردازیم:

برای دوستان خود چنین تعریف می‌کرد:

- راهی طولانی و خطرناک در پیش داشتیم. این راه در میان یکی از صحراهای خشک و بی‌آب عربستان بود. برای سلامت به پایان رساندن این راه ناچار بودیم که با خود آب و بنزین همراه داشته باشیم. در ماشین ما شش ظرف خالی به گنجایش یکی شانزده لیتر و دیگری هیجده لیتر و سومی بیست ودولیتر و بقیّه به ترتیب بیست و سه لیتر، بیست و چهار لیتر و سی‌وچهار لیتر بود. چند ظرف را از آب پر کردیم و چند ظرف را از بنزین و یکی از ظرفها را خالی نگاه داشتیم، عجیب این بود که مقدار بنزینی که خریدیم و در ظرفها ریختیم دوبرابر تعداد آبی بود که خریدیم و در ظرفها ریختیم.

یکی از مستمعان سخن گوینده را قطع کرد و گفت: - من که آن‌جا نبودم، ولی می‌توانم بگویم که شما کدام ظرف را خالی نگاه داشتید و کدامها را از آب و کدامها را از بنزین پر کردید. همه متعجب شدند و تصور کردند که او هم در این مسافرت بوده است و می‌خواهد با دیگران شوخی کند. - یکی پرسید راست می‌گوید؟ او با شما دراین مسافرت نبوده است؟ باور کنید که خیر. - پس ادعای او باورنکردنی است. اما وقتی که وی برای دیگران شرح داد که چگونه فهمیده است که کدام ظرف خالی و آب در کدامها و بنزین در کدامها بوده است و تعریف کننده هم حرف او را تصدیق کرد، همه دهانشان از تعجب باز ماند. آیا شما می‌توانید بگویید که چگونه فهمیده بود؟

پاسخ این معما در همین شماره و به صورت زیر است:

چون بنزین دو برابر آب است، گنجایش مجموع ظرفهایی که پر شده باید بر ۳ قابل قسمت باشد. مجموع گنجایشهای شش ظرف عبارت است از: ۱۳۷ لیتر. این عدد ۲ واحد از مضربی از ۳ بیشتر است. تنها ظرفی که گنجایش آن دو واحد از مضربی از ۳ بیشتر است عبارت است از: ظرف به گنجایش ۲۳ لیتر. بنابراین، این ظرف باید خالی مانده باشد و بقیّهٔ ظرفها پر باشند. مجموع گنجایش ظرفهای پر عبارت است از ۱۱۴ لیتر. ثلث این مقدار گنجایش ظرفهای مملو از آب است. یعنی گنجایش آن ظرفها برابر ۳۸ لیتر است، بنابراین ظرفهای ۱۶ و ۱۸ لیتر از آب و بقیّه از بنزین پر شده‌اند.

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر

غلامرضا یاسی‌پور

برای تشکیل دادن اثباتهای صوری درستی در مورد استدلالاتی که توسط سورها و توابع گزاره‌ای، علامتی شده‌اند، باید فهرست قوانین استنتاجمان را افزایش دهیم. برای این منظور چهار قانون حاکم بر تسویر را به فهرست اضافه می‌کنیم و گزارش مقدماتی بسیار ساده‌ای از آنان را در این بخش به دست می‌دهیم، و تنظیم کاملتر را برای بعد می‌گذاریم.

۱. تمثیل عمومی (توصیف مقدماتی): به علت این که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای اگر و فقط اگر تمام مثالهای جانشین آن تابع گزاره‌ای راست باشند، راست است، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که هر مثال جانشین یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از تسویر عمومیش استنتاج کرد، اضافه کنیم. این قانون را می‌توانیم به طور علامتی به صورت:

$(x)\ \varphi x$

$\therefore \varphi V$

که در آن V علامت فرد دلخواهی است، بیان کنیم. از آن جا که این قانون اجازه می‌دهد مثالهای جانشین از تسویرهای عمومی استنتاج شوند، به آن به عنوان «اصل تمثیل عمومی[1]» اشاره، و آن را به صورت «UI» خلاصه می‌کنیم[2]. به این ترتیب افزودن UI مجازمان می‌کند که اثبات صوری درستی استدلال: «تمام انسانها میرا هستند؛ سقراط انسان است؛ بنابراین سقراط میراست»، را به ترتیب زیر به دست دهیم:

۱. $(x)\ [Hx \Rightarrow Mx]$

۲. Hs $/ \therefore Ms$

۳. $Hs \Rightarrow Ms$ ۱ ،UI

۴. Ms ۲ ،۳ ،M.P.

۲. تعمیم عمومی (توصیف مقدماتی): قانون بعدیمان را می‌توانیم با شباهتی که با روش ریاضی نسبتاً استاندارد زیر دارد توضیح دهیم. ممکن است هندسه‌دانی اثباتی را با گفتن این که «فرض می‌کنیم: ABC مثلث منتخب دلخواهی باشد» آغاز و بعد اثبات کند که مثلث ABC فلان صفت مشخص را دارد و در آخر نتیجه بگیرد که تمام مثلثها آن صفت را دارند. در این صورت نتیجهٔ نهاییش چگونه توجیه می‌شود؟ و چرا از مثلث ABC که خاصیت مشخصی را داراست نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای آن خاصیت هستند؟ جواب این است که اگر هیچ فرضی جز مثلث بودن در مورد ABC در نظر گرفته نشده باشد، در این صورت عبارت «ABC» می‌تواند برای نمایش هر مثلثی که مایل باشیم در نظر گرفته شود و اگر استدلال بر این قرار باشد که هر مثلث باید دارای صفت مورد بحث باشد، در این صورت نتیجه می‌شود که تمام مثلثها دارای این صفت هستند. اکنون علامتی شبیه علامت این هندسه در اشاره به «هر مثلث منتخب دلخواه» معرفی می‌کنیم، و در این مورد حرف کوچک به کار نرفتهٔ «y» را برای نمایش دادن هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده به کار خواهیم برد.

در این استعمال عبارتِ «φy» مثال جانشین تابع گزاره‌ای «φx» است، و ادعا می‌کند که هر فرد به طور دلخواه انتخاب شده دارای خاصیت φ است. واضح است که «φy» به درستی از «$(x)\ \varphi x$» توسط UI نتیجه می‌شود؛ زیرا آنچه که در مورد تمام افراد راست باشد در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده نیز راست است. این استنتاج به طور مساوی در

جهت دیگر نیز درست است، زیرا آنچه که در مورد هر فرد به دلخواه انتخاب شده راست است باید در مورد تمام افراد راست باشد. باز هم فهرست قوانین استنتاجمان را، با افزودن این اصل که تسویر عمومی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان بدرستی از مثال جانشینش نسبت به علامت «y» استنتاج کرد افزایش می‌دهیم. از آن جا که این قانون استنتاج قضایای کُلّیی که تسویرهای عمومی‌اند را مجاز می‌کند، به آن به عنوان «اصل تعمیم عمومی[۳]» رجوع، و آن را به صورت «UG» مختصر می‌کنیم. عبارت علامتیمان در مورد این قانون تسویر دوم چنین است:

φ y

∴ (x) φ x

که در آن «y» نمایشگر هر فرد به دلخواه انتخاب شده‌ای است، می‌باشد.

می‌توانیم این علامت جدید و این قانون اضافه یعنی UG را در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال زیر بکار بریم: «هیچ میرایی کامل نیست؛ تمام انسانها میرا هستند؛ بنابراین انسانها کامل نیستند.»

۱. (x) [Mx ⇒ ~Px]
۲. (x) [Hx ⇒ Mx]   /∴ (x) [Hx ⇒ ~Px]
۳. Hy ⇒ My   ۲، UI
۴. My ⇒ ~Py   ۱، UI
۵. Hy ⇒ ~Py   ۳، ۴، H. S.
٦. (x)[Hx ⇒ ~Px]   ۵، UG

۳. تعمیم وجودی (توصیف مقدماتی): به این علت که تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای راست است اگر و تنها اگر آن تابع گزاره‌ای دارای حداقل یک مثال جانشین راست باشد، می‌توانیم به فهرست قوانین استنتاجمان این اصل را که تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای را می‌توان به درستی از هر مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای استنتاج کرد، بیفزاییم. این قانون، استنتاج قضایای عمومیی را که به طور وجودی تسویر یافته‌اند، مجاز می‌کند، بنابراین آن را «اصل تعمیم وجودی[۴]» می‌نامیم و به صورت «EG» مختصر می‌کنیم. تنظیم علامتی این اصل به صورت زیر است:

φ V

∴ (∃x) φ x

که در آن V هر علامت فردیی است.

۴. تمثیل وجودی (توصیف مقدماتی): به یک قانون تسویر دیگر نیاز است. تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای اظهار می‌کند که حداقل یک فرد موجود است که قرار دادن نام آن به جای متغیر «x» در آن تابع گزاره‌ای، مثال جانشین راستی از آن به دست می‌دهد. البته ممکن است که چیز دیگری در مورد آن فرد ندانیم، اما می‌توانیم ثابت فردی دیگری جز «y»؛ مثلاً «W»، که قبلاً در آن زمینه رخ نداده در نظر بگیریم، و آن را برای نمایش دادن آن فرد، یا یکی از افرادی که وجودش توسط آن تسویر وجودی اظهار شده، بکار بریم. با دانستن این که چنین فردی موجود است، و با موافقت کردن در نمایش آن با «W»، می‌توانیم از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای مثال جانشین آن تابع گزاره‌ای را نسبت به علامت فردی «W» استنتاج کنیم. به این ترتیب به عنوان آخرین قانون تسویرمان این اصل را بیفزاییم که از تسویر وجودی یک تابع گزاره‌ای، می‌توانیم راستی مثال جانشینش را نسبت به یک ثابت فردی که قبلاً در آن زمینه رخ نداده است، به درستی استنتاج کنیم. این قانون جدید را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

(∃ x) φ x

∴ φ V

که در آن V ثابتی فردی است، جز «y»، که قبلاً در بحث ظاهر نشده است. به این قانون به عنوان «**اصل تمثیل وجودی**[۵]» اشاره و آن را به صورت «EI» مختصر می‌کنیم.

از دو قانون تسویر اخیر در تشکیل اثبات صوری درستی استدلال: «تمام سگها گوشتخوارند؛ بعضی حیوانات سگ‌اند؛ بنابراین بعضی حیوانات گوشتخوارند» استفاده می‌کنیم.
[سگ : D، گوشتخوار : C، حیوان : A]

۱. (x) [Dx ⇒ Cx]
۲. (∃x) [Ax ∧ Dx]   / ∴   (∃x) [Ax ∧ Cx]
۳. Aw ∧ Dw   ۲، EI
۴. Dw ⇒ Cw   ۱، UI
۵. Dw ∧ Aw   ۳، com.
٦. Dw   ۵، simp.
۷. Cw   ۴، ٦، M. P.
۸. Aw   ۳، simp.
۹. Aw ∧ Cw   ۸، ۷، conj.
۱۰. (∃ x) [Ax ∧ Cx]   ۹، EG

می‌توانیم لزوم محدودیت بیان شده در مورد استفاده از EI را با بررسی استدلال واضحاً نادرست زیر نشان دهیم : «بعضی گربه‌ها حیوان‌اند؛ بعضی سگها حیوان‌اند؛ بنابراین بعضی گربه‌ها سگ‌اند» . در این مورد اگر از محدودیت مربوط به EI که مثال جانشین حاصل از آن تنها می‌تواند شامل ثابت فردیی که قبلاً در زمینهٔ بحث رخ نداده باشد، صرف نظر کنیم، ممکن است به تشکیل «اثبات» زیر رهمنون شویم :

[گربه : C ، حیوان : A ، سگ :D]

۱. $(\exists x)\ [Cx \wedge Ax]$

۲. $(\exists x)\ [Dx \wedge Ax]$ / ∴ $(\exists x)\ [Cx \wedge Dx]$

۳. $Cw \wedge Aw$ ۱ ، EI

۴. $Dw \wedge Aw$ ۲ ، EI

۵. Cw ۳ ، simp .

٦. Dw ۴ ، simp .

۷. $Cw \wedge Dw$ ۵ ، ٦ ، conj .

۸. $(\exists x)\ [Cx \wedge Dx]$ ۷ ، EG

در اینجا اشتباه در سطر ۴ رخ داده است. مقدمهٔ دوم اطمینان می‌دهد که حداقل یک شیء موجود است که هم سگ و هم حیوان است. ولی ما مجاز نیستیم که از علامت «w» برای نمایش دادن آن شیء استفاده کنیم زیر قبلاً «w» را برای نمایش دادن یکی از اشیایی که در مقدمهٔ اوّل ادعا شده است که هم گربه و هم سگ حیوان‌اند به کار برده‌ایم. برای اجتناب از خطاهایی نظیر این خطا باید از محدودیت مقرر در کاربرد EI پیروی کنیم. باید توجه شود که هرگاه در اثباتی هم EI و هم UI در تمثیل نسبت به یک ثابت فردی به کار رود، باید اوّل EI را به کاربریم. (چنین پیشنهاد شده که می‌توانیم از لزوم به کار بردن EI قبل از UI با تغییر محدودیت روی EI به صورت «که در آن U ثابتی فردی، غیر از «y» ، است که در زمینهٔ بحث با هیچ یک از استفاده‌های قبلی از EI معرفی نشده است» اجتناب کنیم. اما حتی این صورت نیز جدا از دوری بودن آشکارش از تشکیل «اثبات صوری درستی» خطاآمیز در مورد استدلالی نادرست چون «بعضی انسانها زیبا هستند. سقراط انسان است. بنابراین سقراط زیباست» جلوگیری نمی‌کند.)

چهار قانون تسویر UI ، UG ، EG ، و EI را مانند قوانین استنتاج نه گانهٔ قبلاً ذکر شده، می‌توان فقط در مورد سطرهای کامل اثبات به کاربرد.

هر فرض با برد محدود را می‌توان در یک اثبات شرطی درستی به کاربرد، و بخصوص در گرفتن فرضی به صورت «φy» آزادیم. بدین ترتیب درستی استدلال «تمام دانشجویان سال اوّل و دوم دانشگاه دعوت شده‌اند و از آنها پذیرایی می‌شود؛ بنابراین تمام دانشجویان سال اوّل دعوت شده‌اند» با استفاده از اثبات شرطی زیر ثابت می‌شود :

[F : دانشجوی سال اوّل، S : دانشجوی سال دوم، I : دعوت داشتن W : پذیرایی شدن]

۱. $(x)\ [(Fx \vee Sx) \Rightarrow (Ix \wedge Wx)]$ / ∴ $(x)\ [Fx \Rightarrow Ix]$

→ ۲. Fy

۳. $(Fy \vee Sy) \Rightarrow (Iy \wedge Wy)$ ۱ ، UI

۴. $Fy \vee Sy$ ۲ ، Add .

۵. $Iy \wedge Wy$ ۳ ، ۴ ، M . P .

٦. Fy ۵ ، simp

۷. $Fy \Rightarrow Iy$ ۲ ـ ٦ ، C . P .

۸. $(x)\ [Fx \Rightarrow Ix]$ ۷ ، UG

در اثبات درستی استدلالات شامل تسویرات، همان طور که در مثال زیر ملاحظه می‌شود می‌توان بیش از یک فرض با برد محدود در نظر گرفت :

۱. $(x)[(Ax \vee Bx) \Rightarrow (Cx \wedge Dx)]$

۲. $(x)\ \{(Cx \vee Ex) \Rightarrow [(Fx \vee Gx) \Rightarrow Hx]\}$

/∴ $(x)\ [Ax \Rightarrow (Fx \Rightarrow Hx)]$

۳. $(Ay \vee By) \Rightarrow (Cy \wedge Dy)$ ۱ ، UI

۴. $(Cy \vee Ey) \Rightarrow [(Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy]$ ۲ ، UI

→ ۵. $Fy \Rightarrow Hy$

٦. $Ay \vee By$ ۵ ، Add .

۷. $Cy \wedge Dy$ ۳ ، ٦ ، M . P .

۸. Cy ۷ ، simp .

۹. $Cy \vee Ey$ ۸ ، Add .

۱۰. $(Fy \vee Gy) \Rightarrow Hy$ ۴ ، ۹ ، M . P.

→ ۱۱. Hy

۱۲. $Fy \vee Gy$ ۱۱ ، Add .

۱۳. Fy ۱۰ ، ۱۲ ، M . P.

۱۴. Ay ۱۱ـ۱۳ ، C . P .

۱۵. $Ay \Rightarrow [Fy \Rightarrow Hy]$ ۵ ـ ۱۴ ، C . P .

UG، ۱۵ — ۱۶. (x)[Ax ⇒ (Fx ⇒ Hx)]

مرجع :

Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها:

1 . Principle of Universal Instantiation

۲ . این قانون و سه قانونی که بعد می آیند قوانین مختلف «قیاس طبیعی» «natural deduction»اند که در سال ۱۹۳۴ میلادی توسط گرهارد گنتزن «Gerhard Gentzen» و مستقل از او استانیسلاو یا شکوفسکی «Stanislaw Jas´kowsky» طرح شده‌اند.

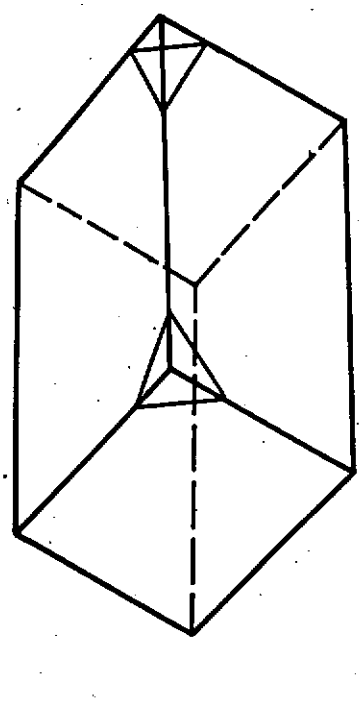
3. Principle of Universal Generalization

4. Principle of Existential Generalization

5. Principle of Existential Instantiation

تفریح اندیشه ۲

هر گوشهٔ منشور مربع‌القاعده‌ای را بریده‌ایم. دوبرش از هشت برش ممکن را نشان داده‌ایم. شکل جدید دارای چند یال است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

عدد اصم [alogos] عددی است که نمی‌توان آن‌را به‌صورت صحیح به‌وسیلهٔ اعداد دیگر تعبیر کرد؛ ابتدای این اکتشاف به‌صورت هندسی در آن هنگام بود که دریافتند قطر مربع واحد را نمی‌توان با ضلع یا اجزای آن هر اندازه هم که کوچک اختیار شده باشد اندازه گرفت.

آیا راه اثبات این اصم بودن چگونه است؟ روایتی را که در این‌باره است ارسطو نقل می‌کند، و راه اثبات آن‌را برهان خلف [reductio ad absurdum] می‌داند، این برهان به اندازه‌یی کوتاه و ساده است که ما آن‌را عیناً در این‌جا نقل می‌کنیم:

اگر مربعی با ضلع a و قطر c در دست باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که c و a نسبت به یکدیگر اندازه ناپذیرند. فرض کنیم که چنین نباشد و نسبت c/a میان آنها را به ساده‌ترین صورت با γ/α نمایش دهیم، که بنابرآن $c^2/a^2=\gamma^2/\alpha^2$ می‌شود؛ ولی $c^2 = 2a^2$ و در نتیجه $\gamma^2 = 2\alpha^2$ خواهد شد، به این ترتیب بایستی γ^2 و همچنین γ زوج و α فرد باشد. اگر γ زوج باشد می‌توان چنین نوشت: $\gamma = 2\beta$ و از آن‌رو: $2\alpha^2 = 4\beta^2 = \gamma^2$ و $\alpha^2 = 2\beta^2$ و نتیجه رابطهٔ اخیر آن است که α^2 و α باید زوج باشد. از این قرار α در آن واحد باید هم زوج باشد و هم فرد و این ممتنع و بالنتیجه فرضی که در ابتدا شده بود باطل است، یعنی c/a اندازه‌ناپذیر است.

تاریخ علم ـ احمد آرام

عمل حاصل‌ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها

مورد استفاده دانش‌آموزان سال دوّم ریاضی و سوّم ریاضی نظام جدید

● حمیدرضا امیری

در ریاضیات جدید سال اول با سه عملِ اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها آشنا شدید. در این مقاله عمل دیگری به نام حاصل ضرب دکارتی یا کارتزین بین هر دو مجموعهٔ دلخواه تعریف کرده و به بررسی خواص و نتایج آن می‌پردازیم ـ انشاءَالله... ـ در مقاله‌های بعدی خواهید دید که براساس همین تعریف به تعریف رابطه و تابع خواهیم رسید.

ابتدا نیاز داریم زوج مرتب را تعریف کنیم، هر دو شیء مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند و اگر برای این زوج ترتیب نیز قائل شویم به آنها یک زوج مرتب گفته و به صورت (x , y) نمایش می‌دهیم. بلافاصله از تعریف چنین برمی‌آید که در حالت کلّی ممکن است زوج مرتب (x , y) با (y , x) برابر نباشند (زیرا ترتیب قرار گرفتن آنها فرق دارد). لازم به تذکر است در هر مبحث اعضای آن مبحث، اشیای آن بحث می‌باشند مثلاً در مبحث حساب هر عدد یک شیء ریاضی است، یا در بحث مجموعه‌ها، هر مجموعه یک شیء محسوب می‌شود و نیز هر زوج مرتب می‌تواند یک شیء باشد. تذکر دیگر اینکه در زوج مرتب (x , y)، x را مؤلفهٔ اول و y را مؤلفهٔ دوم می‌نامیم.

تعریف تساوی بین دو زوج مرتب: دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی‌اند اگر و فقط اگر مؤلفه به مؤلفه با هم برابر باشند (مؤلفه‌های نظیر با هم برابر باشند). یا به عبارت دیگر:

$$(x , y) = (z , t) \Leftrightarrow x = z \ \& \ y = t$$

مثال ۱: هرگاه داشته باشیم $(x - y , ۲x - ۲) = (۲y + ۳ , x + y)$ در این صورت مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف فوق و با توجه به تساوی بین دو زوج باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - y = ۲y + ۳ \\ ۲x - ۲ = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۳y = ۳ \\ x - y = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-۱}{۲} \quad , \quad x = \frac{۳}{۲}$$

مثال ۲: در صورتی که داشته باشیم:

$$(\{۱ , x , z - ۱\} , (y - ۴ , ۷)) = (\{۴ , ۱ , z\} , (۵ , t^۲))$$

مطلوب است محاسبهٔ مقادیر x ، y ، z و t .

حل: طبق تعریف می‌بایست مؤلفه‌های اول این دو زوج که هر کدام یک مجموعهٔ ۳ عضوی است با هم برابر باشند و چون همواره $z \neq z-۱$ پس باید $x = z$ و $z - ۱ = ۴$ یا $z = ۵$ که نتیجه می‌دهد $x=z=۵$ و نیز باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند یعنی باید $(y - ۴ , ۷) = (۵ , t^۲)$ که بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} y - ۴ = ۵ \Rightarrow y = ۹ \\ ۷ = t^۲ \Rightarrow t = \pm\sqrt{۷} \end{cases}$$

مثال ۳: مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که دو زوج مرتبِ $(۴x , y^۲ + ۶y + ۳۰)$ و $(۳x^۲ + ۱ , ۲y^۲ - y)$ باهم برابر

باشند.

حل: شرط تساوی این دو زوج مرتب آن است که:

$$\begin{cases} ۳x^۲ + ۱ = ۴x \\ ۲y^۲ - y = y^۲ + ۶y + ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \\ y^۲ - ۷y - ۳۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳(x - ۱)(x - \frac{۱}{۳}) = ۰ \\ (y + ۳)(y - ۱۰) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \quad \text{یا} \quad x = \frac{۱}{۳} \\ y = -۳ \quad \text{یا} \quad y = ۱۰ \end{cases}$$

جوابهای فوق ۴ دسته جواب به صورت

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = -۳ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱۰ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = -۳ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = ۱۰ \end{cases}$$

برای ما حاصل می‌کنند، که در هر حالت تساوی بین دو زوج برقرار است.

حال برمی‌گردیم و به سراغ حاصل ضرب دکارتی می‌رویم، $A \times B$ را حاصل ضرب دکارتی A در B نامیده که A و B دو مجموعهٔ دلخواه بوده و حاصلِ چنین عملی مجموعه‌ای است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x , y) \mid x \in A \ \wedge y \in B\}$$

همانطور که از تعریف مشخص است $(A \times B)$ مجموعه‌ای است متشکل از زوجهای مرتب که مؤلفهٔ اوّل همهٔ آنها متعلق به مجموعهٔ A و مؤلفهٔ دوم آنها متعلق به مجموعهٔ B است.

مثال ۴: اگر $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{۲,۴,۶\}$ مطلوب است محاسبهٔ $(A \times B)$ و $(B \times A)$.

$A \times B = \{(a,۲),(a,۴),(a,۶),(b,۲) , (b,۴) , (b,۶),(c,۲) , (c,۴) , (c,۶)\}$

$B \times A = \{(۲,a),(۴,a),(۶,a),(۲,b) , (۴,b) , (۶,b),(۲,c) , (۴,c) , (۶,c)\}$

نکتهٔ ۱: می‌توان حاصل ضرب یک مجموعه را در خودش به صورت زیر نوشت:

$$A \times A = A^۲ = \{(x , y) \mid x \in A \ \wedge y \in A\}$$

در مثال ۴ داریم:

$A^۲ = A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a) , (c,b) , (c,c)\}$

نکتهٔ ۲: اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ k عضوی باشد در این صورت $(A \times B)$ دارای $m \times k$ عضو است، یا به بیان ریاضی،

$$(n(A) = m \wedge n(B) = k) \implies n(A \times B) = mk$$

نکتهٔ ۳: عمل حاصل ضرب را می‌توان به صورتهای زیر بین مجموعه‌های متفاوت تعریف کرده و تعمیم دهیم:

الف) $A\times(B\times C) = \{(x,(y,z)) \mid x \in A \wedge (y,x) \in (B\times C)\}$

ب) $(A \times B) \times (C \times D) =$
$\{((x , y) , (z , t)) \mid (x , y)\in A \times B \wedge (z , t)\in C \times D\}$

ج) $A^۲ \times A^۲ = \{((x,y),(z,t)) \mid (x,y) \in A^۲ \wedge (z,t) \in A^۲\}$

نکتهٔ ۴: اگر زوج مرتب (x , y) متعلق به $(A \times B)$ باشد فقط می‌توان نتیجه گرفت که، $x \in A$ و $y \in B$ امّا، در صورتی که (x,y) در $(A \times B)$ نباشد، در سه حالت ممکن است این اتفاق رخ دهد و برعکس، هر کدام از این سه حالت پیش آید بلافاصله نتیجه می‌گیریم که (x , y) در $(A \times B)$ نیست، یعنی:

$$(x , y) \notin (A \times B) \iff \begin{cases} x \notin A \ \wedge y \in B \\ x \in A \ \wedge y \notin B \\ x \notin A \ \wedge y \notin B \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر B مجموعهٔ دلخواهی باشد و $A = \{۲ , ۴\}$ در این صورت $(۳, x) \notin A \times B$ (به ازای هر x) زیرا $۳ \notin A$.
و اگر $(۲, t) \notin A \times B$ چون $۲ \in A$ پس باید $t \notin B$.

مسألهٔ ۱: ثابت کنید برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A،

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$$

اثبات: فرض کنیم $A \times \varnothing \neq \varnothing$ (فرض خُلف) بنابراین داریم:

$$\exists (x , y) \in (A \times \varnothing) \implies x \in A \ \wedge y \in \varnothing$$

و گزارهٔ $y \in \varnothing$ همواره نادرست بوده و تالیِ گزارهٔ شرطی فوق که از فرض خلف حاصل شده، ارزش نادرست داشته و کلِ گزارهٔ شرطی نادرست خواهد شد (مقدم را درست فرض کرده‌ایم)، یعنی نمی‌تواند (x , y) ای در $(A \times \varnothing)$ موجود باشد که با فرض تناقض

دارد، زیرا فرض کرده بودیم که $A \times \varnothing \neq \varnothing$، بنابراین همواره باید $A \times \varnothing = \varnothing$ و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\varnothing \times A = \varnothing$.

نتیجهٔ ۱ : تنها مجموعه‌ای که حاصل ضرب دکارتی در خودش برابر با خودش خواهد شد، مجموعهٔ تُهی است یعنی: $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

نتیجهٔ ۲ : همواره داریم:

$$(A \times B) = \varnothing \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

اثبات :

زیرا اگر $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ پس

$$\exists x \in A \wedge \exists y \in B \implies \exists (x , y) \in (A \times B)$$

وچنین مطلبی با فرض $A \times B = \varnothing$ تناقض دارد پس حکم ثابت است.

نتیجهٔ ۳ : همواره داریم:

$$n\,(A \times B) = 0 \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

مسألهٔ ۲ : ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $A \times B = B \times A$ آن است که $A = B$ یا $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$.

$$A \times B = B \times A \iff A = B \vee \underbrace{A = \varnothing \vee B = \varnothing}_{n\,(A \times B) = 0}$$

اثبات :

شرط لازم : اگر $A = B$ واضح است که $A \times B = B \times A$ (به جای A، B قرار می‌دهیم) اگر $A = \varnothing$ پس:

$$\left.\begin{aligned} A \times B &= \varnothing \times B = \varnothing \\ B \times A &= B \times \varnothing = \varnothing \end{aligned}\right\} \implies A \times B = B \times A$$

و به همین قیاس اگر $B = \varnothing$، حکم ثابت می‌شود.

شرط کافی : حال فرض کنیم $A \times B = B \times A$، اگر $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$ که حکم ثابت است (زیرا حکم گزاره‌ای با ترکیب فصلی است) پس فرض می‌کنیم $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ و ثابت می‌کنیم که باید $A = B$.

چون A و B ناتهی هستند لذا می‌توان x دلخواهی از A و y دلخواهی از B گرفته و ثابت می‌کنیم x در B و y در A بوده و برعکس.

$$[x \in A \wedge y \in B \iff (x , y) \in (A \times B) \overset{(A\times B)=(B\times A)}{\iff} (x , y) \in (B \times A) \iff x \in B \wedge y \in A] \implies A = B$$

مسألهٔ ۳ : ثابت کنید هرگاه $A \neq \varnothing$ آنگاه :

$$(A \times B) \subset (A \times C) \iff B \subset C$$

اثبات :

ابتدا فرض می‌کنیم $B \subset C$ بنابراین:

$$[\text{اگر } (x , y) \in (A \times B) \implies x \in A \wedge y \in B \overset{B \subset C}{\implies} x \in A \wedge y \in C \implies (x, y) \in (A \times C)] \implies (A \times B) \subset (A \times C)$$

حال فرض کنیم $(A \times B) \subset (A \times C)$، ثابت می‌کنیم $B \subset C$. برای نیل به این هدف عضو دلخواهی مانند y از B فرض کرده و ثابت می‌کنیم $y \in C$.

$$A \neq \varnothing \implies \exists x \in A \implies x \in A \wedge \underline{y \in B} \overset{y \text{ دلخواه}}{\implies} (x,y) \in (A\times B) \overset{(A\times B)\subset(A\times C)}{\implies} (x,y) \in (A\times C) \implies x\in A \wedge \underline{y\in C}$$

و چون $y \in B$ دلخواه بوده و ثابت شد $y \in C$ پس باید $B \subset C$.

مسألهٔ ۴ : ثابت کنید برای هر چهار مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C و D داریم:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

اثبات :

$$[\text{فرض کنیم } (x , y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \overset{\text{تعریف } \cap}{\iff} (x , y) \in (A \times B) \wedge (x , y) \in (C \times D) \iff$$

$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D) \overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{\iff}$$

$$(x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \iff$$

$$x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D) \iff$$

$$(x , y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)] \implies$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

نتیجهٔ ۴ : با توجه به اینکه:

$$n\,(E \cup F) = n\,(E) + n\,(F) - n\,(E \cap F)$$

و با توجه به این نکته که $n\,(A \times B) = n\,(B \times A)$ و مسألهٔ قبل داریم:

$$n\,[(A \times B) \cup (B \times A)] = n\,(A \times B) + n\,(B \times A) -$$

$$n\,[(A \times B) \cap (B \times A)] = n\,(A \times B) + n\,(A \times B) -$$

$n[(A\cap B)\times \underbrace{(B\cap A)}_{(A\cap B)}] = ۲n(A\times B) - n(A\cap B)^۲$

$= ۲n(A\times B) - n(A\cap B)\times n(A\cap B)$

$= ۲n(A\times B) - [n(A\cap B)]^۲$

مثال ۵: اگر $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $B = \{۲, ۶, ۳, ۹\}$ در این صورت:

$n[(A\times B)\cup(B\times A)] = ۲n(A\times B) - [n(A\cap B)]^۲$

و $A\cap B = \{۲, ۶\} \Rightarrow n(A\times B)\cup(B\times A)$

$= (۲\times ۱۶) - ۲^۲ = ۲۸$

مسألهٔ ۵: هرگاه A و B هر دو زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مرجع M باشند ثابت کنید:

$(A\times B)' = (A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')$

اثبات:

با توجه به نکته ۴ و به روش عضوگیری داریم:

فرض کنیم $(x, y)\in(A\times B)' \Leftrightarrow (x, y)\notin(A\times B)$

$\Leftrightarrow (x\notin A \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\notin B)\vee(x\notin A \wedge y\notin B)$

$\Leftrightarrow (x\in A' \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\in B')\vee(x\in A' \wedge y\in B')$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A'\times B)\vee(x,y)\in(A\times B')\vee(x,y)\in(A'\times B')$

$\Leftrightarrow (x, y)\in[(A'\times B)\cup(A\times B')\cup(A'\times B')]$

و چون عضو دلخواهی را از سمت چپ به سمت راست رسانیدیم و برعکس، بنابراین تساوی برقرار است و اثبات تمام است.

مسألهٔ ۶: ثابت کنید برای هر ۳ مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C داریم:

الف) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

ب) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

ج) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$

اثبات:

قسمت (ب) و (ج) را اثبات کرده و (الف) را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم:

ب) فرض می‌کنیم $(x,y)\in[A\times(B\cap C)] \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C)$

چون همواره $P\wedge P\equiv P$ پس $(x\in A\wedge x\in A)\equiv x\in A$، بنابراین

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\in C)$

شرکت‌پذیری و جابجایی

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\wedge(x, y)\in(A\times C)$

$\Leftrightarrow (x, y)\in[(A\times B)\cap(A\times C)]$

و چون روبط همگی دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

ج) فرض کنیم $(x,y)\in[A\times(B-C)] \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B-C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in A)\wedge(y\in B \wedge y\notin C)$

جابجایی و شرکت‌پذیری

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in A \wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x, y)\in(A\times B)\wedge(x, y)\notin(A\times C)$

$\Leftrightarrow (x, y)\in[(A\times B)-(A\times C)]$

و چون روابط دوطرفه هستند، تساوی برقرار است.

مسألهٔ ۷: اگر $A = \{x\in IR \mid ۱\le x\le ۲\}$ و $B = \{۴\}$ در این صورت $(A\times B)$ چه شکلی را در صفحه مختصات دکارتی تولید می‌کند؟

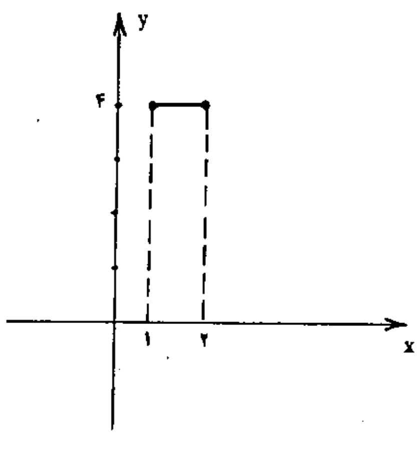
حل:

$A\times B = \{(x, y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$

$= \{(x, y) \mid ۱\le x\le ۲ \wedge y = ۴\}$

$= \{(۱,۴),\dots,(۱/۱,۴),(۱/۰۱,۴),\dots,(۲,۴)\}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مجموعهٔ $(A\times B)$ شامل همهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات دکارتی است که طول آن نقاط هر عدد حقیقی بین ۱ و ۲ می‌توانند باشد ولی عرض همهٔ نقاط ثابت و برابر ۴ می‌باشد پس شکل حاصل از وصل این بی‌نهایت نقطه به یکدیگر، پاره‌خطی است به طول ۱ و به عرض ۴، از مبدأ، مطابق شکل زیر:



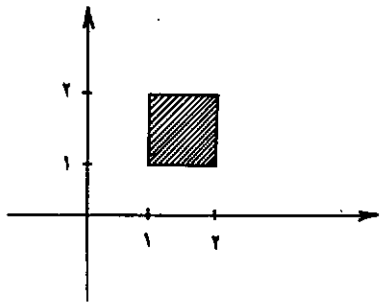
مسألهٔ ۸: با توجه به مسألهٔ ۷ نمودار $(A \times A)$ را مشخص کنید.

حل:

$$A = \{x \in IR \mid ۱ \le x \le ۲\}$$

$$\Longrightarrow A \times A = \{(x,y) \mid ۱ \le x \le ۲ \wedge ۱ \le y \le ۲\}$$

در واقع $(A \times A)$ مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که طول و عرض این نقاط در داخل و روی مربعی به طول واحد و به شکل زیر، تغییر می‌کنند.



مسألهٔ ۹: اگر $A \subset E$ و $B \subset E$ ثابت کنید:

$$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \times B)$$

اثبات:

با توجه به مسألهٔ ۴ داریم:

$$(A \times E) \cap (E \times B) = (A \cap E) \times (E \cap B) = A \times B$$

زیرا از $A \subset E$ نتیجه می‌گیریم $(A \cap E) = A$ و از $B \subset E$ نتیجه می‌شود $(E \cap B) = B$.

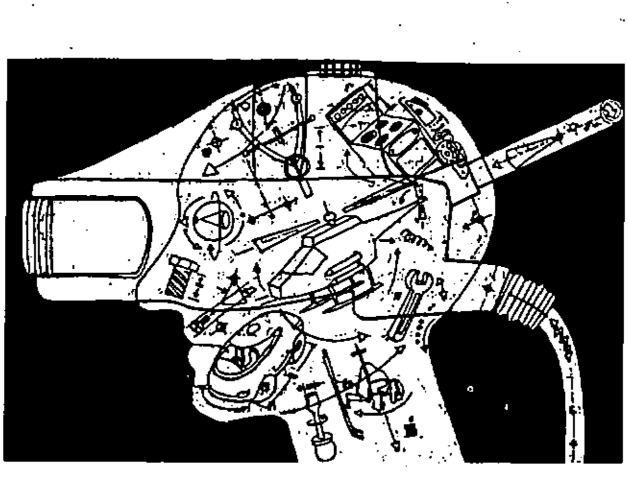
در شمارهٔ آیندهٔ مجله ـ ان‌شاءا... ـ راجع به رابطه‌ها و خواص رابطه‌ها نیز مطالبی خواهیم نوشت که امیدواریم مفید واقع شود.

والسلام

ادب ریاضی

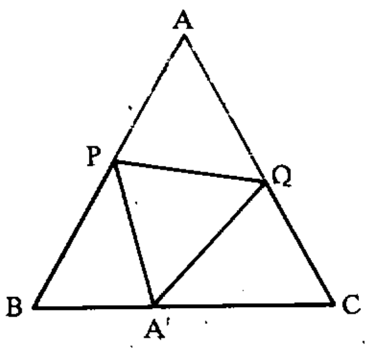
این که مردمی بی‌شعور قابلیت آن را دارند که بخوبی دستگاه‌های پیچ در پیچ صنعتی و فنی را بفهمند و آنها را به کار بیندازند، امری است که همیشه مایهٔ شگفتی من بوده است، و از آن بیشتر تعجب می‌کنم که چرا این گونه مردم نمی‌توانند مسائل بسیار ساده را درک کنند.

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام



تفریح اندیشه ۳

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری تا کرده‌ایم که رأس A ی آن، چنان که در شکل نشان داده شده است، بر $\overline{BC}$ قرار گرفته است. اگر $BA' = ۱$ و $A'C = ۲$، آنگاه طول خط تا $\overline{PQ}$، چه قدر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۹)

از کتاب :
Famous Problems
● ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور

مسألهٔ دلیان و تثلیث زاویه

۱. قضیهٔ کلی فصل پیشین[1] را در مورد مسألهٔ دلیان[2]، یعنی، مسألهٔ تضعیف مکعب[3] به کار می‌بریم. معادلهٔ این مسأله آشکارا به صورت زیر است:

$$x^۳ = ۲$$

این معادله تحویل‌ناپذیر است، زیرا در غیر این‌صورت $\sqrt[۳]{۲}$ دارای مقداری گویا خواهد شد. چه، معادلهٔ درجه سومی که تحویل‌پذیر است باید عامل خطی گویایی داشته باشد.

گذشته از این، درجهٔ معادله به صورت ۲^n نیست؛ در نتیجه، معادلهٔ مورد بحث نمی‌تواند به کمک ریشه‌های دوم حل شود، و ترسیم هندسی آن با خط‌کش نامدرج و پرگار ناممکن است.

۲. بعد به بررسی معادلهٔ عمومیتر

$$x^۳ = \lambda$$

می‌پردازیم، که λی آن پارامتری را، که ممکن است مقداری مختلط به صورت $a + ib$ نیز باشد، نشان می‌دهد. این معادله عبارتهای تحلیلی مربوط به مسأله‌های هندسی تضعیف مکعب و تثلیث زاویه[4]ای دلخواه را به دست می‌دهد.

این سؤال مطرح می‌شود که این معادله تحویل‌پذیر است، یعنی، یکی از ریشه‌های آن می‌تواند به صورت تابعی گویا از λ بیان شود یا خیر.

باید خاطرنشان کرد که تحویل‌ناپذیری یک عبارت همواره به مقادیر کمیتهایی بستگی دارد که طبق فرض معلومند.

در حالت $x^۳ = ۲$، با کمیتهای عددی سروکار داشتیم، و سؤال این بود که $\sqrt[۳]{۲}$ می‌تواند مقدار عددی گویایی را داشته باشد یا خیر.

در معادلهٔ $x^۳ = \lambda$ می‌پرسیم که ریشه‌ای از آن می‌تواند با تابع گویایی از λ نمایش داده شود یا خیر. در حالت اوّل، حوزهٔ موسوم به حوزهٔ گویا بودن[5] جامع مجموعهٔ عددهای گویاست؛ در حالت دوم، از تابعهای گویای یک پارامتری تشکیل شده است.

اگر هیچ گونه محدودیتی بر این پارامتر قرار داده نشود بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که هیچ عبارتی به صورت $\frac{\phi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$، که $\phi(\lambda)$ و $\psi(\lambda)$ی آن چند جمله‌ای‌اند، نمی‌تواند در معادله‌مان صدق کند.

بنابراین، معادلهٔ مورد بحث، تحت فرضمان، تحویل‌ناپذیر است، و از آن‌جا که درجهٔ آن به صورت ۲^n نیست، نمی‌تواند با استفاده از ریشه‌های دوم حل شود.

۳. اکنون تغییرپذیری λ را محدود می‌کنیم.

فرض می‌کنیم :

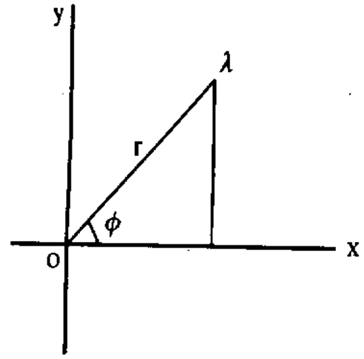
$$\lambda = r\,(\cos\phi + i\sin\phi)$$

و از آن

$$\sqrt[۳]{\lambda} = \sqrt[۳]{r}\,\sqrt[۳]{\cos\phi + i\sin\phi}$$

مسأله‌مان خود را به دو قسمت تجزیه می‌کند، به استخراج ریشه‌های سوم یک عددی حقیقی، نیز استخراج عددی مختلط به

صورت $\cos\phi + i\sin\phi$، که هر دو عدد به صورت دلخواه در نظر گرفته شده‌اند. دو حالت مزبور را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.



I. ریشه‌های معادلهٔ $x^3 = r$ عبارتند از:

$$\sqrt[3]{r} \quad , \quad \varepsilon\sqrt[3]{r} \quad , \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{r}$$

که توسط ε و ε^2 ریشه‌های سوم مختلط واحد:

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

نمایش داده شده‌اند.

با درنظر گرفتن مجموعهٔ تابعهای گویای r به عنوان حوزهٔ گویا بودن، بنا به استدلال پیشین می‌دانیم که $x^3 = 2r$ تحویل‌پذیر است.

در نتیجه مسألهٔ تضعیف مکعب، در حالت عمومی، ترسیم به کمک خط‌کش نامدرج و پرگار را نمی‌پذیرد.

II. ریشه‌های معادلهٔ $x^3 = \cos\phi + i\sin\phi$

بنابه فرمول دموآور[6] عبارتند از:

$$x_1 = \cos\frac{\phi}{3} + i\sin\frac{\phi}{3} \qquad x_2 = \cos\frac{\phi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\phi + 2\pi}{3}$$

$$x_3 = \cos\frac{\phi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\phi + 4\pi}{3}$$

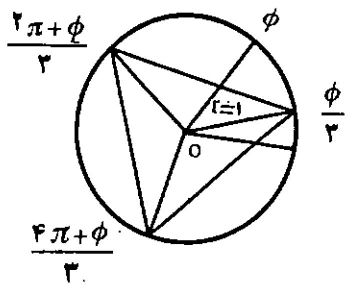
ریشه‌های مزبور از لحاظ هندسی توسط رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی نمایش داده می‌شود که در دایره‌ای با شعاع واحد و مرکز در جای شکل مبدأ محاط است.

شکل بالا سمت چپ نشان می‌دهد که ریشهٔ x_1 متناظر با آرگومان $\frac{\phi}{3}$ است.

در نتیجه معادلهٔ:

$$x^3 = \cos\phi + i\sin\phi$$

عبارت تحلیلی مسألهٔ تثلیث زاویه است.



اگر این معادله تحویل‌پذیر باشد، حداقل، یکی از ریشه‌های آن می‌تواند به صورت تابعی گویا از $\cos\phi$ و $\sin\phi$ نمایش داده شود، در حالی که مقدار آن با قرار دادن $2\pi + \phi$ به جای ϕ بی‌تغییر می‌ماند.

اما اگر تبدیل مورد بحث را، با تغییر پیوسته‌ای از زاویهٔ ϕ، انجام دهیم، ملاحظه می‌کنیم که ریشه‌های x_1 ، x_2 ، x_3 متحمل جایگشتی دوری[7] می‌شوند.

در نتیجه هیچ یک از ریشه‌ها نمی‌تواند به صورت تابعی گویا از $\cos\phi$ و $\sin\phi$ نمایش داده شود. معادلهٔ تحت بررسی تحویل‌ناپذیر است و بنابراین نمی‌تواند به کمک تعدادی متناهی از ریشه‌های دوم حل شود. در نتیجه تثلیث زاویه را نمی‌توان با خط‌کش نامدرج و پرگار انجام داد.

اثبات فوق و قضیهٔ عمومی مورد بحث آشکارا تنها در حالتی که ϕ زاویه‌ای دلخواه است برقرارند؛ اما به ازای مقادیر خاصی از ϕ می‌توان اثبات کرد که ترسیم مورد نظر امکان‌پذیر است، فی‌المثل وقتی که، $\phi = \frac{\pi}{2}$.

یادداشتها

۱. این قضیه عبارت است از: اگر x، کمیت مورد ترسیم، تنها به عبارات گویا و ریشه‌های دوم وابسته باشد، در این صورت ریشهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر $\phi(x) = 0$ است، که درجهٔ آن همواره توانی از ۲ است.

2 . Delian Problem

3 . duplication of the cube

تضعیف مکعب یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دقیقاً دوبرابر حجم مکعبی مفروض، و در حالت خاص مکعبی که طول ضلعش واحد باشد.

4 . trisection of the angle

تثلیث زاویه یعنی تقسیم یک زاویه به سه قسمت برابر.

5 . domain of rationality

6 . De Moivre's formula

7 . cyclic permutation

ادامه گزارش بیست و پنجمین
کنفرانس ریاضی کشور

قسمت دوم

در این روز از پنج تن از پیشکسوتان ریاضی کشور به نامهای استاد **احمد بیرشک**، استاد دکتر **علی افضلی پور**، استاد دکتر **اسدالله آل بویه**، استاد دکتر **بهمن مهری**، استاد دکتر **مهدی بهزاد** تجلیلی شایسته و در خور به عمل آمد.

در جزوهٔ **تجلیل از پیشکسوتان کنفرانس**، که به همین مناسبت انتشار یافته است، با فرازهایی از زندگی استادان مزبور، که مختصری از آنها را در زیر آورده‌ایم، آشنا می‌شویم.

● **استاد احمد بیرشک** روز جمعه ۱۰ ذیحجهٔ ۱۳۲۴ هجری قمری مقارن با ۴ بهمن ۱۲۸۵ هجری شمسی متولد شد. پدر وی عضو گمرک بود و همهٔ عمر را در مرزهای کشور گذرانید؛ به همین علت پسر خانواده نتوانست تحصیلات آموزشگاهی منظمی به‌دست آورد و همین موجب کشیده شدنش به خودآموزی شد.

او دورهٔ شش سالهٔ دبیرستان را در دو سال و سه ماه (از تیر ۱۳۰۶ تا شهریور ۱۳۰۸) طی کرد و در شهریور ۱۳۰۸ در امتحان کلاس ششم قبول شد و در دارالمعلمین عالی ثبت نام کرد.

در ۱۳۱۱ در رشتهٔ ریاضی تحصیل را به پایان برد و وارد مشاغل دولتی شد. در ۱۳۱۵ به ریاست جامعهٔ لیسانسیه‌های دانشسرای عالی رسید و در ۱۳۲۱ به دانشگاه منتقل شد. در این سال از طرف دکتر **علی اکبر سیاسی**، رئیس دانشگاه و وزیر فرهنگ به تشکیل و گرداندن ادارهٔ کارگزینی دانشگاه منصوب شد و تا ۱۳۳۴ در این شغل باقی ماند.

از ۱۳۲۴ تا ۱۳۴۲ در رشتهٔ معماری دانشکدهٔ هنرهای زیبای تهران، و نیز از ۱۳۳۷ تا ۱۳۳۹ در دانشسرای عالی به تعلیم ریاضی پرداخت، و به سال ۱۳۴۲ بازنشسته شد.

در سال ۱۳۲۷ با همکاری بعضی از فرهنگیان، گروه فرهنگی هدف را تأسیس کرد. کار این گروه تا بدان جا رسید که ۱۳ مدرسهٔ روزانه پیدا کرد و تعداد دانش آموزانش متجاوز از ۱۴۰۰۰ نفر شد.

از ۱۳۲۷ تا ۱۳۵۶ در گروه فرهنگی هدف به‌کار پرداخت و از آن پس به ویراستاری کتابهای دانشگاهی و غیر دانشگاهی مشغول است و در فرصتهای مناسب دست به تألیف و ترجمه نیز می‌زند.

استاد بیرشک در حال حاضر مسؤول ادارهٔ بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی است. آثار ایشان عبارتند از: هشت جلد کتاب ریاضیات دبستانی، چهل و هشت جلد کتاب ریاضیات دبیرستانی، سه جلد کتاب ریاضیات دانشگاهی، و کتابهای ریاضیات عام دیگری از قبیل: ریاضیات نوین، فلسفهٔ ریاضی، فرض و اسطوره در فیزیک، هندسهٔ لباچفسکی، هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیات نو برای معلمان، ریاضیات برای خانمها، و ...

● در شرح حال استاد دکتر **علی افضلی پور** از قول خودشان چنین می‌خوانیم:

روز ۲۴ بهمن ۱۲۸۵ شمسی در تهران متولد شدم و در خرداد ۱۳۰۷ گواهینامهٔ دورهٔ دوم دبیرستان را با احراز رتبهٔ اول به‌دست آوردم.

در مهرماه همان سال، پس از پذیرفته شدن در مسابقه، جزو نخستین گروه دانشجویان ایرانی، برای آموختن ریاضی، به پاریس رفتم.

روز ۲۳ دی ۱۳۱۴ شمسی رسالهٔ دکتری خود را در دمگرافی ریاضی گذرانیدم و نخستین دانشجوی ایرانی بودم که به افتخار درجهٔ دکتری در ریاضی نائل شدم.

از بهمن ماه ۱۳۱۴ شمسی خدمت آموزشی خود را در دانشسرای عالی و دانشکدهٔ علوم دانشگاه در آن زمان نوبنیاد تهران آغاز کردم.

در سال ۱۳۲۶ شمسی بار دیگر به فرانسه رفتم و دورهٔ دو سالهٔ انستیتوی آمار دانشگاه پاریس را در یک سال گذرانیده در خرداد ۱۳۲۷ دانشنامهٔ تخصص در آمار را به‌دست آوردم.

در مهرماه ۱۳۱۶ شمسی تدریس درس نظریهٔ احتمال و آمار و در مهر ماه ۱۳۱۷ شمسی تدریس درس نظریهٔ آنالیز مختلط به من محول شد.

و بدین سان خدمات آموزشی من در دانشگاه تهران چهل و سه سال از ۱۳۱۴ تا ۱۳۵۳ شمسی ادامه داشته است.

استاد شش بار نمایندهٔ رسمی ایران در کنفرانسهای علمی بین‌المللی بوده و تاکنون بیست کتاب (۵۵۰۰ صفحه) به زبانهای فارسی، فرانسوی، و انگلیسی تألیف یا ترجمه کرده که برخی از آنها شامل پژوهشهای ابتکاری خود ایشان در رشته‌های گوناگون ریاضی بوده است.

سی و دو بار در کنفرانسهای علمی ملی و بین‌المللی به فارسی، فرانسوی، و انگلیسی سخنرانی کرده‌اند. در آذر ماه ۱۳۵۳ شمسی به اخذ نشان فرهنگی درجه اوّل از وزارت آموزش و پرورش نایل، و در بهمن ماه ۱۳۵۶ شمسی به‌عنوان استاد ممتاز دانشگاه تهران برگزیده شده‌اند.

● استاد دکتر **اسدالله آل بویه** متولد چهارم آبان ۱۲۸۷ شمسی در دیلمان گیلان است.

به سال ۱۳۰۷ شمسی گواهینامهٔ متوسطه را دریافت کرد و در شهریور همان سال به فرانسه اعزام شد. از دانشکدهٔ علوم نانسی دانشنامهٔ ریاضیات عمومی و دانشنامهٔ محاسبات دیفرانسیل و انتگرال و دانشنامهٔ مکانیک استدلالی به‌دست آورد. از همین دانشکده دانشنامهٔ فوق لیسانس هندسهٔ عالی و از دانشگاه سوربون (پاریس) دکترای علوم ریاضی را اخذ می‌کند.

در بهمن ۱۳۱۴ شمسی به ایران بازگشت و در فروردین ۱۳۱۵ شمسی با رتبهٔ ۱ دانشیاری استخدام شد. استاد علاوه بر تدریس در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی و دانشکدهٔ فنی به خدمات اداری نیز پرداخت و چندی رئیس کل کارگزینی وزارت دارایی و مدیر کل دبیرخانهٔ دانشگاه و معاون کل وزارت فرهنگ نیز بود. تألیفات علمی استاد عبارتند از:

یک جلد هندسهٔ دیفرانسیل شبکه‌های سطح (رسالهٔ دکترای ریاضی)، چهار جلد هندسه برای سالهای ۴ ـ ۱ دبیرستان، دو جلد هندسه برای سالهای ۵ و ۶ دبیرستان، یک جلد هندسهٔ ترسیمی و رقومی برای سال ۶ دبیرستان، یک جلد هندسهٔ عالی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس، دو جلد حسابهای هندسی برای دانشجویان دورهٔ لیسانس و فوق لیسانس، یک جلد هندسه‌های گوناگون برای دانشجویان دورهٔ فوق لیسانس، مقالات علمی و فلسفی.

علاوه بر اینها استاد دارای دیوانهای شعر، موسوم به دیوان بویه، مجموعاً هشت دفتر، نیز هستند.

● استاد دکتر **بهمن مهری** در ۲۶ فروردین ۱۳۱۵ هجری شمسی در خانواده‌ای گیلانی در اصفهان متولد شد. دورهٔ ابتدایی را در مدرسهٔ عنصری رشت و دورهٔ دوم را تا ششم متوسطه در دبیرستان البرز تهران در رشتهٔ ریاضی گذراند.

در سال ۱۳۳۶ شمسی مدرک لیسانس ریاضی و تعلیم و تربیت از دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه تهران دریافت کرد. به سال ۱۹۶۰ میلادی وارد دانشگاه مینه سوتا شده و به سال ۱۹۶۳ مدرک فوق لیسانس ریاضی خود را گرفت و بالاخره در سال ۱۹۶۷ با ارائه تزی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل دربارهٔ «Turning Point» از دانشگاه مدیسین ویسکانسین مدرک دکتری گرفت.

وی از سال ۱۳۴۵ شمسی تاکنون در دانشگاه صنعتی شریف به تدریس مشغول است. از مهمترین شاگردان ایشان؛ دکتر **حسام الدین ارفعی** و دکتر **حصارکی** (اساتید دانشگاه صنعتی شریف)، دکتر **پرویز خواجه خلیلی** (استاد یکی از دانشکده‌های آمریکا)، دکتر **عشرت ارجمندی** و دکتر **قائم مقامی** (استادان دانشگاه‌های کانادا) را می‌توان نام برد.

استاد مهری موفقیتهای خود را همواره مدیون پروفسور **تقی فاطمی**، مرحوم دکتر **محمد باقر هوشیار**، و پروفسور رودین می‌داند. تاکنون چهل و پنج مقاله در مجلات ریاضی آمریکا، شوروی، مجارستان، ایتالیا، ایران، و ... به چاپ رسانده است. در «تئوری کنترل» کار کرده است. استاد راهنمای نُه نفر در تز فوق لیسانس بوده است، و در حال حاضر با دو دانشجوی دکترای مکانیک کار می‌کنند.

پنجمین نفر از پیشکسوتان ریاضی منتخب بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور استاد دکتر **مهدی بهزاد** متولد ۲ اردیبهشت ۱۳۱۵ شمسی است. زندگینامهٔ استاد به‌طور خلاصه به‌صورت زیر است:

تحصیلات: لیسانس ریاضی دانشگاه تربیت معلم (۱۳۳۹)، فوق لیسانس ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان آمریکا (۱۳۴۱)، دکترای ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان آمریکا (۱۳۴۴).

سوابق استخدامی: از مربی دانشگاه تربیت معلم آغاز می‌شود و از استادیاری دانشگاه ایالتی وین و دانشیاری دانشگاه شیراز و میشیگان غربی و شهید بهشتی می‌گذرد و به استادی دانشگاه شریف می‌رسد. وی در حال حاضر استاد تمام وقت دانشگاه «شهید بهشتی» است.

سمتهای اداری ـ علمی: دبیر انجمن ریاضی ایران، سرپرست دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف، دبیر کل فرهنگستان علوم ایران؛ قائم مقام و معاون آموزشی ـ پژوهشی دانشگاه مازندران، رئیس بخش علوم پایهٔ شورای پژوهشهای علمی کشور، عضو گروه ریاضی فرهنگستان زبان ایران.

استاد عضو هیأت تحریریهٔ ژورنال نظریهٔ گراف چاپ آمریکا، عضو هیأت تحریریهٔ بولتن انجمن ریاضی ایران، مدیر مسؤول و ویراستار مجلهٔ نشر ریاضی، ویراستار کتابهای ریاضی نشر دانشگاهی، داور مقالات بسیار مجله‌های خارجی و ناقد مقالات بسیار نیز بوده است.

از جمله آثار ایشان عبارتند از: **آشنایی با نظریهٔ گرافها** (چاپ آمریکا، ۱۹۷۲)؛ **گرافها و دای گرافها** (چاپ آمریکا، ۱۹۷۹)؛ بیش از سی مقالهٔ اصیل ریاضی، ترجمهٔ کتاب **حساب دیفرانسیل و انتگرال** لیتلهلد، ترجمهٔ کتاب **حساب دیفرانسیل و انتگرال** تامس ـ فینی، که کتاب برندهٔ سال ۱۳۷۱ است.

و به این ترتیب کار تجلیل از استادان پیشکسوت ریاضی به پایان می‌رسد.

تفریح اندیشه ۴

در کشویی مخلوطی از جورابهای قرمز و آبی، حداکثر ۱۹۹۱ عدد کلاً داریم. چنین اتفاق افتاده است که هنگامی که ۲ جوراب به تصادف و بدون برگرداندن انتخاب می‌کنیم، احتمال این که هر دو قرمز یا هردو آبی باشند، دقیقاً یک دوم است. بزرگترین تعداد ممکن جورابهای قرمز واقع در کشو چیست؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

شما خود می‌دانید که در ریاضیات تا چه اندازه با اصطلاحاتی از قبیل برهان خلف، شرط لازم، شرط کافی، و غیره سروکار داریم. البته، بدون فهمیدن این گونه مطالب نباید انتظار داشته باشید که ریاضیات را بفهمید، چه رسد به این که بتوانید شخصاً تصرفی در بازیهای ریاضی بکنید. کسی که از منطق بی‌بهره است بین استدلال و مغالطه و تعریف و قضیّه و نظایر آنها تمیز نمی‌گذارد، و به آسانی فریب می‌خورد. به عنوان مثال، شاید شما کسانی را دیده‌اید که هنوز، پس از تعریف کردن قوای طبیعی به وسیلهٔ ضرب، رابطهٔ $a^0 = 1$ را برای شاگردان خود ثابت می‌کنند! اینها کسانی‌اند که تعریف عمل ضرب و تفاوت تعریف و قضیّه را نمی‌فهمند.

آنالیز ریاضی، غلامحسین مصاحب

تعیین علامت عبارتهای جبری و حل نامعادلات و دستگاه توأم

(مورد استفاده دانش آموزان سال اوّل و دوم ریاضیات ۴ نظام جدید)

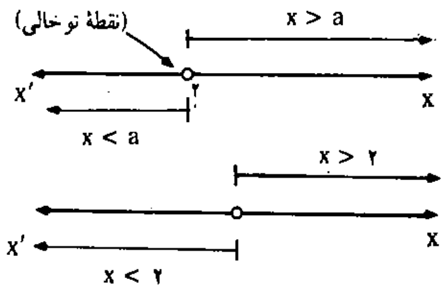
سید محمد رضا هاشمی موسوی

تعریف: هر رابطه با نماد « > یا < » در مجموعهٔ عددهای حقیقی را یک نامساوی می‌نامیم. مانند: $a > b$ یا $b < a$.

نامساوی و محور اعداد

به‌طور کلی می‌نویسیم $x > a$ یا $x < a$ و در این صورت روی محور چنین نمایش می‌دهیم:

(مثال:



قوانین و خواص نامساویها

اگر a ، b ، c و d اعداد حقیقی دلخواهی باشند:

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

داریم:

۱) $a < b$ و $b < c \implies a < c$

۲) $a < b \iff a \pm c < b \pm c$

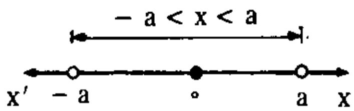
۳) $a < b , \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac < bc & \text{یا } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \\ c < 0 \Rightarrow ac > bc & \text{یا } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$

۴) $a < b$ و $c < d \implies a + c < b + d$

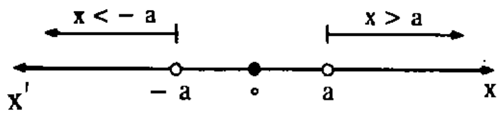
۵) $0 < a < b$ و $0 < c < d \implies ac < bd$

۶) $|a| < |b| \implies a^2 < b^2$

۷) $x^2 < a^2$ و $a > 0 \implies -a < x < a$



۸) $x^2 > a^2$ و $a > 0 \implies x > a$ یا $x < -a$



۹) $ab > 0 \implies$ ($a > 0$ و $b > 0$) یا ($a < 0$ و $b < 0$)

۱۰) $ab < 0 \implies$ ($a > 0$ و $b < 0$) یا ($a < 0$ و $b > 0$)

۱۱) $a < b , \begin{cases} a > 0 , b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ a < 0 , b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{cases}$

۱۲) $ab < 0$ و $a < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

تعیین علامت دو جمله‌ای درجهٔ اول

دو جمله‌ای درجهٔ اول را به حالت عمومی $(ax + b)$ نمایش

می‌دهیم. منظور از علامت دو جمله‌ای، تعیین مقادیری از x است که به ازای این مقادیر مقدار دو جمله‌ای مثبت یا منفی و در یک مورد صفر باشد.

مثال: برای دو جمله‌ای $(۲x - ۴)$ عددهای مختلف را طبق جدول زیر به x نسبت داده‌ایم و نظیر هر کدام از آنها را برای عبارت فوق حساب کرده‌ایم:

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۲x − ۴	−۱۲	−۱۰	−۸	−۶	−۴	−۲	۰	۲	۴	۶

از این مثال متوجه می‌شویم که برای تعیین علامت یک دو جمله‌ای کافی‌است دوجمله‌ای‌را برابر صفر قرار دهیم، در این صورت با به دست آوردن ریشهٔ دو جمله‌ای (مقداری که عبارت را صفر می‌کند) مرز مقادیر منفی و مثبت دو جمله‌ای موردنظر به‌دست خواهد آمد. در نتیجه به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه (مرز) دو جمله‌ای علامتش مثبت و به‌ازای مقادیر کوچکتر از ریشه، علامت دو جمله‌ای مفروض منفی خواهد بود. به‌طور کلی علامت دوجمله‌ای $(ax + b)$ در دو حالت $a > ۰$ و $a < ۰$ چنین است:

$$ax + b = ۰ \implies x = \frac{-b}{a}$$

$a > ۰$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax+b	− (مخالف علامت a)	۰	+ (موافق علامت a)

$a < ۰$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax+b	+ (مخالف علامت a)	۰	− (موافق علامت a)

به‌طور کلی اگر دو جمله‌ای $(ax + b)$ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right]$$

ملاحظه می‌شود که برای $x > -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه مثبت و در این صورت علامت دو جمله‌ای با علامت a یکی بوده و اصطلاحاً گوییم علامت دو جمله‌ای موافق علامت a است. برای $x < -\frac{b}{a}$ مقدار داخل کروشه منفی است و در این صورت علامت دوجمله‌ای مخالف با علامت a است. بنابراین به‌طور خلاصه داریم:

مقادیر x	کوچکتر از $-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	بزرگتر از $-\frac{b}{a}$
علامت ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال ۱: عبارت $۳x + ۶$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$۳x + ۶ = ۰ \implies ۳x = -۶ \implies x = \frac{-۶}{۳} \implies x = -۲$$

x	$-\infty$	−۲	$+\infty$
۳x+۶	−	۰	+

مثال ۲: عبارت $\frac{۵x - ۱۰}{۳ - ۶x}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ هر یک از عبارتهای صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$۵x - ۱۰ = ۰ \implies ۵x = ۱۰ \implies x = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \implies x = ۲$$

$$۳ - ۶x = ۰ \implies -۶x = -۳ \implies x = \frac{-۳}{-۶} = \frac{۱}{۲} \implies x = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
۵x−۱۰		−		−	۰	+	
−۶x+۳		+	۰	−		−	
$\frac{۵x-۱۰}{۳-۶x}$		−	تعریف‌نشده	+	۰	−	

تعیین علامت عبارتهای متشکل از عاملهای درجهٔ اول

مثال ۳: عبارت $P = \frac{-x\,(۳ - ۶x)\,(x + ۱)}{(x - ۱)\,(۲x - ۳)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: برای تعیین عباراتی نظیر عبارت P ابتدا هر یک از عاملهای موجود را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشهٔ هر کدام از عاملها را به‌دست می‌آوریم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن مقادیر جوابهای به‌دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست

می‌نویسیم و در هر یک از سطرهای دیگر آن علامت یکی از عاملهای عبارت P را تعیین می‌کنیم. در آخر علامت P برای هر فاصلهٔ عددی از ضرب علامتهای واقع در ستون نظیر آن به‌دست می‌آید.

$x + ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱$

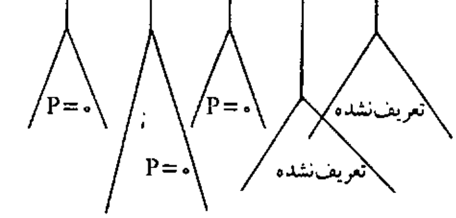
$-x = ۰ \Longrightarrow x = ۰$

$۳ - ۶x = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۱}{۲}$

$x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = ۱$

$۲x - ۳ = ۰ \Longrightarrow x = \frac{۳}{۲}$

x	$-\infty$ تا -۱	-۱ تا ۰	۰ تا $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ تا ۱	۱ تا $\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$ تا $+\infty$
$x+۱$	−	+	+	+	+	+
$-x$	+	+	−	−	−	−
$۳-۶x$	+	+	+	−	−	−
$x-۱$	−	−	−	−	+	+
$۲x-۳$	−	−	−	−	−	+
P	−	+	−	+	−	+



توجه: از آنجا که به ازای ریشه‌های مخرج عبارت P بی‌معنی است، بنابراین لازم است که در جدول ریشه‌های مخرج را تعریف نشده تلقی کنیم.

* تعیین علامت عبارتها کاربردهای بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان حل نامعادلات را نام برد که در اینجا به حل و بحث نامعادلات می‌پردازیم.

نامعادلات

نامعادله: گزاره نمایی است به صورت نامساوی بین دو عبارت جبری شامل یک یا چند متغیر. مجموعه جواب نامعادله، مجموعهٔ مقادیری است که در ازای آنها نامعادله به گزارهٔ درست تبدیل می‌شود. ممکن است که در دامنهٔ معینی از متغیر یا متغیرها، مجموعهٔ جواب نامعادله تهی باشد. اگر برای نامعادله‌ای دامنهٔ متغیر مشخص نشده باشد، دامنهٔ آن را مجموعهٔ عددهای حقیقی (IR) اختیار می‌کنیم. نامعادله را یک مجهولی یا یک متغیری درجهٔ اول گوییم هرگاه پس از اختصار لازم به یکی از صورتهای زیر برسیم:

$ax + b \leq ۰$ یا $ax + b \geq ۰$ یا $ax + b < ۰$ یا $ax + b > ۰$

(در نامعادلات اخیر x متغیر و a و b پارامترهای حقیقی می‌باشند.)

حل نامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول

در حالت کلی نامعادلهٔ درجهٔ اول را به شکل $ax + b > ۰$ یا $ax + b < ۰$ در نظر می‌گیریم. حل یک نامعادله در واقع به دست آوردن مجموعهٔ جواب آن نامعادله است که ممکن است مجموعهٔ جواب آن دارای هیچ و یا تعداد محدودی و یا بی‌شمار عضو داشته باشد. به‌طور کلی حل نامعادلات فوق چنین است:

$$ax + b < ۰ \Longrightarrow ax + b - b < -b \Longrightarrow ax < -b$$

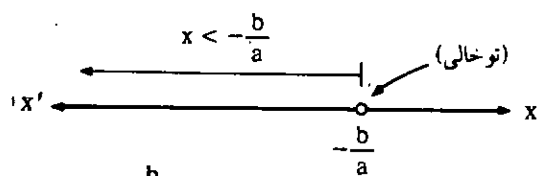
$$ax < -b, \begin{cases} a > ۰ \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow \\ a < ۰ \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow \end{cases}$$

$a > ۰: \{x \mid x < -\frac{b}{a}\}$ (مجموعه‌جواب)

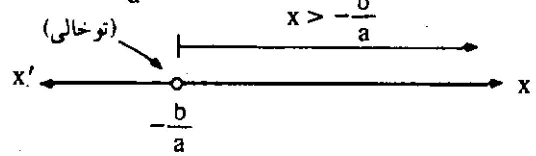
$a < ۰: \{x \mid x > -\frac{b}{a}\}$ (مجموعه‌جواب)

نمایش مجموعهٔ جواب روی محور اعداد

$a > ۰$ و $x < -\frac{b}{a}$:



$a < ۰$ و $x > -\frac{b}{a}$:



تبصره: اگر نامعادله دارای مساوی باشد خود ریشه نیز جزو مجموعهٔ جواب است و در این صورت نقطه را روی محور توپر نمایش

می‌دهیم.

مثال ۴ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید:

$$5(2x+3)^2 > 4(\sqrt{5}x-2)^2$$

حل :

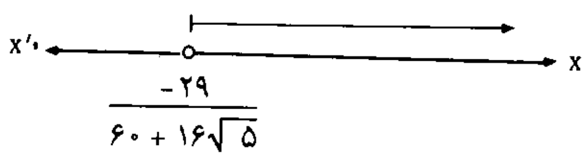
$$5(4x^2+12x+9) > 4(5x^2-4\sqrt{5}x+4)$$

$$\Rightarrow 60x+45 > -16\sqrt{5}x+16$$

$$\Rightarrow (60+16\sqrt{5})x > 16-45 \Rightarrow x > \frac{-29}{60+16\sqrt{5}}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \mid x > \frac{-29}{60+16\sqrt{5}}\right\}$$

نمایش هندسی:



مثال ۵ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید و نمودار هندسی مجموعهٔ جواب آن‌را رسم کنید:

$$-\frac{5+2x}{3} \le \frac{-3x+1}{2}$$

حل : برای حل نامعادله ابتدا طرفین نامعادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب می‌کنیم و سپس مجهولات را به یک طرف و معلومات را به طرف دیگر (با تعویض علامت آنان) می‌بریم و از آنجا x را محاسبه می‌کنیم:

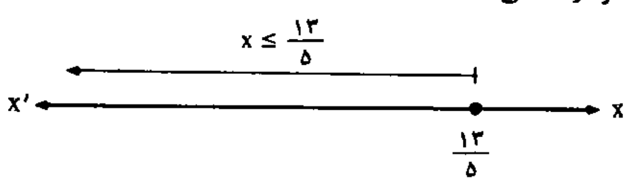
$$-2(5+2x) \le 3(-3x+1)$$

$$\Longrightarrow -10-4x \le -9x+3 \Longrightarrow -4x+9x \le 3+10$$

$$\Longrightarrow 5x \le 13 \Longrightarrow x \le \frac{13}{5}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \left\{x \mid x \le \frac{13}{5}\right\}$$

نمودار هندسی:



مثال ٦ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)} \ge 0$$

حل : طرف اول نامعادله را با P نمایش می‌دهیم:

$$P = \frac{-x(x+2)}{(x+1)(3x-6)}$$

اینک برای حل نامعادله کافی است عبارت P را تعیین علامت کنیم.

$$x+2=0 \Longrightarrow x=-2 \quad , \quad -x=0 \Longrightarrow x=0$$

$$x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \quad , \quad 3x-6=0 \Longrightarrow x=2$$

x	$-\infty$ تا -2	-2 تا -1	-1 تا 0	0 تا 2	2 تا $+\infty$
$x+2$	−	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+
$-x$	+	+	+	−	−
$3x-6$	−	−	−	−	+
$P \ge 0$	−	+	−	+	−

تعریف‌نشده (در $x=-1$) ، تعریف‌نشده (در $x=2$)

توجه: قسمت هاشورخورده جزو جواب نیست.

با توجه به جدول و علامت نامعادله $P \ge 0$ مجموعهٔ جواب را تعیین می‌کنیم:

$$P \ge 0 \Longrightarrow \text{مجموعه‌جواب} = \{x \mid -2 \le x < -1 \ \text{یا}\ 0 \le x < 2\}$$

مثال ۷ : نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{2(x-3)}{x} < \frac{-3}{x}$$

حل : ابتدا عبارت سمت راست نامعادله را به سمت چپ آن (با تغییر علامت) می‌آوریم و پس از اختصار لازم طرف چپ را با P نمایش می‌دهیم و برای حل نامعادله کافی است عبارت P را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{2(x-3)}{x} + \frac{3}{x} < 0 \Longrightarrow \frac{2x-6+3}{x} < 0 \Longrightarrow \frac{2x-3}{x} < 0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$+$	
x		$-$		$+$		$+$	
$P<0$		$+$ (هاشورخورده)		$-$		$+$ (هاشورخورده)	

تعریف‌نشده

$P < 0 \Longrightarrow$ مجموعه‌جواب $= \left\{x \mid 0 < x < \frac{3}{2}\right\}$

توجه: قسمت هاشورخورده جزو جواب نیست.

تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم ($P = ax^2 + bx + c$)

ابتدا عبارت درجهٔ دوم را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

در اینجا اگر عبارت $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی یا برابر صفر باشد، بدیهی است که علامت P هم‌علامت a می‌باشد. زیرا داخل کروشه در حالت $\Delta < 0$ همواره مثبت و در حالت $\Delta = 0$ $\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$ صفر می‌شود. بنابراین P در حالت $\Delta < 0$ هم‌علامت a و در حالت $\Delta = 0$ برابر صفر می‌باشد. در حالتی که $\Delta > 0$ باشد سه‌جمله‌ای؛ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که در این حالت می‌توان نوشت:

$$P = a\left[\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

در این‌صورت با تشکیل جدول نتیجه می‌شود که علامت P همواره بین دو ریشه مخالف علامت a است و به ازای مقادیر حقیقی x خارج دو ریشه موافق علامت a می‌باشد.

مثال ۸: عبارت درجهٔ دوم $P = x^2 - 3x + 2$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $P = 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{یا} \\ x = 2 \end{cases}$$

اینک جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P = x^2 - 3x + 2$		$+$		$-$		$+$	

بنابراین علامت P بین دو ریشه (مخالف علامت $a = 1$) منفی است.

مثال ۹: نامعادلهٔ $P = \dfrac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1} \geq 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ تمام عاملهای صورت و عبارت مخرج را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم و سپس جدول تعیین علامت عبارت P را رسم می‌کنیم:

$-x^2 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$ و $x = 0$ (ریشه مضاعف صفر)

$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta > 0$ و $x = \pm 1$

$x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow \Delta < 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x^2-1		$+$		$-$		$-$		$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P \geq 0$		(هاشورخورده)		$+$		$+$		(هاشورخورده)	

جواب

$P \geq 0 \Longrightarrow$ مجموعه‌جواب $= \left\{x \mid -1 \leq x \leq 1\right\}$

حل دستگاه نامعادلات (نامعادلات مضاعف یا توأم)

نامعادلات توأم عبارت است از دو یا چند نامعادله که باید در عین حال به ازای مقادیر مشترکی از مجهول برقرار باشند.

برای حل نامعادلات توأم کافی است هر یک را جداگانه حل کنیم و جوابهای مشترک را بین همگی آنها به‌دست آوریم.

مجموعهٔ جواب دو یا چند نامعادلهٔ توأم عبارت است از اشتراک مجموعه‌های جواب هر یک از آنها، به عبارت دیگر مجموعه جواب مجموعه‌ای است که برای تمام نامعادلات دستگاه صادق می‌باشد.

مثال ۱۰: دستگاه دو نامعادلهٔ توأم زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}5x-3>2x+3\\3-4x<1\end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases}5x-3>2x+3\\3-4x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-2x>3+3\\-4x<1-3\end{cases}$$

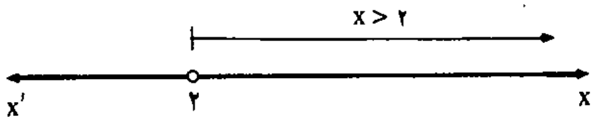
$$\Rightarrow\begin{cases}3x>6\\-4x<-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{6}{3}\\x>\frac{-2}{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2 & (1)\\x>\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$$

مجموعه جواب نامعادلهٔ (۱) عبارت‌است از: $\{x\in IR \mid x>2\}$

مجموعه جواب نامعادلهٔ (۲) عبارت‌است از: $\{x\in IR \mid x>\frac{1}{2}\}$

مجموعه جواب دستگاه مفروض اشتراک دو مجموعهٔ فوق است:

مجموعه جواب دستگاه $=\{x\in IR \mid x>2\}$



مثال ۱۱: دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{x-3}{2}<\frac{3x-2}{6} & (1)\\\frac{x+1}{2}-\frac{3x+2}{3}<\frac{x-1}{4} & (2)\end{cases}$$

حل: ابتدا طرفین نامعادلهٔ (۱) را در ۶ و طرفین نامعادلهٔ (۲) را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}2(2x-1)+3(x-3)<3x-2\\6(x+1)-4(3x+2)<3(x-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4x-2+3x-9-3x+2<0\\6x+6-12x-8-3x+3<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x<9\\-9x<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{9}{4}\\x>\frac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow \text{مجموعه جواب دستگاه}=\left\{x \mid \frac{1}{9}<x<\frac{9}{4}\right\}$$

نامعادلات و قدرمطلق

می‌دانیم که قدر مطلق عدد حقیقی a عبارت است از $|a|$ به‌قسمی که:

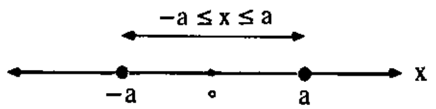
$$|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\-a & a<0\end{cases}$$

مثلاً: $|5|=5$ و $|\pm3|=3$ و $|-\pi|=\pi$ و $\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$ و $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$ و $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ و ...

بنابراین معادله‌ای مثل $|x|=a$ هم‌ارز است با:

$$\begin{cases}x<0\\x=-a\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}x\geq 0\\x=a\end{cases} \Longleftrightarrow x=\pm a \ (\text{مجموعه‌نقاط})$$

نمایش $|x|\leq a$ چنین است:



به‌طور کلی حل هر معادله و یا نامعادلهٔ شامل قدر مطلق مجهول به حل دو یا چند دستگاه از معادله‌ها و نامعادله‌ها تبدیل می‌شود.

مثال ۱۲: معادلهٔ $3x-|x-4|=1$ را حل کنید.

حل: برای حل معادلهٔ فوق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$(1):\begin{cases}x-4\geq 0\\3x-(x-4)=1\end{cases} \text{ یا } (2):\begin{cases}x-4<0\\3x+(x-4)=1\end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(1):\begin{cases}x\geq 4\\x=-\frac{3}{2}\end{cases} \text{ یا } (2):\begin{cases}x<4\\x=\frac{5}{4}\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب (۱) $=\left\{x \mid x\geq 4 \text{ و } x=-\frac{3}{2}\right\}=\varnothing$

مجموعهٔ جواب (۲) $=\left\{x \mid x<4 \text{ و } x=\frac{5}{4}\right\}=\left\{\frac{5}{4}\right\}$

مجموعهٔ جواب معادله $=\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\varnothing=\left\{\frac{5}{4}\right\}$

بنابراین تنها جواب معادله $x=\frac{5}{4}$ است.

مثال ۱۳: نامعادلهٔ $|x-2|\leq 1$ را حل کنید.

حل: مانند مثال قبل (۱۱) برای حل نامعادلهٔ مفروض کافی است دو

حالت در نظر بگیریم:

$$(۱): \begin{cases} x - ۲ \geq ۰ \\ x - ۲ \leq ۱ \end{cases} \quad \text{یا} \quad (۲): \begin{cases} x - ۲ < ۰ \\ -(x - ۲) \leq ۱ \end{cases}$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$(۱): \begin{cases} x \geq ۲ \\ x \leq ۳ \end{cases} \quad \text{یا} \quad (۲): \begin{cases} x < ۲ \\ x \geq ۱ \end{cases}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (۱)} = \{ x \mid ۲ \leq x \leq ۳ \}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب (۲)} = \{ x \mid ۱ \leq x < ۲ \}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب نامعادله} = \{ x \mid ۱ \leq x < ۲ \ \text{یا}\ ۲ \leq x \leq ۳ \} = \{ x \mid ۱ \leq x \leq ۳ \}$$

مثال ۱۴: عبارت $P(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \sqrt[۴]{x^۲ - ۴}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است.

حل: می‌دانیم زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید مثبت یا صفر باشد بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ۴ - x^۲ \geq ۰ \\ x^۲ - ۴ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ \leq ۴ \\ x^۲ \geq ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲ \leq x \leq ۲ \\ x \geq ۲ \quad \text{یا} \quad x \leq -۲ \end{cases} \xRightarrow{\text{(ازاشتراک مجموعه جوابها)}}$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{ ۲ \ \text{و}\ ۲- \}$$

بنابراین عبارت $P(x)$ فقط به ازای $x = -۲$ و $x = ۲$ تعریف شده است.

مثال ۱۵: عبارت $\sqrt[۶]{۳۲ - ۲x^۲} + \sqrt{\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{x^۳ - ۸}}}}$ به ازای چه مقادیری از x معین است.

حل: عبارت مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt[۱۵۰]{x^۳ - ۸} + \sqrt[۶]{۳۲ - ۲x^۲}$$

بنابراین عبارت‌فوق وقتی تعریف‌شده و معین است که زیر رادیکالهای با فرجهٔ زوج مثبت یا صفر باشد:

$$\begin{cases} x^۳ - ۸ \geq ۰ \\ ۳۲ - ۲x^۲ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۳ \geq ۸ \\ ۲x^۲ \leq ۳۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \\ x^۲ \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq x \leq ۴ \end{cases}$$

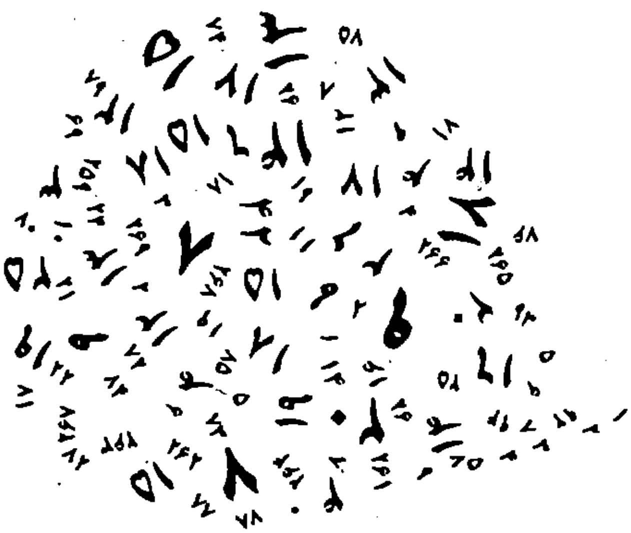
بنابراین از اشتراک مجموعهٔ جوابهای نامعادلات دستگاه داریم:

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{ x \mid ۲ \leq x \leq ۴ \}$$

ادب ریاضی

یکی از مفاهیم اساسی علوم ریاضی مفهوم عدد است که ساده‌ترین صورت آن را انسان باستانی هم می‌توانسته است تصور کند. شاید نخستین ریاضی‌دان ـ که بزرگترین نابغهٔ ناشناخته است ـ کسی است که این فکر و مفهوم را طرح ریخته.

تاریخ علم. جورج سارتن، احمد آرام



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۹)

ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور —— William . Watkins and Joel Zeitlin

چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$

نتیجه‌ای قدیمی است که ریشهٔ n ام اوّلیّه واحد، یعنی،

$\zeta_n = \cos(۲\pi / n) + i \sin(۲\pi / n)$

در چند جمله‌ای گویایی از درجهٔ $\phi(n)$ تعداد عددهای صحیح بین ۱ و n ی که نسبت به n اوّلند، صدق می‌کند.

معمولترین طریق محاسبهٔ چند جمله‌ای مینیمال ζ_n موسوم به چند جمله‌ای دایره بُری «*Cyclotomic Polynomial*» و نمایش داده شده به $(\phi_n(x))$ از اتحاد:

$$x^n - ۱ = \prod_{d|n} \phi_d(x) \qquad (۱)$$

استفاده می‌کند. در این صورت، به عنوان مثال؛ $\phi_۹(x)$ را می‌توان به طریق آشنای زیر محاسبه کرد:

$$x^۳ - ۱ = \phi_۱(x)\ \phi_۳(x) \qquad x^۹ - ۱ = \phi_۱(x)\ \phi_۳(x)\ \phi_۹(x)$$

بنابراین :

$$\phi_۹(x) = \frac{x^۹ - ۱}{x^۳ - ۱} = x^۶ + x^۳ + ۱$$

اکنون قسمتهای حقیقی و انگاری ζ_n را در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\cos(۲\pi / n)$ و $\sin(۲\pi / n)$ را. اینها نیز عددهایی جبری هستند، امّا چگونه می‌توان چند جمله‌ایهای مینیمال آنها را محاسبه کرد؟

در ۱۹۳۳ لِمِر «D.H.Lehmer» [Leh] و [Niv] با استفاده از چند جمله‌ایهای دایره‌بری روشی را برای محاسبهٔ این چند جمله‌ایهای مینیمال مشخص کرد.

در این مقاله، اتحادهایی مشابه (۱)، برای چند جمله‌ای مینیمال $\psi_n(x)$ از $\cos(۲\pi / n)$ ارائه می‌دهیم، که روشی دیگر در محاسبه $\psi_n(x)$ به دست می‌دهد.

اتحادهای مزبور با چند جمله‌ایهای چبیشف «Chebychev Polynomial»، $T_s(x)$، سروکار دارند که به ازای عددهای صحیح و مثبت S و جمیع عددهای حقیقی θ، با

$T_s(\cos\theta) = \cos(s\theta)$

تعریف می‌شوند. درجهٔ $T_s(x)$ برابر S و ضریب اصلی مربوطه $۲^{s-۱}$ است.

قضیّه: فرض می‌کنیم $\psi_n(x)$ چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$ باشد و $T_s(x)$ چند جمله‌ای چبیشف را نمایش دهد.

(a) اگر $n = ۲s + ۱$ فرد باشد، آنگاه

$$T_{s+۱}(x) - T_s(x) = ۲^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \qquad (۲)$$

و

(b) اگر $n = ۲s$ زوج باشد، آنگاه

$$T_{s+۱}(x) - T_{s-۱}(x) = ۲^s \prod_{d|n} \Psi_d(x) \qquad (۳)$$

پیش از اثبات قضیّهٔ فوق، نشان می‌دهیم که چگونه از (۲) و (۳) می‌توان به همان طریقی که اتحاد (۱) در محاسبهٔ $\phi_n(x)$ به کار رفته است، در محاسبهٔ $\psi_n(x)$ استفاده کرد. به عنوان مثال؛ در محاسبهٔ $\psi_۹(x)$ (چند جمله‌ای مینیمال $\cos(۲\pi / n)$)، در معادلهٔ (۲)، با فرض ۴ = S و بعد ۱ = S، به دست می‌آوریم:

$$T_۵(x) - T_۴(x) = ۱۶\,\psi_۱(x)\ \psi_۳(x)\ \psi_۹(x)$$

و :

$$T_۲(x) - T_۱(x) = ۲\psi_۱(x)\ \psi_۳(x)$$

در این صورت :

$$۸\,\psi_۹(x) = \frac{T_۵(x) - T_۴(x)}{T_۲(x) - T_۱(x)}$$

محاسبهٔ چهار چند جمله‌ای چبیشف فوق آسان است. به عنوان مثال:

$$T_5(\cos\theta) = \cos(5\theta)$$

$$= \mathrm{Re}\left\{(\cos\theta + i\sin\theta)^5\right\}$$ (قسمت اصلی = Re)

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$$

$$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

بنابراین:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

به همین ترتیب:

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

و:

$$T_1(x) = x$$

به این ترتیب:

$$8\psi_9(x) = \frac{T_5(x) - T_4(x)}{T_2(x) - T_1(x)} = 8x^3 - 6x + 1$$

در ضمن قضیهٔ مورد نظر بر این است که یا:

$$T_{s+1}(x) - T_s(x) \qquad \text{یا} \qquad T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x)$$

(بسته به این که n فرد یا زوج باشد) به ازای $\cos(2\pi/n)$ چند جمله‌ای گویایی نیست شونده است. امّا، چند جمله‌ای نیست شوندهٔ آشکارتری به ازای $\cos(2\pi/n)$ عبارت است از: $T_n(x) - 1$، زیرا:

$$T_n(\cos(2\pi/n)) = \cos(2\pi) = 1$$

چند جمله‌ایهای مورد بحث توسط اتحادهای زیر مرتبط هستند:

[Riv, P.5]

$$(x-1)(T_{2s+1}(x) - 1) = (T_{s+1}(x) - T_s(x))^2$$

$$2(x^2-1)(T_{2s}(x) - 1) = (T_{s+1}(x) - T_{s-1}(x))^2$$

به این ترتیب $\cos(2\pi/n)$، هنگامی که $n > 2$، ریشهٔ دوگانهٔ $T_n(x) - 1$ است.

برای آغاز اثبات قضیهٔ مورد نظر، به حقایقی چند در مورد درجه و مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ روی عددهای گویای Q نیازمندیم. از آن جا که

$$\cos(2\pi/n) = (\zeta_n + \zeta_n^{-1})/2$$

داریم:

$$Q(\zeta_n) \supseteq Q(\cos(2\pi/n)) \supseteq Q$$

برای محاسبهٔ درجهٔ بسط $Q(\cos(2\pi/n))$ روی Q، ملاحظه می‌کنیم که

$$[Q(\zeta_n) : Q] = \phi(n)$$

و:

$$[Q(\zeta_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 1 \text{ یا } 2$$

زیرا ζ_n ریشه‌ای از چند جمله‌ای درجه دوم زیر است:

$$x^2 - (2\cos(2\pi/n))x + 1$$

اکنون اگر $n \geq 3$، ζ_n حقیقی نیست و بنابراین:

$$[Q(\zeta_n) : Q(\cos(2\pi/n))] = 2$$

به این ترتیب داریم:

$$\deg \Psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n = 1, 2 \quad \text{اگر} \\ \phi(n)/2 & n \geq 3 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

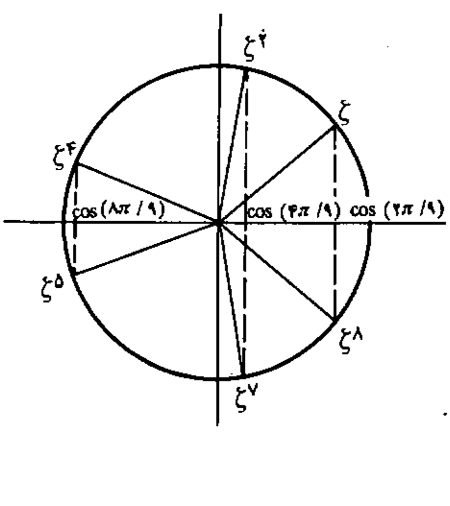
(درجه = deg)

برای پیشرفت بیشتر، نیاز به یافتن جمیع ریشه‌های $\psi_n(x)$، یعنی، مزدوجهای $\cos(2\pi/n)$ داریم. به ازای $n = 1, 2, 3, 4, 6$، $\cos(2\pi/n)$ گویا و بنابراین $\psi_n(x)$ خطی است و دقیقاً یک ریشه دارد.

اما به ازای مقدارهای دیگر n، $\phi(n)/2 \geq 2$ و به این ترتیب $\psi_n(x)$ بیش از یک ریشه دارد. این ریشه‌ها کدام هستند؟ برای به دست دادن مثالی خاص، ریشه‌های چند جمله‌ای درجه سوم زیر کدام هستند؟

$$8\psi_9(x) = 8x^3 - 6x + 1$$

البته ریشه‌های $\phi^9(x)$ عبارت است از که در آن $\zeta = \zeta^9$.



ریشه‌های مزبور در جفتهای :

$$\cos(2\pi k/9) \pm i\sin(2\pi k/9) \quad k = 1, 2, 4$$

تنها با سه جزء حقیقی متمایز :

$$\cos(2\pi/9), \cos(4\pi/9), \cos(8\pi/9)$$

رخ می‌دهند. سه کسینوس مزبور ریشه‌های $\psi_9(x)$، هستند. حالت عمومی مورد فوق عبارت است از :

لم . اگر $n \geq 3$، آنگاه ریشه های $\psi_n(x)$، عبارت است از $\cos(2\pi k/n)$، به ازای $0 \leq k \leq s$ و $(k, n) = 1$. (s چون در قضیهٔ مورد بحث تعریف شده است.)

لم فوق بسادگی از این حقیقت نتیجه می‌شود که Q− خود ریخت σ ی $Q(\zeta_n)$ داده شده توسط $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^k$، به ازای $(k,n)=1$، $\cos(2/n)\pi$ را به $\cos(2\pi k/n)$ می‌فرستد :

$$\sigma\left(\cos(2\pi/n)\right) = \sigma\left((\zeta_n + \zeta_n^{-1})/2\right) = \left(\zeta_n^k + \zeta_n^{-k}\right)/2 = \cos(2\pi k/n)$$

به این ترتیب :

$$0 = \sigma\left(\Psi_n(\cos(2\pi/n))\right) = \Psi_n\left(\sigma(\cos(2\pi/n))\right) = \Psi_n\left(\cos(2\pi k/n)\right)$$

و بنابراین : $\phi(n)/2$ عدد از $\cos(2\pi k/n)$ ها، که در آنها $(k, n) = 1$ و $0 \leq k \leq s$ ریشه‌های $\psi_n(x)$ هستند.

اکنون برای اثبات قسمت a ی قضیّه ($n = 2s + 1$ فرد است)، کافی است که نشان دهیم دو طرف (۲) دارای ریشه‌های یکسان و ضریب اصلی یکسان هستند. درجهٔ سمت راست (۲) عبارت است از :

$$\sum_{d|n} \deg\left(\Psi_d(x)\right) = \deg\left(\Psi_1(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{d|n, d\neq 1}\phi(d) = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = s + 1$$

که با درجهٔ سمت چپ (۲) سازگار است. سمت چپ و سمت راست (۲) دقیقاً دارای $s + 1$ ریشه است : $\cos(2\pi k/n)$، $0 \leq k \leq s$ که جمیع آنها متمایز هستند.

برای ملاحظهٔ این مطلب فرض می‌کنیم : $(k, n) = g$، بنابراین :

$$k = k'g, \; n = dg, \; (k', d) = 1$$

در این صورت از لم فوق :

$$\cos(2\pi k/n) = \cos(2\pi k'/d)$$

ریشه‌ای از $\psi_d(x)$ است، که عاملی از عبارت سمت راست (۲) است. در سمت چپ (۲)،

$$\begin{aligned}
&T_{s+1}(\cos(2\pi k/n)) - T_s(\cos(2\pi k/n)) \\
&= \cos(2\pi k(s+1)/n) - \cos(2\pi ks/n) \\
&= \cos(\pi k(n+1)/n) - \cos(\pi k(n-1)/n) \\
&= \cos(\pi k + \pi k/n) - \cos(\pi k - \pi k/n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

بنابراین، $\cos(2\pi k/n)$ نیز ریشه‌ای از سمت چپ (۲) است. اکنون از آن جا که ضریب اصلی $T_{s+1}(x)$ عبارت است از : 2^s، اتحاد (۲) به اثبات می‌رسد.

اثبات قسمت (b) به همین ترتیب است، اما در این حالت درجهٔ سمت راست (۳) به طریق زیر محاسبه می‌شود :

$$\sum_{d|n} \deg\left(\Psi_d(x)\right) = \deg\left(\Psi_1(x)\right) + \deg\left(\Psi_2(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{d|n, d>2}\phi(d) = 2 + \frac{1}{2}(n-2) = s + 1$$

که با درجهٔ سمت چپ (۳) در توافق است.

باز هم چندجمله‌ایهای واقع بر سمت راست و سمت چپ (۳) دقیقاً دارای $s + 1$ ریشه :

$$\cos(2\pi k/n), \; 0 \leq k \leq s$$

و ضریب اصلی یکسان هستند. برای ملاحظه این که $\cos(2\pi k/n)$ ریشهٔ سمت چپ (۳) است، به محاسبه‌های زیر می‌پردازیم :

$$\begin{aligned}
&T_{s+1}(\cos(2\pi k/n)) - T_{s-1}(\cos(2\pi k/n)) \\
&= \cos(2\pi k(s+1)/n) - \cos(2\pi k(s-1)/n) \\
&= \cos(\pi k(n+2)/n) - \cos(\pi k(n-2)/n) \\
&= \cos(\pi k + 2\pi k/n) - \cos(\pi k - 2\pi k/n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

تبصره . وگنر «K.W. Wegner» [Weg] فهرستی از چند جمله‌ایهای مینیمال (جمیعاً از درجه‌ای کمتر از هشت) را در مورد تابعهای مثلثاتی زاویه‌های مشخص به دست داده است، که ضریبهای گویای 2π هستند. نیون «I.Niven» درگزارش خود به نام عددهای گنگ «*Irrational Numbers [Niv , P.39]*»، فرمولی در مورد درجهٔ چند جمله‌ای مینیمال تانژانت هر مضرب گویای 2π به دست داده است.

مرجعها

[Leh] D.H. Lehmer , A note on trigonometric algebraic numbers , *American Mathematical Monthly , 40 (1933) 165 - 166.*

[Niv] Ivan Niven , *Irrational Numbers* , MAA , Washington ,D.C. , 1956.

[Riv] T.J. Rivlin , *Chebyshef Polynomials From Approximation Theory to Algebra and Number Theory* , 2nd ed. , Wiley , New York , 1990

[Van] B.L. Van der Waerden , Modern Algebra (English Translation) , 2nd ed. ,Ungar , New York , 1953.

[Weg] Kenneth W.Wegner Equations with trigonometric Values as roots , *American Mathematical Monthly* , 66 (1959) 52 - 53

Department of Mathematics
California State University , Northridge
Northridge , CA 91330



ادب ریاضی

بابلیان سالهای ۲۰۰۰ ـ ۲۲۰۰ پیش از میلاد می‌توانستند مربع و مستطیل و مثلث متساوی‌الساقین را مساحت کنند، اطلاعی دربارهٔ قضیهٔ فیثاغورس داشتند، و می‌دانستند که زاویهٔ حاوی نصف دایره زاویهٔ راست است.

می‌توانستند حجم متوازی‌السطوح و استوانهٔ قائم و مخروط ناقص و هرم ناقص مربع‌القاعده را پیدا کنند. راهی که برای تعیین حجم هرم ناقص مربع‌القاعده داشتند کمی با راه مصریان اختلاف داشت و آن‌را می‌توان چنین بیان کرد:

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{a-b}{۲}\right)^{۲}\right]$$

تاریخ علم . جورج سارتن ، احمد آرام

مکان هندسی

(قسمت سوم)

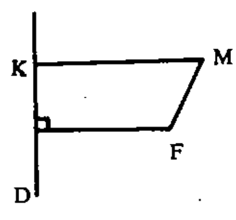
محمدهاشم رستمی

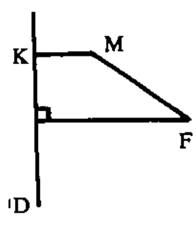
این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۵- در مسأله یک نقطه ثابت مانند F و یک خط ثابت مانند D وجود دارد.

الف - اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت F مساوی فاصله‌اش از خط ثابت Δ باشد، $(MF = MK)$، مکان هندسی نقطهٔ M یک سهمی به کانون F و خط هادی Δ است.

ب - اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که نسبت فاصله‌اش از نقطهٔ F به فاصله‌اش از خط Δ مقدار ثابت l باشد $(\frac{MF}{MK} = l)$، مکان هندسی نقطهٔ M بنابر آنکه $e<1$ یا $e>1$ باشد، به ترتیب بیضی یا هذلولی است.



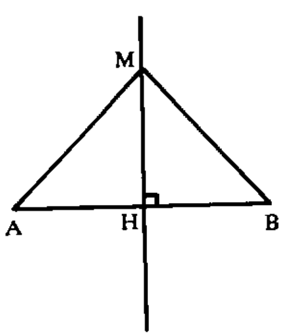


تبصره: در تعیین مکانهای هندسی حالتهای دیگری نیز وجود دارد مثلاً در مسأله سه نقطه ثابت وجود داشته باشد، و یا سه‌خط ثابت، و یا یک نقطه و یک صفحه ثابت و... که فعلاً از ذکر آنها خودداری می‌کنیم.

اینک به معرفی مکانهای هندسی مهم و ذکر کاربردهایی از آنها می‌پردازیم و مسأله‌هایی در ارتباط با مکانهای هندسی مطرح می‌کنیم.

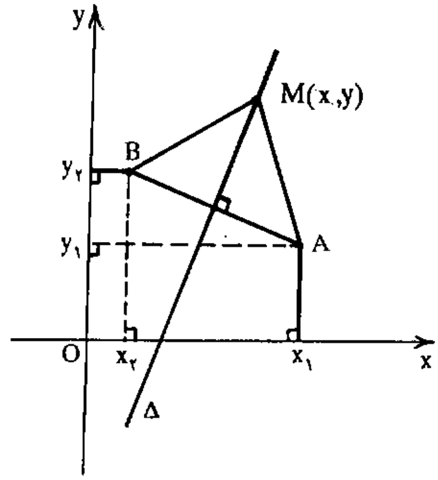
۱- مکان هندسی نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط مفروض AB به یک فاصله باشد، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

یعنی: اگر نقطه M روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار داشته باشد، فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B به یک اندازه است $(MA = MB)$. و به عکس هر نقطه‌ای که به یک فاصله از دو نقطهٔ A و B باشد، روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است.



اثبات به روش تحلیلی:

فرض می‌کنیم $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ باشد. اگر $M(x , y)$ را یک‌نقطه از مکان‌هندسی‌فوق در نظر بگیریم، داریم: $MA = MB$



پس:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y$$

$$+ x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0 \quad (1)$$

معادلهٔ بالا، معادلهٔ یک خط راست مانند Δ است که:

اولاً ـ از نقطهٔ $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right.$ و $\left.\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ وسط پاره‌خط AB می‌گذرد زیرا مختصات نقطهٔ M در این معادله صدق می‌کند.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$2(x_2 - x_1)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2(y_2 - y_1)\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) +$$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = 0}$$

ثانیاً ـ بر خط AB عمود است، چون:

$$m/AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{و} \quad m/\Delta = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \Longrightarrow$$

$$m/AB \cdot m/\Delta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = -1 \Longrightarrow \Delta \perp AB$$

به‌عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله می‌باشد.

پس: مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است عمودمنصف پاره خط AB است.

تبصره: باید توجه داشت که کمترین فاصلهٔ نقطه‌های واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط ، یا بر صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط همواره برابر $\frac{AB}{2}$ است. یعنی برای هر نقطهٔ M از مکان فوق داریم $MA \geq \frac{AB}{2}$.

مثال ۱: پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمود منصف پاره‌خط AB وجود دارد که:

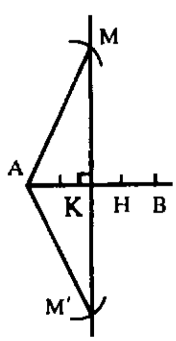
الف ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصله ۶ سانتی‌متر باشد.

ب ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد.

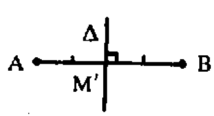
ج ـ از دو نقطهٔ A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

حل ـ چون $4 = \frac{8}{2} = \frac{AB}{2}$ است. پس:

الف ـ چون $4 = \frac{AB}{2} < 6 = MA = MB$، پس دو نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB وجود دارد که از نقاط A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر واقع‌اند.

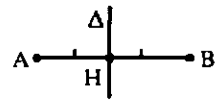


ب ـ چون $4 = \frac{AB}{2} = 4 = MB = MA$ است، پس فقط یک نقطه‌روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد که از نقاط A و

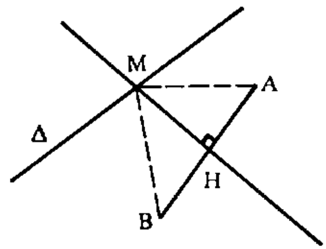


B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر واقع است و این تنها نقطه، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است.

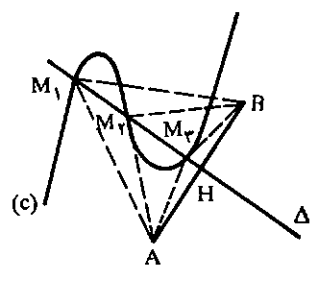
ج - چون $MA = MB = ۳ < \frac{AB}{۲} = ۴$. پس هیچ نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AB وجود ندارد که از نقاط A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.



مثال ۲: خط Δ (یا منحنی C) و دو نقطه A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط Δ (یا منحنی C) پیدا کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد.

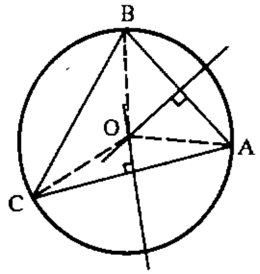


حل - عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این عمودمنصف با خط Δ (یا منحنی C) جواب مسأله است. تعداد جوابهای مسأله بستگی به تعداد نقاط برخورد دارد.



مثال ۳: سه نقطهٔ A و B و C غیرواقع بر یک خط راست در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد.

حل - نقاط A و B و C را به هم وصل می‌کنیم آنگاه عمودمنصف پاره‌خط AB همچنین عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌نماییم، نقطه برخورد این دو عمودمنصف نقطه O جواب مسأله است زیرا داریم: $OA = OB = OC$. می‌دانیم که نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.



مثال ۴: دو نقطهٔ $A(-۳ , ۱)$ و $B(۱ , +۲)$ مفروضند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را تعیین کنید.

حل: راه اول - اگر $M(x , y)$ نقطه‌ای از عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، داریم:

$$MA = MB \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x+۳)^۲ + (y-۱)^۲} = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ + y^۲ - ۲y + ۱ = x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ - ۴y + ۴ \Rightarrow$$

$$\boxed{۸x + ۲y + ۵ = ۰}$$ معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB

راه دوم -

$$M\left(\frac{-۳+۱}{۲} , \frac{۱+۲}{۲}\right) \Rightarrow M\left(-۱ , \frac{۳}{۲}\right)$$ وسط پاره‌خط AB

$$m/AB = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲-۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow$$ عمودمنصف AB $m = -۴$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - \frac{۳}{۲} = -۴(x+۱) \Rightarrow$$

$$\boxed{۸x + ۲y + ۵ = ۰}$$ معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB

مثال ۵: نقطه‌ای روی منحنی به معادلهٔ $y = x^۲ - ۲x - ۳$ پیدا کنید که از دو نقطهٔ $A(۰ , ۴)$ و $B(-۲ , ۰)$ به یک فاصله باشد.

حل: نقطهٔ تقاطع عمودمنصف پاره‌خط AB با منحنی فوق را پیدا می‌کنیم.

$$M(x,y) , MA = MB \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x-۰)^۲ + (y-۴)^۲} = \sqrt{(x+۲)^۲ + (y-۰)^۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+16-8y=\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2} \Rightarrow 4x+8y-12=0 \Rightarrow$$

معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB $\quad x + 2y - 3 = 0$

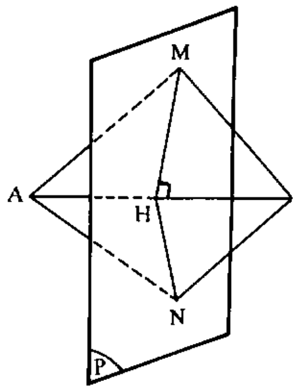
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x+2x^2-4x-6-3=0 \Rightarrow 2x^2-3x-9=0 \Rightarrow x=3 \text{ و } x=\frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow x=3 \Rightarrow y=0 \text{ و } x=\frac{-3}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{4} \Rightarrow M_1(3 \text{ و } 0) \text{ و } M_2(\frac{-3}{2} \text{ و } \frac{9}{4})$$

نقاط جواب مسئله

۲ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشد، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. (صفحه‌ای که از نقطهٔ H وسط پاره‌خط می‌گذرد و بر AB عمود است.)

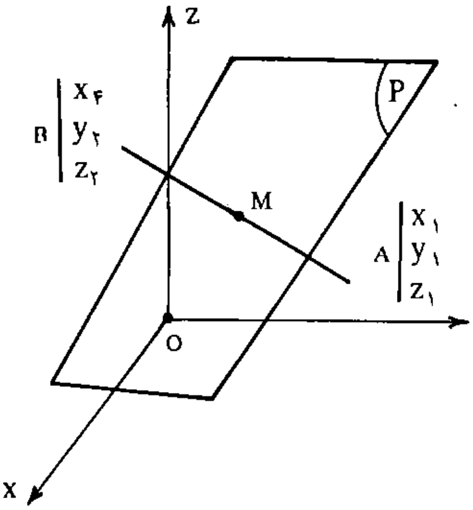


زیرا اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد و از M به نقاط A و B و H وصل کنیم، در مثلث MAB، پاره‌خط MH عمودمنصف پاره‌خط AB است پس مثلث MAB متساوی‌الساقین و در نتیجه $MA = MB$ است.

به عکس هر نقطه‌ای مانند N که به یک فاصله از دو نقطه A و B باشد، روی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. زیرا اگر از N به H وصل کنیم، در مثلث متساوی‌الساقین NAB، پاره‌خط NH میانهٔ نظیر قاعده است. پس عمودمنصف قاعده نیز می‌باشد. در نتیجه نقطهٔ N روی صفحه‌ای قرار دارد که در نقطه H بر پاره‌خط AB عمود گردیده است یعنی روی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است.

اثبات به روش تحلیلی:

اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشد، برای نوشتن معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB، فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ باشد، در این‌صورت خواهیم داشت:



$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + 2(z_2-z_1)z$$

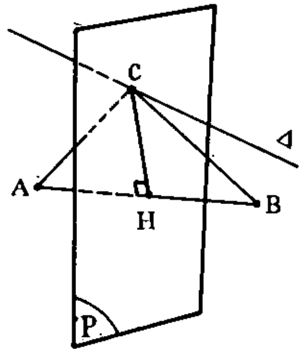
$$+ x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2) = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ صفحه‌ای است که از نقطهٔ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ وسط پاره خط AB می‌گذرد (مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند)، و بر بردار $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1 \text{ و } y_2-y_1 \text{ و } z_2-z_1)$ عمود است. بنابراین معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. به‌عکس به سادگی ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در رابطهٔ (۱) صدق کند از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است.

مثال ۱: دو نقطهٔ A و B و خط Δ غیرواقع در یک صفحه مفروضند. روی خط Δ نقطه‌ای مانند C چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین باشد.

حل ـ چون $CA = CB$ است پس نقطهٔ O روی صفحهٔ

عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است. بنابراین برای حل مسأله، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این صفحه با خط Δ ، نقطهٔ C جواب مسأله است.

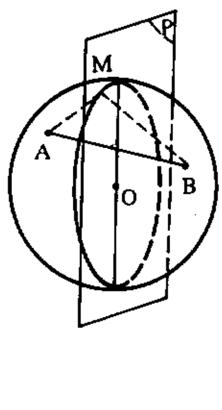


بحث: اگر صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB خط Δ را در یک نقطه‌قطع کند (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB نباشد)، مسأله تنها یک جواب دارد. اگر صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB موازی خط Δ باشد (و این در صورتی است که خط Δ عمود بر امتداد AB باشد)، مسأله جواب ندارد.

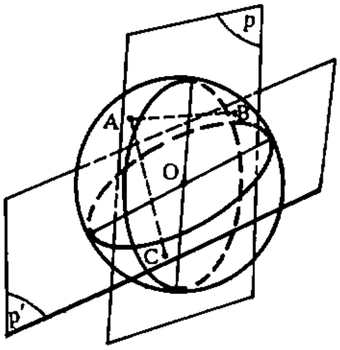
اگر صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB شامل خط Δ باشد (خط Δ روی صفحهٔ عمودمنصف واقع شود)، مسأله بیشمار جواب دارد.

مثال ۲: دو نقطهٔ A و B روی یک کره واقع‌اند. مکان هندسی نقاطی از سطح این کره را پیدا کنید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند.

حل ـ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این صفحه از مرکز کره می‌گذرد و کره را در یک دایرهٔ عظیمه قطع می‌کند که این دایرهٔ عظیمه جواب مسأله است.



مسأله ۵ ـ سه نقطه A و B و C روی یک کره واقع‌اند. نقطه‌ای از این کره را بیابید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد.



حل ـ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این صفحه کره را در دایرهٔ عظیمهٔ (C) قطع می‌کند. صفحه عمود منصف پاره‌خط AC را نیز رسم می‌کنیم. این صفحه کره را در دایرهٔ عظیمهٔ (C′) تلاقی می‌نماید. نقطه‌های برخورد این دو دایرهٔ (C) و (C′). جوابهای مسأله‌اند (دو جواب). اگر یکی از این دو نقطه را M بنامیم ،داریم $MA = MB = MC$.

مثال ۴: اگر (۰ و ۲− و ۱) A و(۱− و ۱ و ۰) B باشد معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

حل : راه اول ـ در معادلهٔ (۱) به جای مختصات نقاط A و B مقدار می‌گذاریم:

$$2(0-1)x + 2(1+2)y + 2(-1-0)z + 1 + 4 + 0 - (0+1+1) = 0 \Rightarrow \boxed{-2x + 6y - 2z + 3 = 0}$$

راه دوم ـ فرض می‌کنیم M (x , y , z) یک نقطه از صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت داریم:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 2z + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{-2x + 6y - 2z + 3 = 0}$$ معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB

راه سوم ـ مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB $(z_1$ و y_1 و $x_1)$

و تصاویر بردار نرمال صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB (c و b و a) راکه می‌تواند تصاویر بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد به دست می‌آوریم و در معادلهٔ $a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$ قرار می‌دهیم.

$$M\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۱+۰}{۲}=\dfrac{۱}{۲} \\ y=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۲+۱}{۲}=-\dfrac{۱}{۲} \\ z=\dfrac{z_A+z_B}{۲}=\dfrac{۰-۱}{۲}=-\dfrac{۱}{۲} \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} a=x_B-x_A=۰-۱=-۱ \\ b=y_B-y_A=۱+۲=۳ \\ c=z_B-z_A=-۱-۰=-۱ \end{array}\right.$$

$$a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$$

$$-۱\left(x-\frac{۱}{۲}\right)+۳\left(y+\frac{۱}{۲}\right)-۱\left(z+\frac{۱}{۲}\right)=۰ \Rightarrow$$

$$-x+۳y-z+\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow \boxed{-۲x+۶y-۲z+۳=۰}$$

مثال ۵: روی خط $D:\dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{-۲}=\dfrac{z-۳}{۳}$ نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ (۱ و ۱ و ۲) A و (۲+ و ۱ و ۲−) B به یک فاصله باشد.

حل: معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد این صفحه با خط D را به دست می‌آوریم.

$$M(x,y,z),\ A(۲,۱,۱),\ B(-۲,۱,۲),\ MA=MB$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲}=$$

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲$$

$$=(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۲)^۲$$

معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB $\boxed{-۸x+۲z-۳=۰} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{-۲}=\dfrac{z-۳}{۳}=t \Rightarrow \\ -۸x+۲z-۳=۰ \end{cases}$$

$$x=۲t+۱,\ y=-۲t-۲,\ z=۳t+۳ \Rightarrow$$

$$-۸(۲t+۱)+۲(۳t+۳)-۳=۰ \Rightarrow -۱۰t-۵=۰ \Rightarrow$$

$$t=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow M\left(x=۰ \text{ و } y=-۱ \text{ و } z=+\frac{۳}{۲}\right)$$

ادب ریاضی

با وجود نبوغ بارزی که داشت مقامات مدرسه‌ای او را آرام نمی‌گذاشتند تا بتواند از میدان وسیع و بارور اکتشافات خود بهره‌برداری کند. به عکس از به کار بردن هر وسیله‌ای برای خشمگین ساختن او خودداری نمی‌کردند. یا او را به کار و کوشش بیهوده وامی‌داشتند و یا با مواعظ حکیمانه و تنبیهات متوالی خود روح عصیان را در وی شدت می‌بخشیدند و با همهٔ احوال نمی‌توانستند هیچ‌گونه ایرادی بر او وارد آورند مگر عزت نفس بسیار و اراده‌ای آهنین برای این‌که ریاضی‌دانی بزرگ شود. در واقع در آن هنگام وی ریاضی‌دانی بزرگ بود اما آنان از این نکته غافل بوده‌اند. دو بدبختی دیگر که در سال هیجدهم زندگی برایش پیش آمد آخرین ضربات را بر خلق و خوی گالوا وارد آورد. در این سال برای بار دوم داوطلب امتحان ورودی پلی تکنیک شد و مردانی که حق لیاقت تراشیدن مدادهای او را نداشتند می‌بایست دربارهٔ کفایت او قضاوت کنند و نتیجه همان شد که می‌بایست انتظار داشت: گالوا بار دیگر رد شد و این آخرین شانس او بود و بعد از این درهای این مدرسه برای همیشه به روی او بسته می‌شد.

ریاضیدانهای نامی ـ حسن صفاری

مثلث ارتفاعیه

(قسمت دوم)

● ساسان اسماعیلی شاهرودی (دبیرستان سروش)

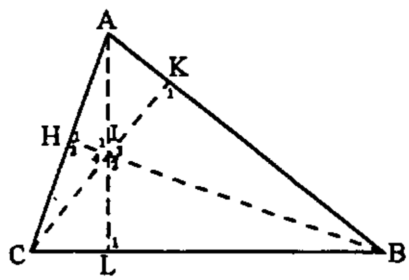
ویژگی هشتم:

در هر مثلث، حاصل ضرب دو قطعه‌ای که توسط مرکز ارتفاعیه بر روی ارتفاعها جدا می‌شوند با هم برابرند یعنی:

$$AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

$$\begin{cases}\hat{H}_1 = \hat{L}_1 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = I_2\end{cases} \Rightarrow A\hat{I}H \sim B\hat{I}L \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{HI}{LI}$$

$$\Rightarrow AI.LI = BI.HI \quad (I)$$



$$\begin{cases}\hat{K}_1 = \hat{H}_2 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{I}_3 = \hat{I}_4\end{cases} \Rightarrow H\hat{I}C \sim K\hat{I}B$$

$$\Rightarrow BI.HI = CI.KI \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow AI.LI = BI.HI = CI.KI$$

ویژگی نهم:

طول اضلاع مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

طبق قضیه سینوسها: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$

R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و R′ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه است)

$$\frac{KL}{\sin\hat{H}} = \frac{HL}{\sin\hat{K}} = \frac{HK}{\sin\hat{L}} = 2R'$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{\sin 2\hat{B}} = \frac{HL}{\sin 2\hat{C}} = \frac{HK}{\sin 2\hat{A}} = R$$

$$HK = R\sin 2\hat{A} \quad KL = R\sin 2\hat{B} \quad HL = R\sin 2\hat{C}$$

ویژگی دهم:

اگر S مساحت مثلث ABC و P_h نصف محیط مثلث ارتفاعیه باشد داریم: $P_h = \frac{S}{R}$

$$P_h = \frac{1}{2}(HK + LK + LH)$$

$$= \frac{R}{2}\left[\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}\right]$$

طبق رابطهٔ $\sin\hat{P} + \sin\hat{q} = 2\sin\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right).\cos\left(\frac{\hat{p}-\hat{q}}{2}\right)$ خواهیم داشت:

$$\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} = 2\left(\frac{2\hat{A}+2\hat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{2\hat{A}-2\hat{B}}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)$$

لذا:

$$P_h = \frac{R}{۲}\Big[۲\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$$

$$\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right) + ۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}\Big]$$

$$P_h = R\left[\sin\hat{C}\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right) + ۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}\right]$$

طبق رابطهٔ:

$$\cos\hat{p} + \cos\hat{q} = ۲\cos\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{۲}\right).\cos\left(\frac{\hat{p}-\hat{q}}{۲}\right)$$

خواهیم داشت:

$$P_h = R\sin\hat{C}\left[۲\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}+\hat{C}}{۲}.\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}-\hat{C}}{۲}\right]$$

$$P_h = ۲R\sin\hat{C}\cos\left(\frac{\pi-۲\hat{B}}{۲}\right)\cos\left(\frac{۲\hat{A}-\pi}{۲}\right)$$

$$P_h = ۲R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C} \quad (I)$$

از طرفی در هر مثلث داریم:

$$S_{A\hat{B}C} = \frac{abc}{۴R} = \frac{۸R^۳\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{۴R}$$

$$S_{A\hat{B}C} = ۲R^۲\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C} \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow P_h = \frac{S}{R}$$

از طرفی از رابطهٔ (I) می‌توان نتیجه گرفت:

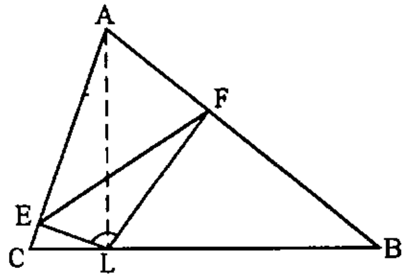
$$۲P_h = ۴R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$ (محیط مثلث ارتفاعیه)

ویژگی یازدهم:

اگر از یک رأس مثلث ارتفاعیه دو عمود بر دو ضلع مثلث *ABC* فرود آوریم آنگاه طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر نصف محیط مثلث ارتفاعیه می‌باشد.

$$S_{A\hat{B}C} = \frac{AL.BC}{۲} = \frac{AL.۲R\sin\hat{A}}{۲} = R.AL.\sin\hat{A}$$

$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{R} = AL.\sin\hat{A}$$



اگر $R_۱$ شعاع دایره محیطی مثلث EFL باشد خواهیم داشت:

$$EF = ۲R_۱\sin\hat{L} = ۲R_۱\sin\left(\pi-\hat{A}\right) = ۲R_۱\sin\hat{A}$$

از طرفی شعاع دایره محیطی چهارضلعی محاطی EAFL نیز $R_۱$ می‌شود، پس خواهیم داشت:

$AL = ۲R_۱ \Rightarrow EF = AL.\sin\hat{A}$ (AL قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی EAFL است)

$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{R} = AL.\sin\hat{A} \Rightarrow EF = P_h$$

$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{R} = P_h$$

اگر L را رأس‌مثلث ارتفاعیه درنظرنگیریم‌به‌عبارت دیگر AL بر BC عمود نباشد نیز رابطهٔ EF = AL. sinA صادق می‌باشد. حال چون $\sin\hat{A}$ عدد ثابتی است کمترین مقدار برای EF وقتی به‌دست می‌آید که AL عمود بر BC باشد پس با تغییر نقطهٔ L بر روی ضلع BC خواهیم داشت:

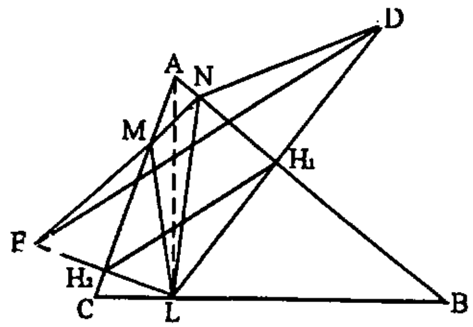
$$EF \geq P_h$$

ویژگی دوازدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه بین تمامی مثلثهای محاط در آن، مثلث ارتفاعیه کمترین محیط را داراست.

مثلث دلخواه MNL را محاط در مثلث ABC درنظر می‌گیریم. E و D به‌ترتیب قرینهٔ نقطه L نسبت به اضلاع AC و AB می‌باشند. حال $H_۱$ را به $H_۲$ و E را به D وصل می‌کنیم.

$$\begin{matrix} EH_2 = LH_2 \\ DH_1 = LH_1 \end{matrix} \Rightarrow H_1H_2 \parallel ED \ , \ H_1H_2 = \frac{ED}{2}$$



طول خط شکستهٔ EMND از طول خط ED بیشتر است، از طرفی طول خط شکستهٔ EMND برابر محیط مثلث MND است و همچنین:

ED وقتی به حداقل خود می‌رسد که H_1H_2 به حداقل خود برسد و در ویژگی قبل دیدیم وقتی H_1H_2 به حداقل خود می‌رسد که L پای عمود باشد پس حدّاقل اندازه ED می‌تواند برابر محیط مثلث ارتفاعیه باشد لذا اگر L پای عمود نباشد داریم: $ED > 2P_h$.

از طرفی داریم: $ED < P_{\overset{\triangle}{MND}}$ نتیجه می‌شود: $2P_h < P_{\overset{\triangle}{MND}}$

ویژگی سیزدهم:

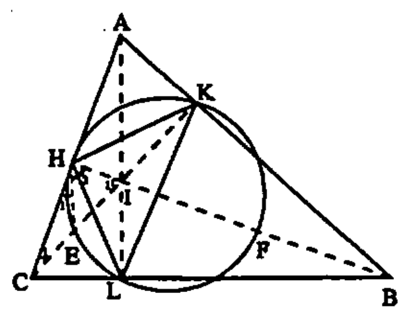
دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه از وسط *AI*، *BI* و *CI* می‌گذرد.

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}(EL + LF) \quad (I)$$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2}(HE + KF) \quad (II)$$

طبق ویژگی اوّل خواهیم داشت:

KF = LF و EL = HE (III)



$$(I),(II),(III) \Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{I}_1 \Rightarrow EH = EI$$

$$\begin{cases} \hat{I}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\pi}{2} \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \\ \hat{H}_2 = \hat{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} EH = EC \\ EH = EI \end{matrix} \Rightarrow EC = EI$$

یعنی نقطهٔ E وسط CI است.

برای دو حالت دیگر نیز به همین روش اثبات می‌کنیم.

(تذکر: دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه همان دایرهٔ نه نقطه مثلث ABC است.)

ویژگی چهاردهم:

مساحت مثلث ارتفاعیه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

در هر مثلث داریم:

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}$ (حاصل ضرب دو ضلع) . sin (زاویه بین دو ضلع)

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}} = \frac{1}{2} R \sin 2\hat{B} R \sin 2\hat{C} \sin 2\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{HKL}} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C}$$

ویژگی پانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه مساحت مثلث ارتفاعیه از ربع مساحت مثلث *ABC* کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C} \le \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$$

پس:

$$2R^2 \sin 2\hat{A} \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C} \le 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$$

$$4S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{HKL}} \le \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{4}$$

حالت تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$

ویژگی شانزدهم:

در هر مثلث حادّالزاویه، محیط مثلث ارتفاعیه از نصف محیط مثلث اصلی کوچکتر یا مساوی آن است.

در هر مثلث داریم:

$$\sin\hat{A}\sin\hat{B}+\sin\hat{B}\sin\hat{C}+\sin\hat{C}\sin\hat{A}\le\frac{9}{4}\quad (I)$$

و در بحث نامساویها داریم:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\quad (II)$$

$$(I),(II)\ \Rightarrow\ \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}\ge 4\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$2R\sin\hat{A}+2R\sin\hat{B}+2R\sin\hat{C}\ge 2\times 4R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

طبق ویژگی دهم خواهیم داشت:

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}}\ge 4P_h\ \Rightarrow\ 2P_h\le\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{2}$$

تساوی مربوط به وقتی است که: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{3}$

ویژگی هفدهم:

در هر مثلث رابطه روبه‌رو برقرار است:

$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}=\frac{1}{R}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{abc}{4R}\quad\Rightarrow abc=4R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

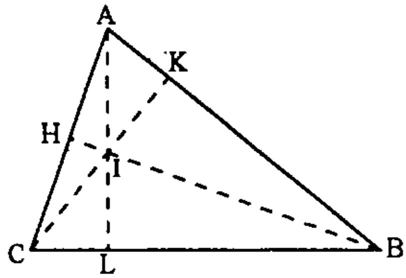
$$\frac{AI}{bc}+\frac{BI}{ac}+\frac{CI}{ab}$$

$$=\frac{a.AI+b.BI+c.CI}{abc}$$

$$=\frac{a(AL-IL)+b(BH-IH)+c(CK-IK)}{4R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

$$=\frac{2S_{\overset{\Delta}{ABC}}-2S_{\overset{\Delta}{IBC}}+2S_{\overset{\Delta}{ABC}}-2S_{\overset{\Delta}{IAC}}+2S_{\overset{\Delta}{ABC}}-2S_{\overset{\Delta}{IAB}}}{4R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

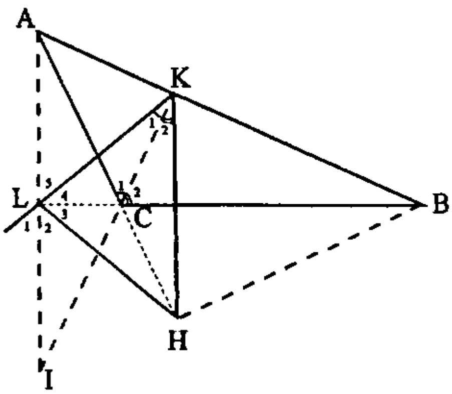
$$=\frac{4S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{4R.S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{1}{R}$$



ویژگی هجدهم:

در هر مثلث با یک زاویه منفرجه مرکز ارتفاعیه بر مرکز یکی از دوایر محاطی خارجی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

$$\begin{cases}\hat{L}_3=\hat{L}_4\\ \hat{L}_4+\hat{L}_5=\frac{\pi}{2}\\ \hat{L}_2+\hat{L}_3=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{L}_5=\hat{L}_2\\ \hat{L}_5=\hat{L}_1\end{cases}\Rightarrow\hat{L}_1=\hat{L}_2\ ,\ \hat{K}_1=\hat{K}_2$$



پس محلّ تلاقی نیمساز خارجی زاویه L و نیمساز داخلی زاویه K که مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $\overset{\Delta}{HKL}$ می‌باشد، بر مرکز ارتفاعیهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ منطبق است.

ویژگی نوزدهم:

شعاع دایره محاطی مثلث ارتفاعیه از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$r'=2R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم در هر مثلث رابطهٔ روبه‌رو صادق است:

$$r=\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$

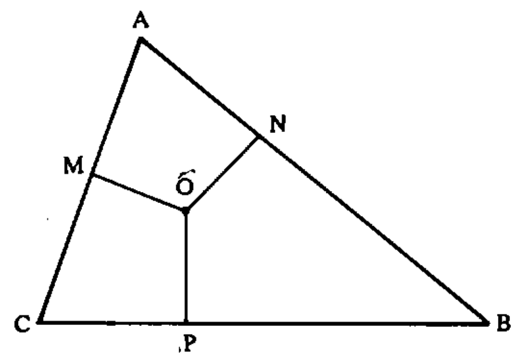
($P_{\overset{\triangle}{ABC}}$ را نصف محیط $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌گیریم و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.)

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{OCB}}+S_{\overset{\triangle}{OAB}}+S_{\overset{\triangle}{OAC}}$$

$$=\frac{OM.AC+OP.BC+ON.AB}{۲}$$

$$=\frac{r(BC+AC+AB)}{۲}$$

$$=\frac{۲r.P_{\overset{\triangle}{ABC}}}{۲}$$



و در مثلث ارتفاعیه داریم:

$$r=\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}$$

$$r'=\frac{S_{\overset{\triangle}{HKL}}}{P_h}=\frac{\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin ۲\hat{A}\sin ۲\hat{B}\sin ۲\hat{C}}{۲R\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$$

$$=۲R\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

ویژگی بیستم:

الف) اگر l، h و k اضلاع مثلث ارتفاعیه باشند داریم:

$$\frac{l}{a^{۲}}+\frac{h}{b^{۲}}+\frac{k}{c^{۲}}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۲abc}$$

$$=\frac{R\sin ۲\hat{A}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{A}}+\frac{R\sin ۲\hat{B}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{B}}+\frac{R\sin ۲\hat{C}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{C}}$$

$$=\frac{\cos\hat{A}}{a}+\frac{\cos\hat{B}}{b}+\frac{\cos\hat{C}}{c}$$

با توجّه به رابطه کسینوسها در هر مثلث داریم:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\hat{A}\quad\Rightarrow\quad bc\cos\hat{A}=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲}$$

$$\frac{l}{a^{۲}}+\frac{h}{b^{۲}}+\frac{k}{c^{۲}}=\frac{bc.\cos\hat{A}+ac.\cos\hat{B}+ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

$$=\frac{(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})+(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})+(c^{۲}+b^{۲}-a^{۲})}{۲abc}$$

$$=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۲abc}$$

ب)

$$\frac{(b^{۲}-c^{۲})\,l}{a^{۲}}+\frac{(c^{۲}-a^{۲})\,h}{b^{۲}}+\frac{(a^{۲}-b^{۲})\,k}{c^{۲}}=۰$$

$$\frac{(b^{۲}-c^{۲})\,l}{a^{۲}}+\frac{(c^{۲}-a^{۲})\,h}{b^{۲}}+\frac{(a^{۲}-b^{۲})\,k}{c^{۲}}$$

$$=\frac{(b^{۲}-c^{۲})R\sin ۲\hat{A}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{A}}+\frac{(c^{۲}-a^{۲})R\sin ۲\hat{B}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{B}}$$

$$+\frac{(a^{۲}-b^{۲})R\sin ۲\hat{C}}{۴R^{۲}\sin^{۲}\hat{C}}$$

$$=\frac{\left(b^{2}-c^{2}\right).bc.\cos\hat{A}+\left(c^{2}-a^{2}\right).ac.\cos\hat{B}+\left(a^{2}-b^{2}\right).ab.\cos\hat{C}}{abc}$$

با استفاده از رابطهٔ کسینوسها در مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\left(b^{2}-c^{2}\right)l}{a^{2}}+\frac{\left(c^{2}-a^{2}\right)h}{b^{2}}+\frac{\left(a^{2}-b^{2}\right)k}{c^{2}}$$

$$=\frac{\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)\left(b^{2}-c^{2}\right)+\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)\left(c^{2}-a^{2}\right)+\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)\left(a^{2}-b^{2}\right)}{2abc}$$

$$=\frac{b^{4}+b^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{2}c^{2}-c^{4}+a^{2}c^{2}+a^{2}c^{2}+c^{4}-b^{2}c^{2}-a^{4}-a^{2}c^{2}+a^{2}b^{2}+a^{4}+a^{2}b^{2}-a^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}-b^{4}+b^{2}c^{2}}{2abc}$$

$$=0$$

منابع:

۱) پرویز شهریاری کتاب آشنایی با ریاضیات، ج ۲۷. (انتشارات فردوس.)

۲) ه‍ کوکس تیروس. گریتز بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ ترجمه: عبدالحسین مصحفی. (انتشارات مدرسه.)

۳) جلیل‌الله قراگوزلو کتاب مثلثات پایه. (انتشارات فاطمی)

۴) مجله شمارهٔ هشت دوره چهارم از سری مجلات یکان.

۵) مجله شمارهٔ هشت دوره هفتم از سری مجلات یکان

۶) کتاب هندسه سال دوم ریاضی.

۷) کتاب مثلثات سال سوم ریاضی.

تفریح اندیشه ۵

بعد از سرقت، چهار کارمند بانک مشخصات سارق را بـه دست داده‌اند.

بنابه عقیدهٔ نگهبان بانک، سارق چشمانی آبی داشته، بلند بوده، و کلاه به سر و جلیقه به تن داشته است.

بنا به نظر مسؤول گیشه، چشمان سیاه داشته، کوتاه بوده و جلیقه و کلاه به تن و سر داشته است.

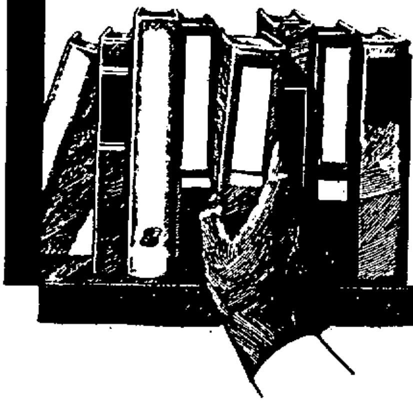
بنا به نظر منشی، چشمان سبز داشته، متوسط القامه بوده، و بارانی و کلاه داشته است.

بنابه عقیدهٔ رئیس بانک، چشمان خاکستری داشـته، بـلند بـوده، جلیقه به تن داشته، اما بی‌کلاه بوده است. بعداً مشخص شد که هر یک از گواهان تنها یکی از چهار توصیف را به‌طور صحیح بیان کرده است و هر یک از جزئیات توسط حداقل یک گواه به درستی تـوصیف شده است.

توصیفهای مربوطه را در جدولی می‌آوریم:

	چشم	قد	پوشش	کلاه
نگهبان	آبی	بلند	جلیقه	بله
مسؤول گیشه	سیاه	کوتاه	جلیقه	بله
منشی	سبز	متوسط	بارانی	بله
رئیس‌بانک	خاکستری	بلند	جلیقه	نه

جواب در صفحهٔ ۸۸



معرفی کتاب

■ **جبر و آنالیز**

تألیف: محمد رجبی طرخورانی، علی‌اکبر واحدی آملی

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

در مقدمهٔ کتاب چنین آمده است که: «مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال، که در این کتاب مورد بحث قرار گرفته‌اند، از مفاهیم اساسی ریاضیات هستند، و توجه دقیق به آنها برای هرکسی که بخواهد ریاضی بخواند ضروری است. در این کتاب سعی شده تا آنجاکه ممکن است مفاهیم و تعاریف و همچنین قضایا به‌طور دقیق بیان و اثبات شوند.»

فصلهای کتاب عبارتند از: توابع، حد توابع، پیوستگی توابع، مشتق و کاربردهای آن، رسم نمودار توابع حقیقی، معادلات درجه سوم و معادلات پارامتری، دیفرانسیل توابع، انتگرال نامعین یا تابع اولیه، انتگرال معین و کاربردهای آن.

مطالب کتاب چنان تنظیم شده‌اند که مفاهیم و تعاریف و قضایا را به‌طور دقیق بیان و اثبات کند، ولی این تنظیم بنا به مقدمهٔ کتاب چنان است که افرادی راکه تمایل زیادی به اثبات قضایا ندارند و آنها را نمی‌خوانند از خواندن مثالها و تمرینهای کتاب ممانعت نمی‌کند.

بعضی از تمرینها و مسائل کتاب از مسائل امتحانات نهایی انتخاب شده‌اند و به این ترتیب خواننده را با این نوع مسائل نیز آشنایی می‌دهند.

دکتر محمد رجبی طرخورانی یکی از دو مؤلف کتاب است که متأسفانه در اسفند ماه ۱۳۷۲ دعوت حق را لبیک گفت و از سرای فانی به جهان باقی شتافت رحمة الله رحمةً واسعه. مرحوم دکتر رجبی استاد ریاضیات دانشگاه تهران و دارای تألیفات عدیده در زمینهٔ ریاضیات بودند. از استاد مرحوم دو فرزند پسر به‌جا مانده است که امیدواریم راه پدر را در پیش گیرند و در دنیای علم بارآور شوند.

مؤلف دیگر کتاب استاد ارجمند آقای علی‌اکبر واحدی آملی اند که ایشان نیز از اساتید ریاضی دانشگاه تهران و صاحب تألیفات متعدد می‌باشند، طول عمر استاد را از خداوند خواستاریم.

■ **معادله و نامعادله**

ترجمه: پرویز شهریاری

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

کتاب **معادله و نامعادله** کتابی است برای دانش‌آموزان و دبیران، که روشهای درست استدلال در حل مسأله‌های ریاضی را می‌آموزد و بنا به مقدمهٔ آن این ادعا را دارد که کسی که مثالها، تکلیفها و تمرینهای آن را دنبال کند، می‌تواند مطمئن شود که نه تنها بر موضوع مورد بحث کتاب مسلط شده است، بلکه روش درست اندیشیدن را نیز فرا گرفته است.

سه فصل کتاب، به‌ترتیب، عبارتند از: معادله‌ها و نامعادله‌های هم ارز، معادله‌های شامل یک مجهول، و نامعادله‌های با یک مجهول.

یکی از مثالهای فصل اول را در نظر می‌گیریم: اگر در معادلهٔ $\frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲$، صورت و مخرج کسر سمت چپ را به عامل مشترک $x-۱$ ساده کنیم، به معادلهٔ $x+۱=۲$ می‌رسیم که هم ارز معادلهٔ مفروض نیست. در واقع، عدد ۱ تنها ریشهٔ معادلهٔ دوم (یعنی) نتیجه

است، درحالی که در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند.

مثال دیگر: آیا این معادله‌ها هم ارزند؟

$$\log(x^2 - 4) = \log(4x - 7) \quad \text{و} \quad x^2 - 4 = 4x - 7$$

مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ دوم، شامل دو عدد $x_1 = 3$ و $x_2 = 1$ است. ولی عدد ۱، ریشهٔ معادلهٔ اول نیست، بنابراین معادله‌های مفروض هم ارز نیستند.

مثالی دیگر: نامعادلهٔ $x^2 . 5^x - 5^{2+x} \le 0$ را حل کنید.

چون $5^{2+x} = 25 \times 5^x$، بنابراین نامعادلهٔ مفروض هم ارز است با نامعادلهٔ

$$(x^2 - 25) . 5^x \le 0$$

و چون $5^x > 0$، نامعادلهٔ اخیر، هم ارز است با نامعادلهٔ

$$x^2 - 25 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \le x \le 5$$

بازهٔ $[-5 , 5]$ مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ اصلی را تشکیل می‌دهد.

مثالهای فوق برای آشنا شدن خواننده با مطالب کتاب کافی است.

پاسخهای تکلیفها و تمرینهای کتاب در پایان کتاب آورده شده‌اند.

کتاب همانطور که قبلاً هم اشاره شد هم برای دانش‌آموزان و هم برای دبیران نوشته شده است و هر دو گروه را به کار می‌آید.

■ هندسه‌های جدید

جیمزار. اسمارت، ترجمه: غلامرضا یاسی پور

انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۲

کتاب هندسه‌های جدید چنان‌که از نامش برمی‌آید دربارهٔ هندسه‌های جدیدی است که تا سال ۱۹۸۸ ـ سال سومین پرداختهٔ آن ـ پا به عرصهٔ وجود نهاده‌اند. کتاب بنا به گواهی مقدمه‌اش بررسی هندسه‌های متفاوت به جای هندسه‌ای واحد است، و در سراسر خود، بر کاربردهای عملی و تازهٔ هندسه‌های جدید تأکید دارد، و از جدیدترین فصول آن فصل مهم **گرافیکهای کامپیوتری** است.

کتاب هم برای زیردستان و هم برای زبردستان ریاضی طرح شده است، و هم مناسب دانشجویانی است که از نظرگاه هنرهای آزاد به ریاضیات شوق می‌آورند و هم مناسب آنانی که سودای معلم ریاضیات شدن را در سر می‌دارند.

بعضی از بخشهای کتاب عبارت‌اند از:

هندسه‌های متناهی، هندسه‌های چهارخطی و چهار نقطه‌ای، هندسه‌های متناهی فانو و یانگ، هندسه‌های متناهی پاپوس و دزارگ، گروههای تبدیلات، موارد استعمال تبدیلات در گرافیکهای کامپیوتری، خواص گروه حرکات اقلیدسی، مجموعه‌های محدب و خطوط پشتیبان، پهنای مجموعه، دایرهٔ نه نقطه و هندسهٔ ترکیبی اوایل قرن نوزدهم، مزدوجهای هم زاویه، ترسیمات و اثباتهای عدم امکان هندسهٔ تحلیلی انعکاس، مبنای اصل موضوعی هندسهٔ تصویری، مخروطیات، تبدیلات توپولوژیک، مدخل توپولوژی سطوح، هندسهٔ هذلولوی، نقاط انگاری و مثلثهای امگا، هندسهٔ بیضوی.

کتاب دارای چند ضمیمه نیز هست که از آن جمله‌اند: آکسیومهای هیلبرت، اصول موضوع برکهوف، مفاهیمی منتخب از منطق.

کتاب هندسه‌های جدید کتابی است که خواننده را با مطالب قدیم و جدید هندسه آشنا می‌کند. از مطالب قدیم برای آماده کردن خواننده برای موضوعات جدید سخن به میان می‌آورد و همانگونه که قبلاً خاطرنشان شد از موارد کاربرد نیز غفلت ندارد.

دانش‌آموزی که قدم به عرصهٔ ریاضیات می‌گذارد و دبیری که میدانهایی از این عرصه را درنوردیده است، هر دو، از خواندن این کتاب ناگزیرند و به همین مناسبت است که خواندن آن به هر دو طایفه توصیه می‌شود.

ادب ریاضی

بدون تردید تمام توسعهٔ ریاضیات دارای ریشه‌هایی روانی درخواسته‌ها و فعالیتهای عملی بشر است امّا بعد از این که یکبار فشار ضرورت عملی موجب ایجاد آن شد به صورتی اجتناب ناپذیر از نفس خود فایده برمی‌گیرد و از حدود فواید بلافاصله عروج می‌کند.

ریاضیات چیست؟ ریچارد کورانت

ترجمه: حسن صفاری

جــواب نامــه‌هــا

آقای ارشام برومند سعید (دانشگاه شهید باهنر کرمان)

با تشکر از شما به عرض می‌رسانیم که مطلب شما در حد یک مقاله نیست و برای اطلاع عموم نتایج آن را عیناً و به طور خلاصه در این‌جا می‌آوریم:

الف) مجموع ارقام عدد حاصل از ضرب هر عدد در ۹ برابر ۹ یا مضربی از ۹ است، مانند:

$۴ \times ۹ = ۳۶$ و $۳ + ۶ = ۹$

$۱۲۷ \times ۹ = ۱۱۴۳$ و $۱ + ۱ + ۴ + ۳ = ۹$

$۷۸۶۳۲۹۱ \times ۹ = ۷۰۷۶۹۶۱۹$ و

$۷ + ۰ + ۷ + ۶ + ۹ + ۶ + ۱ + ۹ = ۴۵ = ۵ \times ۹$

و ...

ب) تفاضل هرعدد از مجموع ارقام آن، مضربی از ۹ است، مانند:

$۷۸۶۳۲۹۱ - (۷ + ۸ + ۶ + ۳ + ۲ + ۹ + ۱) =$

$۷۸۶۳۲۹۱ - ۳۶$

$۷۸۶۳۲۵۵ = ۸۷۳۶۹۵ \times ۹$

ج) اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقیماندهٔ ۱ یا ۸ برسد مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای برابر یک خواهد داشت.

اثبات:

فرض اوّل: $M = ۹n + ۱ \Rightarrow M \overset{۹}{\equiv} ۱$

$$M^۲ = ۸۱n^۲ + ۱۸n + ۱$$

$$= ۹(۹n^۲ + ۲n) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow M^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

فرض دوّم: $M = ۹n + ۸ \Rightarrow M \overset{۹}{\equiv} ۸$

$$M^۲ = ۸۱n^۲ + ۱۴۴n + ۶۴$$

$$= ۹(۹n^۲ + ۱۶n + ۷) + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow M^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

آقای هادی جمشیدی کارگر؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

خانم لیلا مدیری؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (کرج)

ضمن تشکر از شما، برای ارسال دو راه حل مسأله‌ای از برهان شمارهٔ ۵ به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسأله‌های مندرج در مجله برهان بجز مسائل مسابقه‌ای لزومی ندارد. زیرا حل تمام مسائل در انتهای شمارهٔ بعدی مجله آورده می‌شود. موفقیت روزافزون شما را خواستاریم.

آقای ناصر آذری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (قائمشهر)

از مطلب شما در رابطه با لگاریتمی کردن یک عبارت متشکریم. امید است در شماره‌های آینده از آن استفاده شود. ضمناً متذکر می‌شویم که مسائل باید همراه با حل ارائه شوند.

آقای امید شکرایی؛ دانش‌آمور رشتهٔ ریاضی (پولادشهر)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که مسائلی را که حل آنان را خواستار بودید می‌توانید حل آنان را در شماره‌های قبلی مجلهٔ برهان مشاهده کنید.

آقای مانا سپهوند؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (خرم آباد)

از مقالهٔ ارسالی شما متشکریم.

آقای یوسف خمسه؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)

با تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از مسائل شما استفاده خواهد شد.

آقای کیانوش یزدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)

ضمن تشکر از مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل باید با حلِّ کامل ارائه شوند.

آقای بختیار آبیار؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اسد آباد)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسأله‌ای حل شده، به عرض می‌رسانیم؛ سعی کنید مسائل تکراری نباشند و همچنین در سطح مطلوبتر و جدیدتری ارائه شوند. مسألهٔ ارسالی شما در کتاب جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی موجود است.

آقای رضا جعفرزاده؛ دانش‌آمور رشتهٔ ریاضی (بابل)

از تست ارسالی شما متشکریم. در جای مناسب و در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد مهدی ولی الهی (بابل)

ضمن تشکر از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ مسائل جدیدتری در سطح مطلوب ارائه دهید.

آقای فریدون عبدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (کامیاران)

با تشکر از مطلب ارسالی شما، پیروزی و موفقیت بیشتر شما را آرزومندیم.

آقای علیرضا گلشاهی؛ دانش‌آموز (تهران)

با تشکر از مسألهٔ ارسالی شما، در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی حبیبی معینی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لاهیجان)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مطلبی در رابطه با «خاصیتهای جالب عدد ۷ در تقسیم» به عرض می‌رسانیم؛ در صورت امکان و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرهوشنگ فرهودی مقدم؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «بررسی تابع قدرمطلق» به عرض می‌رسانیم؛ امید است از آن در جای مناسب استفاده کنیم.

آقای رضا بردباری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شیراز)

ضمن تشکر از ارسال یک مسألهٔ حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم؛ در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امید قطره سامانی؛ دانش‌آموز (اصفهان)

از تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

خانم مرضیه اسکندری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مطلب ارسالی شما به عرض می رسانیم؛ اثبات رابطهٔ شرط ریشهٔ مشترک بین دو معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌توانید در آخرین قسمت مقالهٔ مربوط به حل معادلات درجهٔ اوّل و دوم مندرج در برهان ۲ مشاهده کنید.

آقای فرهاد صنوبریی کشی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

ضمن تشکر از مطالب و مسائل ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر غفوری نژاد؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بوکان)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای سیدرضا حسینی تهرانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شهریار)

با تشکر از مقالهٔ شما تحت عنوان «چگونه زاویه‌های گوناگون را بسازیم و به نسبتهای مختلف تقسیم کنیم»؛ ان شاءاللّه در شماره‌های

بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای احمدرضا صادقی‌نیا؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال چند مسأله همراه با حل آن، به عرض می‌رسانیم؛ سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید و همچنین تکراری نیز نباشند. برای دریافت مجله نیز فرم اشتراک را به طور کامل پرکنید و همراه با فیش بانکی ارسال کنید.

آقای محمدمهدی دیزج خلیلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از مسائل و مقالهٔ ارسالی شما، تحت عنوان «حذف پارامترها در مثلثات» به عرض می‌رسانیم؛ امید است بتوانیم آن را در شماره‌های بعدی درج کنیم.

آقای پیمان عالیباف؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مرند)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل جدیدتر و در سطح مطلوبتری ارائه دهید. باید توجه داشته باشید که تنها مسائلی که همراه با حل کامل باشند و نیز تکراری نباشند برای ما ارسال کنید.

خانم ندا شهیدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم؛ امید است در شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم.

آقای مهرداد ناصانژاد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آمل)

ضمن تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم؛ معادلهٔ سیال $x^n + y^n = z^n$ مربوط به آخرین حکم فرما است که برای توانهای خاصی امتناع آن در سیستم اعداد صحیح ثابت شده است و در رابطه

با حلِ دستگاه $\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ x^2 + 5 = z^2 \end{cases}$ باید بگوییم که این یک مسألهٔ

مسابقه‌ای تاریخی است که فیبوناچی نیز در آن مسابقه شرکت داشته است و حلِ آن را نیز ارائه داده است. برای اطلاع بیشتر می‌توانید به کتاب «اندیشه ریاضی»، ترجمهٔ آقای «پرویز شهریاری» مراجعه کنید.

آقای وحید عالی پور؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (مسجد سلیمان)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای خلیل دولتیاری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «روشی برای محاسبهٔ مساحت بعضی از سطوح» به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای سعیدرضا گودرزی؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (شیراز)

با تشکر از شما برای ارسال نامه‌ای محتوی «ساخت اعداد طبیعی فقط با ارقام ۱۳۷۲ و با استفاده از علائم ریاضی» به عرض می‌رسانیم، امید است که امکان درج آن در شماره‌های آینده در جای مناسب به وجود آید.

آقای برات قربانزاده؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شیروان)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائل و مقاله‌ای تحت عنوان «اثبات قضیهٔ اشتاینر ـ لموس» به عرض می‌رسانیم که در صورت تأیید، امید است در یکی از شماره‌های آتی به چاپ برسد.

آقای حسن اسماعیلی؛ دانشجوی رشتهٔ ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از شما جهت ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «گذری چند بر زندگی ملامحمدباقر یزدی» و جدول تاریخی اسامی ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی ۸۰ تا ۹۶۰ شمسی (۷۱۰ تا ۱۵۸۰ میلادی) به عرض می‌رسانیم که در صورت امکان در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل والازاده (گرگان)

با تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «نکاتی از کتاب مراسم‌الانتساب فی علم‌الحساب» و مطالبی در رابطه با ادب ریاضی، در صورت لزوم از آنان در جای مناسب استفاده می‌کنیم.

آقای رسول شمشادی (رشت)

ضمن تشکر از تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل

یا تستها باید همراه با جواب کامل ارائه شوند.

آقای رامین آموی؛ دانش آموز رشته ریاضی (مسجدسلیمان)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت نیاز از آن استفاده خواهد شد.

آقای علی حسین‌زاده؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (کاشان)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «تابع جزء کسری» به عرض می‌رسانیم که توابع جزء صحیح بنابر نیازی که موجود بوده است تعریف و ساخته شده‌اند، بدیهی است در صورتی که نیازی به توابع با جزء غیرصحیح (اعشاری یا کسری) نیز به وجود آید می‌توان آن را به شکلی عمومیتر از آن که شما به آن اشاره کرده‌اید، تعریف کرد و قوانین کلیتری در این مورد ارائه داد. در هر صورت توجه و حس نوآوری شمادر ریاضیات تحسین‌آمیز است.

آقای حسین سبزرو (تهران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «معرفی فرمولی برای به دست آوردن سه‌تاییهای فیثاغورثی» به اطلاع می‌رسانیم که برای به دست آوردن تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی از اتحاد زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\forall K, U, V \in Z : a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = K(U^2 - V^2) \\ b = 2KUV \\ c = K(U^2 + V^2) \end{array} \right.$$

بدیهی است به ازای $K = 1$ و با شرط $(U, V) = 1$ تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی اصلی حاصل می‌شوند زیرا اتحاد زیر برقرار است:

$$(K(U^2 - V^2))^2 + (2KUV)^2 = (K(U^2 + V^2))^2$$

واضح است که فرمول $K = 4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i$ با شرط $K \geq 3$ و $(a = n, b = k, c = n + 1)$ راکه ارائه داده‌اید تمام سه‌تاییهای فیثاغورثی اصلی را به دست نمی‌دهد.

خانم سیدهٔ صدیقهٔ حسینی؛ دانش آموز رشته ریاضی (لنگرود)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی حل شده؛ امید است از مسائل شما در شماره‌های بعدی مجله استفاده شود.

آقای رامتین آمویی؛ دانش آموز رشته ریاضی (مسجد سلیمان)

از ارسال مسائل حل شدهٔ شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقای امید خاتین زاده؛ دانش آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مطالب ارسالی شما تشکر می‌کنیم. درصورت امکان در جای مناسب از آن استفاده خواهد شد.

آقای محسن نجفی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گناباد)

از نامهٔ ارسالی شما تشکر می‌کنیم.

آقای علی عمیدی؛ دانش آموز رشته ریاضی (گرمسار)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسائلی حل شده؛ درصورت لزوم از مسائل غیر تکراری آن استفاده خواهد شد.

ادب ریاضی

ریاضیات به عنوان یکی از تراوشات ضمیر آدمی منعکس کنندهٔ ارادهٔ فعال، سیر معنوی عقل و استدلال و علاقه‌مندی به کمال زیبایی است. عواملی که مبنای آن را تشکیل می‌دهند عبارتند از: منطق و اشراق، تحلیل و سازندگی، وحدت و کلیت. با وجود این‌که سنتهای متفاوت در ریاضیات ممکن است توجه خود را به جنبه‌های مختلف عوامل مزبور معطوف سازند باید گفت که فقط برخورد این نیروهای متخالف و کوشش در راه ترکیب آنهاست که حیات واقعی و فایدهٔ عملی و کمال ارزش دانش ریاضی را به وجود می‌آورد.

ریاضیات چیست؟ ریچارد کورانت

ترجمه : حسن صفاری

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۹

تعداد بسیاری از شما عزیزان دانش‌آموز جواب صحیح برای مسألهٔ مسابقه‌ایِ برهان ۹ ارسال داشته‌اید و اسامیِ نفراتی که دقیق‌تر و کامل‌تر پاسخ داده بودند در ذیل آمده است. در ضمن از بین این نفرات راه حل آقای حسین علمدار دانش‌آموز سال سوّم ریاضی از نیشابور انتخاب شده است.

صورت مسأله : آیا می‌توانید مجموعه‌ای همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر روی IR معرفی کنید که همهٔ شرایط فضای برداری به جز شرطِ $1.V = V$ را دارا باشد؟

حل : در مجموعهٔ IR^2 اعمال جمع و ضرب اسکالر را به صورتِ زیر تعریف می‌کنیم.

$$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda \in IR ; \lambda . (x , y) = (\lambda x , 0)$$

اولاً واضح است که $(IR^2 , +)$ یک گروه آبلی است و ثانیاً به راحتی قابل بررسی است که همهٔ شرایط فضای برداری به جز شرط مزبور برقرار است.

$$\forall (x , y) \in IR^2 ; 1.(x , y) = (1x , 0)$$

$$= (x , 0) \neq (x , y) \Longrightarrow 1.V \neq V$$

■ اسامی نفراتی که پاسخ مسألهٔ مسابقه‌ای شمارهٔ ۹ را کامل و دقیق بیان کرده‌اند.

۱ ـ آقای علیرضا همایونفر
۲ ـ آقای ساسان کمیلی‌زاده
۳ ـ آقای آمر عبدالرّحیم
۴ ـ آقای محمد حسین حدّادی
۵ ـ آقای مصطفی صفوی
۶ ـ آقای علی میرهن کسمایی
۷ ـ آقای نادر مطیع
۸ ـ آقای مهدی نارنگی
۹ ـ آقای مرتضی بیات
۱۰ ـ آقای محسن علیجانیانزاده
۱۱ ـ آقای فرشاد داوودی فرد
۱۲ ـ آقای شهاب اردلان
۱۳ ـ آقای کامیار گردنیان
۱۴ ـ آقای ارسلان چوپانی
۱۵ ـ آقای امین سعیدفر
۱۶ ـ آقای مسعود معمارزاده زواره
۱۷ ـ آقای یدا... نیک بخت
۱۸ ـ آقای محمد صادق عبدی
۱۹ ـ آقای اکبر ترابی
۲۰ ـ آقای حمیدرضا داوریان
۲۱ ـ آقای محمدرضا ساطعی

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ ثابت کنید اگر $K > 1$ باشد آنگاه عدد: $P = K^2(2K^4 + 3K^3 - K^2 - 3K - 1)$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است.

۲ـ ثابت کنید عدد $A = 3^{20} - 1$ بر عدد $B = 296880$ بخش‌پذیر است.

۳ـ بزرگترین و کوچکترین عدد صحیحی را که می‌توان در یک حافظهٔ n بیتی و 2n بیتی ذخیره نمود با محاسبه به‌دست آورد.

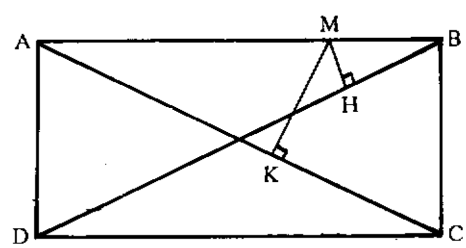
(این مسأله مسابقه‌ای، کامپیوتری است)

مسائل برای حل

● هندسه: محمدهاشم‌رستمی
● ریاضیات جدید: حمیدرضاامیری
● جبرومثلثات: احمدقندهاری ـ محمدرضاهاشمی ـ مهدی‌قمصری

● مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ مستطیل ABCD مفروض است. اگر M نقطه‌ای دلخواه از ضلع AB باشد، ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از قطرهای BD و AC $(MH + MK)$، مقدار ثابتی است.

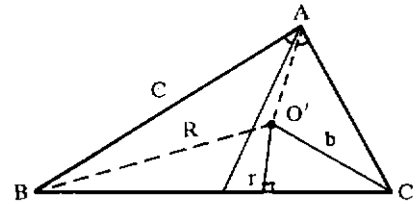


و این مقدار ثابت را تعیین کنید.

(فرستنده: آقای رضا نصیری دانش‌آموز دبیرستان نمونه روزبه زنجان.)

۲ ـ ثابت کنید که مجموع اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با مجموع قطرهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی مثلث.

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow b + c = 2R + 2r$$



۳ ـ اگر ارزش گزارهٔ $P \vee (\sim p \wedge q)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ $(p \vee q)$ را تعیین کنید. اگر گزارهٔ فوق نادرست باشد ارزش $(p \vee q)$ چه خواهد بود؟ در کل چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۴ ـ ارزش گزارهٔ سوری زیر را تعیین کنید:

$$(\forall x \in IR ، \frac{x+1}{2x-1} \in IR) \Leftrightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$$

۵ ـ اگر $A_k = [-k, k]$ مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$

ب) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{15}$

ج) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

توجه کنید که:

$A_k = [-k, k]$

$= \{x \in IR \mid -k \le x \le k\}$

$A_1 = [-1, 1],\ A_2 = [-2, 2], \ldots$

۶ ـ اگر $(A \cup B) = \phi$ ثابت کنید $A = \phi$ و $B = \phi$ و با استفاده از آن ثابت کنید، اگر $(A \cap B) = M$ آنگاه $A = M$ و $B = M$

۷ ـ حاصل عبارت $\frac{(2)^{1/5}}{1+\sqrt{2}+(3)^{\frac{1}{2}}} + 9^{0/25} - \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}$ را بیابید.

۸- از دستگاه مقابل مقدار m را بیابید.

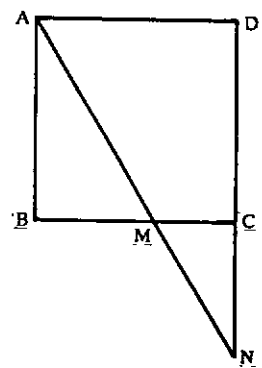
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 29 \\ x + y + t = m + 4 \\ 4x + y + z = 15 \\ x + 3y + 2z = 19 \end{cases}$$

۹- ثابت کنید اگر $a, b, c \neq 0$ ، آنگاه

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$$

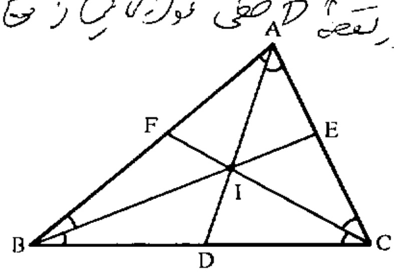
● مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱- از رأس A در مربع ABCD به ضلع a، خطی رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ M و امتداد ضلع CD را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید که $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{a^2}$.



(فرستنده: آقای رضا، شاه اکبری دانش‌آموز سوم ریاضی از نیشابور)

۲- اگر نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و خطهای AD، BE و CF نیمسازهای زوایای درونی مثلث باشند، تعیین کنید که نقطهٔ I پاره خطهای AD، BE و CF را به چه نسبتی (برحسب اضلاع مثلث) تقسیم می‌کند.



۳- روی مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3\}$ رابطه‌ای بنویسید که الف) فقط خاصیت بازتابی داشته باشد ب) فقط خاصیت تعدی داشته باشد

۴- ثابت کنید، اگر $(A \times B) = (C \times D)$ آنگاه $B = D$ و $A = C$

۵- رابطهٔ زیر روی IR تعریف شده آیا این رابطه تراگذری است؟

$$xRy \iff 2x + 3y = 6$$

۶- تابعهایی از IR^2 به IR^2 مثال بزنید که:

الف) یک به یک و پوششی باشد.

ب) یک به یک باشد ولی پوششی نباشد.

ج) یک به یک نباشد ولی پوششی باشد.

د) نه یک به یک و نه پوششی باشد.

۷- فرض می‌کنیم $G = \{a_0, a_1, \dots, a_6\}$ و عمل * را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a_i, a_j \in Q, \; a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j} & i + j < 7 \\ a_{i+j-7} & i + j \geq 7 \end{cases}$$

ثابت کنید (* و G) یک گروه آبلی است.

۸- معادله $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 35$ را حل کنید.

۹- چهار عدد تصاعد هندسی می‌سازند. مجموع دو عدد اولی و چهارمی $(\frac{35}{4})$ و مجموع دو عدد دوّمی و سوّمی $(\frac{15}{2})$ است. قدر نسبت این تصاعد را بیابید.

۱۰- از دستگاه مقابل x و y را بیابید.

$$\begin{cases} \log_y^x + \log_x^y = \frac{50}{7} \\ x \cdot y = 256 \end{cases} \qquad x > y > 1$$

۱۱- از معادلهٔ $a^{\cos^2 x} + a^{\sin^2 x} = a + 1$ مقدار x را حساب کنید.

۱۲ ـ شرط لازم برای آنکه دستگاه

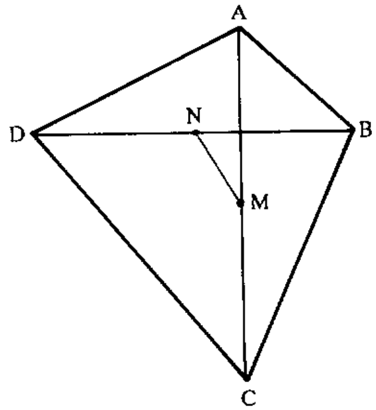
$$\begin{cases} \sqrt{۲}\sin x = \sin y \\ b\cos x = \cos y \end{cases}$$

دارای جواب باشد، چیست؟

• مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

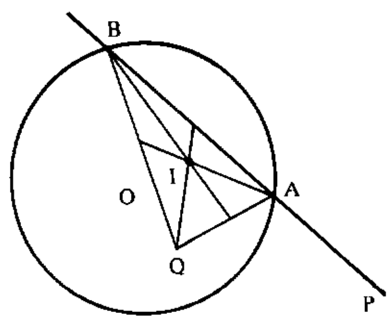
۱ ـ اگر $l_۱$ اندازهٔ مجموع مربعات اضلاع یک چهار ضلعی و $l_۲$ مجموع مربعهای قطرهای همان چهارضلعی، و نقاط M و N وسطهای قطرهای چهار ضلعی باشند، ثابت کنید که:

$$MN = \frac{۱}{۲}\sqrt{l_۱ - l_۲} \qquad (l_۱ > l_۲)$$



(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز سوم ریاضی از نقده)

۲ ـ دایره‌ای به مرکز O و دو نقطهٔ P و Q مفروضند. از نقطهٔ P خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. از نقطهٔ Q به نقاط A و B وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث QAB را وقتی قاطع AB حول نقطهٔ P حرکت می‌کند، تعیین کنید.



۳ ـ نشان دهید در یک فضای برداری جابجایی جمع را می‌توان از سایر اصول نتیجه گرفت.

۴ ـ فرض کنیم $V_۱$ و $V_۲$ و .... و V_n، n بردار در فضای برداری V باشند ثابت کنید، شرط لازم و کافی برای آنکه n بردار وابستهٔ خطی باشند آن است که، حداقل یکی از این بردارها را بتوان برحسب یک ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت.

۵ ـ ٦ نفر قرار است در یک کنفرانس سخنرانی کنند به چند طریق این امر امکان‌پذیر است، هرگاه بخواهیم:

الف) شخص B بعد از شخص A سخنرانی کند.

ب) شخص B بلافاصله بعد از A سخنرانی کند.

٦ ـ درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$xyz + x(x' + y) + y(x' + y') + xy'z + xz' = x+y$$

۷ ـ اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)$ و $(x-۲)$ و $(x-۳)$ به ترتیب ۳ و ۷ و ۱۳ باشد، باقیمانده تقسیم $P(x)$ را بر $(x-۱)(x-۲-)(x۳)$ بیابید.

۸ ـ منحنی تابع به معادله $y = ۲۷ - x^۲$ مفروض است. خط $y = m > ۰$ منحنی این تابع را در نقاط B و A قطع می‌کند. ماکزیمم مساحت مستطیل ABCD را بیابید به‌طوریکه ضلع CD روی محور x ها باشد.

۹ ـ نمودارهای سه تابع به معادلات $y_۱ = x^۲ - ۲x$ و $y_۲x = ^{-۳} - ۳x^۲$ و $y = \frac{۱}{x}$ را در یک دستگاه رسم کنید.

۱۰ ـ درستی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$tg^۲ ۲۰^\circ + tg^۲ ۴۰^\circ + tg^۲ ۸۰^\circ = ۳۳$$

۱۱ ـ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$S_n = tg^۲\frac{a}{۲}\, tg\, a + ۲\, tg^۲\frac{a}{۲^۲}\, tg\frac{a}{۲} + \dots + ۲^{n-۱}\, tg^۲\frac{a}{۲^n}\, tg\frac{a}{۲^{n-۱}}$$

سپس مقدار $\lim_{n\to\infty} S_n$ را حساب کنید.

(فرستنده‌مسائل ۱۰ و ۱۱: ایلیا پرچمی دانش‌آموز رشته‌ریاضی تبریز)

• مسائل ریاضیات چهارم ریاضی

۱ ـ دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و بردار $\overrightarrow{OC}$، حاصل ضرب برونی آنها را در نظر می‌گیریم. اگر حجم متوازی‌السطوحی که سه پاره‌خط OA و OB و OC سه یال یک رأس آن می‌باشند ۳۶ سانتی‌متر مکعب باشد، اندازهٔ $|\overrightarrow{OC}|$ را حساب کنید.

(از آقای م ـ ا ـ گیتی‌زاده دبیر ریاضی)

۲ ـ دو خط $D: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ و $D' = ax + 1 = (b + 1)\,y - 2 = 3z$ مفروضند. اگر $D \parallel D'$ باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۳ ـ نقاط $A(-1$ و ۲ و ۳$)$ و $B($۰ و ۱ و ۱$)$ و $C($۱ و ۰ و ۲$)$، رئوس مثلث ABC مفروضند. الف) ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشند تعیین کنید.

ب ـ مختصات نقطه‌هایی از کرهٔ به معادلهٔ $x^2+(y-1)^2+z^2=12$ را که از سه نقطهٔ A و B و C به یک فاصله می‌باشند به دست آورید.

۴ ـ آیا بحث زیر معتبر است (چرا؟)

$[(p \Rightarrow q) \wedge r] \implies q \quad \wedge$

$\sim p \quad \wedge$

$q \Rightarrow s \quad \wedge$

$\sim s$

$\therefore\ r \Rightarrow p$.

۵ ـ در میدان F هر گاه $x, y \in F$ و داشته باشیم، $x + y = 1$ و $x^{-1} + y^{-1} = 1$ ثابت کنید $x = y^{-1}$.

۶ ـ اگر a عددی صحیح باشد ثابت کنید: a و $(a + 1)$ و $(2a + 1)$ دو به دو نسبت به هم اولند و سپس نشان دهید که اعداد $(2a + 1)$ و $\frac{a(a+1)}{2}$ نیز نسبت به هم اولند.

۷ ـ مجموع دو عددِ صحیحِ مثبت ۳۲۴ و تعداد مقسوم علیه‌هایِ مثبت و مشترک آنها ۱۲ است مطلوب است محاسبهٔ آن دو عدد.

۸ ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha & \sqrt{2}\sin\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha + \sin n\alpha & \sqrt{2}\sin n\alpha \\ -\sqrt{2}\sin n\alpha & \cos n\alpha - \sin n\alpha \end{bmatrix}$$

۹ ـ با توجه به آنکه هر ماتریس در معادلهٔ سرشتنمایی خود صدق می‌کند، ثابت کنید وارون هر ماتریس پایین مثلثی، ماتریسی پایین مثلثی است.

۱۰ ـ تابع به معادلهٔ $y = x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} - 5$ مفروض است.

اولاً: بدون استفاده از مشتق ثابت کنید تابع در $x \geq 0$ یک‌به‌یک است.

ثانیاً: معادله تابع معکوس را بیابید.

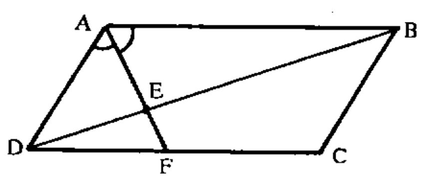
۱۱ ـ معادلهٔ درجه سوّم $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

۱۲ ـ با فرض $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ مطلوب است محاسبهٔ

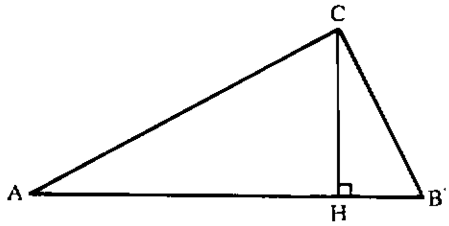
$$I = \int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}$$

• مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ متوازی الاضلاع ABCD مفروض است. نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطهٔ E و ضلع CD را در نقطهٔ F قطع کند. نسبت $\frac{EA}{EF}$ را بر حسب اضلاع متوازی‌الاضلاع محاسبه کنید.



۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = ۹۰^\circ$) ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در صورتی که $AH = m + ۴$ و $BH = m + ۱$ و $CH = m + ۲$ باشد. اندازهٔ اضلاع و مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۳ ـ عبارت زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید.

$$a^۳ - a - a^۲b - ab^۲ - b + b^۳$$

(فرستنده : آقای کیوان شجاعی منش دانش‌آموز رشته تجربی اراک)

۴ ـ اگر m و n ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ax + b = ۰$ باشند که در آن $a > ۰$ و $b > ۰$ آنگاه حاصل عبارت $\sqrt[۴]{m} + \sqrt[۴]{n}$ را حساب کنید. ($m > ۰$ و $n > ۰$)

(فرستنده : آقای اسماعیل قیصری دیپلمهٔ ریاضی فیزیک سقز)

۵ ـ دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = ۱۱ \\ x + \sqrt{y} = ۷ \end{cases}$$

(فرستنده : آقای عبدالجلیل توماج دانش‌آموز شهرستان بندر ترکمن)

۶ ـ قطر زمین مستطیل شکلی برابر ۱۳ متر و $\frac{۳}{۲}$ محیط این زمین برابر ۵۱ متر است، طول و عرض زمین را حساب کنید.

(فرستنده : آقای محسن چلویی دانش‌آموز رشته ریاضی قم)

۷ ـ مجموع زیر را حساب کنید.

$$S_n = ۴ + ۳۴ + ۳۳۴ + ۳۳۳۴ + \dots + \underbrace{۳۳۳\dots۳}_{n\ \text{مرتبه}}۴$$

(فرستنده : آقای غلامرضا تهرانی دانش‌آموز رشته ریاضی الیگودرز)

۸ ـ اگر $۹ \log x^۲ = ۶ \log ۳$ باشد، مقدار $|x|$ را حساب کنید.

۹ ـ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\sin^۸x+\cos^۸x}{۱-۴\sin^۲x\cos^۲x+۲\sin^۴x\cos^۴x} - ۲\sin^۲x\cos^۲x = ?$$

(فرستنده : آقای نیما شاهنده دانش‌آموز رشته ریاضی بابل)

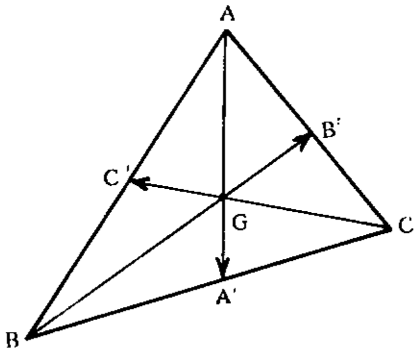
۱۰ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin ۲x - ۱۲(\sin x - \cos x) + ۱۲ = ۰$$

(فرستنده : میثم سباتی دانش‌آموز رشته ریاضی شادگان)

● مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ ـ نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC و نقاط A' و B' و C' به ترتیب وسطهای اضلاع BC و AC و AB می‌باشند.
مطلوب است محاسبهٔ : $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}$



۲ ـ مساحت صفحهٔ قطری مکعبی $۱۶\sqrt{۲}$ سانتیمتر مربع است. حجم این مکعب را حساب کنید.

۳ ـ حجم یک قاچ کروی به زاویهٔ ۶۰° در کره‌ای را که اندازهٔ سطحش برابر ۱۰۸π سانتی‌متر مربع است محاسبه کنید.

۴ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|x - ۲| + |x + ۱| = ۵$$

(فرستنده: آقای امیرهوشنگ فرهودی‌مقدم دانش‌آموز رشته تجربی تهران)

۵ـ حد عبارت $\frac{x^n + x^۳ + ۷۳}{mx^۷ + ۲x^۲ + ۷۴}$ وقتی $x \to \pm\infty$ برابر $-\frac{۳}{۴}$ است، مقدار m و n را تعیین کنید.

۶ـ اگر تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} kx^۳ + s & x < -۱ \\ kx^۲ + ۴ & x \geq -۱ \end{cases}$ در نقطهٔ (۳ و ۱−)M پیوسته باشد مقدار عبارت $\frac{f'(۲)f''(-۳)}{f(۰)}$ را حساب کنید.

۷ـ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ + d}$ مفروض است، در صورتی که $f'(۱) = ۱$ مقادیر d را تعیین کنید.

۸ـ به ازای چه مقداری از a خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = x^۳ + ax + ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱− بر خط به معادلهٔ $۹x + ۳y + ۲ = ۰$ عمود است.

۹ـ ثابت کنید:

$$S = \cos\frac{\pi}{۱۱}\cos\frac{۲\pi}{۱۱}\cos\frac{۳\pi}{۱۱}\cos\frac{۴\pi}{۱۱}\cos\frac{۵\pi}{۱۱} = \frac{۱}{۳۲}$$

(فرستنده: آقای قاسم اکسیری فرد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی جهرم)

۱۰ـ اگر $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = m \\ \sin\alpha + \sin\beta = n \end{cases}$ و $mn \neq ۰$ باشد،

ثابت کنید: $\operatorname{cosec}(\alpha + \beta) = \frac{m^۲ + n^۲}{۲mn}$

(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز رشته ریاضی (نقده))

● مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ (۲ و ۱−) A از خط $۲y - ۴x - ۲m = ۰$ برابر $\frac{\sqrt{۲۰}}{۲m}$ است، مقدار مثبت m را تعیین کنید.

۲ـ به ازای چه مقادیری از m تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{۳mx - ۶}{m - ۲x}$ همواره صعودی است؟

۳ـ به ازای چه مقداری از m خط مفروض $۴mx + m^۲y + ۴ = ۰$ قائم بر دایره به معادلهٔ $۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶x - ۶y = ۱۲$ است؟

۴ـ مطلوب است معادلهٔ بیضی که قطرهای آن روی خطهای $۲x - ۶ = ۰$ و $۳y + ۱۲ = ۰$ واقع و بر محورهای مختصات مماس باشد.

۵ـ معادلهٔ خط مماس بر هذلولی به معادلهٔ $۸x^۲ - ۱۸y^۲ = ۷۲$ در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ واقع بر آن را بنویسید.

۶ـ مکان هندسی نقطهٔ $M(\sin\alpha$ و $tg\,\alpha)$ را، تغییر α در صفحهٔ محورهای مختصات به دست آورید $(\alpha \neq k\pi)$

(فرستنده: آقای علی بلوکی دانش‌آموز رشته ریاضی تبریز)

۷ـ سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y = ۴\sin x$ و محور xها و دو خط $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{-\pi}{۲}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم، حجم حادث را به دست آورید.

۸ـ به ازای چه مقادیری از m معادله زیر جواب حقیقی ندارد.

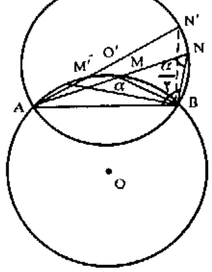
$$۲m(\sin x + \cos x) = m(\sin x - \cos x) + \sqrt{۵}$$

۹ـ در مثلث ABC، اگر یک زاویه α و زاویهٔ دیگر ۲α و اضلاع روبرو به این زوایا به ترتیب c و b و ضلع سوم آن برابر a فرض شود، مقدار $\cos ۲\alpha$ را به دست آورید.

حل مسائل برهانِ ۱۰

● حل مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ـ نقطهٔ دلخواه M را روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ در نظر گرفته پاره‌خط AM را به اندازهٔ MN = MB امتداد می‌دهیم و از N به B وصل می‌کنیم.
زاویهٔ $\hat{AMB}$، زاویهٔ خارجی مثلث متساوی الساقین MBN است. پس $\hat{AMB}=2\hat{ANB}$. بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ AMB را که مقدار ثابتی است به α نمایش دهیم، داریم $\hat{ANB}=\frac{1}{2}\alpha = Ctc$. پس مکان هندسی نقطهٔ N کمان در خود زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ مقابل به پاره‌خط AB است از طرفی داریم $MA + MB = MA + MN = AN$. بنابراین $MA + MB$ وقتی ماگزیمم مقدار خود را داراست که AN ماگزیمم مقدار ممکن را داشته باشد. و ماگزیمم مقدار AN وقتی است که AN قطر دایرهٔ O' (مکان نقطهٔ N) باشد. در این صورت $\hat{ABN'}=90°$ و نقطهٔ M' وسط پاره‌خط AN' و همچنین وسط کمان AB است. پس نقطهٔ M' وسط کمان AB جواب مسئله است.

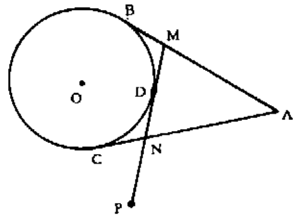


۲ ـ می‌دانیم که مماسهای مرسوم از یک نقطه بر یک دایره با هم برابرند بنابراین اگر نقطهٔ تماس MN با دایره را نقطهٔ D بنامیم داریم: MB = MD و ND = NC اما.

AMN محیط مثلث $= AM+MD+DN+AN \Longrightarrow$

AMN محیط مثلث $= AM+MB+NC+NA = AB+AC \Longrightarrow$

AMN محیط مثلث $= 2AB = Ctc$



۳ ـ گزارهٔ $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$ گزاره‌ای شرطی است که برای اثبات درستی آن دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر مقدم گزاره یعنی $(p \wedge q)$ نادرست باشد در این صورت کلّ گزاره به انتفای مقدم درست خواهد بود.

II) اگر مقدم گزاره یعنی $(p \wedge q)$ درست باشد، در این صورت گزاره‌های p و q هر دو درست بوده و در نتیجه $(p \vee q)$ که تالیِ گزارهٔ مزبور است، درست خواهد بود و بنابراین با درست بودنِ مقدم و تالی گزارهٔ داده شده درست است.

۴ ـ واضح است که مجموعهٔ $A = \{a , \{a\} , \{a , \{a\}\}\}$ دارای سه عضو و در نتیجه دارای $8 = 2^3$ زیر مجموعه است. ثانیاً اگر مجموعهٔ $B = \{a , \{a\}\}$ را در نظر بگیریم $B \subset A$ بوده و داریم $\{a\} \in B$ و $\{a\} \subset B$.

۵ ـ طبق فرض داریم:

$$A-(B-C)=(A-B)-C \Rightarrow A\cap(B\cap C')'=(A\cap B')\cap C'$$
$$\Longrightarrow A \cap (B' \cup C) = (A \cap B') \cap C'$$
$$\Longrightarrow (A \cap B') \cup (A \cap C) = C' \cap (A \cap B')$$
$$\Longrightarrow (A\cap C)\cap[(A\cap B')\cup(A\cap C)]$$
$$=(A\cap C)\cap[C'\cap(A\cap B')]$$
$$\overset{\text{جذب}}{\Longrightarrow} (A\cap C)=[\underbrace{(A\cap C)\cap C'}_{\varnothing}]\cap(A\cap B') \Rightarrow (A\cap C)=\varnothing$$

۶ ـ داریم:

$$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=x^7+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^7}$$
$$\Rightarrow x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=A^3-3A$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]^2-2=\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]^2-2$$
$$=(A^2-2)^2-2=A^4-4A^2+2$$
$$\Rightarrow x^7+\frac{1}{x^7}=(A^3-3A)(A^4-4A^2+2)-A$$

۷ ـ

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}+\sqrt{9}+$$
$$\sqrt{0/50}+\sqrt{0/10}$$
$$\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}+3+0/7+0/3$$
$$-1+2+3+0/7+0/3 \# 5$$

۸ ـ

$$2x + y = a , y + z = b , x + 2z = c$$

$$\begin{cases}\frac{14}{a}+\frac{7}{b}=3\\ \frac{21}{b}+\frac{20}{c}=5\\ \frac{10}{c}+\frac{7}{a}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{21}{b}+\frac{20}{c}=5\\ \frac{-20}{c}-\frac{14}{a}=-4\end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{21}{b}-\frac{14}{a}=1}$$

$$\begin{cases}\frac{21}{b}-\frac{14}{a}=1\\ \frac{14}{a}+\frac{7}{b}=3\end{cases} \Rightarrow \frac{28}{b}=4 \Rightarrow 4b=28 \Rightarrow \boxed{b=7}$$

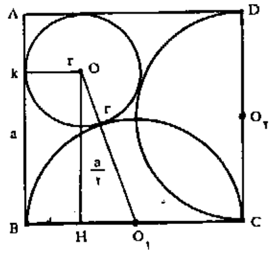
$$\frac{14}{a}+\frac{7}{7}=3 \Rightarrow \frac{14}{a}=2 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow \boxed{a=7}$$

$$\frac{10}{c}+\frac{7}{7}=2 \Rightarrow \frac{10}{c}=1 \Rightarrow \boxed{c=10}$$

$$\begin{cases}2x+y=7\\ y+z=7\\ x+2z=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2y-2z=-14\\ x+2z=10\end{cases} \Rightarrow \boxed{x-2y=-4}$$

● حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ مرکز دایرهٔ مورد نظر را O و شعاع آن را r و مرکز دایرهٔ به قطر BC را O_1 می‌نامیم. از O عمود OH را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. اگر ضلع مربع را a بنامیم داریم:



$OO_1 = \frac{a}{2} + r$ ، $OH = a - r$ ، $O_1H = \frac{a}{2} - r$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ HOO_1 می‌توان نوشت:

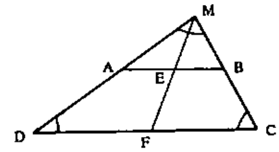
$$OO_1^2=OH^2+O_1H^2 \Longrightarrow \left(\frac{a}{2}+r\right)^2=(a-r)^2+\left(\frac{a}{2}-r\right)^2$$
$$\Rightarrow r^2-4ar+a^2=0 \Rightarrow r=a\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

چون $r<a$ است، پس جواب قابل قبول $r=a\left(2-\sqrt{3}\right)$ است.

۲ ـ نقطهٔ تقاطع AD و BC را M می‌نامیم. مثلث MCD در رأس

M قائم‌الزاویه‌است زیرا $\hat{D}+\hat{C}=۹۰^\circ$ است. بنابراین خط EF از نقطهٔ M می‌گذرد. در مثلثهای قائم‌الزاویه MAB و MCD، ME و MF میانه‌های وارد بر وتراند. پس $ME=\frac{AB}{۲}$ و $MF=\frac{CD}{۲}$

لذا: $EF=MF-ME=\frac{CD}{۲}-\frac{AB}{۲}=\frac{CD-AB}{۲}$



۳ـ به روش عضوگیری دلخواه مسأله را اثبات می‌کنیم:

$(x,y)\in[(A\times C)\cap(B\times D)]$

$\overset{\text{تعریف اشتراک}}{\Longleftrightarrow}(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\in(B\times D)$

$\Longleftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{\Longleftrightarrow}(x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in C\wedge y\in D)$

$\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge y\in(C\cap D)$

$\Longleftrightarrow(x,y)\in[(A\cap B)\times(C\cap D)]$

بنابراین چون روابط برگشت‌پذیر هستند، تساوی برقرار است.

۴ـ طبق فرض رابطه روی $IR^۲$ به صورت زیر تعریف شده:

$(x,y)R(z,t)\Longleftrightarrow(y-t)=۳(x-z)$

۱) $\forall(x,y)\in IR^۲;\ \underbrace{(y-y)}_{۰}=\underbrace{(x-x)}_{۰}\Longrightarrow(y-y)=۳(x-x)$

$\Longrightarrow(x,y)R(x,y)$ R بازتابی است

۲) فرض کنیم $(x,y)R(z,t)\Longrightarrow(y-t)=۳(x-z)$

$\overset{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}}{\Longrightarrow}(t-y)=۳(z-x)\Longrightarrow(z,t)R(x,y)$ تقارنی است

۳) فرض کنیم $(x,y)R(z,t)\wedge(z,t)R(e,f)$

$\Longrightarrow(y-t)=۳(x-z)\wedge(t-f)=۳(z-e)$

$\Longrightarrow(y-t)=(۳x-۳z)\wedge(t-f)=(۳z-۳e)$

$\overset{\text{طرفین با هم جمع شد}}{\Longrightarrow}(y-f)=(۳x-۳e)\Longrightarrow(y-f)=۳(x-e)$

$\Longrightarrow(x,y)R(e,f)$ R خاصیت تعدی دارد

بنابراین R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

برای تشکیل کلاس هم‌ارزی $[(۲,۱)]$ طبق تعریف داریم:

$[(۲,۱)]=\{(x,y)\in IR^۲\mid(x,y)R(۲,۱)\}$

$=\{(x,y)\in IR^۲\mid(y-۱)=۳(x-۲)\}$

$=\{(x,y)\in IR^۲\mid y=۳x-۵\}$

۵ـ به بررسی خواص گروه می‌پردازیم:

۱) $a*(b*c)=a*(bc+b+c)=a(bc+b+c)+(a+bc+b+c)$

$=abc+ab+ac+bc+a+b+c \quad (۱)$

$(a*b)*c=(ab+a+b)*c=(ab+a+b)c+(ab+a+b)+c$

$=abc+ac+bc+ab+a+b+c \quad (۲)$

شرکت‌پذیری برقرار است $\Longleftarrow$ (۲) و (۱)

۲) $a*e=e*a=a$

$a*e=a\Longrightarrow ae+a+e=a\Longrightarrow e(a+۱)=۰$

$\overset{a\neq-۱}{\Longrightarrow}e=۰$ عضو خنثی

۳) $a*a'=a'*a=e=۰$

$a*a'=۰\Longrightarrow aa'+a+a'=۰\Longrightarrow a'(a+۱)=-a$

$\Longrightarrow a'=\frac{-a}{a+۱}$ ضابطه عضو متقابل

بنابراین مجموعهٔ $IR-\{-۱\}$ و عمل * تشکیل یک گروه می‌دهند و چون داریم:

$a*b=ab+a+b=ba+b+a=b*a$

پس یک گروه آبلی است.

برای حل معادلهٔ $(۳*۲')=(۴*x)'$ با استفاده از ضابطهٔ عضو متقابل داریم:

$۲'=\frac{-۲}{۲+۱}=\frac{-۲}{۳}$

$(۳*۲')=۳*\frac{-۲}{۳}=۳\times\frac{-۲}{۳}+۳+(-\frac{۲}{۳})=-۲+۳+(-\frac{۲}{۳})$

$=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$

$(۴*x)'=(۴x+۴+x)'=\frac{-(۴x+۴+x)}{(۴x+۴+x)+۱}=\frac{-۴x-۴-x}{۵x+۵}$

$=\frac{-۵x-۴}{۵x+۵}$

$(۳*۲')=(۴*x)'\Longrightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{-۵x-۴}{۵x+۵}$

$\Longrightarrow-۱۵x-۱۲=۵x+۵\Longrightarrow-۲۰x=۱۷\Longrightarrow x=\frac{-۱۷}{۲۰}$

۶ـ

معادله خطی که از مبدأ می‌گذرد: $y=mx$

$۴=m(۲)\Longrightarrow m=۲$

$\Longrightarrow\boxed{y=۲x}$ معادله OA

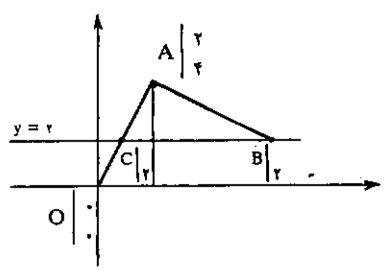
$y_c=۲\Longrightarrow۲=۲x\Longrightarrow x=۱\Longrightarrow\boxed{C\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.}$

$A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ و $m_{AB}=-\frac{۱}{۲}\Longrightarrow y-y_۱=m(x-x_۱)$

$\Longrightarrow y-۴=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$ معادله AB

$y_B=۲\Longrightarrow۲-۴=-\frac{۱}{۲}(x-۲)\Longrightarrow-۲=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$

$\Longrightarrow۴=x-۲\Longrightarrow x=۶\Longrightarrow\boxed{B\left|\begin{matrix}۶\\۲\end{matrix}\right.}$



۷ـ ابتدا معادله درجه دوم جدیدی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله $x^۲-۲x-۱=۰$، برای این کار کافی است $x\to\sqrt[۳]{x}$ و در معادله قرار می‌دهیم.

طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}=۱$

$x^۲-۸x-۶x\left(\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}\right)=۱$

$\Rightarrow x^۲-۸x-۶x(۱)=۱$

$\Rightarrow x^۲-۱۴x-۱=۰$ ریشه‌های این معادله $x'^۳$ و $x''^۳$ است.

حال دوباره معادله جدیدی می‌سازیم که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های این معادله باشد.

$x\to\sqrt[۳]{x}\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}-۱۴\sqrt[۳]{x}-۱=۰$

طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم: $\sqrt[۳]{x^۲}-۱۴\sqrt[۳]{x}=۱$

$x^۲-۲۷۴۴x-۴۲x\left(\sqrt[۳]{x^۲}-۱۴\sqrt[۳]{x}\right)=۱$

$x^۲-۲۷۴۴x-۴۲x(۱)=۱$

$x^۲-۲۷۸۶x-۱=۰$ ریشه‌های این معادله $x'^۹$ و $x''^۹$ است.

$x'^{۱۸}+x''^{۱۸}=\left(x'^۹+x''^۹\right)^۲-۲x'^۹x''^۹$

$=\left(-\frac{b}{a}\right)^۲-۲\times\frac{c}{a}$

$x'^{۱۸}+x''^{۱۸}=(۲۷۸۶)^۲-۲(-۱)=۷۷۶۱۷۹۸$

ـ۸

$tg_a\,tg_a\sqrt[a]{\sqrt[a]{\ldots\sqrt[a]{a}}}=tg_a\,tg_a\sqrt[a^n]{a}$

$=tg_a\,tg_a(a)^{\frac{۱}{a^n}}=lg_a\frac{۱}{a^n}lg_a^a$

$=lg_a\frac{۱}{a^n}=lg_a^{a^{-n}}=-n\,lg_a^a=-n$

۹ـ از فرض داریم:

$a\sin^۲x-b\cos^۲x=a-b\Rightarrow a(۱-\cos^۲x)-b\cos^۲x=a-b$

$\Rightarrow a-a\cos^۲x-b\cos^۲x=a-b\Rightarrow\cos^۲x=\frac{b}{a+b}\quad(۱)$

همچنین داریم:

$a\sin^۲x-b(۱-\sin^۲x)=a-b\Rightarrow a\sin^۲x-b+b\sin^۲x=a-b$

$\Rightarrow\sin^۲x=\frac{a}{a+b}\quad(۲)$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin^۴x=\dfrac{a^۲}{(a+b)^۲}\\[2ex]\cos^۴x=\dfrac{b^۲}{(a+b)^۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sin^۴x}{a}=\dfrac{a}{(a+b)^۲}&(۳)\\[2ex]\dfrac{\cos^۴x}{b}=\dfrac{b}{(a+b)^۲}&(۴)\end{cases}$$

از جمع روابط (۳) و (۴) داریم:

$\frac{\sin^۴x}{a}+\frac{\cos^۴x}{b}=\frac{a}{(a+b)^۲}+\frac{b}{(a+b)^۲}=\frac{a+b}{(a+b)^۲}=\frac{۱}{a+b}$

۱۰ـ به ترتیب داریم:

$۴^{\sin^۲\alpha}-۴^{\cos^۲\alpha}=\sqrt{۲}\Rightarrow۴^{\sin^۲\alpha}-۴^{۱-\sin^۲\alpha}=\sqrt{۲}$

$\Rightarrow۴^{\sin^۲\alpha}-\frac{۴}{۴^{\sin^۲\alpha}}=\sqrt{۲}$

با فرض $x=۴^{\sin^۲\alpha}$ می‌توان نوشت:

$x-\frac{۴}{x}=\sqrt{۲}\Rightarrow x^۲-\sqrt{۲}x-۴=۰$

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲+۱۶}}{۲}$

$x=\frac{\sqrt{۲}\pm۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$

$x_۱=\frac{\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$

$x_۲=\frac{\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۲}=-\sqrt{۲}$ (غیرقابل قبول)

مقدار $4^{\sin^2\alpha}$ همواره مثبت است، لذا داریم :

$$\Rightarrow \quad x = 4^{\sin^2\alpha} = 2\sqrt{2}$$

● حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ مساحت مثلثهای PBC_1 و PCB_1 را به ترتیب S_1 و S_2 و محیطهای این دو مثلث را $2P_1$ و $2P_2$ فرض می‌کنیم و ارتفاعهای نظیر رأس P در این دو مثلث را h_1 و h_2 و شعاع دایره‌های محاطی داخلی آنها را r_1 و r_2 می‌نامیم. بنا به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} S_1 = S_2 \\ 2P_1 = 2P_2 \end{cases} \Rightarrow \quad r_1P_1 = r_2P_2 \quad \Rightarrow$$

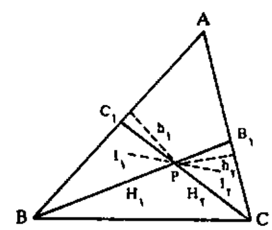
$$r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad I_1H_1 = I_2H_2$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PI_1H_1 و PI_2H_2 با هم برابرند. در نتیجه $PH_1 = PH_2$ است امّا :

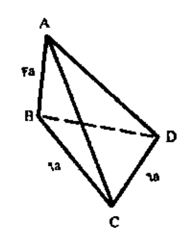
$$\begin{cases} PH_1 = P_1 - BC_1 \\ PH_2 = P_2 - B_1C \end{cases} \Rightarrow P_1 - BC_1 = P_2 - B_1C$$

$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{BC_1 = B_1C}$$

از طرفی: $S_1 = S_2$ و $S_2 = \frac{1}{2}B_1C \cdot h_2$ و $S_1 = \frac{1}{2}BC_1 \cdot h_1$ پس نتیجه می‌شود که $h_1 = h_2$. یعنی نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. لذا روی نیمساز زاویهٔ درونی A قرار دارد.



۲ ـ مثلثهای ABC و BCD هر کدام یک زاویهٔ قائمه دارند، زیرا $AB \perp BC$ و $BC \perp CD$ است. پس قائم‌الزاویه‌اند. مثلث ABD نیز در رأس B قائم‌الزاویه است زیرا $AB \perp BC$ و $AB \perp CD$ پس AB بر صفحه BCD و در نتیجه بر BD عمود است.



در این مثلثهای قائم‌الزاویه داریم : $AD = 2\sqrt{22}a$ و $AC = 2\sqrt{13}a$ و $BD = 6\sqrt{2}a$. پس مثلث ACD نیز در رأس C قائم‌الزاویه است چون $CD^2 = 36a^2$ و $AC^2 = 52a^2$ و $AD^2 = 88a^2$ بنابراین وجوه جانبی چهار وجهی همه مثلثهای قائم‌الزاویه‌اند. امّا حجم چهار وجهی برابر است با:

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{1}{3}S_{BCD} \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{36a^2}{2} \times 4a = 24a^3$$

۳ ـ برای اثبات زیر فضا بودنِ W کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ W نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

$$1)\ f_1 ,\ f_2 \in W \Longrightarrow f_1(5) = 0 ,\ f_2(5) = 0$$

$$\Longrightarrow (f_1 + f_2)(5) = f_1(5) + f_2(5) = 0 + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow (f_1 + f_2) \in W$$

۲) فرض کنیم $r \in \mathbb{R} ,\ f_1 \in W \Longrightarrow f_1(5) = 0$

$$\Longrightarrow (r.f_1)(5) = r.f_1(5) = r.0 = 0 \Longrightarrow (r.f_1) \in W$$

۴ ـ تعداد خودکارهای سالم برابر است با ۹ = ۶ − ۱۵ ، پس :

الف) $P(A) = \dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{15}{4}}$

ب) $\dfrac{\binom{6}{1}\times\binom{9}{3} + \binom{6}{2}\times\binom{9}{2} + \binom{6}{3}\times\binom{9}{1} + \binom{6}{4}}{\binom{15}{4}} = P(B)$ حداقل یکی خراب

ج) $\dfrac{\binom{6}{3}\times\binom{9}{1} + \binom{6}{2}\times\binom{9}{2} + \binom{6}{1}\times\binom{9}{3} + \binom{9}{4}}{\binom{15}{4}} = P(C)$ حداکثر ۳ عدد خراب

۵ ـ وقتی سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می‌کنیم در هر مرتبه پیشامد مستقل از دفعات بعدی یا قبلی‌اش می‌باشد بنابراین :

$$P(\text{پ , پ , پ , ر , ر , ر}) = P(\text{پ}) \times \ldots \times P(\text{ر})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

۶ ـ

$$\left[\frac{y+2}{2}\right] + \left[\frac{-x+2}{2}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] + \left[\frac{-x}{2}\right] = -2$$

$$-2 \le \frac{-x}{2} < -1 \Rightarrow 1 < \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow 2 < x \le 4 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] - 2 = -2 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{y}{2} < 1 \Rightarrow 0 \le y < 2$$

$$-1 \le -\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} \le 1 \Rightarrow 0 < x \le 2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] - 1 = -2 \Rightarrow \left[\frac{y}{2}\right] = -1 \Rightarrow -1 \le \frac{y}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \quad -2 \le y < 0$$

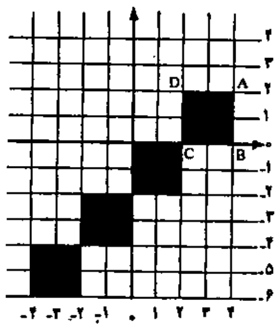
$$0 \le \frac{-x}{2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \le 0 \Rightarrow -2 < x \le 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] = -2 \Rightarrow -2 \le \frac{y}{2} < -1 \Rightarrow -4 \le y < -2$$

$$1 < -\frac{x}{2} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x}{2} \le -1 \Rightarrow -4 < x \le 2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{y}{2}\right] = -3 \Rightarrow -3 \le \frac{y}{2} < -2 \Rightarrow -6 \le y < -4$$

دو شکل AD و DC شامل شکل نیستند و این مطلب در مورد سایر مربعها نیز صادق است.



۷ ـ

$$A = (2 \times 111)^{333} + (3 \times 111)^{222} =$$

$$(2^{333} \times 111^{333}) + (3^{222} \times 111^{222})$$

$$A = (2^3)^{111} \times 111^{111} \times 111^{222} + (3^2)^{111} \times 111^{222}$$

$$A = 111^{222}((8)^{111} \times 111^{111} + (9)^{111}) =$$

$$111^{222}\underbrace{(888^{111} + 9^{111})}_{\text{بسط می‌دهیم}}$$

$$A = 111^{222}(888+9)\underbrace{(888^{110} - 888^{109} \times 9 + \ldots + 9^{110})}_{k}$$

$$A = 111^{222}(897)k = (111)^{222}(13 \times 69)k$$

$\Rightarrow$ A بر (۱۳) بخش‌پذیر است

توجه : ضمناً این عدد بر ۲۳ و ۳۹ هم بخش‌پذیر است.

۸ ـ هر تابع هموگرافیکی را می‌توان به صورت مقابل نشان داد.

$$y = \frac{mx + n}{x + k}$$

مجانب قائم : $x + k = 0 \Longrightarrow 2 + k = 0 \Longrightarrow \boxed{k = -2}$

مجانب افقی : $y = \frac{m}{1} \Longrightarrow 1 = \frac{m}{1} \Longrightarrow \boxed{m = 1}$

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{matrix} \right. \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{n}{k} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{n}{-2} \Longrightarrow \boxed{n = -\frac{1}{2}}$$

تابع مورد نظر $\Rightarrow \quad y = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x - 2} = \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2x - 1}{2x - 4}$

۹ ـ با فرض $\cos\alpha = \frac{b}{a} < 1$ داریم :

$$p = \frac{a\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{a\left(1 - \frac{b}{a}\right)} = \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} =$$

$$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۰ ـ با توجه به اتحاد مثلثاتی

$\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}(60 - \alpha)\ \mathrm{tg}(60 + \alpha)$ داریم :

$$\alpha = 5^\circ : \mathrm{tg}3 \times 5^\circ = \mathrm{tg}5^\circ\,\mathrm{tg}(60 - 5^\circ)\,\mathrm{tg}(60 + 5^\circ)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{tg}15^\circ = \mathrm{tg}5^\circ\,\mathrm{tg}55^\circ\,\mathrm{tg}65^\circ$$

بنابراین می‌توان نوشت :

$$\mathrm{tg}5^\circ\,\mathrm{tg}55^\circ\,\mathrm{tg}65^\circ\,\mathrm{tg}75^\circ = \mathrm{tg}15^\circ\,\mathrm{tg}75^\circ = \mathrm{tg}15^\circ\,\mathrm{cotg}15^\circ = 1$$

۱۱ ـ اگر در معادلهٔ فوق عبارت $\cos^2(\frac{\pi}{4}x)$ را بسط دهیم، معادله به یک معادلهٔ کلاسیک نوع سوم تبدیل می‌شود :

$$\cos^2x+\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)=\frac{3}{2} \Longrightarrow$$
$$\cos^2x+(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x)^2=\frac{3}{2}$$
$$\cos^2x+\frac{1}{4}\cos^2x+\frac{3}{4}\sin^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x=\frac{3}{2}$$
$$5\cos^2x+3\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=6$$

طرفین معادله را بر $\cos^2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$5+3tg^2x+2\sqrt{3}tgx=6+6tg^2x$$
$$\Rightarrow 3tg^2x-2\sqrt{3}tgx+1=0$$
$$\Rightarrow (\sqrt{3}tgx-1)^2=0 \Rightarrow \sqrt{3}tgx-1=0$$
$$\Rightarrow tgx=\frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{6}}$$

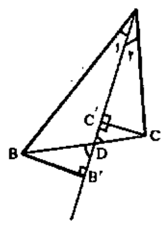
حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ مثلثهای قائم‌الزاویه 'ACC و 'ABB که یک زاویهٔ حاده برابر دارند، متشابهند. همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه 'DBB و 'DCC نیز متشابه می‌باشند. پس:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{BB'}{CC'} \qquad (1)$$
$$\frac{DB}{DC}=\frac{DB'}{DC'}=\frac{BB'}{CC'} \qquad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم: $\frac{AB'}{AC'}=\frac{DB'}{DC'}$

و یا می‌توان نوشت $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{DB'}}{\overline{DC'}}$. بنابراین (ADB'C') یک تقسیم توافقی است.



۲ـ معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر فصل مشترک دو صفحه را می‌نویسیم و از صفحات این دسته، معادلهٔ صفحه‌ای را به دست می‌آوریم، که از نقطهٔ A بگذرد.

$$\alpha(x+2y-z-1)+\beta(2x-y+3z+2)=0 \Longrightarrow$$
$$\boxed{(\alpha+2\beta)x+(2\alpha-\beta)y+(3\beta-\alpha)z-\alpha+2\beta=0}$$

معادلهٔ دسته صفحه

$$A(2,-1,3) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}} 2\alpha+4\beta-2\alpha+\beta+9\beta-3\alpha-\alpha+2\beta=0$$
$$\Longrightarrow -4\alpha+16\beta=0 \Longrightarrow \boxed{\alpha=4\beta} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}}$$
$$6\beta x+7\beta y-\beta z-2\beta=0 \Longrightarrow \boxed{6x+7y-z-2=0}$$

معادله صفحه مطلوب

۳ـ نقطهٔ تقاطع محور اصلی دو دایره با بیضی، جواب مسأله است.

$$\begin{cases} C: x^2+y^2-2x-1=0 \\ C': x^2+y^2+4x-1=0 \end{cases} \Rightarrow C-C'=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

معادله محور اصلی دو دایره

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-8x+4y+4=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y^2+4y+4=0 \Longrightarrow (y+2)^2=0 \Longrightarrow$$
$$y=-2 \Longrightarrow M(0,-2) \quad \text{نقطهٔ مطلوب}$$

نکته ۱ـ از معادلهٔ دو دایرهٔ داده شده، مشخص است که محور اصلی دو دایره محور yها یعنی $x=0$ است.

نکته ۲ـ چون معادلهٔ تلاقی محور اصلی دو دایره و بیضی ریشهٔ مضاعف دارد پس محور اصلی، بر بیضی مماس است.

-۴

۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$ ∧

۲) $(q \vee s) \Rightarrow t$ ∧

۳) $(\sim t \wedge p)$

۴) $\sim t$ از ۳ و حذف عاطف

۵) p از ۳ و حذف عاطف

۶) $(q \vee r)$ از ۱ و ۵ و انتزاع

۷) $\sim(q \vee s) \equiv (\sim q \wedge \sim s)$ از ۲ و ۴ و نقیض انتزاع

۸) $\sim q$ از ۷ و حذف عاطف

۹) $\therefore r$ از ۶ و ۸ و رفع مؤلفه

۵ـ مجموعهٔ $A=\{x, x+2, x+2^2, \dots, x+2^6\}$ تشکیل یک دسته کامل مانده‌ها به سنج ۷ را نداده و این را می‌توان با یک مثال نقض نشان داد. زیرا کافی است دو عضو A به پیمانهٔ ۷ با هم، هم‌نهشت باشند و داریم:

$$x+2^3 \overset{7}{\equiv} x+2^6$$

۶ـ ابتدا ماتریس تقارن نسبت به خط $y=2x$ را یافته و سپس توسط آن قرینهٔ یک نقطهٔ دلخواه از خط داده شده را نسبت به خط $y=2x$ محاسبه کرده و در معادلهٔ خط داده شده اعمال می‌کنیم.

$$y=2x \Rightarrow tg\theta=2 \Rightarrow \cos2\theta=\frac{-3}{5}, \sin2\theta=\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X \\ Y\end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$x=\frac{4Y-3X}{5}, \quad y=\frac{4X+3Y}{5}$$
$$y,x \xrightarrow[\text{داده شده}]{\text{در معادله}} 3(\frac{4Y-3X}{5})+2(\frac{4X+3Y}{5})=6$$
$$\Longrightarrow 18Y-X=30 \longleftarrow \text{قرینهٔ خط مزبور}$$

-۷

$$\begin{vmatrix} a & x-t & ay+az \\ a & y-t & ax+az \\ a & z-t & ax+ay \end{vmatrix}=a\times a\begin{vmatrix} 1 & x-t & y+z \\ 1 & y-t & x+z \\ 1 & z-t & x+y \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{ستون دوم+ستون سوم}}{=} a^2\begin{vmatrix} 1 & x-t & x+y+z-t \\ 1 & y-t & x+y+z-t \\ 1 & z-t & x+y+z-t \end{vmatrix}=$$
$$a^2=(x+y+z-t)\begin{vmatrix} 1 & x-t & 1 \\ 1 & y-t & 1 \\ 1 & z-t & 1 \end{vmatrix}=0$$

-۸

داریم
$$\begin{cases} 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} & n\in N \\ 1+2+3+\dots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2} & n\in N \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^4}+\dots+\frac{n^2}{n^4}\right)=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n^2}{n^4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n^4}$$
$$\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^4}{2}}{n^4}=\frac{1}{2}$$

-۹

$$y'=\frac{-x^2+3}{(x^2+x+3)^2} \Rightarrow y''=\frac{x^3-9x-3}{(x^2+x+3)^3}$$
$$y=0 \Rightarrow x^3-9x-3=0 \quad \Delta=4p^3+27q^2$$
$$=4(-9)^3+27(9)=-891<0$$

چون در معادله درجه سوم $y''=0$، $\Delta<0$ پس این معادله سه ریشه حقیقی متمایز دارد و علامت y'' در طرفین هر یک از ریشه‌ها متفاوت است پس منحنی این تابع سه نقطه عطف دارد.

-۱۰

$$\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int\frac{dx}{b^2\cos^2x\left(1+\frac{a^2}{b^2}tg^2x\right)}=$$
$$\frac{1}{b^2}\int\frac{(1+tg^2x)dx}{1+\frac{a^2}{b^2}tg^2x}$$
$$U=\frac{a}{b}tgx \Rightarrow du=\frac{a}{b}(1+tg^2x)dx$$
$$\Rightarrow (1+tg^2x)dx=\frac{bdu}{a} \Rightarrow \frac{1}{b^2}\int\frac{\frac{bdu}{a}}{1+u^2}$$
$$=\frac{1}{ab}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{ab}Arctg\,u+c$$
$$=\frac{1}{ab}Arctg\left(\frac{a}{b}tgx\right)+c$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) داریم:

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow$$

اما بنا به فرض مسأله، $5b=4a$ است. پس $a=\frac{5}{4}b$، و از آنجا:

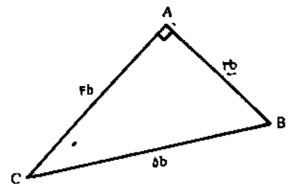
$$(\frac{5}{4}b)^2=b^2+c^2 \Longrightarrow \frac{9}{16}b^2=c^2$$
$$\Longrightarrow \frac{3}{4}b=c \text{ یا } c=\frac{3}{4}b$$

لذا اضلاع مثلث بر حسب b برابرند با:

$$\frac{3}{4}b \;,\; b \;,\; \frac{5}{4}b$$

و یا 5b و 4b و 3b که تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت b

می‌دهند.



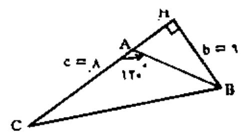
۲ـ می‌دانیم که اگر در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ A برابر 120° باشد، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

پس: ۱)

$$a^2 = 36 + 64 + 48 = 148 \Longrightarrow a = 2\sqrt{37}$$

۲) در مثلث CAH زاویهٔ $\hat{CAH} = 60^\circ$ است لذا



$$CH = h_c = 6\sin 60 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۳) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

۳ـ

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}\ ,\ P = x'x'' = \frac{c}{a}\ ,\ K = ?$$

$$3x'x'' = 2x' - 2x'' \Rightarrow 3P = 2(x' - x'') \Rightarrow x' - x'' = \frac{3}{2}P$$

$$x' - x'' = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow x' - x'' = 1$$

از طرفی داریم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{K^2 - 24}}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{K^2 - 24} = 3 \Rightarrow K^2 - 24 = 9$$

$$\Rightarrow K^2 = 33 \Rightarrow K = \pm\sqrt{33}$$

۴ـ به ترتیب داریم:

$$x^4 + 2x^2\cos\alpha + 1 = x^4 + 2x^2(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}) + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(می‌دانیم: $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$)

$$= (x^2 + 1)^2 - 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= (x^2 + 1 - 2x\sin\frac{\alpha}{2})(x^2 + 1 + 2x\sin\frac{\alpha}{2})$$

۵ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$4^{x + \sqrt{x^2 - 2}} - 5 \times 2^{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2}} = 6$$

با فرض $2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = y$ داریم:

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0 \Longrightarrow y = 4 \text{ یا } y = \frac{-3}{2}$$

بنابراین حل معادلهٔ مفروض به حل معادلات زیر تحویل می‌یابد:

$$2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = 4 \quad \text{یا} \quad 2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = -\frac{3}{2}$$

از آنجا که همواره داریم: $2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} > 0$، بنابراین معادلهٔ دوم فاقد جواب است. و از معادلهٔ اول داریم:

$$2^{x + \sqrt{x^2 - 2}} = 2^2 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۶ـ

$$\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\frac{2}{3}) = \alpha \Rightarrow \operatorname{Arc}\cos(\frac{2}{3}) = 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$tg^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow tg^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\frac{2}{3})\right) = \frac{1}{5}$$

۷ـ به ترتیب داریم:

$$\cos^7 x\sin x = 1 \Rightarrow \cos^6 x\sin x\cos x = 1 \Rightarrow \cos^6 x(\frac{1}{2}\sin 2x) = 1$$

$$\cos^6 x\sin 2x = 2$$

از آنجا که طرف اول همواره عددی بین ۱− و ۱ یا مساوی آنان می‌باشد و طرف دوم عدد ثابت ۲ است تساوی فوق به ازای هیچ مقدار x ممکن نیست و در نتیجه معادله جواب ندارد.

حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱ـ ابتدا مختصات مرکز ثقل مثلث را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که:

$$G\left|\begin{array}{l} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{array}\right. \Rightarrow G\left|\begin{array}{l} x = \frac{-1 + 3 + 1}{3} = 1 \\ y = \frac{2 + 4 + 0}{3} = 2 \end{array}\right.$$

حال بردار مکان نقطه G یعنی اندازهٔ پاره‌خط OG را محاسبه می‌کنیم.

$$OG = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{OG = \sqrt{5}}$$

۲ـ داریم: $(3\vec{AB}).(-4\vec{AC}) = -12(\vec{AB}.\vec{AC})$

$$|\vec{AB}| = 6 \quad \text{و} \quad |\vec{AC}| = 8 \quad \text{و} \quad \hat{BAC} = 60^\circ$$

پس:

$$-12(\vec{AB}.\vec{AC}) =$$

$$-12 \times |\vec{AB}|\ |\vec{AC}|\ \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{AC})$$

$$\Rightarrow -12(\vec{AB}.\vec{AC}) = -12 \times 6 \times 8 \times \cos 60^\circ = -288$$

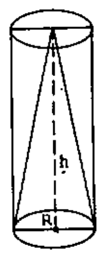
۳ـ با شرایط داده شده حجم استوانه ۳ برابر حجم مخروط است. زیرا اگر شعاع قاعده مشترک استوانه و مخروط را R و ارتفاع مشترک آنها را h بنامیم داریم:

حجم استوانه = سطح قاعده × ارتفاع = πR^2h

حجم مخروط = $\frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع = $\frac{1}{3}\pi R^2h$

⇐ حجم استوانه = $144\pi cm^3$ ⇐ **حجم استوانه = ۳ × حجم مخروط** ⇐

$$\Rightarrow 144\pi = \pi(4)^2 \times h = 16\pi h \Rightarrow \boxed{h = 9cm}$$



راه دیگر: ارتفاع مخروط را محاسبه می‌کنیم. همان مقدار ارتفاع استوانه است.

حجم مخروط = $\frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع ⇐ $48\pi = \frac{1}{3} \times \pi(4)^2h$

$$\Rightarrow 48\pi = \frac{16\pi h}{3} \Rightarrow \boxed{h = 9}$$

۴ـ

$$\lim_{x \to -y}\left(\frac{\sin x + \sin y}{tgx + tgy}\right) = \lim_{x \to -y}\left(\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -y}\left(\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\cos x\cos y}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -y}\left(\frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}.\cos x\cos y\right)$$

$$= \frac{\cos\frac{-y-y}{2}}{\cos\frac{-y+y}{2}}.\cos(-y)\cos(y)$$

$$= \frac{\cos(-y)}{1}.\cos(-y)\cos y = \cos^2 y$$

۵ـ

$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\cdots}}}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^2 = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\cdots}}} \Rightarrow y^2 = \sin x + y$$

$$\Longrightarrow y^2 - y = \sin x \Longrightarrow 2yy' - y' = \cos x$$

$$\Longrightarrow y'(2y - 1) = \cos x \Longrightarrow y' = \frac{\cos x}{2y - 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x}{-1 + 2\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\cdots}}}}$$

۶ـ نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها: $y + x = -1 \Rightarrow A(-1,0)$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3+2)^4}} \Rightarrow m = f'(-1)$$

$$= tg\alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

(خط بر محور طولها عمود است)

بنابراین خطی که عمود بر محور طولها است و از نقطهٔ A می‌گذرد، خط مطلوب است:

(معادله خط مماس) $x + 1 = 0$ یا $x = -1$

۷-

$$\sec 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{4}-3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}+3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{-\pi}{4}+3x\right)}+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \Rightarrow$$

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=A \quad \text{و} \quad \frac{1}{A}+A=2$$

$$\Rightarrow A^2-2A+1=0$$

$$\Rightarrow (A-1)^2=0 \Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

۸-

$$P=\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$$

طرفین را در $\sin\frac{\pi}{48}$ ضرب می‌کنیم:

$$P\sin\frac{\pi}{48}=\underbrace{\cos\frac{\pi}{48}\sin\frac{\pi}{48}}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16} \Rightarrow P=\frac{1}{16\sin\frac{\pi}{48}}$$

۹- طرف اول تساوی را در $\sin\alpha$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{طرف اوّل}=\frac{16\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\cos 4\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{8\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\cos 4\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin 8\alpha\cos 3\alpha}{\sin\alpha} \overset{(\alpha=\frac{\pi}{9})}{=} \frac{2\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\times\frac{1}{2}}{\sin\alpha}=1$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱- به ترتیب داریم:

$$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6=0$$

$$\Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{و} \quad f(1)\overset{?}{=}2 \Rightarrow A(1,2)$$

(مختصات نقطه عطف)

$$m=f'(1)=-3 \Rightarrow m'=\frac{1}{3} \qquad \text{(ضریب زاویه خط قائم)}$$

۲- در توابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ خط $cx+d=0$ مجانب قائم و خط $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی است، پس داریم:

$$\left|\begin{array}{l} x+n=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow -2+n=0 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

از طرفی چون منحنی محور x ها را در $x=-1$ قطع می‌کند پس نقطهٔ $A(-1, 0)$ متعلق به منحنی است:

$$y=\frac{nx+m}{x+n} \Rightarrow \frac{2(-1)+m}{(-1)+2}=0 \Rightarrow m-2=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

۳- مختصات مرکز تقارن تابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ چنین است:

$$I\left|\begin{array}{l} \frac{-d}{c} \\ \frac{a}{c} \end{array}\right.$$

پس داریم:

$$y=\frac{x\sin^2 t-2}{x-\cos^2 t} \Rightarrow I\left|\begin{array}{l} x=\cos^2 t \\ y=\sin^2 t \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\text{(معادله‌مکان)}}{x+y=1}$$

۴- در حالت عمومی $F(\alpha,\beta+c)$ و $F'(\alpha,\beta-c)$ مختصات کانونهای بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ می‌باشند. همچنین می‌دانیم:

$$b^2+c^2=a^2 \quad \text{و} \quad b=\frac{a}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(\frac{a}{2})^2+c^2=a^2 \Rightarrow$$

$$c^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4} \Rightarrow c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a=2\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

۵- ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$F(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x-1}}=\frac{3x-1+1}{\sqrt{3x-1}}$$

$$=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\Rightarrow F(x)=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}} \Rightarrow$$

$$F(x)=(3x-1)^{\frac{1}{2}}+(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=\frac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}$$

۶- ضابطهٔ تابع را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\cos x\left(3\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=3\sin x-\sqrt{3}\cos x \Rightarrow y=0 \Rightarrow$$

$$3\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{tg}x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

طولهای نقاط برخورد منحنی با محور x ها در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چنین است:

$$x=\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x=\frac{7\pi}{6}$$

$$S_{\frac{\pi}{6}}^{7\frac{\pi}{6}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{7\frac{\pi}{6}}\left(3\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=$$

$$\left(-3\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}$$

$$=\left(-3\cos\frac{7\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{7\pi}{6}\right)-\left(-3\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{-1}{2}\right)-\left(-3(\frac{\sqrt{3}}{2})-\sqrt{3}(\frac{1}{2})\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}=4\sqrt{3} \qquad \text{(واحد سطح)}$$

۷- می‌دانیم: $\sin^2 70^\circ=\sin^2(90^\circ-20^\circ)=\cos^2 20^\circ$

لذا داریم:

$$\text{طرف اول}=4(\sin^3 70^\circ+\cos^3 40^\circ)=4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)$$

$$=4(\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)(\cos^2 20^\circ+\cos^2 40^\circ-\cos 20^\circ\cos 40^\circ)$$

$$=4(2\cos 30^\circ\cos 10^\circ)\left(\frac{1+\cos 40^\circ}{2}+\frac{1+\cos 80^\circ}{2}-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos 10^\circ\left(\frac{2+\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{2}-\frac{1+2\cos 20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos 10^\circ\left(\frac{2+2\cos 60^\circ\cos 20^\circ}{2}-\frac{1+2\cos 20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos 10^\circ\left(\frac{4+2\cos 20^\circ-1-2\cos 20^\circ}{4}\right)$$

$$=4\sqrt{3}\cos 10^\circ\left(\frac{3}{4}\right)=3\sqrt{3}\cos 10^\circ$$

۸ ـ الف) به ترتیب می‌توان نوشت:

$$(m+1)\sin^2 x + m\sin 2x + (m+2)\cos^2 x = m-2$$

$$(m+1)\sin^2 x + 2m\sin x\cos x + (m+2)\cos^2 x = m-2$$

طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$(m+1)\mathrm{tg}^2 x + 2m\,\mathrm{tg}x + (m+2) = (m-2)(1+\mathrm{tg}^2 x)$$

$$\Rightarrow 3\mathrm{tg}^2 x + 2m\,\mathrm{tg}x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta' = m^2 - 12 \geq 0$$ (شرط جواب)

$$\Rightarrow m^2 \geq 12 \Rightarrow \begin{vmatrix} m \geq 2\sqrt{3} \\ \text{یا} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

بنابراین اگر $m \geq 2\sqrt{3}$ یا $m \leq -2\sqrt{3}$ باشد، معادله دارای جواب است:

ب) داریم: $\begin{cases} \mathrm{tg}x' + \mathrm{tg}x'' = \dfrac{-2m}{3} \\ \mathrm{tg}x'\,\mathrm{tg}x'' = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ و $x' + x'' = \mathrm{Arctg}(-8)$

$$\mathrm{tg}(x' + x'') = \mathrm{tg}(\mathrm{Arc\,tg}(-8)) = -8$$

$$\frac{\mathrm{tg}x' + \mathrm{tg}x''}{1 - \mathrm{tg}x'\mathrm{tg}x''} = \frac{\frac{-2m}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{-2m}{3-4} = \frac{-2m}{-1} = 2m = -8$$

$$\Rightarrow 2m = -8 \Rightarrow m = \frac{-8}{2} = -4 \Rightarrow \boxed{m = -4}$$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱

۸۱. زیرا ۱۱، ۱۲، ۱۳، و ۱۵ بر پنج وجه آن ظاهر می‌شوند، و عدد واقع بر وجه باقی مانده باید ۱۰ یا ۱۶ باشد.

در نمونهٔ اول، ۱۰ باید بر وجه مقابل وجه ۱۵ باشد، که غیر ممکن است زیرا ۲۵ = ۱۰ + ۱۵ اجبار می‌کند که ۱۴ و ۱۱ بر وجه‌های مقابل باشند.

بنابراین، ۱۶ مقابل ۱۱، ۱۲ مقابل ۱۵، و ۱۴ مقابل ۱۳ است. مجموع هر جفت وجه مقابل برابر ۲۷، و مجموع مطلوب ۸۱ = ۲۷ × ۳ است.

جواب ۲

۳۶. منشور اصلی دارای ۱۲ یال است. هر گوشهٔ بریده شده سه یال اضافی به دست می‌دهد، بنابراین شکل جدید مجموعاً ۳۶ (۱۲ + [۳ × ۸]) یال دارد.

جواب ۳

$\frac{7}{20}\sqrt{21}$. از آن‌جا که:

$$\angle BA'P + \angle A'PB + 60^\circ = 180^\circ = \angle BA'P + 60^\circ + \angle QA'C$$

نتیجه می‌شود که $\angle A'PB = \angle QA'C$ و به این ترتیب:

$$\Delta A'PB \sim \Delta QA'C$$

فرض می‌کنیم: $x = AP = A'P$ و $y = QA = QA'$. در این صورت:

$$\frac{A'P}{QA'} = \frac{A'B}{QC} = \frac{PB}{A'C}$$

یا:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3-y} = \frac{3-x}{2}$$

که از حل آن $x = 7/5$ و $y = 7/4$ به دست می‌آید. بعد قانون کسینوسها را در ΔPAQ به کار می‌بریم:

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ$$
$$= \frac{49}{25} + \frac{49}{16} - \frac{49}{20} = \frac{49.21}{400}$$

که به $PQ = \left(\frac{7}{20}\right)\sqrt{21}$ منجر می‌شود.

جواب ۴

۹۹۰. فرض می‌کنیم R و B، به ترتیب، تعداد جورابهای قرمز و آبی واقع در کشو را نشان دهند. از آن جا که احتمال به دست آوردن یک جفت جوراب ناجور یک دوم است، داریم:

$$\frac{RB}{\binom{R+B}{2}} = \frac{1}{2}$$

برآمد فوق منجر به:

$$(R+B)(R+B-1) = 4RB$$

می‌شود، که می‌تواند به صورت $(R-B)^2 = R+B$ نوشته شود، که نشان می‌دهد که تعداد کل جورابهای واقع در کشو مربع کامل است.

فرض می‌کنیم: $n = R - B$، بنابراین: $n^2 = R + B$. در این صورت: $R = (n^2 + n)/2$.

از آن جا که $R + B \leq 1991$، باید داشته باشیم $|n| \leq \sqrt{1991} < 45$. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بیشترین مقدار ممکن R هنگامی رخ می‌دهد که $n = 44$، و به ازای این مقدار R برابر ۹۹۰ است.

جواب ۵

در مورد هر یک از جزئیات فوق بیش از یک گواه نمی‌تواند سخن درست گفته باشد، یا باید توصیفی که هیچ گواهی راجع به آن گواهی درست نداده موجود باشد. بنابراین سارق، کلاه بر سر نداشته است و رئیس بانک در این مورد راست گفته و در موارد دیگر به خطا بوده است، بنابراین سارق مورد بحث جلیقه نداشته، بلند نبوده و چشمان خاکستری نداشته است. تنها اطلاعی که نگهبان می‌تواند در مورد آن محق باشد چشمان آبی است. مورد صحیح مسؤول گیشه این است که سارق کوتاه بوده، و از آن منشی این که بارانی به تن داشته است.

بنابراین، سارق چشم آبی و کوتاه بوده، بارانی به تن داشته، و سربرهنه بوده است.

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 1
Serial numbers ; 11
Autumn 1994

- **Executive Editor H.R. Amiri**

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

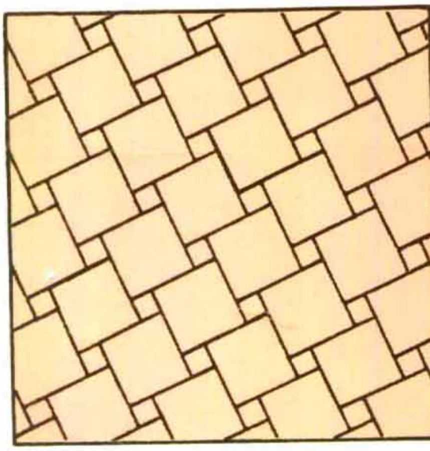
All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran Post code: 15875

Contents:

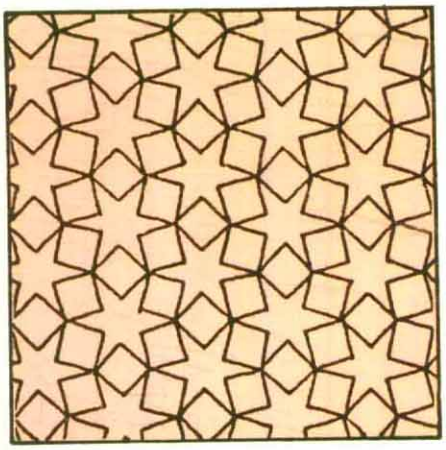
1. The first word
2. You, too, can be successful in your mathematics lessons — ❑ Parviz Shahriari
3. Quadratic equation — ❑ Ahmad Ghandehari
4. Instruction of translation of mathematics articles — ❑ Hamid Reza Amiri
5. A brief history of mathematics magazin in Iran
6. Quantifications laws — ❑ G. R. Yassipour
7. Cartesian product operation between two sets — ❑ Hamid Reza Amiri
8. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods — ❑ Gholam Reza Yassipour
9. Some reports of 25th Annual Iranian Mathematics Conference (cont.)
10. Algebraic expression sign and inequalities and simultaneous equations — ❑ M. R. Hashemi Moosavi
11. Short articles of authentic mathematics journals — ❑ G. R. Yassipour
12. Locus
13. Orthic triangle
14. Introduction to some books
15. Answers to letters
16. Solutions of contest problems (No. 9)
17. Contest problems
18. Problems
19. Solutions and hints of problems

پیکارجویی!

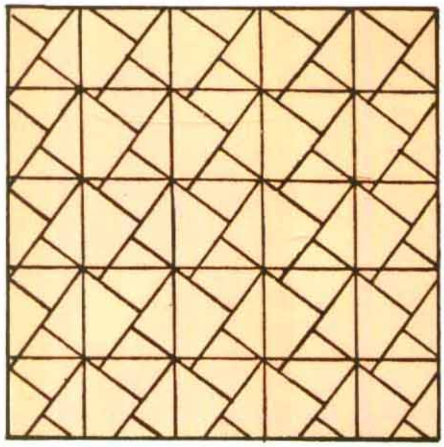
از مجله :
MICROMATH
Summer 1992



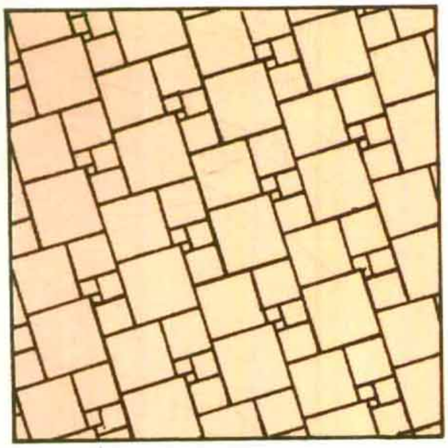
مربعها



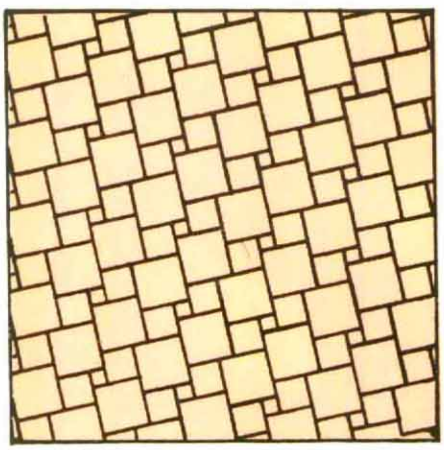
با مربعها می‌توان شکلهای جالبی ساخت ...



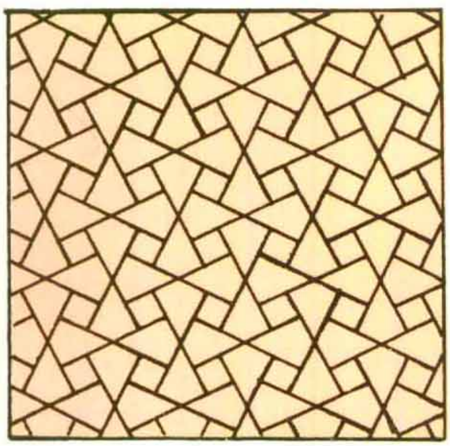
کاشیکاری‌فوق، اختراع نیریزی حدود ۹۰۰ میلادی، می‌تواند دراثبات قضیهٔ فیثاغورس به‌کار رود.



کاشیکاری فوق از هفت مربع متفاوت استفاده کرده است. آیا می‌توانید با هشت مربع چنین کنید؟



طرح فوق سه مربع مختلف را به‌کار برده است. از کاشیکاریهایی چنین چند نوع موجودند؟



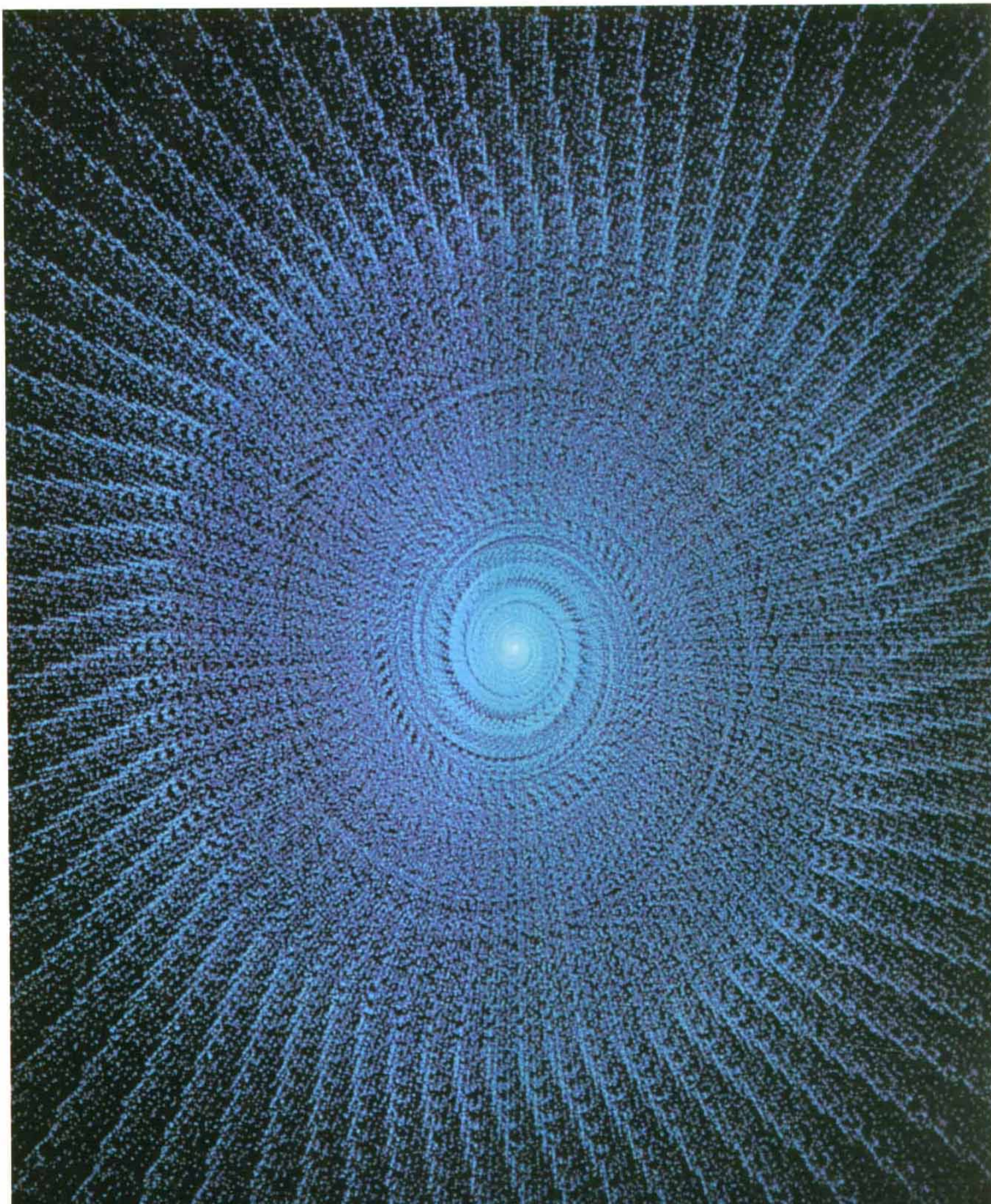
آیا می‌توانید با استفاده از شکلهای فوق آنها را بازسازی کنید؟
چه نمونه‌های مربعی دیگری را می‌توانید کشف کنید؟ در مورد چند ضلعیهای دیگر چه؟

مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۲



سال چهارم، زمستان ۱۳۷۳، شمارهٔ دوم، بها ۱۵۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به وزارت آموزش و پرورش

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
• سردبیر: حمیدرضا امیری

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو
• حروفچینی: یگانه

سال چهارم، زمستان ۱۳۷۳، شمارهٔ دوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اوّل ۱
• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید(۱۲)/ پرویز شهریاری ۲
• رابطه ـ خواص رابطه‌ها/ حمیدرضا امیری ۶
• تاریخچه مجلات ریاضی در ایران(۱۱)/ ۱۳
• دستگاه، محورهای مختصات//احمد قندهاری ۱۶
• آموزش ترجمه متون ریاضی (۸)/ ۲۶
• مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC/ حسین ابراهیم‌زاده قلزم ۲۹
• اثبات نادرستی/ غلامرضا یاسی‌پور ۳۶
• بردارها (قسمت اول)/ سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی ۳۸
• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۰)/ ۴۷
• کاربردهایی از تابع همنگار/ دکتر احمد شرف‌الدین ۴۹
• طرح وحل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۰) ۵۴
• مکان هندسی / محمدهاشم رستمی ۵۶
• دو خاصیت مهم در انتگرال معین/ سیامک جعفری ۶۰
• هنرمحاسبه یا راههای میان‌بُر درمحاسبهٔ‌اعداد/ حسن نصیرنیا ۶۲
• معرفی کتاب / ۶۷
• جواب نامه‌ها/ ۶۹
• حل مسائل مسابقه‌ای برهان (۱۰)/ ۷۱
• مسائل برای حل / ۷۳
• حل مسائل برهان ۱۱ / ۸۰

■ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه بهرام چوبینی، پلاک ۱۷ تلفن: ۸۸۲۵۹۶۴، ۸۸۲۳۱۴۹، ۵۲ ـ ۸۸۴۳۹۵۰، فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

حرف اوّل

یکی از بهترین راههای یادگیری و فهم عمیقِ مطالب و مفاهیم ریاضی، بازگو کردن و یا به عبارت دیگر تدریس آن به دیگری است. آیا تا به‌حال برای شما پیش آمده است که بخواهید مسأله‌ای و یا قضیه‌ای را برای دیگری شرح دهید؟ بی‌شک تجربه کرده‌اید که به‌همراه تشریح آن مسأله یا قضیه، خود به نکاتی تازه پی‌برده‌اید و آن موضوع خیلی بیشتر از پیش، برای شما جا افتاده و خیلی دیرتر از همیشه آن را فراموش کرده‌اید. این مسأله پر اهمیتی است که انسان بازیافته‌های خود را در اختیار دیگران قرار دهد تا ضمن بهره‌رسانی به دیگران خود نیز از آن بهره‌مند گردد، گذشته از آن چون «زکات علم، نشر آن است» در واقع شما زکات علم خود را نیز با این عمل پرداخت کرده‌اید و موجب رضای خداوند متعال را فراهم ساخته‌اید.

توصیهٔ ما به شما عزیزان این است که آنچه آموخته‌اید، یا آنچه از کتاب یا جزوه یا مجله در اختیار دارید، در طبق اخلاص نهاده و در اختیار دوستان و علاقه‌مندان قرار دهید.

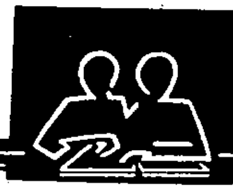
روی مسائل و مفاهیم ریاضی با یکدیگر به بحث و تبادل نظر بپردازید و از نظرات یکدیگر بهره‌مند شوید.

همواره برای **حلّ هر** مسأله یا حتی قضیهٔ ریاضی، به دنبال راه‌حلهای تازه‌تری باشید و تنها به راه حلِ کتاب یا معلم اکتفا نکنید و برای هر مطلب دلیل بخواهید و به دنبال علّت آن باشید.

آرزوی توفیق و موفقیت روزافزون برای شما دانش‌آموزان و آینده‌سازان عزیزِ ایرانِ اسلامی را داریم و فرا رسیدنِ ماه مبارک رمضان، ماه بهارِ قرآن و بهار دلهای پاک وبی‌آلایشِ مؤمنین را به همهٔ شما مؤمنین تبریک عرض کرده و قبولی طاعات و عبادات شما را از درگاه خالقِ یکتا خواستاریم.

والسلام. سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۲)



پرویز شهریاری

▢ ریاضیات و دانشهای دیگر

تا این‌جا، با برخی نکته‌های آموزشی ـ که به کار شما در زمینهٔ ریاضیات مربوط می‌شد ـ آشنا شدید. اکنون زمان آن رسیده است، به این پرسش پاسخ بدهیم: **مسأله‌های ریاضی را چگونه حل کنیم؟** با وجود این، پیش از پرداختن به این پرسش، باید به جنبهٔ دیگری از زندگی ـ که بویژه در روزگار ما اهمیت بسیار دارد ـ اشاره کنیم: **تخصص در شاخه‌ای از دانش، و از آن جمله ریاضیات، نباید به معنای دوری از هنر و دانشهای دیگر باشد.**

ابتدا، این مقالهٔ کوتاه، آموزنده و پرطنز را ـ که از شمارهٔ سوم سال ۱۹۹۱ میلادی ماهنامهٔ «کوانت» چاپ مسکو برداشته‌ایم ـ بخوانید تا بعد، بحث خود را ادامه دهیم. عنوان مقاله، این است:

آیا می‌توان $۲^{۱۶}(۱ + ۲^{۱۶})$ ضلعی منتظم را رسم کرد؟

و اما، خود مقاله:

بلافاصله، بعد از آنکه مردبیر «کوانت»، این پرسش را مطرح کرد، بحث و جدل آغاز شد:

ریاضی‌دان و منطق‌شناس. بله می‌توان! چون $۱ + ۲^{۱۶}$، یکی از عددهای اول فرما[1] است و همان طور که گوس[2] ثابت کرد، می‌توان این چند ضلعی منتظم را رسم کرد.

ریاضی‌دان و تاریخ‌شناس. این چند ضلعی منتظم به وسیلهٔ پروفسور هرمس رسم شده است. دو برابر کردن تعداد ضلعها هم، کار دشواری نیست. شرح آن، یک چمدان بزرگ را پر کرده است و این چمدان، در دانشگاه گوتینگن نگهداری می‌شود. هرکس مایل باشد، می‌تواند آن را مطالعه کند.

ریاضی‌دان و ویراستار. ولی تا امروز، کسی تفسیری بر آن ننوشته است! بنابراین معلوم نیست، متن آن، قابل اعتماد است یا نه!

ریاضی‌دان و روش شناس. در امکان رسم این چند ضلعی، هیچ تردیدی نیست! ولی پرسش در جای دیگری است: چگونه می‌توان آن را رسم کرد؟ بفرمایید، در اختیار شماست (صفحهٔ کاغذ، مداد، خط‌کش و پرگار را روی میز گذاشت).

ریاضی‌دان فیلسوف. نمی‌فهمم، گیر کار در کجاست؟ ثابت شده است، روش رسم وجود دارد. می‌دانیم اثبات درست و روش کار عملی است. بنابراین، می‌توان رسم کرد!

ریاضی‌دان اقتصادشناس. می‌توان یا نمی‌توان! باید محاسبه کرد (ماشین حساب خود را بیرون آورد). اگر برای رسم هر ضلع، یک ثانیه وقت لازم باشد و کار در سه نوبت (یعنی ۲۴ ساعته) انجام شود، آن وقت ... اوه اوه ... ۱۳۶ سال طول می‌کشد. نه، نمی‌شود!

ریاضی‌دان و ویژه‌کار سیبرنتیک. پس کامپیوتر برای چیست؟ برنامه‌ای تنظیم می‌کنیم ... در یک ساعت و کسری، کار انجام می‌شود.

نظریه‌پرداز فیزیک. اجازه بدهید، من هم امتحان کنم (مداد را در دست خود چرخاند و نوک آن را نشان داد). اگر اتم کربن ... در یک لایه ... قطر دایرهٔ محیطی ۳۰ سانتی‌متر ... فاصلهٔ بین سوراخها، در شبکهٔ بلوری مغز مداد ۱/۴ آنگستروم[3] ... بنابراین، محیط دایره $۹/۴ \times ۱۰^{۹}$ آنگستروم ... بله، می‌توان اتمهای کربن را در دایره قرار داد ... تنها باید فاصله‌ها برابر باشند ... در ضمن عرض کنم ... نوسانها ...

آزمایش‌گر فیزیک. (حرف همکارخود را قطع کرد.) این محاسبه‌ها برای چیست؟ (پرگاری برداشت و یک دایره رسم کرد.) بفرمایید! هر

کس مایل است، برای من ثابت کند، این یک ۴۲۹۵۰۳۲۸۳۲ ضلعی منتظم نیست؟

□

نخستین و مهمترین نکته‌ای که، بعد از خواندن این گفت‌وشنود پرطنز ، ولی بر پایهٔ واقعیت، به ذهن می‌رسد، این است که: ریاضیات، دانشی خصوصی و ویژهٔ ریاضی‌دانان نیست و هر کسی که با دانش، به مفهوم عام آن سروکار دارد، باید با ریاضیات آشنا باشد و ، همین‌طور برعکس، یک ریاضی‌دان نمی‌تواند سر در لاک خود فرو برد و بدون اینکه از دانشهای دیگر بهره‌ای داشته باشد، خود را با فرمولها و شکلها سرگرم کند. بویژه ریاضی‌دان نمی‌تواند به دور از واقعیت و تنها با دستگیرهٔ قانونهایی که در ریاضیات کشف کرده است ، حکم کند و نتیجه‌گیریهای خود را عملی و واقعی پندارد.

ریاضیات دانشی زنده است و مثل هر موجود زنده ، تنها دربستگی محیط دور و برخود و در رابطه با واقعیتهای زندگی، می‌تواند رشد کند و یا حتی معنا داشته باشد.همهٔ قانونهای ریاضی ، مستقیم و یا غیر مستقیم ، ریشه در قانونمندیهای طبیعت دارند و با جدا شدن از ریشهٔ خود ، نمی‌توانند به زندگی خود ادامه دهند. ولی از آنجاکه ریاضیات به صورتی انتزاعی و به ظاهر جدا از طبیعت و زندگی مطرح می‌شود، در هر مورد خاص، باید با معیار واقعیتهای بیرون از ریاضیات و بر پایهٔ تجربه و نوع کاربرد ، مورد ارزیابی قرار گیرد و روش تطبیق آن با عمل و شیوهٔ کاربرد آن معین شود.

ریاضیات، از یک طرف به تاریخ خود وابسته است و از طرف دیگر با زندگی ما درآمیخته است و به همین دلیل ، ریاضی‌دان نمی‌تواند خود را ازتاریخ ریاضیات و از جنبه‌های کاربردی ریاضیات و (به اعتباری مهمتر از هر دوی اینها) از فلسفهٔ ریاضیات دور نگه دارد. بجزاینها ریاضی‌دان، پیش از آنکه ریاضی‌دان باشد، یک انسان است و بویژه در روزگار ما، انسان «تک بُعدی» فرصت ابراز وجود نمی‌یابد و نمی‌تواند خود را با پیشرفتهای مادی و معنوی زمان، سازگار و هماهنگ کند.

درست است که ریاضی‌دان، به دلیل تخصصی که انتخاب کرده است، کار فکری خود را بیشتر در مسیر پیشرفت ریاضیات متمرکز می‌کند، ولی یک ریاضی‌دان هم، به عنوان انسانی که در عصر ما زندگی می‌کند، باید با دانشهای دیگر و با مسأله‌های عمدهٔ علمی و اجتماعی زمان خود آشنا باشد، از هنر لذت ببرد و در زندگی خانوادگی و اجتماعی خود، مثل هر انسان دیگری، هم به رشد فکری و هنری خود علاقه‌مند باشد و هم در جست وجوی راه یا راههای نجات انسانها از زشتیهای موجود.

اگر ریاضی‌دان، این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسانها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسأله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد و ...، آن وقت، به یک انسان «تک بُعدی» تبدیل می‌شود که دراین صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد. ریاضی‌دان، همان طور که برای زنده ماندن، به غذا و لباس ومسکن نیاز دارد، برای زندگی در جامعهٔ بومی خود و یا، به طور کلی، در جامعهٔ انسانی، به غذای روح و به تقویت اندیشه وعاطفه خود نیازمند است که با عشق ورزیدن به هنر و علاقه‌مند بودن به مطالعهٔ تاریخ گذشته و حال جامعه‌های بشری وتلاش در جهت بهتر کردن زندگی انسانها، می‌تواند تأمین شود.

یک ریاضی‌دان، باید با عمل خود و با رفتار فردی و اجتماعی خود، این تصور نادرست را از ذهن همگان دور کند که «ریاضی‌دان تنها با عدد و شکل سروکار دارد و به درد هیچ کار و هیچ بحث دیگری نمی‌خورد».

دربارهٔ رابطهٔ ریاضیات با هنر، بستگی جدی و عمیق درک ریاضی با درک فلسفی، دربارهٔ اهمیت آگاهی از تاریخ ریاضیات (و اینکه، در تحلیل آخر، تاریخ ریاضیات، به گونه‌ای، خود ریاضیات است)، دربارهٔ ریاضیات کاربردی و دوره‌های متناوب تاریخ تکامل ریاضیات، که گاه با سمت‌گیری نظری و گاه با سمت‌گیری کاربردی، ظاهر شده است و ... ، به موقع خود صحبت خواهد شد، ولی در این جا، تنها به نمونهٔ مشخصی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات اشاره می‌کنیم و برای بحث منطقیتر و پیوسته‌تر دربارهٔ آن، منتظر فرصت مناسب می‌مانیم.

□

اوگوستن لوئی کوشی (۱۷۸۹ - ۱۸۵۷ میلادی)، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی و عضو فرهنگستان علوم پاریس (از ۱۸۱۶ میلادی)

برای نخستین بار، این قضیّه را در حالت کلی خود ثابت کرد:

میانگین حسابی n عدد مثبت، از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست؛ یعنی اگر n عدد مثبت a_1 ، a_2 ، ... ، a_n را در نظر بگیریم، همیشه داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

و تنها در حالت برابری همهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، این نابرابری، به برابری تبدیل می‌شود. [میانگین حسابی n عدد، یعنی $\frac{1}{n}$ مجموع آنها و میانگین هندسی n عدد، یعنی ریشهٔ n ام حاصل ضرب آنها.]

کوشی این نابرابری مهم و مشهور را، همراه با اثبات آن، در سال ۱۸۲۱ منتشر کرد. این نابرابری، که به سرعت کاربردهای زیادی پیدا کرد، از همان آغاز طرح خود، به عنوان یکی از دشوارترین نابرابریهای عددی (دشوار از نظر اثبات و نه از جهت مفهوم و مضمون آن) شناخته شد. اثباتی که خود کوشی برای آن آورده بود، هم پیچیده بود وهم مفصل؛ عملهای این اثبات، چند صفحهٔ کامل را پر می‌کند. ولی ریاضی‌دانان بعد از «کوشی»، از پای ننشستند و در طول بیش از ۱۷۰ سالی که از طرح و اثبات نابرابری می‌گذرد دهها راه دیگر برای اثبات درستی آن پیدا کردند که، اغلب از روش اثبات کوشی ساده‌ترند (برای آگاهی از برخی از اثباتهای نابرابری «کوشی» می‌توانید به کتاب «نابرابریها» نوشتهٔ پرویز شهریاری مراجعه کنید).

در این‌جا، این پرسش پیش می‌آید: اگر کوشی توانست درستی نابرابری میانگینها را ثابت کند واگر برای استفاده از این نابرابری نیازی به اطلاع از روش اثبات آن نیست، چرا ریاضی‌دانان، به صورتی پی‌گیر، درصدد اثبات آن، با روشهای دیگری برآمده‌اند؟

در واقع در این گونه موردها هدف اصلی، نه خود قضیه، بلکه جست و جوی روشهای تازه‌ای در ریاضیات است. اغلب روشهای استدلال و اثباتهای منطقی (و به عنوان نمونه، روش استقرای ریاضی) از همین راه (والبته، نه یکباره، بلکه گام به گام، در طول زمان و با کوشش عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانان) پدید آمده‌اند.

بطلمیوس، اخترشناس یونانی و ریاضی دانان و اخترشناسان بعد از او (و از جمله خوارزمی)، برای تنظیم زیجها (جدولهای اخترشناسی) و محاسبه‌های آنها، از قضیه‌های کم وبیش دشوار هندسی (مثل قضیهٔ بطلمیوس، قضیهٔ منلائوس و قضیهٔ یسوا) استفاده می‌کردند که با پیچیدگیهای زیادی همراه بود. ولی ریاضی‌دانان ایرانی، به این روشها قانع نشدند و روشهای تازه‌تر و ساده‌تری را برای محاسبه‌های طولانی و ملال‌آور و بغرنجی که در اخترشناسی لازم داشتند، جست‌وجو می‌کردند. این تلاشها، که بخش عمدهٔ آن، به وسیلهٔ «ابوریحان بیرونی» و «ابوالوفای بوزجانی» انجام گرفت، منجر به پیدایش روشهای مثلثاتی و رابطه‌های آنها شد و سرانجام با ساختمانی که «نصیرالدین طوسی»، براساس یافته‌های ریاضی‌دانان ایرانی پیش ازخود بنا کرد، مثلثات به‌عنوان شاخهٔ مستقلی از ریاضیات به وجود آمد.

همچنین، ریاضی‌دانان ایرانی، که تحت تأثیر کارهای ریاضی‌دانان یونانی، برای حل معادله‌ها به روشهای هندسی توجه داشتند؛ به این روشها قانع نشدند و بتدریج توانستند عنصرهای خالص جبری و محاسبه‌ای را وارد کار خود کنند. خوارزمی معادله‌های درجه دوم و خیام معادله‌های درجه سوم را، گاه با روش هندسی و گاه با روش محاسبه‌ای، حل می‌کردند و در میان همین تلاشها بود که دانش جبر تولد یافت و به جایی رسید که جمشید کاشانی، توانست معادلهٔ درجه سوم $4x^3 - 3x = a$ را (به قصد پیدا کردن سینوس یک درجه، با معلوم بودن سینوس سه درجه) حل کند.

□

به نابرابری «کوشی» برگردیم. در این جا ابتدا، یکی از روشهای اثبات نابرابری را (که به نظر من زیباترین و در عین حال، ساده‌ترین آنهاست) می‌آوریم و سپس، به نمونه‌ای از کاربرد نابرابری «کوشی» اشاره می‌کنیم.

در آغاز، باید فکری برای ریشهٔ n ام کرد که در سمت راست نابرابری قرار دارد. چراکه وجود ریشهٔ n ام، مزاحم به نظر می‌رسد و ذهن را آشفته می‌کند. دو طرف نابرابری را، به این ریشهٔ n ام (که مقداری مثبت است) تقسیم می‌کنیم. سمت راست برابر ۱ می‌شود و مقدار سمت چپ نابرابری را، می‌توان میانگین حسابی این عددها دانست:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}, \ldots,$$

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

به این ترتیب، قضیهٔ نابرابری کوشی، تغییر شکل می‌دهد و به صورت قضیهٔ زیر درمی‌آید:

اگر y_1، y_2، ...، y_n عددهای مثبت و حاصل ضربی برابر واحد داشته باشند، ثابت کنید:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \geq 1 \qquad (*)$$

و این قضیّه را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد.

به ازای $n = 1$، نابرابری (*) روشن است و به برابری تبدیل می‌شود. به ازای $n = 2$، باید ثابت کنیم، به شرط مثبت بودن y_1 و y_2 و $y_1 y_2 = 1$، داریم: $\frac{y_1 + y_2}{2} \geq 1$. این نابرابری، با توجه به شرط $y_1 y_2 = 1$، به نابرابری $y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$ و یا

$\circ \geq {}^{\mathsf{Y}}(\mathsf{1} - y_{\mathsf{1}})$ تبدیل می‌شود که درستی آن روشن است (این نابرابری، به ازای $y_{\mathsf{1}} = \mathsf{1}$، یعنی $y_{\mathsf{1}} = y_{\mathsf{Y}} = \mathsf{1}$، به برابری تبدیل می‌شود).

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری (*)، برابر n عدد برقرار باشد و ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n + \mathsf{1}$ عدد هم برقرار است. این برابریها را در نظر می‌گیریم:

$$z_{\mathsf{1}} = y_{\mathsf{1}}, \; z_{\mathsf{Y}} = y_{\mathsf{Y}}, \; \ldots, \; z_{n-\mathsf{1}} = y_{n-\mathsf{1}}, \;\; z_n = y_n y_{n+\mathsf{1}}$$

برای عددهای z_{1}، z_{Y}، ...، z_n، این شرط برقرارند:

$$z_{\mathsf{1}} > \circ, \; z_{\mathsf{Y}} > \circ, \; \ldots, \; z_n > \circ$$

$$z_{\mathsf{1}} \cdot z_{\mathsf{Y}} \cdots z_n = \mathsf{1}$$

بنابراین، طبق فرض استقرا داریم:

$$z_{\mathsf{1}} + z_{\mathsf{Y}} + \ldots + z_n \geq n$$

یعنی: $y_{\mathsf{1}} + y_{\mathsf{Y}} + \ldots + y_{n-\mathsf{1}} + y_n y_{n+\mathsf{1}} \geq n$ (**)

می‌توان عددهای y_{1}، y_{Y}، ...، y_n، $y_{n+\mathsf{1}}$ را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$y_n > \mathsf{1}, \quad y_{n+\mathsf{1}} < \mathsf{1}$$

(روشن است، اگر همهٔ عددهای y_i برابر ۱ نباشند، چنین دو عددی در بین آنها پیدا می‌شود.)

ثابت می‌کنیم، با این فرض، داریم:

$$y_n + y_{n+\mathsf{1}} \geq y_n y_{n+\mathsf{1}} + \mathsf{1}$$

اگر در این نابرابری، همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ منتقل و سپس، به ضرب تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$(\mathsf{1} - y_n)(y_{n+\mathsf{1}} - \mathsf{1}) \geq \circ$$

که درستی آن روشن است، زیرا فرض کردیم $y_n < \mathsf{1}$ و $y_{n+\mathsf{1}} > \mathsf{1}$. با توجه به نتیجهٔ اخیر، نابرابری (**)، چنین می‌شود:

$$y_{\mathsf{1}} + y_{\mathsf{Y}} + \ldots + y_n + y_{n+\mathsf{1}} \geq n + \mathsf{1}$$

اثبات کامل و درستی نابرابری «کوشی» ثابت شد.

«کوشی» ریاضی‌دانی بزرگ و درجهٔ اوّل بود، با وجود این نتوانست راه حل ساده‌ای برای نابرابری میانگینها پیدا کند. و این، یکی از درسهای تاریخ است. اگر شما، برای نخستین بار، با مسأله‌ای روبه‌رو می‌شوید. نباید انتظار داشته باشید، بلافاصله حل آن را ـ آن هم به صورتی ساده ـ پیدا کنید. از اینکه موفق به حل مسأله‌ای نمی‌شوید و اگر راه حلی طولانی، دشوار و ملال‌آور برای آن پیدا می‌کنید، خودتان را سرزنش نکنید. تاریخ ریاضیات به ما می‌آموزد، حتی بزرگترین ریاضی‌دانان هم، مثل شما، گاهی با ناکامی روبه‌رو می‌شده‌اند، گاهی اشتباه می‌کرده‌اند و اگر هم به موفقیتی می‌رسیده‌اند، اغلب از کوتاهترین و زیباترین مسیر نبوده است.

□

به کمک نابرابری «کوشی»، قضیّهٔ زیر که یکی از مهمترین قضیّه‌ها در جبر است، ثابت می‌شود:

اگر چند متغیر مثبت، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این متغیرها با هم برابر باشند.

n عدد مثبت a_{1}، a_{Y}، ...، a_n را به مجموع ثابت m در نظر می‌گیریم. بنابر نابرابری «کوشی» داریم:

$$\sqrt[n]{a_{\mathsf{1}} a_{\mathsf{Y}} \ldots a_n} \leq \frac{a_{\mathsf{1}} + a_{\mathsf{Y}} + \ldots + a_n}{n} = \frac{m}{n}$$

اگر دو طرف این نابرابری را به توان n برسانیم، به دست می‌آید:

$$a_{\mathsf{1}} a_{\mathsf{Y}} \ldots a_n \leq \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

یعنی، حاصل ضرب $a_{\mathsf{1}} a_{\mathsf{Y}} \ldots a_n$، همیشه از $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ کوچکتر است، مگر در حالت

$$a_{\mathsf{1}} = a_{\mathsf{Y}} = \ldots = a_n = \frac{m}{n}$$

که در آن صورت، حاصل ضرب مفروض با $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ برابر می‌شود.

شبیه این قضیّه دربارهٔ حداقل مجموع وجود دارد:

اگر چند متغیر مثبت، حاصل ضرب ثابتی داشته باشند، مجموع آنها وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که این متغیرها، با هم برابر باشند.

[اثبات را خودتان پیدا کنید.]

تا بعد

رابطه ـ خواص رابطه‌ها

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دوم ریاضی فیزیک و ریاضیات ۳ و جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در شمارهٔ ۱۱ «برهان» تعریف عمل حاصل ضرب‌دکارتی را بیان کرده و خواص این عمل را بررسی کردیم. بویژه دیدیم که برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند: A و B،

$$(A \times B) = \{(x , y) \mid x \in A \ \&\ y \in B\}$$

همچنین مشاهده کردید که اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ k عضوی باشد، در این‌صورت $(A \times B)$ دارای mk عضو[1] خواهد بود که نتیجه می‌گیریم $(A \times B)$ دارای ۲^{mk} زیر مجموعه است. به عنوان مثال: اگر $n(A) = ۳$ و $n(B) = ۲$، آنگاه $n(A \times B) = ۶$، پس $(A \times B)$ دارای $۲^۶ = ۶۴$ زیر مجموعه است، که خودِ $(A \times B)$ و $\varnothing$ نیز جزو این زیرمجموعه‌ها هستند.

حال رابطه را تعریف می‌کنیم:

هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت هر زیر مجموعه از $(A \times B)$ را یک رابطه از A در B می‌نامند. پس طبق مطالب فوق اگر $(A \times B)$ دارای n عضو باشد، ۲^n زیرمجموعه دارد و بنابر تعریف رابطه به همین تعداد یعنی؛ ۲^n رابطه از A در B می‌توان تعریف کرد و $\varnothing$ نیز یکی از این رابطه‌ها است که به رابطهٔ مُمتنع معروف است.

مثال ۱ ـ فرض کنیم: $A = \{۲\}$ و $B = \{۴,۳\}$ بنابراین:

$$A \times B = \{(۲,۴) \text{ و } (۲,۳)\}$$

و بنابراین با توجه به تعریف رابطهٔ هریک از مجموعه‌های زیر، یک رابطه از A در B

$R_۱ = \{(۲,۴)\}$ و $R_۲ = \{(۲,۳)\}$ و $R_۳ = \{(۲,۴) , (۲,۳)\}$ و

$R_۴ = \varnothing$

قرارداد ۱ ـ هرگاه رابطهٔ R از A در A تعریف شود یعنی؛ هرگاه $R \subset (A \times A)$ در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R روی A تعریف شده است.

قرارداد ۲ ـ هرگاه رابطهٔ R مفروض باشد و داشته‌باشیم $(x,y) \in R$ می‌توانیم از نماد xRy استفاده کنیم یعنی:

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow xRy$$

$$(x,y) \notin R \Longleftrightarrow x\not{R}y$$

مثال ۲ ـ رابطه‌ای چون R روی $IN^۲ = IN \times IN$ تعریف کنید به شرطی که دارای ۳ عضو باشد.

طبق قرارداد ۱، رابطه روی $IN^۲$ یعنی؛ از $IN^۲$ در $IN^۲$ پس همواره باید $R \subset IN^۲ \times IN^۲$ و بنابراین اعضای R می‌بایست زوج مرتبهایی باشند که مؤلّفهٔ آن خود یک زوج مرتب است زیرا،

$$IN^۲ \times IN^۲ = \{((x,y) , (z,t)) \mid (x,y) \in IN^۲, (z,t) \in IN^۲\}$$

بنابراین مثلاً می‌توان نوشت:

$$R = \{((۱,۲),(۲,۱)),((۲,۶),(۷,۱۱)),((۵,۳),(۹۹,۱۵))\}$$

که R دارای ۳ عضو است و طبق قرار داد ۲ می‌توانیم بنویسیم:

$(۱,۲)\ R\ (۲,۱)$ و $(۲,۶)\ R\ (۷,۱۱)$ و $(۵,۳)\ R\ (۹۹,۱۵)$

طرح یک تست ـ هرگاه $n(A) = m$ در این صورت چند رابطه روی A می‌توان نوشت؟

۱) ۲^m ۲) $۲^{۲m}$ ۳) $۲^{۲^m}$ ۴) $۲^{m^۲}$

جواب ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$n(A) = m \Rightarrow n(A \times A) = m^۲$$

پس $(A \times A)$ دارای $۲^{m^۲}$ زیر مجموعه است و به همین تعداد نیز می‌توان رابطه روی A تعریف کرد.

دامنهٔ یک رابطه ـ اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های اوّلِ رابطهٔ R را دامنهٔ R می‌نامند و با D_R نمایش می‌دهند، که واضح است همواره $D_R \subset A$.

بُرد یک رابطه ـ مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های دوم رابطهٔ R را بُرد رابطهٔ R می‌نامند و با نماد R_R نمایش می‌دهند و همچنین واضح است که $R_R \subset B$ (رابطهٔ R از A در B تعریف شده است).

مثال ۳ ـ هرگاه $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $B = \{۱,۹,۷\}$ و رابطهٔ $R = \{(۲,۱),(۴,۱),(۶,۷)\}$ از A در B تعریف شده باشد، در این صورت:

$$D_R = \{۲,۴,۶\} \subset A \text{ و } R_R = \{۱,۷\} \subset B$$

◆ وارون یک رابطه

اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، وارون رابطهٔ R که با $R^{-۱}$ نمایش داده می‌شود، رابطه‌ای است از B در A که با عوض کردنِ جای مؤلّفه‌های اوّل و دومِ R حاصل می‌شود، یعنی:

$$R^{-۱}=\{(a,b) \mid (b,a) \in R\} \text{ یا } (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-۱}$$

به عنوان مثال، با توجه به مثال ۳ داریم:

$$R^{-۱} = \{(۱,۲),(۱,۴),(۷,۶)\}$$

از طرفی با توجه به تعریف دامنه و بُرد و تعریف وارون یک رابطه همواره داریم:

$$D_R = R_{R^{-۱}} \quad \text{و} \quad R_R = D_{R^{-۱}}$$

در این قسمت با توجه به مطالب گفته شده، به طرح و حل چند مسألهٔ مهّم می‌پردازیم:

مسألهٔ ۱ ـ هرگاه $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه از A در B باشند ثابت کنید:

$$D_{R_۱ \cup R_۲} = D_{R_۱} \cup D_{R_۲}$$

حل ـ

فرض کنیم: $[x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \Rightarrow \exists y \in B ; (x,y) \in (R_۱ \cup R_۲) \Rightarrow$

$(x,y) \in R_۱ \vee (x,y) \in R_۲ \Rightarrow x \in D_{R_۱} \vee x \in D_{R_۲} \Rightarrow$

$x \in (D_{R_۱} \cup D_{R_۲})] \Rightarrow D_{R_۱ \cup R_۲} \subset D_{R_۱} \cup D_{R_۲} \qquad (۱)$

حال فرض کنیم: $[x \in (D_{R_۱} \cup D_{R_۲}) \Rightarrow x \in D_{R_۱} \vee x \in D_{R_۲} \Rightarrow$

$\exists y_۱ , \exists y_۲ ; (x,y_۱) \in R_۱ \vee (x,y_۲) \in R_۲ \overset{R_۱, R_۲ \subset R_۱ \cup R_۲}{\Longrightarrow}$

$(x,y_۱) \in (R_۱ \cup R_۲) \vee (x,y_۲) \in (R_۱ \cup R_۲) \Rightarrow$

$x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \vee x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \overset{P \vee P \equiv P}{\Rightarrow} x \in D_{R_۱ \cup R_۲}] \Rightarrow$

$(D_{R_۱} \cup D_{R_۲}) \subset D_{R_۱ \cup R_۲} \qquad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow D_{R_۱} \cup D_{R_۲} = D_{R_۱ \cup R_۲}$

مسألهٔ ۲ ـ با ذکر یک مثال (مثال نقض) نشان دهید که تساویِ مسألهٔ قبل برای اشتراک برقرار نیست یعنی نشان دهید:

$$D_{R_۱ \cap R_۲} \neq D_{R_۱} \cap D_{R_۲}$$

حل ـ

فرض کنیم: $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $B = \{۳,۵,۷,۹\}$ و تعریف می‌کنیم:

$$R_۱ = \{(۲,۳),(۴,۷),(۶,۹)\}, R_۲ = \{(۲,۳),(۴,۵),(۷,۸)\}$$

$$D_{R_۱} = \{۲,۴,۶\}, D_{R_۲} = \{۲,۴,۸\}, D_{R_۱} \cap D_{R_۲} = \{۲,۴\}$$

$$(R_۱ \cap R_۲) = \{(۲,۳)\}, D_{R_۱ \cap R_۲} = \{۲\}$$

$$\Rightarrow D_{R_۱ \cap R_۲} \neq D_{R_۱} \cap D_{R_۲}$$

مسألهٔ ۳ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند ثابت کنید:

$$(f \cup g)^{-۱} = f^{-۱} \cup g^{-۱}$$

فرض کنیم: $[(x,y) \in (f \cup g)^{-۱} \overset{\text{تعریف وارون}}{\Longleftrightarrow} (y,x) \in (f \cup g) \overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow}$

$(y,x) \in f \vee (y,x) \in g \overset{\text{تعریف وارون}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in f^{-۱} \vee (x,y) \in g^{-۱}$

$\overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in (f^{-۱} \cup g^{-۱})] \Rightarrow (f \cup y)^{-۱} = f^{-۱} \cup g^{-۱}$

تمرین ـ ثابت کنید: $(f \cap g)^{-1} = f^{-1} \cap g^{-1}$، که f و g هر دو رابطه‌هایی از A در B هستند.

مسألهٔ ۴ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند، ثابت کنید:

$$(f - g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$$

فرض‌کنیم: $[(x,y) \in (f - g)^{-1} \overset{\text{تعریف تفاضل}}{\Longleftrightarrow} (y,x) \in (f - g)$

$(y,x) \in f \wedge (y,x) \notin g \Longleftrightarrow (x,y) \in f^{-1} \wedge (x,y) \notin g^{-1}$

$\Longleftrightarrow (x,y) \in (f^{-1} - g^{-1})] \Rightarrow (f - g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$

◆ **تعریف رابطهٔ همانی**

رابطهٔ همانی روی یک مجموعهٔ ناتهی مانند A که آن را با I نمایش می‌دهند عبارت است از: تمام زوج مرتبهای متعلق به A×A که هر دو مؤلّفه با هم برابر باشند، یعنی:

$$I = \{(a,a) \mid a \in A\}$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق اگر A یک مجموعهٔ m عضوی باشد، در این صورت رابطهٔ همانیِ تعریف شده روی A، یعنی I دارای m عضو است.

مثال ۴ ـ اگر $A = \{۲,۳,۷,۹\}$ در این صورت:

$I = \{(۲,۲) , (۳,۳) , (۷,۷) , (۹,۹)\}$

■ انواع رابطه‌ها (خواص رابطه‌ها)

۱ ـ خاصیت بازتابی (انعکاسی):

اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد و رابطهٔ R روی A تعریف شده باشد، در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R دارای خاصیت بازتابی یا انعکاسی است، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A مانند a، به صورت (a,a) در R وجود داشته باشد، یعنی:

رابطهٔ R خاصیت بازتابی دارد. $\Leftrightarrow \forall a \in A$ ، $(a,a) \in R$ یا aRa

توجه دارید که گفتیم: هر عضو مجموعهٔ A، به‌عبارت دیگر؛ اگر R رابطه‌ای بازتابی روی مجموعهٔ m عضوی A باشد، **حداقل اعضایی** که R می‌تواند داشته باشد، m است یعنی؛ رابطهٔ بازتابی R باید حداقل شاملِ رابطهٔ همانی در A باشد.

مثال ۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶\}$ مفروض است، در این صورت:

الف) $R_۱ = \{(۲,۲) , (۴,۴) , (۲,۶) , (۶,۲)\}$

$R_۱$ خاصیت بازتابی ندارد زیرا، ۶∈A ولی $(۶,۶) \notin R_۱$ یا ۶ $\not R$ ۶ .

ب) $R_۲ = \{(۲,۲),(۴,۴),(۴,۲),(۶,۶)\}$

$R_۲$ خاصیت بازتابی دارد و همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $I \subset R_۲$.

ج) $R_۳ = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}$

$R_۳$ خاصیت بازتابی دارد، این رابطه همان رابطهٔ همانی است.

مثال ۶ ـ رابطه‌های تساوی و کوچکتر یا مساوی در اعداد حقیقی دارای خاصیت بازتابی هستند، زیرا هر عدد مساوی خودش است و نیز هر عدد کوچکتر یا مساوی خودش است یا به عبارت دیگر:

$\forall a \in \mathbb{R} \,;\, a = a$ و $\forall a \in \mathbb{R}$ ، $a \le a$

مثال ۷ ـ رابطهٔ جزئیت (زیر مجموعه بودن) در مجموعهٔ، زیر مجموعه‌های A دارای خاصیت بازتابی است زیرا، هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی؛

$\forall B \in p(A)$ ، $B \subseteq B$

مثال ۸ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در مجموعهٔ اعداد طبیعی (IN) خاصیت بازتابی دارد، زیرا هر عدد طبیعی برخود بخش‌پذیر است، یعنی:

$\forall a \in \mathbb{N}$ ، $\frac{a}{a} = ۱$ یا $a = ۱a$

تذکر ـ برای اینکه ثابت کنیم، رابطه‌ای چون R روی A، دارای خاصیت بازتابی نیست کافی است تنها یک عضو از A مانند a بیابیم به طوری که $a \not R a$.

در این قسمت و قبل از بیان بقیّهٔ خواص رابطه‌ها به ذکر این نکته مهّم می‌پردازیم که گاهی اوقات تعریف یک رابطه را به صورت و با نماد ریاضی بیان می‌کنند، در حقیقت ارتباط بین مؤلّفه‌های هر زوج مرتب را با نماد ریاضی نمایش می‌دهند، به عنوان مثال: رابطهٔ بخش‌پذیری را در IN به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$\forall a,b \in \mathbb{N} \,;\, aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} = k$ یا $a = kb$

که در تعریف فوق $k \in \mathbb{N}$ بوده و داریم:

$R = \{(۱,۱) , (۲,۱) , (۲,۲) , (۳,۱) , (۳,۳),...\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مؤلّفهٔ هر زوج، مضربی از مؤلّفهٔ

دوم آن است و برعکس. یعنی؛ اگر عددی طبیعی مضربی از یک عدد طبیعی دیگر باشد، آن دو عدد به صورت یک زوج مرتب در رابطهٔ مزبور وجود خواهد داشت، مثلاً:

$۸ = ۲ \times ۴ \Rightarrow (۸,۲) \in R$ یا $۸R۲$

مثال ۹ ـ رابطهٔ R روی مجموعهٔ اعداد صحیح (Z) به صورت زیر تعریف شده است، نشان دهید این رابطه خاصیت بازتابی دارد.

$$\forall x , y \in Z \text{ ، } xRy \Longleftrightarrow x - y = ۴k \ (k \in Z)$$

برای نشان دادن این مطلب، ابتدا ضابطه‌ای که براساس آن رابطهٔ R تعریف شده را بررسی می‌کنیم. برطبق این ضابطه زوج مرتبهایی در رابطهٔ R موجود هستند که تفاضل مؤلّفهٔ اوّل و دوم آنها مضرب صحیحی از ۴ باشد، مثلاً:

$$\left.\begin{array}{l} ۸ - ۴ = ۴ = ۱ \times ۴ \ (k = ۱) \\ ۱۲-(-۴)=۱۶= ۴ \times ۴(k= ۴) \end{array}\right\} \Rightarrow ۸R۴ \ , \ ۱۲R(-۴)$$

یا مثلاً؛

$$[۲- ۲ = ۰ = ۴ \times ۰(k = ۰)] \Rightarrow ۲R۲$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\forall x \in Z ; x - x = ۰ = ۴ \times ۰ \Rightarrow xRx$$

ثابت شد : $\forall x \in Z$ ، xRx

بنابراین رابطهٔ R طبق تعریف دارای خاصیت بازتابی است.

با توجه به تعریف رابطهٔ همانی و تعریف خاصیت بازتابی برای یک رابطه دیدیم هر رابطه که خاصیت بازتابی داشته باشد باید شامل رابطهٔ همانی یعنی؛ I باشد و برعکس یعنی اگر R شامل I باشد، حتماً خاصیت بازتابی دارد بنابراین می‌توان نوشت:

$I \subset R \Longleftrightarrow$ رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد.

از همین نکته استفاده کرده و ثابت می‌کنیم:

الف ـ اگر f و g دو رابطهٔ روی مجموعهٔ ناتهی A بوده و انعکاسی باشند در این صورت $(f \cup g)$ و $(f \cap g)$ نیز انعکاسی هستند ولی $(f - g)$ دیگر دارای خاصیت انعکاسی نیست.

ب ـ رابطهٔ مُمتنع ($\varnothing$) انعکاسی نیست.

(اثبات الف) $\left\{\begin{array}{l} \text{انعکاسی } f \Rightarrow I \subseteq f \\ \text{انعکاسی } g \Rightarrow I \subseteq g \end{array}\right\} \Rightarrow I \subseteq (f \cap g)$

و چون همواره $(f \cap g) \subseteq (f \cup g)$ لذا $I \subset (f \cup g)$ و حکم ثابت است.

از طرفی: $I \subseteq f \ , \ I \subseteq g \Rightarrow I \nsubseteq (f - g)$

اثبات ب) فرض کنیم رابطهٔ تُهی انعکاسی باشد، بنابراین می‌بایست $I \subseteq \varnothing$ و این ممکن نیست، جز آنکه $I = \varnothing$ و این با ناتهی بودنِ مجموعهٔ A تناقض دارد، پس رابطهٔ تهی انعکاسی نیست.

مثال ۱۰ ـ با ذکر یک مثال نقض نشان می‌دهیم؛ رابطهٔ زیر که روی اعدادِ حقیقی (IR) تعریف شده است، خاصیت انعکاسی ندارد.

$\forall x , y \in IR ; xRy \Leftrightarrow ۲x + ۳y = ۹$

$۳ \in IR$ ولی $\rightarrow ۲ \times ۳ + ۳ \times ۳ = ۱۵ \neq ۹ \Rightarrow ۳ \not R ۳$

۲ـ خاصیت تقارنی

می‌گوییم رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A خاصیت تقارنی دارد هرگاه، هر زوج مرتب مانند (x , y) که در R موجود باشد، (y , x) نیز در R موجود باشد به عبارت دیگر:

رابطهٔ R متقارن است $\Leftrightarrow \forall x,y \in A; [(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R]$

تذکر: از تعریف فوق چنین برمی‌آید که در صورت وجودِ زوج مرتبی چون (x,y) می‌بایست (y,x) هم در R باشد و اگر زوج مرتبی چون (z,t) در R نبود دیگر به دنبال (t,z) نیستیم و **نمی‌توان** ادعا کرد که رابطهٔ تقارنی نیست. در ضمن توجه دارید که چون در تعریف خاصیت تقارنی از سور عمومی (به ازای هر) استفاده شده نیازی به رابطهٔ دو شرطی نداریم.

مثال ۱۱ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ را در نظر می‌گیریم در این‌صورت:

الف) $R_۱ = \{(۲,۴),(۶,۲),(۴,۲),(۲,۶),(۸,۸)\}$

رابطهٔ $R_۱$ متقارن است زیرا هر زوج مرتب در آن که در نظر گرفته

شود، دارای وارونی در R_1 است.

ب) $R_2 = \{(۲,۴),(۴,۲),(۸,۶)\}$

رابطهٔ R_2 خاصیت تقارنی ندارد زیرا ۸R۶ ولی ۶R̸۸ .

ج) $R_3 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸)\}$

رابطهٔ R_3 نیز دارای خاصیت تقارنی است در واقع رابطهٔ همانی رابطه‌ای متقارن است.

مثال ۱۲ ـ رابطهٔ کوچکتر یا مساوی در IR خاصیت تقارنی ندارد، زیرا:
مثلاً ۲≥۳ ولی ۲ ≰ ۳ .

مثال ۱۳ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در IN متقارن نیست، زیرا مثلاً عدد ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است (خارج قسمتِ تقسیم، عددی صحیح و باقی‌مانده صفر است) ولی عدد ۲ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

مثال ۱۴ ـ نشان دهید رابطهٔ زیر که روی Z تعریف شده دارای خاصیت تقارنی است.

$$\forall x,y \in Z ، xRy \Leftrightarrow x - y = ۴k \quad (k \in Z)$$

برای اثبات چنین مسائلی همیشه برای شروع خودمان فرض می‌کنیم، (x,y) ای دلخواه در رابطهٔ R موجود است و در نهایت باید ثابت کنیم (y,x) نیز در R است و با توجه به دلخواه بودنِ (x,y) حکم به اثبات می‌رسد، بنابراین داریم:

فرض کنیم $(x,y) \in R \Rightarrow x-y = ۴k_1 \xRightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} y - x = ۴(-k_1)$
$\xRightarrow{-k_1 = k_2} y - x = ۴k_2 \Longrightarrow (y,x) \in R$

تمرین: نشان دهید رابطهٔ زیر متقارن است:

$$\forall x,y \in IR \ ; xRy \Leftrightarrow x + y = ۹$$

قضیّه: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعهٔ ناتهی A باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه R تقارنی باشد آن است که $R = R^{-1}$.
اثبات شرط لازم: فرض کنیم رابطهٔ R متقارن باشد ثابت می‌کنیم: $R = R^{-1}$.

برای اثبات به‌روش عضوگیری دلخواه از R استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم: $[(x,y)\in R \xRightarrow{\text{R تقارنی}} (y,x)\in R \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (x,y)\in R^{-1}] \Rightarrow$
$R = R^{-1}$

اثبات شرط کافی: فرض کنیم: $R = R^{-1}$، ثابت می‌کنیم: R متقارن است:

فرض کنیم: $[(x,y) \in R \xRightarrow{R = R^{-1}} (x,y) \in R^{-1} \xRightarrow{\text{تعریف وارون}}$
$(y,x) \in R\ ] \Rightarrow$ R متقارن است

تذکر: از قضّیهٔ فوق می‌توان در اثبات متقارن بودنِ رابطه‌ها استفاده کرد، یعنی برای اثبات اینکه رابطهٔ R متقارن است کافی است ثابت کنیم: $R = R^{-1}$

مسألهٔ ۵ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی A باشند و هر دو دارای خاصیت تقارنی باشند ثابت کنید:

$(R_1 \cap R_2)$ ، $(R_1 - R_2)$ و $(R_1 \cup R_2)$ نیز متقارن هستند.
کافی است ثابت کنیم $\leftarrow (R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1 \cap R_2)$
و $(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)$ و $(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1 - R_2)$
چون R_1 و R_2 متقارن هستند، پس طبق قضّیهٔ قبل $R_1 = R_1^{-1}$ و $R_2 = R_2^{-1}$ بنابراین داریم:

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = (R_1 \cup R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۳)}$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cap R_2^{-1}) = (R_1 \cap R_2)$$

$$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1^{-1} - R_2^{-1}) = (R_1 - R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۴)}$$

مسألهٔ ۶ ـ رابطهٔ R روی IR^2 تعریف شده آیا این رابطه متقارن است؟

$$\forall (x,y) , (z,t) \in IR^2 ، (x,y) R (z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل ـ با توجه به اینکه رابطه روی IR^2 تعریف شده واضح است که $R \subset IR^2 \times IR^2$ (به مثال ۲ مراجعه کنید) و نظیر آنچه در قبل گفتیم عمل می‌کنیم، یعنی؛ به صورت دلخواه زوج مرتبی از رابطه فرض کرده و ثابت می‌کنیم وارون آن زوج نیز در رابطه موجود است یعنی:

جابه‌جایی عمل جمع

$(x^۲ + t^۲ = y^۲ + z^۲) \Longrightarrow (x,y)R(z,t)$: فرض کنیم]

رابطهٔ R متقارن است ⇐ $[(z,t)\ R\ (x,y) \Longleftarrow (z^۲+y^۲=t^۲+x^۲)$

توجه‌دارید که، $(x,y)\ R\ (z,t)$ معادل‌است بااینکه $((x,y),(z,t))\in R$ و $(z,t)\ R\ (x,y)$ معادل است با اینکه $((z,t)\ ,\ (x,y))\ \in R$.

مسأله ۷ ـ ثابت کنید، هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد در این‌صورت $(R \cup R^{-1})$ متقارن است.

حل ـ با توجه به قضیهٔ قبل اگر $R = R^{-1}$ آنگاه R متقارن است

بنابراین، کافی است نشان دهیم، $(R \cup R^{-1})^{-1} = (R \cup R^{-1})$

$$(R \cup R^{-1})^{-1} = (R^{-1} \cup R) = (R \cup R^{-1})$$

توجه دارید که از تساوی $(R^{-1})^{-1} = R$ استفاده کرده‌ایم.

تمرین: ثابت کنید، اگر R رابطه‌ای دلخواه روی مجموعهٔ A باشد، در این صورت $(R \cap R^{-1})$ متقارن است.

مسألهٔ ۸ ـ ثابت کنید، رابطهٔ مُمتنع (رابطهٔ تهی) متقارن است.

حل ـ (برهان خلف)، فرض کنیم رابطهٔ تهی متقارن نباشد، پس طبق تعریف می‌بایست (x,y) ای در رابطهٔ تهی باشد ولی (y,x) در آن نباشد و این ممکن نیست، زیرا تهی عضوی ندارد. پس رابطهٔ تهی متقارن است.

۳ـ خاصیت تراگذری یا ترایایی یا تعدی

فرض‌کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، حال اگر با فرض $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ ، بتوانیم ثابت‌کنیم، $(x,z)\in R$ ، در این صورت می‌گوییم: R خاصیت تعدی دارد یا رابطه‌ای متعدی است. به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

رابطهٔ R خاصیت‌تعدی‌دارد $\Longleftrightarrow \forall x,y,z\in A, [xRy \wedge yRz] \Rightarrow xRz$

تذکر: همان‌طور که در تعریف خاصیت تعدی مشخص است، اثبات برقراری این خاصیت برای رابطه‌ای چون R، مستلزم آن است که درستی گزارهٔ شرطیِ ذکر شده در تعریف، اثبات شود و می‌دانید گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ در ۳ حالت درست و فقط در حالتی که مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش نادرست دارد. بنابراین، اگر مقدمِ گزارهٔ شرطیِ مزبور که ترکیبی عطفی از دو گزارهٔ xRy و yRz است، نادرست باشد در کلّ گزارهٔ شرطی ارزش درست داشته و در اصطلاح می‌گوییم: به انتفای مقدم گزاره درست بوده و رابطه متعدی است.

مثال ۱۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۵,۶,۷\}$ مفروض است. در این صورت:

الف) $R_۱ = \{(۲,۵), (۵,۲)\ , (۲,۲)\}$

$R_۱$ متعدی نیست زیرا:

$۵R۲ \wedge ۲R۵$ ولی $۵R۵$

ب) $R_۲ = \{(۲,۶)\}$

$R_۲$ متعدی است زیراگزارهٔ شرطی زیر به انتفای مقدم درست است:

$$\underset{T}{(۲R۶} \wedge \underset{F}{۶Rx)} \Rightarrow ۲Rx \qquad (x\in A)$$

ج) $R_۳ = \{(۲,۵),(۵,۶),(۲,۶),(۶,۲),(۲,۲)\}$

رابطهٔ $R_۳$ متعدی نیست، زیرا:

$(۵,۶) \in R \wedge (۶,۲) \in R$ ولی $(۵,۲) \notin R$

د) $R_۴ = \{(۲,۲)\ , (۵,۵)\ , (۶,۶)\ , (۷,۷)\}$

رابطهٔ $R_۴$ خاصیت تعدی دارد (به انتفای مقدم).

مثال ۱۶ ـ رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» روی مجموعهٔ اعداد حقیقی متعدی است زیرا، با فرض $a \le b$ و $b \le c$ می‌توان نتیجه گرفت $a \le c$.

مثال ۱۷ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری روی Z متعدی است زیرا، اگر فرض کنیم a بر $b \neq 0$ بخش‌پذیر و b نیز بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$a = bq_1 \text{ و } b = cq_2 \Longrightarrow a = (cq_2)q_1$$
$$\Longrightarrow a = c(q_2q_1) \Longrightarrow a = cq_3$$

یعنی نتیجه گرفتیم a بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر است.

نکته: همان‌طور که مشاهده کردید، برای اثبات خاصیت تعدیِ رابطهٔ R می‌بایست با فرض xRy و yRz ثابت کنیم xRz.

مثال ۱۸ ـ رابطهٔ R را روی Z به شکل زیر تعریف می‌کنیم. ثابت کنید، رابطهٔ R متعدی است.

$$\forall x,y \in Z ، xRy \Longleftrightarrow x - y = 4k \quad (k \in Z)$$

فرض کنیم: $xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = 3k_1 \wedge y - z = 3k_2$

$$\xRightarrow{\text{جمع طرفین}} (x - y) + (y - z) = 3\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3}$$
$$\Longrightarrow x - z = 3k_3 \Longrightarrow xRz$$

مسألهٔ ۹ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف شده. ثابت کنید این رابطه خاصیت تراگذری (تعدی) دارد.

$$\forall (x,y) , (z,t) \in IR^2 ، (x,y) \, R \, (z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل:

فرض کنیم $(x,y) \, R \, (z,t) \wedge (z,t) \, R \, (u,v)$

$$\Rightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2 \wedge z^2 + v^2 = t^2 + u^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{t^2} + \cancel{z^2} + v^2 = y^2 + \cancel{z^2} + \cancel{t^2} + u^2$$
$$\Rightarrow x^2 + v^2 = y^2 + u^2 \Rightarrow (x,y) \, R \, (u,v)$$

مسألهٔ ۱۰ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی مجموعهٔ A بوده و هر دو دارای خاصیت تعدی باشند، ثابت کنید: $(R_1 \cap R_2)$ نیز متعدی است. آیا $(R_1 \cup R_2)$ نیز متعدی است؟

حل:

فرض کنیم: $(x,y) \in (R_1 \cap R_2) \wedge (y,z) \in (R_1 \cap R_2)$

$$\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \left.\begin{array}{l} (x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1 \xRightarrow{R_1 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_1 \\ (x,y)\in R_2 \wedge (y,z)\in R_2 \xRightarrow{R_2 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$
$$(x,z) \in (R_1 \cap R_2)$$

در مورد $(R_1 \cup R_2)$ حکم بالا در حالت کلّی برقرار نیست که می‌توان این موضوع را با یک مثال نمایش داد. اگر فرض کنیم:

$$A = \{2,4\}$$

و $R_1 = \{(2,4)\}$ و $R_2 = \{(4,2)\}$. واضح است که R_1 و R_2 هر دو بنابر انتفای مقدم متعدی هستند ولی $(R_1 \cup R_2) = \{(2,4) ,(4,2)\}$ متعدی نیست زیرا، $(2,2) \notin (R_1 \cup R_2)$.

* * *

تذکّر مهم: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ A، تک عضوی باشد از طریق برهان خلف نیز می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ R خاصیت تعدی دارد: فرض کنیم $R = \{(a,b)\}$. فرض کنیم R خاصیتِ تعدی نداشته باشد (فرض خلف) بنابراین طبق تعریفِ خاصیتِ تعدی و با توجه به اینکه $(a,b) \in R$ باید $(b,x) \in R$ ای $(x \in A)$ باشد به قسمی که $(a,x) \notin R$ و وجودِ (b,x) در R یک تناقض است، زیرا فقط $(a,b) \in R$ بنابراین، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

در انتها و با تشکر از اینکه با حوصله تا آخر مقاله پیش آمدید، لازم می‌دانم که بحثِ راجع به رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی را به علت حجم زیاد آن به شمارهٔ بعدیِ مجله موکول کنم، إن‌شاءا... مفید واقع شده باشد.

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۱)

بررسی مجلهٔ ریاضی یکان را در این شماره نیز ادامه می‌دهیم:

در مقالهٔ **چگونگی معرفی و انتخاب نامزدهای دریافت جایزهٔ نوبل**[1] چنین آمده است :

بنابر اساس‌نامه‌ای که برای مؤسسهٔ نوبل تنظیم شده است، چهار هیأت برای اعطای جوایز پنج‌گانهٔ نوبل فعالیت می‌کنند: آکادمی سلطنتی علوم (برای جوایز فیزیک و شیمی) ـ مؤسسهٔ طبی سلطنتی کارولین (برای جایزهٔ طب و فیزیولوژی) ـ آکادمی سلطنتی سوئد (برای جایزهٔ ادبیات) ـ کمیتهٔ وابسته به پارلمان نروژ (برای جایزهٔ صلح). علاوه بر آن پنج کمیته وجود دارد که هر یک برای توزیع یکی از جوایز فعالیت می‌کند.

هیأتهای فوق‌الذکر، هر ساله دربارهٔ برندگان جوایز تصمیم می‌گیرند. نامزدی برندگان جوایز باید تا قبل از اوّل فوریهٔ هر سال به این هیأتها ابلاغ شود. اشخاص یا مؤسسه‌های واجد شرایط خاص می‌توانند کاندیداها را به هیأتهای مزبور معرفی کنند.

کمیته‌های پنج‌گانهٔ نوبل، هر یک سه تا پنج عضو دارد که توسط هیأت مربوطه تعیین می‌شوند (انتخاب اعضای کمیتهٔ صلح به عهدهٔ پارلمان نروژ است). وظیفهٔ کمیته‌ها، مقدماتی و مشورتی است و هر یک از کمیته‌ها می‌توانند متخصصینی از ملیتهای مختلف را برای شور و مذاکره دعوت کنند.

اشخاص یا مؤسسه‌هایی که می‌توانند معرف نامزدهای جوایز باشند، عبارتند از : برندگان سابق جوایز نوبل (در رشته‌ای که برای آن جایزه گرفته‌اند) ـ اعضای هیأتها و کمیته‌های جوایز (در رشتهٔ مربوط) ـ استادان برجستهٔ دانشگاهها ـ اشخاصی که توسط اعطاکنندگان جوایز انتخاب می‌شوند ـ رئیس بنگاه مخصوص چاپ آثار کاندیداها (برای جایزهٔ ادبیات) ـ اعضای تازه‌ای از سازمانهای پارلمانی یا حقوقی بین‌المللی (برای جایزهٔ صلح) ـ اعضای پارلمانها و کابینه‌ها (برای جایزهٔ صلح).

در اول فوریهٔ هر سال کمیته‌ها در پشت درهای بسته مشغول مطالعهٔ دقیق پیشنهادهای رسیده می‌شوند و تا پایان کار خود و اخذ تصمیم نهایی، فعالیتها و نظریات خود را مسکوت می‌گذارند و در پایان، به طور مختصر علت و حقانیت انتخاب خود را اعلام می‌دارند (مگر در مورد برندهٔ جایزهٔ صلح).

هر یک از جوایز نوبل ممکن است به یک نفر یا مشترکاً به چند نفر (با ملیتهای مختلف) اعطا گردد.

جوایز پنج گانه همه ساله طی مراسم باشکوهی در تاریخ دهم دسامبر در استکهلم برگزار می‌شود. برندگان جوایز حتی‌المقدور به استکهلم می‌روند و مدال و دیپلم و مبلغ جایزه را شخصاً از دست پادشاه سوئد دریافت می‌دارند. در مراسم مزبور هر یک از برندگان سخنرانیهایی ایراد می‌نمایند.

بعضی برندگان ممکن است از دریافت جایزه خودداری کنند و یا اینکه در شرایطی باشند که نتوانند آن را دریافت نمایند. در این مورد مبلغ جایزه تا اول اکتبر سال بعد

نگاهداری می‌شود و بعد از آن به حساب صرفه‌جوییهای مؤسسهٔ نوبل منظور شده موجب افزایش مبلغ جوایز سالهای بعد می‌شود.

در مقالهٔ امیر مقتدر چندین معما به صورت داستان آمده است. یکی از معماها با نام **پیش‌بینی روز اعدام**[۲] به صورت زیر است:

عبدالکاظم قرصی نان دزدیده بود، و به خاطر همین ، وزیر وی را به اعدام محکوم کرده بود.

از دیر زمانی ، وزیر می‌کوشید که عبدالکاظم را از راه خود بردارد و حالا این بهانهٔ کوچک را غنیمت شمرده بود. اما یک موضوع اسباب تأسف وزیر بود: طبق قانون ؛ هر محکوم در آخرین مرحله، و فقط در همان روز اجرای حکم، حق داشت که از حضور امیر تقاضای استیناف بنماید. اعتقاد به اینکه **امیرابن الخوض** حکم را فسخ خواهد کرد، وزیر را واداشت که نقشهٔ ماهرانه‌ای طرح کند ؛ وی در حضور عبدالکاظم تعلیمات لازم را به نگهبان داد. بنابه این تعلیمات ، هفتهٔ اجرای حکم، صراحتاً معلوم شده بود، اما نگهبان ملزم بود که روز اعدام را بر عبدالکاظم فاش نکند.

وزیر، باز هم در حضور عبدالکاظم ، به نگهبان گفت:

برای انتخاب روز اعدام ، شخصاً تصمیم خواهید گرفت، مشروط بر آنکه ، وی نتواند آن را پیش‌بینی کند، باید که کاملاً غافلگیر شود. هر روز صبح، شخصاً صبحانه عبدالکاظم را برایش می‌برید. چنانچه، در روزی که برای اعدام در نظر گرفته‌اید ، هنگام صبحانه، به شما اظهار داشت و با دلایلی منطقی ثابت کرد که در آن روز هلاک می‌شود، آن وقت ، موظف خواهید بود که اجازه دهید، وی از حضور امیر تمنای مرحمت بنماید . اما، اگر وی آن فراست را نداشت که به هنگام صبحانهٔ روز مورد نظر، از اعدام خود در آن روز ، خبر دهد، حق استیناف را از دست می‌دهد و بعد از ظهر آن روز، اعدامش می‌کنید.

وزیر از آنجا رفت و عبدالکاظم و نگهبان را با افکار خود تنها گذاشت. هر کدام فکر خود را به کار انداخته بود و می‌کوشید هوش خود را بیازماید تا دریابد احتمال وقوع امر در کدام روز از آن هفته بیشتر است. برای نگهبان ، مسئله بغرنجتر بود چون می‌بایست قبلاً روز اعدام را تعیین کرده و مقدمات کار را فراهم کند.

حقیقت از این قرار بود که وزیر خواسته بود با پیش آوردن یک چنین شرط شوم و شگفت‌آور، عبدالکاظم را از حق استیناف محروم سازد.

امیرزادهٔ جوان از این امر خلاف اخلاق آگاه شد و پدر را از آن باخبر کرد.

امیر نگهبان را احضار کرده و به وی گفت:

شنیده‌ام که وزیر، عبدالکاظم را محکوم به اعدام کرده است و حکم را به نحوی تنظیم نموده است که امکان درخواست استیناف را از عبدالکاظم سلب می‌کند. آیا حقیقت دارد؟

نگهبان جواب داد :

صحیح است، ای امیر بزرگ ، اما استدعا می‌کنم که باور بفرمایید، من مداخله‌ای نداشته‌ام، من شخصاً نسبت به عبدالکاظم کمال تأثر را دارم و چنانچه مفید به حال وی باشم، بی‌اندازه خوشحال خواهم بود، اما چه کنم که از من چاره‌ای برنمی‌آید.

امیر گفت :

باشد، اینطور می‌فهمم که تو، خیلی درس خوانده‌ای.

زیاد نه، ای امیر، تحصیلات معمولی را گذرانده‌ام، موقعی که محصل بودم، منطق را خیلی دوست می‌داشتم و هنوز هم مایلم که دنبال تحصیل آن را بگیرم.

کاملاً مهم است، آیا اصل استدلال استقرایی را بلد هستی؟

بلی ، ای امیر.

فعلاً این موضوع را کنار بگذاریم، و به کار عبدالکاظم بیچاره بپردازیم. آیا تاکنون دربارهٔ تعیین روز اعدام، تصمیم گرفته‌ای؟

هنوز نه، در فکر آن هستم .

آنچه معلوم است و من فهمیدم، تو باید او را در روزی از آن هفتهٔ معین، که با شنبه شروع می‌شود و به جمعه پایان می‌یابد، اعدام کنی. خواهش من آن است که، چنانچه ممکن است، جمعه را برای این کار انتخاب کنی؟

نگهبان بعد از کمی فکر، با قطعیت جواب داد :

نه ، مقدورم نیست، شما می‌دانید که عبدالکاظم خیلی باهوش است. او همهٔ شرایط قید شده در حکم را می‌داند و از

این جهت وقتی که تا صبح جمعه زنده باشد، هنگام بردن صبحانه، به من خواهد گفت: «نگهبان ، می‌دانم که تصمیم داری امروز مرا اعدام کنی، برای آنکه، امروز آخرین روزی است که می‌توانی حکم را اجرا کنی.»

نگهبان ادامه داد ؛ و این عین واقع خواهد بود، وقتی که پنج شنبه گذشت و او هنوز زنده بود ، جمعه آخرین روزی است که می‌توانم وی را اعدام کنم، و وقوع اعدام در آن روز واضح خواهد بود، و او استیناف خواهد خواست.

امیراندیشمند گفت :

به این امر به خوبی واقفم که تو و او هر دو می‌دانید که بنابر مدلول حکم، وقوع اعدام در روز جمعه غیرممکن است.

همین‌طور است. من فقط می‌توانم عبدالکاظم را در یکی از روزهای از شنبه تا پنج‌شنبه اعدام کنم، جمعه مستثنی است.

بنابراین هم تو و هم عبدالکاظم ، جمعه را کنار گذاشته‌اید و تو بجز در یکی از روزهای شنبه تا پنج‌شنبه، نمی‌توانی او را اعدام بنمایی. پنج‌شنبه آخرین روز ممکن است، اگر، میسر است، پنج‌شنبه را برای اجرای حکم انتخاب کن؟

نگهبان ، بعد از مدتی فکر جواب داد :

محققاً نه ، عبدالکاظم و من، هر دو می‌دانیم که پنج‌شنبه آخرین‌روزممکن‌برای انجام اعدام می‌باشد. بنابراین چنانچه، تا صبح پنج‌شنبه ، عبدالکاظم زنده مانده باشد، در آن صبح، وقتی که نزدش برسم، برایم توضیح خواهد داد که در آن روز کشته می‌شود.

لابد خواهی گفت: عبدالکاظم را نمی‌توانی اعدام کنی مگر در یکی از روزهای شنبه تا چهارشنبه ، و او هم این را می‌داند.

کاملاً همین‌طور است.

اگر چنین است و چهارشنبه آخرین روزی می‌تواند باشد که عبدالکاظم باید اعدام شود، آیا نمی‌توانیم به همان ترتیب ثابت کنیم که، چهارشنبه را هم باید کنار بگذاریم؟

نگهبان ، در کمال بهت و تعجب گفت:

کاملاً صحیح است، و این موضوع ما را دلالت می‌کند براینکه سه‌شنبه آخرین روز ممکن می‌باشد، و سه‌شنبه‌هم باید از دور حذف شود و به دنبال آن، روزهای دیگر هفته نیز حذف خواهد شد و بنابراین اجرای اعدام غیرممکن می‌باشد.

«این نوعی مورد استفادهٔ مستقیم از اصل استدلال ترجیعی (استقراء ریاضی) است ؛ ما ثابت کرده‌ایم که آخرین روز ممکن برای اجرای حکم، خودبه خود ، غیرممکن می‌باشد.»

امیر خنده کنان گفت :

بلی، این امر به ما کمک می‌کند که ثابت کنیم که اجرای اعدام غیرممکن است، و این مشیتی است که این چنین خواسته است. خوشبختانه تو و عبدالکاظم یکی از دیگری باهوشترید. چنانچه یکی از شما دو نفر فهم قضیه را نداشت، کار به این آسانی پیش نمی‌رفت.

* * *

۱ . یکان سال ، فروردین ۱۳۴۴.

۲ . مرجع پیشین.

ادب ریاضی

قضاوت گاوس در مورد رسالهٔ دکتری ددکیند که در بیست و یک سالگی راجع به انتگرالهای اویلر به سال ۱۸۵۲ میلادی نوشته است:

«اثری که به وسیلهٔ آقای ددکیند عرضه شده است تجسسی دربارهٔ حساب انتگرالها می‌باشد که به هیچ وجه موضوع عادی و پیش‌پا افتاده‌ای نیست. منصف مزبور نه فقط نشان می‌دهد که اطلاعات بسیار در موضوع مورد بحث دارد بلکه نشانه‌هایی از فکر مستقل در اثر او دیده می‌شود که برای تجسسهای آیندهٔ وی نویدهای درخشان می‌دهد. من این اثر را برای پذیرفته شدن در امتحان کاملاً رضایتبخش می‌یابم.»

ریاضی‌دانان نامی، اریک تمپل بل

حسن صفاری

دستگاه، محورهای مختصات

فصل سوم از کتاب: ریاضیات (۲ و ۱) نظام جدید قسمت دوّم

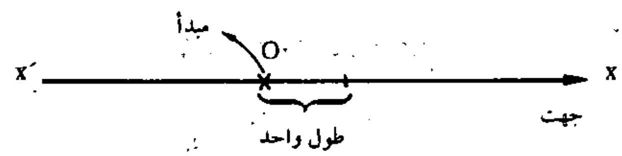
◆ احمد قندهاری

۱ - ۱ تعریف محور

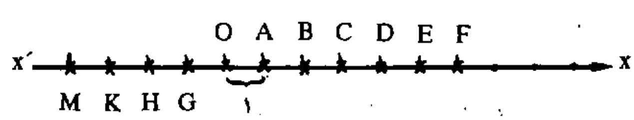
خطّی است جهت‌دار که در روی آن نقطه‌ای به‌نام مبدأ و طولی به‌نام واحد اندازه‌گیری در نظر گرفته شده باشد.

پس یک محور، سه مشخصه دارد:

۱- جهت، ۲- نقطه‌ای به‌نام مبدأ، ۳- طولی به‌نام واحد.



محور زیر را با نقاط روی آن در نظر می‌گیریم.



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$\overline{OA} = +۱$ $\quad$ $\overline{OF} = +۶$

$\overline{OB} = +۲$ $\quad$ $\overline{OG} = -۱$

$\overline{OC} = +۳$ $\quad$ $\overline{OH} = -۲$

$\overline{OD} = +۴$ $\quad$ $\overline{OK} = -۳$

$\overline{OE} = +۵$ $\quad$ $\overline{OM} = -۴$

بنا به تعریف $\overline{OA}$ را x_A، $\overline{OB}$ را x_B، $\overline{OC}$ را x_c و... می‌نامیم. پس:

$x_A = +۱$ $\quad$ $x_F = +۶$

$x_B = +۲$ $\quad$ $x_G = -۱$

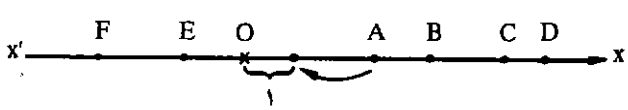
$x_C = +۳$ $\quad$ $x_H = -۲$

$x_D = +۴$ $\quad$ $x_K = -۳$

$x_E = +۵$ $\quad$ $x_M = -۴$

توجه: محورهای فوق را $x'ox$ می‌نامیم.

محور زیر را در نظر می‌گیریم.



می‌توان نوشت:

$\overline{OA} = x_A$ $\quad$ $\overline{OD} = x_D$

$\overline{OB} = x_B$ $\quad$ $\overline{OE} = x_E$

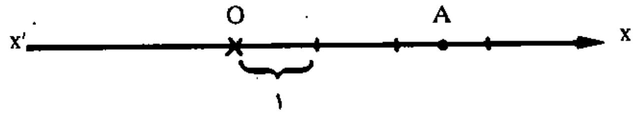
$\overline{OC} = x_C$ $\quad$ $\overline{OF} = x_F$

پس هر نقطه که روی محور $x'ox$ واقع باشد دارای (x) ای است. این x را در اصطلاح طول نقطه گوییم.

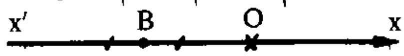
بنابراین؛ هر نقطه که روی محور ($x'ox$) باشد، دارای طول است که این طول یک عدد حقیقی است. و برعکس هر عدد حقیقی می‌تواند یک نقطه را روی محور نشان دهد که طول آن نقطه برابر همان عدد حقیقی است.

مثلاً روی محور

$x_A = +۲/۵$



و اگر عدد $(-\frac{۳}{۲})$ را در نظر بگیریم می‌توانیم بگوییم که این عدد نقطه‌ای مانند B را روی

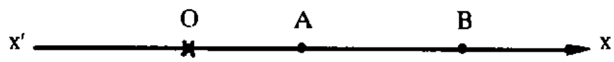


مشخص می‌کند.

۲ـ۱ اندازهٔ جبری پاره‌خط AB [1]

اندازهٔ جبری پاره‌خط AB را نماد $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم و طول پاره‌خط AB را با AB نشان می‌دهیم یعنی: $|\overline{AB}| = AB$.

فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B روی محور (x'ox) شکل زیر داشته باشیم.



می‌توانیم بنویسیم:

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

$$\Rightarrow x_A+\overline{AB}=x_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{AB}=x_B-x_A}$$

مثال: اگر $x_A=۲$ و $x_B=۵$ باشد، اندازهٔ جبری $\overline{AB}$ را بیابید.

$$\overline{AB}=x_B-x_A$$

$$\overline{AB}=۵-۲$$

$$\boxed{\overline{AB}=+۳}$$

مثال: اگر $\overline{AB}=۵$ و $x_B=۷$ ، طول نقطهٔ A رابیابید.

$$\overline{AB}=x_B-x_A$$

$$۵=۷-x_A \Rightarrow +x_A=۷-۵ \Rightarrow \boxed{x_A=۲}$$

۳ـ۱ طول نقطهٔ C وسط AB

فرض می‌کنیم نقطهٔ C وسط AB روی محور



باشد داریم: $\overline{AC}=\overline{CB}$.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}\\ \overline{OC}=\overline{OB}-\overline{CB}\end{cases}$$

جمع می‌کنیم $\Rightarrow ۲\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}$

$$\Rightarrow \overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{۲} \Rightarrow \boxed{x_c=\frac{x_A+x_B}{۲}}$$

مثال: اگر $x_A=۵$ و $x_B=-۷$ ، آنگاه طول نقطه C وسط AB چقدر است؟

$$x_c=\frac{x_A+x_B}{۲} \Rightarrow x_c=\frac{۵-۷}{۲} \Rightarrow \boxed{x_c=-۱}$$

مساله: اگر نقطهٔ C وسط AB باشد و داشته باشیم $x_C=۴$ و $\overline{AB}=۱۰$، x_A و x_B را بیابید.

حل:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{۲} \Rightarrow ۴=\frac{x_A+x_B}{۲} \Rightarrow \boxed{x_A+x_B=۸}$$

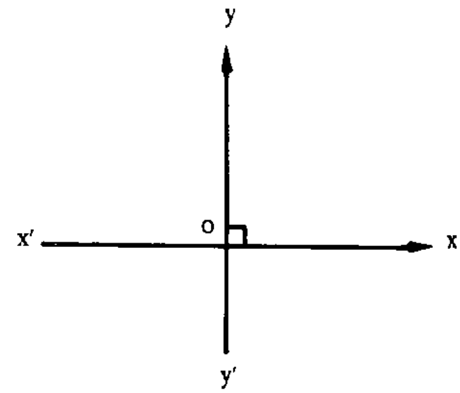
$$\overline{AB}=x_B-x_A \Rightarrow ۱۰=x_B-x_A \Rightarrow \boxed{x_B-x_A=۱۰}$$

$$\begin{cases}x_A+x_B=۸\\ x_B-x_A=۱۰\end{cases} \overset{\text{جمع می‌کنیم}}{\Rightarrow} ۲x_B=۱۸ \Rightarrow \boxed{x_B=۹}$$

$$x_A+x_B=۸ \Rightarrow x_A+۹=۸ \Rightarrow \boxed{x_A=-۱}$$

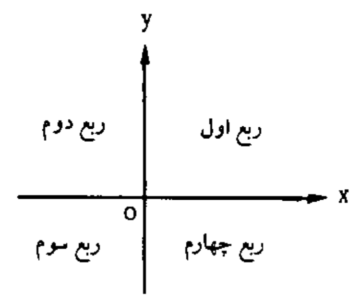
۴ـ۱ صفحه محورهای مختصّات:

هرگاه دو محور x'ox و y'oy در نقطهٔ O بر یکدیگر عمود باشند، آنها را محورهای مختصات یا صفحه محورهای مختصات گوییم. معمولاً محور x'ox را افقی (موازی سطرهای همین مجله برهان) رسم می‌کنیم.



محور x′ox را محور xها یا محور طولها و محور y′oy را محور yها یا محور عرضها گوییم. این دو محور را به صورت (xoy) نشان می‌دهیم.

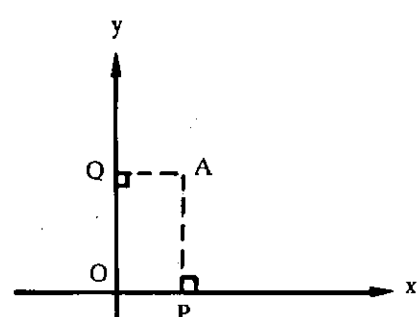
این دو محور صفحهٔ کتاب یا دفتر را به چهار ناحیه یا چهار ربع تقسیم می‌کند که به ربع اوّل، ربع دوم، ربع سوم و ربع چهارم معروف است.



هر نقطه که در صفحهٔ محورهای مختصات واقع باشد، دارای طول و عرض است. و برعکس هر نقطه که دارای طول و عرض باشد، یک نقطه از صفحه محورهای مختصات را مشخّص می‌کند. اگر نقطه‌ای، مانند: A در صفحهٔ محورها داشته باشیم. چنانچه از نقطهٔ A عمودی برمحور xها رسم کنیم و پای عمود را P بنامیم داریم:

$\overline{OP}=x_A$ (شکل زیر)

و اگر از نقطه A خطی بر محور yها عمود کنیم و پای عمود را Q بنامیم، داریم: $\overline{OQ}=y_A$ (شکل زیر)



طول و عرض نقطهٔ A را مختصات نقطه A گوییم. اگر طول A مساوی (۳) و عرض A مساوی (۲) باشد، می‌نویسیم:

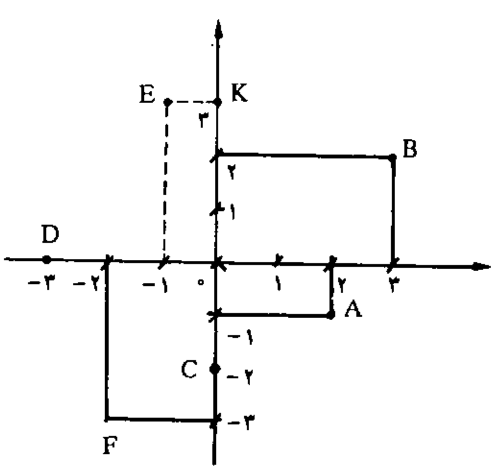
$$A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right. \text{ یا } A(۳,۲) \text{ یا } A=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$$

اگر $A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ باشد و بخواهیم جای نقطهٔ A را در صفحه محورهای مختصات مشخص کنیم، باید در روی محور x ها (۳) واحد مثبت جدا کنیم و در روی محور y ها (۲) واحد مثبت جدا کنیم، از این نقاط خطوطی عمود بر محورها رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این دو عمود، نقطهٔ A را نشان می‌دهد.

توجه: هر نقطه که روی محور x ها باشد، عرض آن صفر است مانند: $A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$

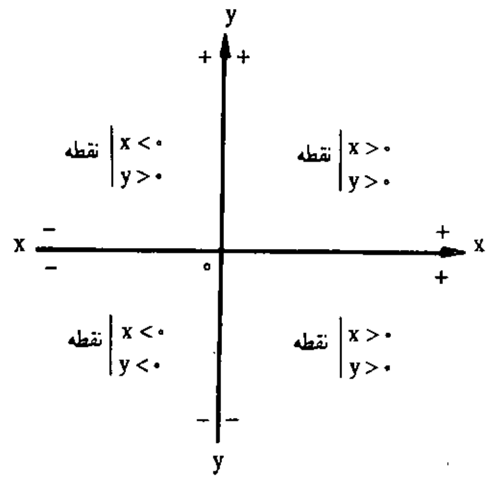
و هر نقطه که روی محور yها باشد، طول آن صفر است مانند: $B\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$

مثال: جای نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $E\left|\begin{matrix}-۱\\۳\end{matrix}\right.$ و $F\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$ و $K\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ را در صفحه محورهای مختصات مشخص کنید.

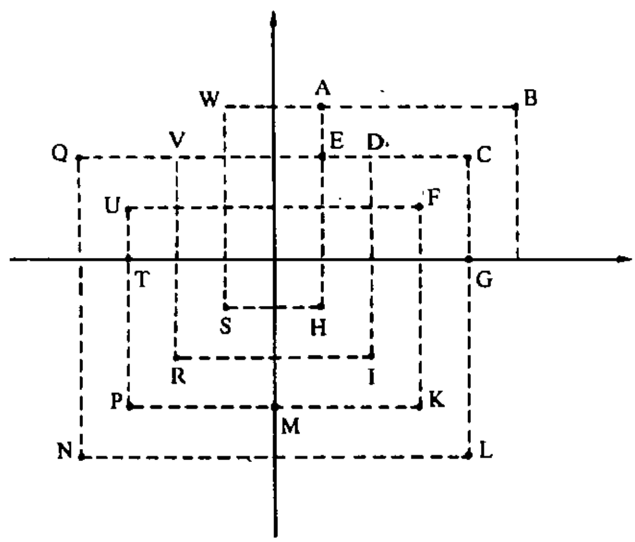


به دستگاه مختصات زیر توجه کنید.

مثبت و منفی بودن مختصات یک نقطه در چهار ربع مشخص است.



تمرین: مختصات نقاط شکل زیر را بنویسید:



مساله: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲m-۶\\ m-۲\end{matrix}\right.$ مفروض است. m را چنان بیابید تا

اولاً: نقطهٔ A روی محور xها باشد.

ثانیاً: نقطهٔ A روی محور yها باشد.

ثالثاً: نقطهٔ A در ربع اوّل باشد.

رابعاً: نقطهٔ A در ربع دوّم باشد.

خامساً: نقطهٔ A در ربع سوّم باشد.

سادساً: نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

اوّلاً: $y_A=۰ \Rightarrow m-۲=۰ \Rightarrow m=۲$

ثانیاً: $x_A=۰ \Rightarrow ۲m-۶=۰ \Rightarrow m=۳$

ثالثاً: $\begin{cases}x_A>۰\\ y_A>۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۶>۰\\ m-۲>۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m>۳\\ m>۲\end{cases} \Rightarrow m>۳$

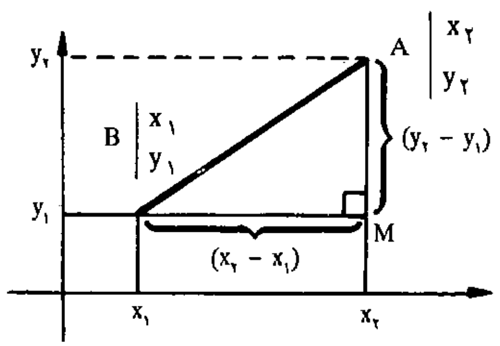
رابعاً: $\begin{cases}x_A<۰\\ y_A>۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۶<۰\\ m-۲>۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m<۳\\ m>۲\end{cases} \Rightarrow ۲<m<۳$

خامساً: $\begin{cases}x_A<۰\\ y_A<۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۶<۰\\ m-۲<۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m<۳\\ m<۲\end{cases} \Rightarrow m<۲$

سادساً: $\begin{cases}x_A>۰\\ y_A<۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۶>۰\\ m-۲<۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m>۳\\ m<۲\end{cases}$ غیرممکن

۵ـ۱ طول پاره‌خط AB

شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AMB}$ می‌توان نوشت:

$$AB^۲ = BM^۲ + AM^۲$$

$$AB = \sqrt{BM^۲ + AM^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}۵\\ ۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۱\\ -۲\end{matrix}\right.$ باشد. مطلوب است تعیین طول پاره‌خط AB.

$A\left|\begin{matrix}۵=x_۲\\ ۱=y_۲\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}۱=x_۱\\ -۲=y_۲\end{matrix}\right.$

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} = \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۱+۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} \Rightarrow AB = ۵$$

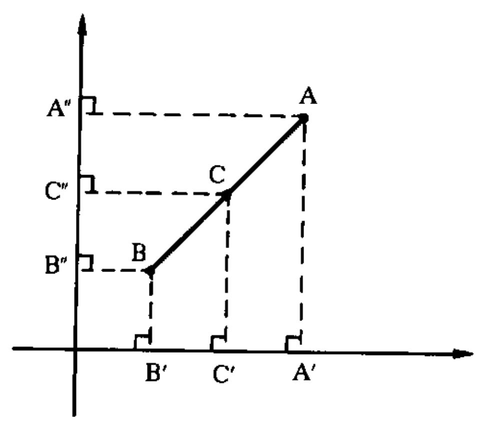
مثال: نقطهٔ A به طول (٦) روی محور xها و نقطهٔ B به عرض (٨) روی محور yها واقع است. طول پاره‌خط AB را بیابید.

$$A\left|\begin{matrix}6=x_2\\0=y_2\end{matrix}\right.\qquad B\left|\begin{matrix}0=x_1\\8=y_1\end{matrix}\right.$$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-0)^2+(0-8)^2}$$
$$=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

٦ـ ۱ مختصات نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB

شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ C وسط AB است.



چون نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است. بسادگی ثابت می‌شود که C′ وسط A′B′ و C″ وسط A″B″ است.

$$\Rightarrow x_{C'}=\frac{x_{A'}+x_{B'}}{2}\Rightarrow \boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{2}}$$

$$y_{C''}=\frac{y_{A''}+y_{A''}}{2}\Rightarrow \boxed{y_C=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

مثال: اگر $A\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$ باشد، مختصات نقطهٔ C وسط AB را بیابید.

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+4}{2}=3$$
$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+3}{2}=4\qquad\Rightarrow C\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$$

مثال: اگر $M\left|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$ نقطهٔ وسط پاره‌خط KF باشد، به‌طوری‌که $K\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$، آنگاه مختصات نقطهٔ F را بیابید.

$$x_M=\frac{x_K+x_F}{2}\Rightarrow 1=\frac{0+x_F}{2}\Rightarrow x_F=2$$

$$y_M=\frac{y_K+y_F}{2}\Rightarrow 4=\frac{3+y_F}{2}\Rightarrow 3+y_F=8$$

$$\Rightarrow y_F=5\Rightarrow F\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$$

تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-2m+6\\-m+1\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات xoy مفروض است. m را چنان بیابید که اوّلاً: نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد. ثانیاً: نقطهٔ A در ربع اوّل باشد. ثالثاً: نقطهٔ A در ربع دوّم باشد. رابعاً: نقطهٔ A در ربع سوم باشد. خامساً: نقطهٔ A در ربع چهارم باشد.

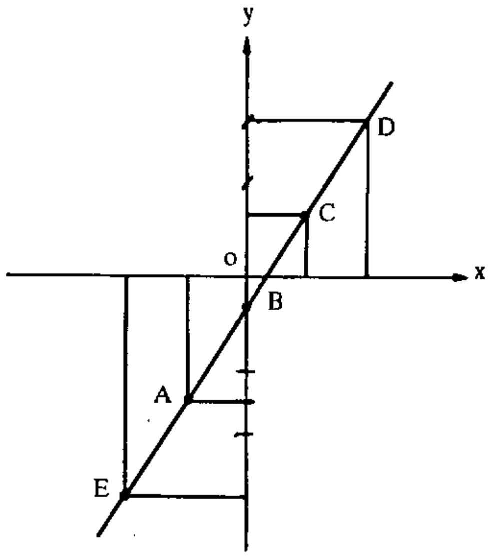
تمرین: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}m^2-5m+4\\m^2-3m+2\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض است. m را چنان بیابید تا اوّلاً: نقطهٔ A روی محور xها باشد. ثانیاً: نقطهٔ A روی محور yها باشد. ثالثاً: نقطهٔ A روی مبدأ مختصات باشد. رابعاً: نقطهٔ A به یک فاصله از دو محور باشد.

۷ـ ۱ معادلهٔ خط

هر رابطه درجهٔ اوّل بین x و y مانند: $y = 2x - 1$ و $y = x + 2$ و $2x + 4y = 8$ را معادلهٔ خط گویند.

ممکن‌است معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + n$ یا $ax + by + c = 0$ باشد که m، n، a، b، c، اعداد حقیقی‌اند (a و b و c با هم صفر نیستند). حال می‌خواهیم خط $y = 2x - 1$ را رسم کنیم. به x چند عدد دلخواه نسبت می‌دهیم و y آنها را پیدا می‌کنیم. زوج مرتبهایی به دست می‌آید که هر کدام مختصات یک نقطه متعلق به خط است. جای این نقاط را در صفحهٔ محورها مشخص می‌کنیم. سپس آنها را به هم وصل می‌کنیم.

x	y	(x,y)
−۱	−۳	(−۳ و −۱) : A
۰	−۱	(−۱ و ۰) : B
۱	۱	(۱ و ۱) : C
۲	۳	(۳ و ۲) : D
−۲	−۵	(−۵ و −۲) : E



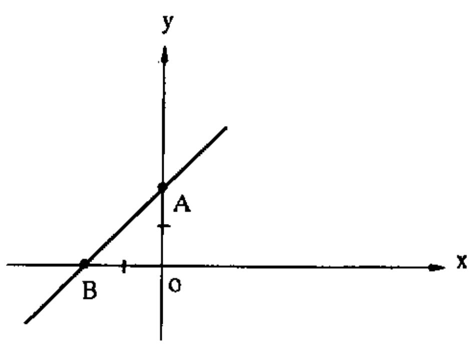
توجه:

برای رسم یک خط کافی است دو نقطه از آن را پیدا کنیم. سپس جای این دو نقطه را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و آنها را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

مثال: خط $y = x + ۲$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰$ و $۲)$

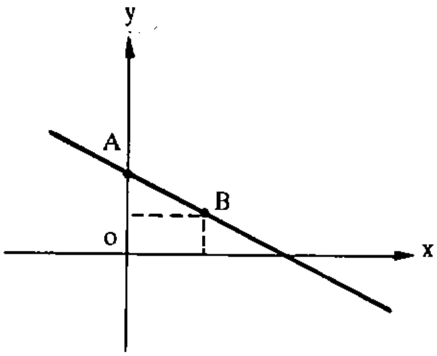
$x = -۲ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(-۲$ و $۰)$



مثال: خط $۲x + ۴y = ۸$ را رسم کنید.

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow A(۰$ و $۲)$

$x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow B(۲$ و $۱)$

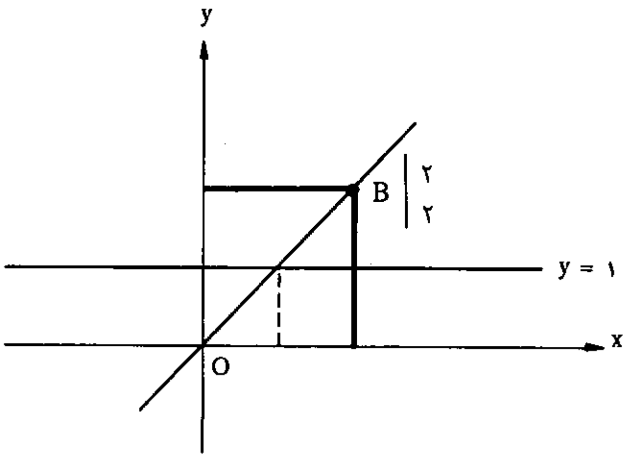


مثال: نمودار $xy - y^۲ - x + y = ۰$ را رسم کنید.

$xy - y^۲ - x + y = ۰$

$y(x - y) - (x - y) = ۰$

$(x - y)(y - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = ۱ \end{cases}$ یا $\Rightarrow O \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix} \right.$



۸ـ۱ شیب یک خط

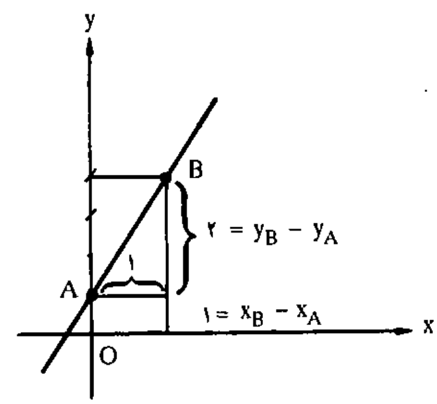
بنا به تعریف $\frac{\text{تفاضل عرضهای دو نقطه از خط}}{\text{تفاضل طولهای‌همان دو نقطه}}$ را شیب خط گوییم.

مثال: شیب خط $y = ۲x + ۱$ را بیابید:

$x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right.$

$x = ۱ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow B \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۳ \end{matrix} \right.$

$$\text{شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳-۱}{۱-۰} = \frac{۲}{۱} = ۲$$



تمرین: شیب خطهای زیر را بیابید:

$y = ۴x + ۱$

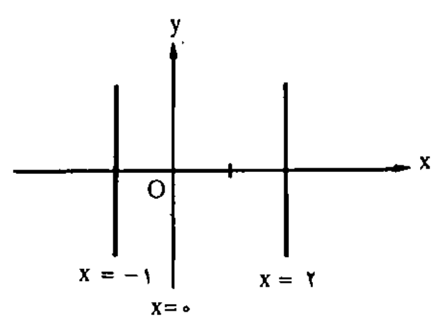
$y = \frac{۱}{۲}x - ۵$

$y = -x$

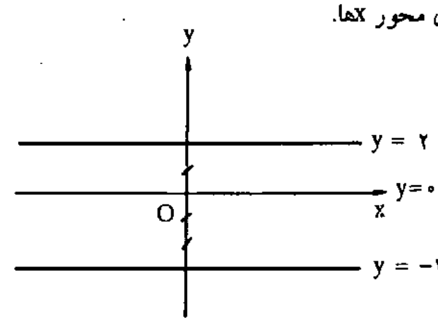
۹ـ۱ انواع خط

خط نوع اول: به‌صورت $x = a$ است مانند $x = ۲$، $x=۰$، $x = -۱$. شیب این خطها تعریف نشده است و نمودار آنها راستایی است عمود بر محور xها.

مثال: خطهای $x = ۲$ و $x=۰$ و $x = -۱$ را رسم کنید.



خط نوع دوم: به صورت $y = b$ است مانند: $y = ۲$ ، $y=۰$ ، $y = -۳$. شیب این خطها صفر است ونمودار آنها راستایی است موازی محور xها.



مثال: خطهای $y = ۲$ و $y=۰$ و $y = -۳$ را رسم کنید.

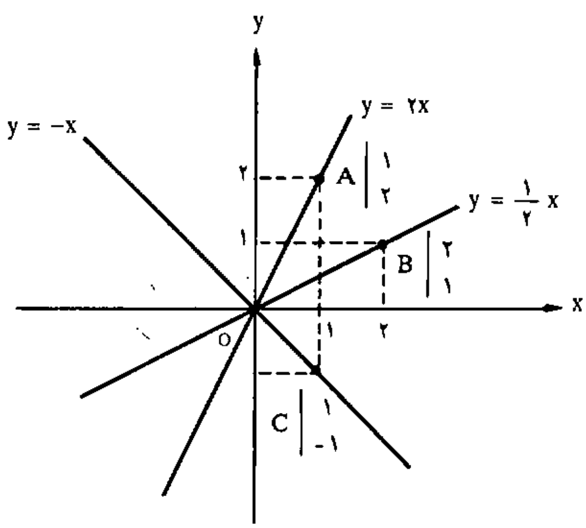
خط نوع سوم: به‌صورت $y = mx$ است، مانند: $y = ۲x$ و $y = -x$ و $y = \frac{۱}{۲}x$.

شیب این خطها عدد (m) است. برای رسم این خطها یک نقطه از خط را پیدا می‌کنیم سپس آن را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

$y = ۲x \quad A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$

$y = -x \quad C\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$

$y = \frac{۱}{۲}x \quad B\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$



خط نوع چهارم: به‌صورت $y = mx + n$ است، مانند: $y = ۲x + ۲$، $y = -x + ۳$، $y = x - ۱$.

شیب این خطها هم عدد (m) است.

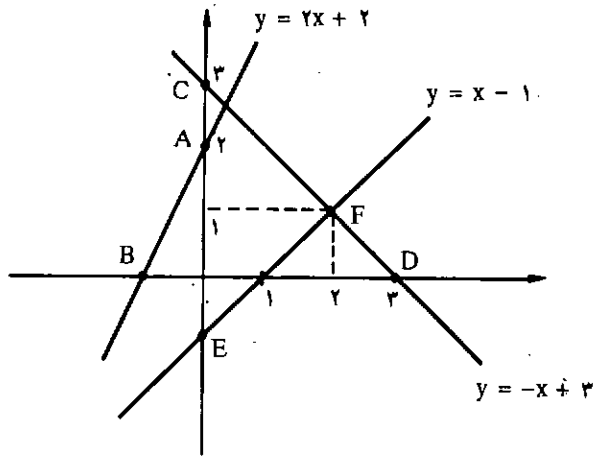
برای رسم آنها باید مختصات دو نقطهٔ آنها را پیدا کرد سپس آنها را به هم وصل کرد و امتداد داد.

مثال: سه خط فوق را رسم کنید.

$y = ۲x + ۲ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$

$y = -x + ۳ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right. \quad D\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$

$y = x - ۱ \Rightarrow E \left| \begin{array}{l} ۰ \\ -۱ \end{array} \right. \qquad F \left| \begin{array}{l} +۲ \\ ۱ \end{array} \right.$



توجه: اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = ۰$، آنگاه شیب خط $(-\frac{a}{b})$ است.

۱۰ ـ ۱ مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط

در شکل فوق نقطهٔ $F \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۱ \end{array} \right.$ نقطهٔ تقاطع دو خط $y = -x + ۳$ و $y = x - ۱$ است. برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط، معادلات آنها را مانند دستگاه دو معادله دو مجهولی حل می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y = -x + ۳$ و $y = x - ۱$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y = -x + ۳ \\ y = x - ۱ \end{cases} \Rightarrow x - ۱ = -x + ۳$$

$$\Rightarrow x + x = ۳ + ۱ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow \boxed{x = ۲}$$

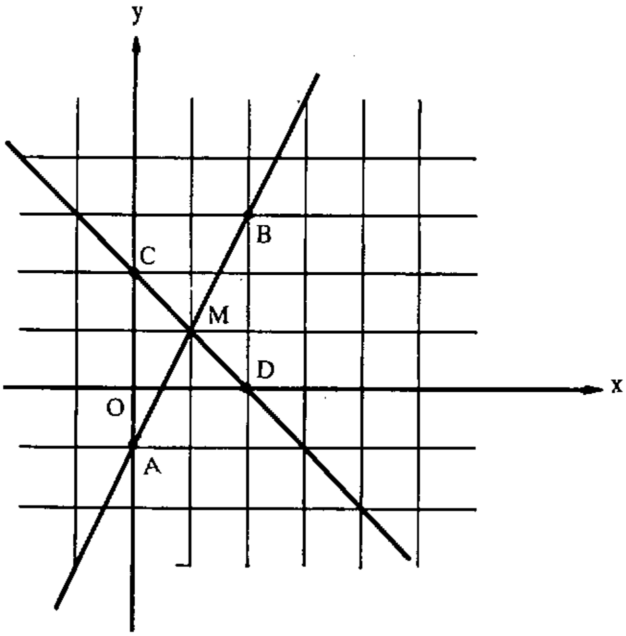
$$y = x - ۱ \Rightarrow y = ۲ - ۱ \Rightarrow \boxed{y = ۱}$$

$$\Rightarrow F \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۱ \end{array} \right.$$ مختصات نقطه تقاطع دو خط است

اگر بخواهیم، مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط را به وسیلهٔ رسم پیدا کنیم باید نمودارهای خط را در یک صفحه شطرنجی (اگر دقیقتر بخواهیم باید در یک صفحهٔ میلیمتری) رسم کنیم سپس مختصات نقطهٔ تقاطع آنها در شکل دیده می‌شود. مانند مثال زیر:

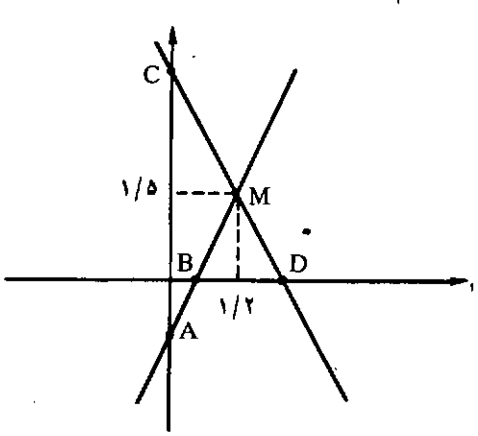
مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط زیر را به کمک شکل بیابید:

$$\begin{cases} y = ۲x - ۱ & \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ -۱ \end{array} \right. , \quad B \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۳ \end{array} \right. \\ y = -x + ۲ & \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} ۰ \\ ۲ \end{array} \right. , \quad D \left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۰ \end{array} \right. \end{cases}$$



به‌طوری که در نمودار مشخص شده است نقطهٔ M نقطهٔ تقاطع آنهاست که مختصات آن (۱ و ۱) است پس: $M \left| \begin{array}{l} ۱ \\ ۱ \end{array} \right.$.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط $y = ۲x - ۱$ و $y = -۲x + ۴$ را به روش ترسیم بیابید.



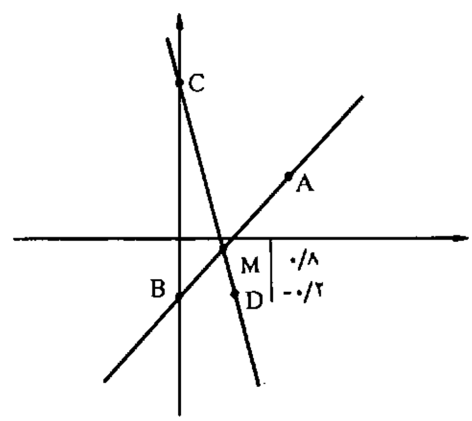
$$y = ۲x - ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} ۰ \\ -۱ \end{array} \right. \\ y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow B \left| \begin{array}{l} \frac{۱}{۲} \\ ۰ \end{array} \right. \end{cases}$$

$$y = -۲x + ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow C \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۴ \end{matrix}\right. \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow D \left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right. \end{cases}$$

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط به معادلات $y = x - ۱$ و $y = -۴x + ۳$ را بیابید.

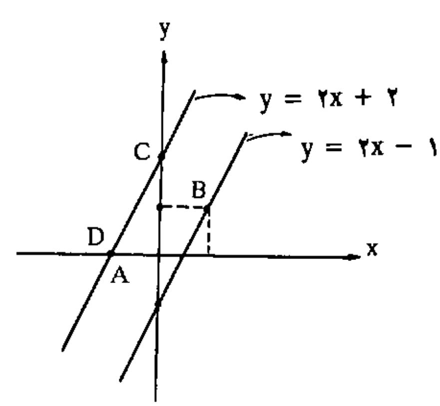
$$y = x - ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow A \left|\begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix}\right. \\ x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow B \left|\begin{matrix} ۰ \\ -۱ \end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$y = -۴x + ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow C \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۳ \end{matrix}\right. \\ x = ۱ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow D \left|\begin{matrix} ۱ \\ -۱ \end{matrix}\right. \end{cases}$$



۱۱ ـ ۱ مطالبی درباره شیبهای دو خط

۱ـ اگر شیبهای دو خط برابرباشند، آنگاه آن دو خط موازیند و نقطهٔ تقاطع ندارند، مانند دو خط: $y = ۲x - ۱$ و $y = ۲x + ۲$.



$$y = ۲x - ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow A(۰, -۱) \\ x = ۱ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow B(۱, ۱) \end{cases}$$

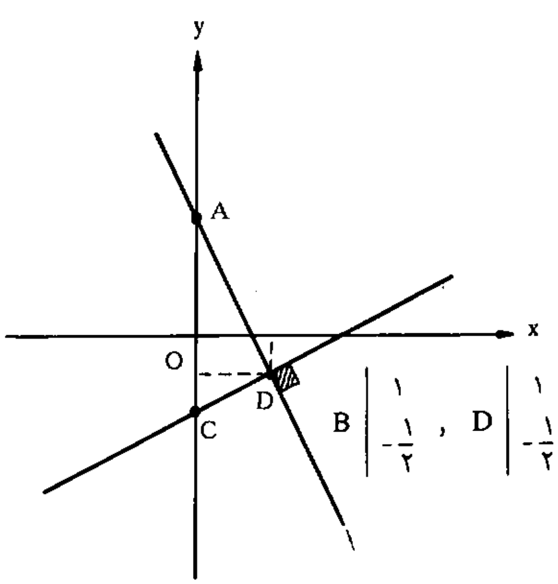
$$y = ۲x + ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow C(۰, ۲) \\ x = -۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow D(-۱, ۰) \end{cases}$$

۲ـ اگر شیبهای دو خط عکس یکدیگر باشند، ولی علامتهای آنها یکی مثبت و دیگری منفی باشند، آنگاه دو خط بر هم عمودند و یک نقطهٔ تقاطع دارند (دو خط در نقطه تقاطع بر هم عمودند).

مثال: دو خط $y = -۲x + \frac{۱}{۲}$ و $y = \frac{۱}{۲}x - ۱$ بر هم عمودند، زیرا شیب اوّلی ۲− و شیب دومی $(\frac{۱}{۲})$ است.

$$y = -۲x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \Rightarrow A(۰, \frac{۳}{۲}) \\ x = ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow B(۱, -\frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

$$y = \frac{۱}{۲}x - ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow C(۰, -۱) \\ x = ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D(۱, -\frac{۱}{۲}) \end{cases}$$



به‌طوری که ملاحظه می‌شود نقطهٔ D و نقطهٔ B هر دو یکی هستند و مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط است.

۳ـ اگر شیبهای دو خط مساوی نباشند:

دو خط متقاطعند. (چنانچه شیبهای دو خط عکس یکدیگر با

علامت مخالف باشند هم متقاطعند و هم بر هم عمودند). مانند دو خط $y = x - ۳$ و $y = -۲x$ که متقاطعند.

محاسبهٔ نقطهٔ تقاطع دو خط

$$\begin{cases} y = x - ۳ \\ y = -۲x \end{cases} \Rightarrow x - ۳ = -۲x$$

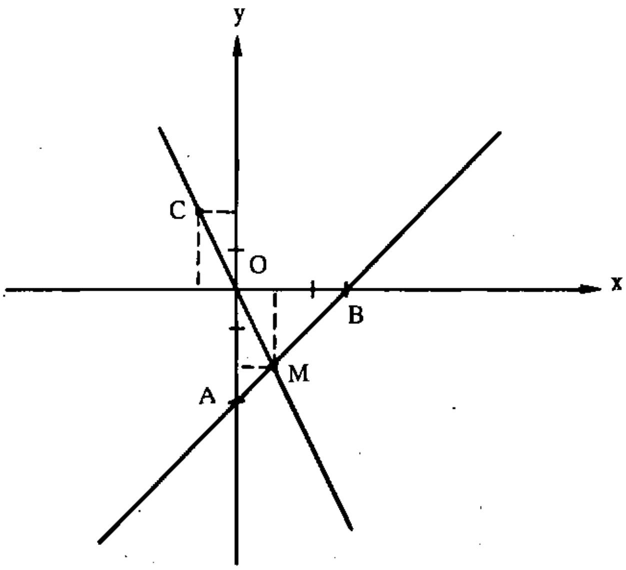
$$\Rightarrow x + ۲x = ۳ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -۲$$

$$\Rightarrow M \left| \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix} \right.$$ نقطهٔ تقاطع

و نمودارهای آنها چنین است:

$$y = x - ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = -۳ \Rightarrow A(۰, -۳) \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰) \end{cases}$$

$$y = -۲x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow O(۰, ۰) \\ x = -۱ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow C(-۱, ۲) \end{cases}$$

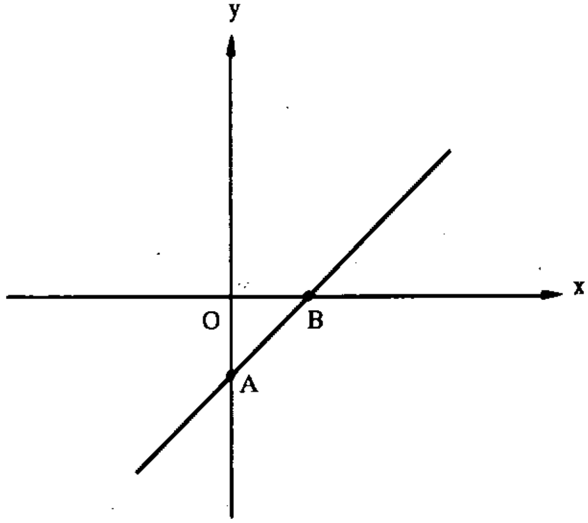


۴ـ اگر هم شیبهای دو خط مساوی و هم عدد ثابت آنها مساوی باشند، آنگاه دو خط بر هم منطبقند و بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند. مانند:

$y - x + ۱ = ۰$ و $y = x - ۱$

$x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow A(۰, -۱)$

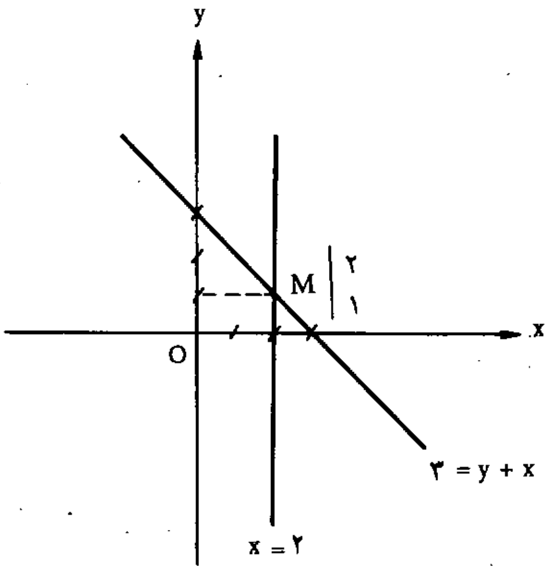
$x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow B(۱, ۰)$



همان‌طوری که قبلاً گفته شد، برای حل یک دستگاه، به کمک رسم، باید شکل را روی یک صفحهٔ کاغذ میلیمتری رسم کرد و مختصات تقاطع آنها را پیدا کرد.

مثال: دستگاه زیر را به کمک نمودار حل کنید:

$$\begin{cases} x = ۲ \\ x + y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \Rightarrow A(۰,۳) \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow B(۳, ۰) \end{cases}$$



آموزش ترجمه متون ریاضی (۸)

● حمید رضا امیری

6 Inequalities*

6.1 Linear Inequalities

The inequality 'x is greater than y', written $x > y$, is defined to mean $x - y$ is positive. In a similar way, 'x is less than y', written $x < y$, means $x - y$ is negative.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0).$$
$$(x < y) \Leftrightarrow (x - y < 0).$$

If x is greater than or equal to y, then we write $x \geq y$ with a similar notation, $x \leq y$, for x less than or equal to y.

The basic rules for manipulating inequalities are:

(1) The same number may be added to both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a).$$

(2) The same number may be subtracted from both sides of an inequality, so that

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b).$$

(3) If both sides of an inequality are multiplied by a *positive* number, the inequality is *preserved*.

$$(x > y \text{ and } a > 0) \Rightarrow (ax > ay).$$

(4) If both sides of an inequality are multiplied by a *negative* number the inequality is *reversed*.

$$(x > y \text{ and } b < 0) \Rightarrow (bx < by).$$

(5) The corresponding sides of inequalities of the same kind may be added (but not subtracted).

$$(a > b \text{ and } x > y) \Rightarrow (a + x > b + y).$$

(6) Inequalities of the same type are transitive.

$$(x > y \text{ and } y > z) \Rightarrow (x > z).$$

*Throughout this chapter all variables are real (i.e. $\in \mathbb{R}$).

٦ نابرابریها*

٦.١ نابرابریهای خطی

نابرابری «x بزرگتر از y است» با نماد $x>y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری مثبت است. به طریق مشابه «x کوچکتر از y است». به صورت $x<y$ نوشته شده و به معنی این است که $x - y$ مقداری منفی می‌باشد.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y > ٠)$$
$$(x < y) \Leftrightarrow (x - y < ٠)$$

اگر x بزرگتر یا مساوی با y باشد در این صورت می‌نویسیم $x \geq y$ و به طریق مشابه نماد $x \leq y$ برای x کوچکتر یا مساوی با y به کار می‌رود.

قاعده‌های اساسی برای تغییر و دستکاریِ نابرابریها به قرار زیراند:

(۱) می‌توان به دو طرف یک نابرابری یک عدد یکسان (مساوی) اضافه نمود، به صورت زیر:

$$(x > y) \Rightarrow (x + a > y + a)$$

(۲) از دو طرف یک نابرابری می‌توان یک عدد یکسان کم کرد، به صورت زیر،

$$(x > y) \Rightarrow (x - b > y - b)$$

(۳) اگر دو طرف یک نابرابری را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، نابرابری حفظ می‌شود (جهت آن تغییر نمی‌کند).

$$(x > y , a > ٠) \Rightarrow (ax > ay)$$

(۴) اگر دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود، نابرابری حفظ نمی‌شود (جهت آن عوض می‌شود).

$$(x > y , a < ٠) \Rightarrow ax < ay$$

(۵) طرفین متناظر در نامساویهای هم جهت را می‌توان با هم جمع کرد (در مورد تفریق حکم کلّی نیست).

$$(a>b , x>y) \Rightarrow (a + x > b + y)$$

(٦) در نامساویها خاصیت تعدی یا تراگذری برقرار است.

$$(x > y , y > z) \Rightarrow (x > z)$$

* در این بخش تمامی مقادیر حقیقی هستند (یعنی متعلق به $\mathbb{R}$).

Example 1 Given that $x > y$, show that $x + a > y + a$.

By definition $(x > y) \Leftrightarrow (x - y$ is positive).
We may write $x - y = (x + a) - (y + a)$.

$$[(x + a) - (y + a)] \text{ is positive} \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Hence,

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a).$$

مثال ۱. فرض کنیم که x>y، نشان دهید x + a > y + a.

با توجه به اینکه $(x > y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x - y = (x + a) - (y + a)$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \Leftrightarrow x + a > y + a$$

بنابراین،

$$(x > y) \Leftrightarrow (x + a > y + a)$$

Example 2 Given that $x > y$ and $b < 0$, show that $bx < by$.

As above, $(x > y) \Leftrightarrow (x - y$ is positive).
Since $b < 0$, $b(x - y)$ is negative. But $b(x - y) = bx - by$. Hence,

$$(bx - by \text{ is negative}) \Leftrightarrow (bx < by).$$

مثال ۲. فرض کنید x>y و b<0، نشان دهید bx<by.

می‌دانیم: $(x>y) \Leftrightarrow (x - y > 0)$

از آن‌جاکه $b<0$ پس، $b(x - y)$ مقداری است منفی. امّا داریم:

$$b(x - y) = bx - by < 0 \Leftrightarrow bx < by$$

Example 3 Given that $x > y$ and $a > b$, show that $a + x > b + y$.

$$(x > y) \Leftrightarrow (x - y \text{ is positive}).$$
$$(a > b) \Leftrightarrow (a - b \text{ is positive}).$$

Hence,

$$[(x - y) + (a - b) \text{ is positive}]$$
$$\Rightarrow [(x + a) - (y + b) \text{ is positive}].$$
$$\Rightarrow (x + a > y + b).$$

مثال ۳. فرض کنید x>y و a>b، نشان دهید a + x > b + x:

$$(x>y) \Rightarrow (x - y > 0)$$

$$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$$

بنابراین،

$$(x - y) + (a - b) > 0$$

$$\Rightarrow (x + a) - (y + b) > 0 \Rightarrow (x + a) > (y + b)$$

Example 4 Given that $a > b$, what can be said about the relation between a^2 and b^2?

We need to consider three separate cases depending on the signs of a and b.
(a) a, b both positive.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab), \text{ multiplying by } a,$$
$$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2), \text{ multiplying by } b.$$

Combining these, we have

$$(a^2 > ab \text{ and } ab > b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2).$$

(b) a, b both negative.

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab), \text{ multiplying by } a, \text{ which is negative},$$
$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2), \text{ multiplying by } b, \text{ which is negative}.$$

Combining these, we have

$$(a^2 < ab < b^2) \Rightarrow (a^2 < b^2).$$

(c) Nothing can be said in the case when a is positive and b is negative. For example,

$$4 > -2 \text{ and } 4^2 > (-2)^2$$

but

$$4 > -6 \text{ and } 4^2 < (-6)^2.$$

مثال ۴. اگر فرض کنیم a>b، راجع به رابطهٔ بین a^2 و b^2 چه می‌توان گفت؟

ما نیاز داریم که سه حالت مجزا از یکدیگر و برحسب علامتهای a و b در نظر بگیریم.

(الف) a و b هر دو مثبت باشند.

$(a > b) \Rightarrow (a^2 > ab)$ با ضرب دو طرف در a

$(a > b) \Rightarrow (ab > b^2)$ با ضرب دو طرف در b

با ترکیب دو رابطه اخیر داریم:

$$(a^2 > ab \text{ و } ab > b^2) \Rightarrow (a^2 > b^2)$$

(ب) a و b هر دو منفی باشند.

با ضرب دو طرف در a که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (a^2 < ab)$$

با ضرب دو طرف در b که مقداری منفی است:

$$(a > b) \Rightarrow (ab < b^2)$$

از ترکیب این روابط خواهیم داشت:

$$(a^2 < ab < b^2) \Rightarrow (a^2 < b^2)$$

(ج) در حالتی که a مثبت و b منفی باشد چیزی نمی‌توانیم بگوییم. به عنوان مثال:

$$4 > -2 \text{ و } 4^2 > (-2)^2$$

امّا

$$4 > -6 \text{ و } 4^2 < (-6)^2$$

Example 5 Find the set of values of x for which $2x + 2 > 6$.

$(2x + 2 > 6) \Rightarrow (2x > 6 - 2 = 4)$, subtracting 2 from each side,

$\Rightarrow x > 2$, multiplying each side by $\frac{1}{2}$.

The required set is

$$\{x: x > 2\}.$$

مثال ۵. مجموعهٔ مقادیری را برای x بیابید که به ازای آنها نابرابری ۶< ۲+۲x برقرار باشد (مجموعهٔ جواب نابرابری را مشخص کنید):

$$(۲x + ۲ > ۶) \xRightarrow{\text{تفریق ۲ از طرفین}} (۲x > ۶ - ۲ = ۴), \xRightarrow{\text{ضرب دو طرف در } \frac{1}{۲}} x>۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب عبارت است از $\{x : x>۲\}$.

Example 6 Find the set of values of x for which

$$\frac{3 + 4x}{x} < 3.$$

(a) When $x > 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x < 3x)$$

$\Rightarrow (4x - 3x < -3) \Rightarrow (x < -3)$.

As this contradicts the condition $x > 0$, the required set cannot contain positive values.

(b) When $x < 0$,

$$\left(\frac{3 + 4x}{x} < 3\right) \Rightarrow (3 + 4x > 3x),$$

since multiplying by a negative number reverses the inequality.

$$(3 + 4x > 3x) \Rightarrow (x > -3).$$

Hence, the required set is

$$\{x: -3 < x < 0\}.$$

مثال ۶. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۳+۴x}{x}<۳$ را بیابید.

(الف) وقتی که x>۰،

$$(\frac{۳+۴x}{x} < ۳) \Rightarrow (۳ + ۴x < ۳x)$$

$$\Rightarrow (۴x - ۳x < -۳) \Rightarrow x < -۳$$

که در این حالت با شرط x>۰ تناقض ایجاد می‌شود و مجموعهٔ جواب نمی‌تواند شامل مقادیر مثبت باشد.

(ب) وقتی که x<۰،

$$(\frac{۳+۴x}{x} < ۳) \Rightarrow (۳ + ۴x > ۳x)$$

(وقتی دو طرف یک نابرابری در یک عدد منفی ضرب شود جهت نابرابر معکوس می‌شود.)

$$۳ + ۴x>۳x \Rightarrow x>-۳$$

بنابراین، مجموعه جواب عبارت است از $\{x : -۳< x <۰\}$.

6.2 Quadratic inequalities

An inequality of the form $ax^2 + bx + c \geq 0$, where $a \neq 0$, is called a quadratic inequality. The solution depends on the sign of the discriminant $(b^2 - 4ac)$.

(i) If $b^2 \leq 4ac$, then:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a > 0,$$

and

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ for all values of } x \text{ when } a < 0.$$

These results follow from the work of chapter 3.

۶.۲ نابرابریهای درجه دوّم

هر نابرابری به شکل $ax^۲ + bx + c \geq ۰$ که در آن، $a \neq ۰$، یک نابرابری درجه دوم نامیده می‌شود. حل چنین نابرابریهایی بستگی به علامت مبین آن یعنی $(b^۲ - ۴ac)$ دارد.

(۱) اگر $b^۲< ۴ac$ در این صورت:

برای هر مقدار x در حالتی که a>۰، همواره داریم:

$$ax^۲ + bx + c \geq ۰$$

و برای هر مقدار x در حالتی که a<۰، همواره داریم:

$$ax^۲ + bx + c \leq ۰$$

نتایج فوق با توجه به کاری که در بخش ۳ انجام شد، به دست آمده است.

پیکارجویی!

۲۵ خودریخت است دو رقم آخر مربع آن (۶۲۵) رقمهای ۲ و ۵ اند. عددهای خود ریخت دیگری را به دست آورید. عددهای ابر - خود ریخت به صورت رقمهای نهایی مکعبهاشان ظاهر می شوند. عددهای ابر - خود ریخت را کشف کنید.



مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۱)

● حسین ابراهیم‌زاده قُلزم

◆ مقدمه

کامپیوتر[۱] الکترونیکی اندکی بیش از سی‌سال پیش اختراع شد. در تاریخ دنیا، بندرت یک تکنولوژی با چنین سرعت انفجارآمیزی توسعه یافته و پیشرفت کرده است. هم‌اکنون کامپیوتر در تمام جوانب مادّی زندگی ما نقش اوّل را بازی می‌کند. از کامپیوتر در امور تجاری و اداری، در سیستم نمرات و کارنامهٔ تحصیلی دانش‌آموزان و دانشجویان، در کار نشر کتاب و مجلات، در پُستهای الکترونیکی، در آموزش ریاضیات و فیزیک، در ثبت معاملات بانکی و کنترل گزارشات مالیات بردرآمد، در کنترل صورتِ کالاهای موجود فروشگاههایی که خرید می‌کنیم و درکنترل پرواز هواپیماها، در تنظیم فرایندهای تولید یک کارخانهٔ شیمیایی و در طراحی صنعتی و در تجزیه و تحلیل نتیجهٔ آزمایشهای پیچیدهٔ فیزیکی و در امور مربوط به راکتور اتمی و تحقیقات فضایی استفاده می‌شود.

ما اکنون شاهد حضور کامپیوتر در لوازم خانگی خود هستیم. در چرخهای خیاطی فوق مدرن کامپیوترهایی تعبیه شده است که بدون داشتن دندانه‌های مکانیکی، امکان استفاده از چرخ را در انتخاب مدلهای مختلف فراهم ساخته است. بسیاری از شما، از بازیهایی موسوم به بازیهای ویدیویی لذت برده‌اید، این بازیها در حقیقت بازی[۲]هایی کامپیوتری هستند که صفحهٔ نمایش[۳] آن، صفحهٔ تلویزیون است. با توجه به نفوذ و کارایی زیاد کامپیوتر، هر شخص با هر میزان از کنجکاوی می‌خواهد مطالبی راجع به کامپیوتر بداند. سؤالات متعددی برای یک شخص می‌تواند مطرح باشد:

نخست اینکه، کامپیوتر چیست؟ تاریخ کامپیوتر به چه دوره‌هایی برمی‌گردد؟ چه مراحلی طی گردید تا کامپیوترهای نوین و الکترونیکی امروزی ساخته شد؟ کامپیوترها توانایی انجام چه نوع کارهایی را دارند؟ نحوهٔ کار با کامپیوتر به چه صورت است؟ چگونه می‌توان از کامپیوتر در حل مسائل[۴] استفاده کرد؟ کامپیوتر حاصل کار را به چه صورت به ما تحویل می‌دهد؟ و بی‌شمار سؤال دیگر در مورد کامپیوتر.

ما در طی سلسله مقالاتی که در مجلهٔ برهان به چاپ می‌رسانیم تلاش خواهیم کرد که به این سؤالات و به بسیاری از سؤالات دیگر شما جواب دهیم. البته، برایمان مقدور نیست تمام جنبه[۵]های کار کامپیوتر و سیر تکاملی کامل آن را بیان کنیم. در طی این سلسله مقالات نخست مختصری راجع به تاریخ محاسبات[۶] و کامپیوتر تا به امروز و ساختمان[۷] و اجزای[۸] اصلی تشکیل دهندهٔ کامپیوتر با شما به گفتگو می‌نشینیم و سپس مطالبی در رابطه با سیستمهای مختلف کُدگذاری[۹] در کامپیوتر و اَلگوریتم[۱۰] و فلوچارت[۱۱] ارائه می‌دهیم. آنگاه برنامه‌نویسی با BASIC یا PASCAL یا C را مورد بررسی کامل قرار خواهیم داد و در انتها مباحث برنامه‌نویسی را با برنامه - نویسی گرافیکی با BASIC یا برنامه‌نویسی گرافیکی با PASCAL یا C به پایان می‌رسانیم.

◆ تاریخ محاسبات و کامپیوتر تا به امروز

در عصر[۱۲]های بسیار دور، بدون شک نخستین وسیلهٔ محاسباتی و شمارش[۱۳] را برای بشر انگشتان[۱۴] دست او تشکیل می‌داد. یکی از دلایل استفادهٔ انسان از مبنای ۱۰[۱۵] یا سیستم دهدهی در شمارش اعداد، تعداد ۱۰ انگشت دستِ او بوده است. در آغاز، بشر برای ثبت

اطلاعات[۱۶] از وسایلی نظیر چوب، پوست حیوانات و از دیوار غارها استفاده می‌کرده است. تا اینکه ...

عصری که ما در آن زندگی می‌کنیم با عصری که پدران و مادران ما و بطور کلی با عصری که نسلهای گذشته در آن زندگی می‌کردند کاملاً متفاوت است. مشخصهٔ[۱۷] اصلی عصر ما، تغییرات سریع[۱۸] ایجاد شده در صنعت و تکنولوژی از یک طرف و سبک[۱۹] زندگی انسانها از طرف دیگر است. ما در عصر خود، توسعه و تکامل کامپیوترهای الکترونیکی نوین را مشاهده می‌کنیم که به جرأت می‌توان گفت یکی از دستاوردهای[۲۰] عظیم و مهم قرن بیستم به شمار می‌رود.

کامپیوترها بر خلاف انسانها توانایی[۲۱] آن را دارند تا مقدار زیادی اطلاعات را در حافظه[۲۲] خود به صورت ذخیره[۲۳] شده، نگهدارند[۲۴]، محاسبات پیچیدهٔ[۲۵] ریاضی و مقایسه‌های منطقی[۲۶] را در کسر بسیار کوچکی از ثانیه انجام می‌دهد، کُند[۲۷] و فراموش کار نیست، خستگی‌پذیری در کامپیوتر معنا ندارد و محاسبات طولانی را بطور دقیق انجام می‌دهد.

نقش کامپیوتر در عرصه‌های[۲۸] مختلف زندگی اجتماعی[۲۹]، و در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی[۳۰] و پزشکی، بر هیچ کس پوشیده نیست. نخست به این پرسش پاسخ می‌دهیم که اساساً: کامپیوتر چیست؟

کامپیوتر یک وسیلهٔ[۳۱] الکترونیکی است که قادر به قبول و ذخیره داده[۳۲]ها بوده‌و آنها را پردازش[۳۳] می‌کند و داده‌های پردازش شده یا اطلاعات[۳۴] را در حافظهٔ خود می‌تواند ذخیره کند یا اطلاعات مورد درخواست استفاده کنندهٔ[۳۵] از کامپیوتر را به او تحویل دهد.

راجع به مفاهیم[۳۶] داده، پردازش، اطلاعات و حافظه دیرتر صحبت خواهیم کرد.

دسته‌بندی کامپیوتر

تمام کامپیوترها به دو دستهٔ[۳۷] کلی[۳۸] الف ـ کامپیوترهای قیاسی[۳۹] ب ـ کامپیوترهای رقمی[۴۰] تقسیم می‌شوند.

الف ـ کامپیوترهای قیاسی: اعداد[۴۱] در کامپیوترهای قیاسی به کمک یک سری از کمیت[۴۲]های فیزیکی[۴۳] که با سیستمهای خاصی واحدگذاری شده‌اند نمایش[۴۴] داده می‌شوند.

کمیتهای فیزیکی می‌توانند ولتاژ الکتریکی[۴۵]، سرعت[۴۶] چرخش[۴۷] یک میله، جریان الکتریکی[۴۸]، فشار هوا، فواصل[۴۹] طولی و غیره باشند. در کامپیوترهای قیاسی، برای به دست آوردن نتایج عددی، از وسایل اندازه‌گیری[۵۰] استفاده نمی‌شود بلکه قوانین فیزیکی در آن حاکم است. نتایج با علامتی نشان داده می‌شود که قابل تبدیل (البته با خطا![۵۱]) به عدد است. از این‌رو جوابها دقیق نیستند. از وسایلی که شبیه کامپیوترهای قیاسی عمل می‌کنند[۵۲] می‌توانیم حرارت‌سنج، سرعت‌سنج، ولت‌سنج و فشارسنج را نام ببریم. این کامپیوترها برای منظورهای خاصی[۵۳] مورد استفاده قرار می‌گیرند و انعطاف‌پذیری[۵۴] آنها نسبت به سایر کامپیوترها کم است. در محاسبهٔ حجم[۵۵] گازها، در تعیین مقدار آب و فشار آب سدها از کامپیوترهای قیاسی استفاده می‌شود.

ب ـ کامپیوترهای رقمی: در این نوع کامپیوتر، اطلاعات به کمک اعداد نمایش داده می‌شود. نمایش اعداد در کامپیوترهای رقمی توسط نوعی الگوریتم موسوم به سیستم اعداد دودویی[۵۶] تعیین می‌شود. این الگوریتم عدد را به صورت دنباله[۵۷]هایی از ۰ و ۱ تبدیل[۵۸] می‌کند و اعداد به همین صورت دودویی در داخل[۵۹] کامپیوترهای رقمی نمایش داده می‌شوند.

از آنجا که در کامپیوترهای قیاسی، برای نمایش اعداد از وسایل فیزیکی استفاده می‌شود از این‌رو در این نوع کامپیوتر، عملیات ریاضی وقت‌گیر[۶۰] انجام نمی‌شود: از محدودیت[۶۱]های کامپیوتر قیاسی آن است که عملیات منطقی یا مقایسه‌ای در آن انجام نمی‌شود. کامپیوترهای قیاسی حافظهٔ بسیار اندکی دارند، اندازهٔ دقیق محاسبات را نمی‌دهند و در اثر دما[۶۲] و رطوبت[۶۳] دستخوش تغییر می‌شوند. اما در مقابل، کامپیوترهای رقمی دارای حافظهٔ نامحدود هستند و دقت محاسباتی بسیار زیادی دارند، دقت یک کامپیوتر رقمی را معمولاً با مقدار فضای حافظه‌ای که برای نگهداری ارقام معنی‌دار[۶۴] عدد اختصاص می‌یابد می‌سنجند. در اجتماع هم که از کامپیوتر صحبت می‌شود منظور همین کامپیوترهای رقمی است.

تلاشهای زیادی صورت گرفته است تا توانستند خصوصیات خوب کامپیوترهای رقمی و قیاسی را در یک کامپیوتر نوع سوم به نام کامپیوتر پیوندی[۶۵] یا Hybrid Analog / Digitial Computer گرد آورند. در کامپیوترهای پیوندی داده‌ها با روش قیاسی دریافت[۶۶] می‌شوند و به مقادیر عددی تبدیل شده و سپس پردازش به صورت عددی انجام می‌شود. از کامپیوترهای پیوندی می‌توان رادار هواپیما را نام برد.

مراحل توسعهٔ تاریخی و تکامل کامپیوتر: انجام عمل محاسباتی و

ریاضی و مفهوم ذخیرهٔ برنامه جهت کنترل اتوماتیک کامپیوتر دو مفهوم اساسی[۶۷]ای را تشکیل می‌دادند که تحقیق[۶۸] و بررسی در این موارد، منجر به اختراع[۶۹] وسایل محاسباتی و کامپیوتری گردید. اکنون برخی از وسایل و ابزارهای مهمی را که در پیاده‌سازی[۷۰] این مفاهیم بکار رفته‌اند از آغاز تا به امروز شرح می‌دهیم:

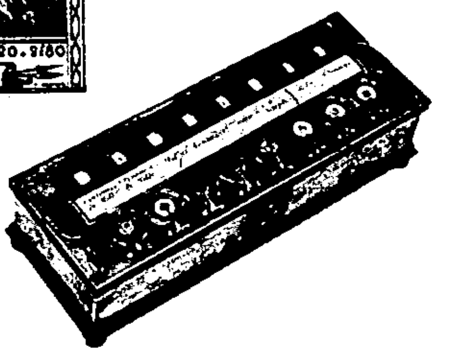
چرتکه: چرتکه[۷۱] یکی از ابتدایی‌ترین وسیلهٔ محاسباتی رقمی به کمک شمارش به شمار می رود. منشأ[۷۲] این وسیله را گاهی در رُم و یونان و گاهی در هند، ایران، چین، مصر یا بابل می‌دانند ولی قریب به اتفاق معتقدند که این وسیله ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح برای نخستین‌بار در چین ساخته شده و بکار رفته است. با اختراع چرتکه، عملیات از حالت دستی خارج شدهٔ و انجام آن به یک وسیلهٔ مکانیکی محول شده است. از چرتکه برای جمع و تفریق و ضرب (یا جمعهای متوالی[۷۳]) و تقسیم (یا تفریقهای متوالی) استفاده می‌شد.

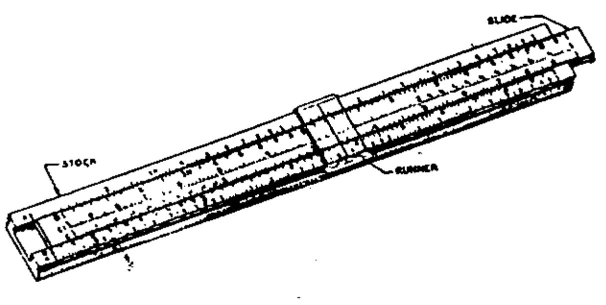
خط‌کش محاسبه: جان نپر (۱۶۱۷ - ۱۵۵۰) ریاضی دان اسکاتلندی و واضع نظریهٔ لگاریتمها در سال ۱۶۱۵ میلادی شکل اولیه و ابتدایی خط‌کش محاسبه[۷۴] را ابداع نمود. وی از این وسیله در محاسبهٔ جدول[۷۵] اوّل لگاریتم استفاده کرد و در عملیات جمع و ضرب از آن بهره جست. یک مخترع انگلیسی بنام Edmund Gunter در سال ۱۶۲۰ خط‌کش لگاریتمی را ابداع کرد و محاسبات را به کمک پرگار[۷۶] انجام می‌داد. William Oughtred مخترع دیگر انگلیسی با استفادهٔ همزمان از دو خط‌کش گانتر توانست اولین خط‌کش محاسبه را در سال ۱۶۲۱ بسازد. خط‌کش محاسبه را می‌توان اولین وسیلهٔ محاسبهٔ قیاسی[۷۷] به شمار آورد که در آن عملیات ضرب و تقسیم با استفاده از عمل جمع و تفریق انجام می‌شد. برروی خط‌کش محاسبه اعداد بوسیلهٔ فاصله‌هایی نشان داده می‌شوند که این فاصله بوسیلهٔ لگاریتم اعداد تعیین شده‌اند. به عنوان مثال، حاصل ضرب[۷۸] دو عدد از جمع فاصله‌های آنها در روی خط‌کش محاسبه تعیین می‌شوند.

ماشین حساب رومیزی[۷۹]: ویلهلم شیکارد (۱۶۲۳ - ۱۵۹۲)، طرح[۸۰] ماشین حساب را در سال ۱۶۲۳ ارائه داد. ماشین شیکارد علاوه بر عمل جمع و تفریق، عمل ضرب و تقسیم را نیز انجام می‌داد. ماشین شیکارد هرگز ساخته نشد و در همان حد طرح باقی ماند، علاوه براین طرح شیکارد تأثیری در ساخت و تکامل ماشینهای جمع کننده نداشت چون طرح وی به مدت ۳۰۰ سال به دست فراموشی سپرده شده بود و بعدها در سال ۱۹۵۷ جزئیات[۸۱] ساختمان ماشین حساب شیکارد برحسب اتفاق[۸۲] توسط Von Freytag Löringhoff کشف شد.

ماشین حساب پاسکال: بلز پاسکال (۱۶۶۲ - ۱۶۲۳) ریاضی‌دان فرانسوی در سن ۱۹ سالگی در سال ۱۶۴۲ یکی از اولین ماشین - حساب جمع کنندهٔ[۸۳] مکانیکی را که به جمع کنندهٔ پاسکال[۸۴] نیز معروف بود اختراع نمود. این ماشین حساب از تعدادی چرخ[۸۵] و دنده[۸۶] متداخل تشکیل می‌شد که برروی چرخها از ۰ تا ۹ شماره‌گذاری شده بود که یک چرخ نمایندهٔ ستون یکان، چرخ بعدی نمایندهٔ ستون دهگان و به همین ترتیب چرخهای بعدی نمایندهٔ ستونهای صدگان، هزارگان و غیره بودند. ماشین حساب پاسکال این توانایی را داشت که عمل جمع و تفریق را انجام دهد. به عنوان مثال، عدد ۱۵ با ۵ بار حرکت دنده در چرخ اوّل و یکبار حرکت دنده در چرخ دوم به دست می‌آمد و چنانچه در نظر بود عدد ۲۳ را با عدد ۱۵ جمع کنند، چرخ اول را به اندازهٔ ۳ دندهٔ دیگر و چرخ دوم را به اندازهٔ ۲ دندهٔ دیگر حرکت می‌دادند که نتیجه،عدد ۳۸ را به دست می‌داد.







ماشین حساب پاسکال

Samuel Morland مخترع انگلیسی در خلال سالهای ۱۶۶۳-۱۶۶۶، ماشین حسابی ساخت که می‌توانست عمل جمع و تفریق را انجام دهد. وی ماشین دیگری برای عمل ضرب ابداع نمود. علاوه براین وی ماشین حساب دیگری ساخت که می‌توانست محاسبات مثلثاتی[87] را انجام دهد.

ماشین حساب لایب نیتز: گاتفرید ویلهلم لایب نیتز (۱۶۴۶ - ۱۷۱۶) ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۶۷۱ ماشین حسابی ساخت که می‌توانست عمل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم را که جمعها و تفریقهای متوالی بود و ریشه‌گیری[88] از اعداد را نیز انجام دهد. این ماشین در سال ۱۶۹۴ ساخته شد و توسط لایب نیتز کار ماشین حساب تشریح[89] گردید.

ماشین حساب لایب نیتز

بعد از پاسکال و لایب نیتز تلاش[90]های زیادی صورت گرفت تا ماشین حساب دیگری براساس طرح آنها ساخته شود. اولین ماشین حساب موفق به Charles Thomas منسوب است[91] که وی طرح ماشین حساب خود را در سال ۱۸۲۰ ارائه داد. نمونهٔ کاملی از این ماشین در سال ۱۸۷۹ ساخته شد و می‌توان این ماشین را اولین ماشین حسابی به شمار آورد که به تولید انبوه رسیده است.



ماشین حساب قیاسی: J.M. Hermann در سال ۱۸۱۴ یک ماشین حساب قیاسی ساخت که می‌توانست سطح محصور[92] به یک منحنی[93] را محاسبه کند. بعد از طرح هرمان، Gonella در سال ۱۸۲۴ ماشینی ساخت که قادر بود سطح یک شکل را اندازه بگیرد.

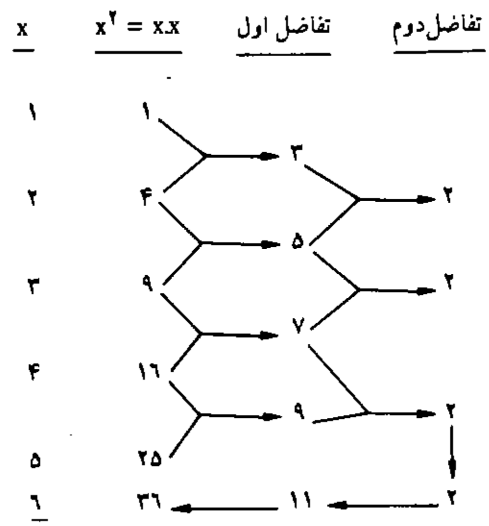
ماشینهای کارت منگنه شده: استفاده از کارتهای منگنه شده[94] در پردازش داده‌ها در سال ۱۸۸۴ برای اولین بار توسط هرمان هالریث آماردان[95] امریکایی انجام شد و در سرشماری ۱۸۹۰ مورد استفاده قرار گرفت. طرح کارت منگنه شده با ۸۰ ستون[96] توسط دکتر هالریث به ثبت رسید. وی یک ماشین مکانیکی ابداع کرد که از آن توانست در ثبت داده‌ها، محاسبه و جدول بندی[97] داده‌های آماری و نیز برای تفسیر[98] اطلاعات ذخیره شده روی کارتهای منگنه توسط یک حس کنندهٔ[99] الکتریکی استفاده کند. Otto Schaeffler اتریشی با ایجاد بهبودهایی[100] در ماشین هالریث، از آن در سرشماری[101] ۱۸۹۰ اتریش استفاده کرد.

رایج‌ترین روش پردازش داده‌های زیاد را در بین سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۶۰ پردازش با کارت‌های منگنه شده تشکیل می‌داد.

کارت منگنه شده

کارگاه بافندگی ژاکار: دومین ایدهٔ مهم در تاریخ اختراع کامپیوتر، مفهوم ذخیرهٔ برنامه برای کنترل اتوماتیک کامپیوتر و محاسبات بود. اولین نمونهٔ کنترل کامپیوتر توسط برنامهٔ ذخیره شده در سال ۱۷۲۵ توسط Blaise Bouchon در کارگاه نساجی[102] اش پیاده شد. در سال ۱۸۰۱ ژوزف ژاکار[103] فرانسوی برای اول‌بار ماشینی ساخت که از کارت منگنه شده به عنوان ورودی[104] استفاده می‌کرد. ماشین بافندگی ژاکار در نمایشگاه ۱۸۰۱ پاریس به نمایش درآمد. در این ماشین، عمل بافتن[105] توسط کارتهایی که در آن سوراخ[106]هایی برطبق دستورات زبان تعبیه شده بود کنترل پردازش در بافندگی را به عهده داشت.

ماشین تفاضلی و تحلیلی بابیج: چارلز بابیج[107] (۱۷۹۱ - ۱۸۷۱) ریاضی‌دان و استاد دانشگاه کمبریج انگلستان، مفاهیم ماشین حساب مکانیکی و برنامهٔ ذخیره شده[108] را در یک ماشین حساب برنامه‌پذیر[109] خود با هم ترکیب کرد. علاقهٔ وی به مقالات لایب نیتز در مورد نمایش توابع به صورت سریهای نامتناهی[110] موجب آن شد تا او ماشین تفاضلی‌اش را بسازد. این ماشین برای محاسبه و چاپ جداول توابع ریاضی[111] تا ۲۰ رقم اعشار[112] به کمک جمعهای مکرر تفاضلات[113] طراحی شده بود. وی این ماشین را «ماشین تفاضلی[114]» نامید زیرا جداولی که بوسیلهٔ این ماشین تهیه می‌گردید به کمک روشی بنام «روش تفاضلات» به دست می‌آمد. به نمودار زیر که چگونگی به دست آمدن مربع عدد ۶ را از طریق جدول تفاضلات نشان می‌دهد توجه کنید:



کار ساخت این ماشین در سال ۱۸۲۲ متوقف شد. متأسفانه بابیج هرگز ماشین تفاضلی خود را تکمیل نکرد.

بابیج در سال ۱۸۳۳ موفق به طرح ماشین دقیق‌تری بنام ماشین تحلیلی[۱۱۵] گردید. ماشین تحلیلی بابیج از ۵ واحد اساسی زیر تشکیل می‌شد:

۱ ـ واحد حافظه[۱۱۶] جهت ذخیرهٔ داده‌ها و نتایج میانی[۱۱۷] محاسبات

۲ ـ واحد محاسبه و منطق[۱۱۸] برای انجام محاسبات ریاضی و منطقی

۳ـ یک سری چرخ‌دنده برای انتقال داده‌ها از واحد حافظه به واحد محاسبه و منطق

۴ـ یک سری چرخ‌دنده برای برقرار دادن داده‌ها در ماشین تحلیلی و گرفتن جواب

۵ـ یک سری چرخ‌دنده برای گرفتن جواب و ارائه خروجی

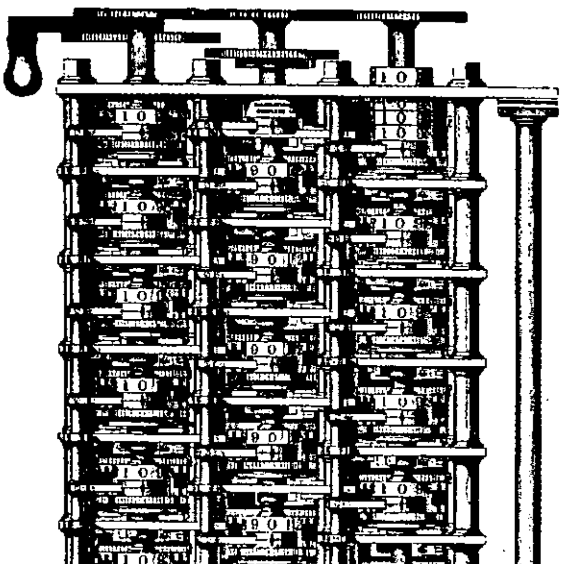
در ماشین تحلیلی به عنوان ورودی، از کارت منگنه شده استفاده می‌شد و کار ماشین تحلیلی به صورت خودکار توسط کارتهای منگنه کنترل می‌شد.

بابیج هرگز موفق به ساختن ماشین تفاضلی و تحلیلی خود نشد. طرح او جلوتر از تکنولوژی زمانش بود و قطع کمک هزینهٔ تحقیقاتیش توسط دولت انگلستان را بایستی عامل اصلی تکمیل نشدن ماشین تحلیلی به حساب آورد. طرح ماشین تحلیلی حائز اهمیت بسیار است زیرا بسیاری از مفاهیم بکار رفته در طرح او، در کامپیوترهای امروزی بکار گرفته شده است. از بابیج اغلب به عنوان «پدر کامپیوتر[۱۱۹] نوین» یاد می‌کنند. سهم خانم اِیْدا Ada همکار بابیج را در کارهای او نباید نادیده گرفت. خانم ایدا آگوستا[۱۲۰] (۱۸۵۲ ـ ۱۸۱۵) چند اشکال طرح بابیج را برطرف کرد و برای ماشین تحلیلی با بیج برنامه نوشت و بدین ترتیب از ایدا به عنوان اولین زن برنامه‌نویس یاد می‌شود زیرا وی برنامه‌ای برای محاسبهٔ اعداد برنولی[۱۲۱] برروی ماشین تحلیلی بابیج نوشت که این برنامه اولین برنامهٔ منتشر شدهٔ کامپیوتری[۱۲۲] بود.

خانم اِیْدا دختر لُرد بایرون شاعر معروف انگلیسی است. یک زبان برنامه‌نویسی جدید به افتخار ایدا بنام Ada در چند سال اخیر بوجود آمده است که یکی از مهمترین و قوی‌ترین زبانهای برنامه‌نویسی[۱۲۳] سطح بالا[۱۲۴] به شمار می‌رود.



چارلز بابیج (۱۸۷۱ ـ ۱۷۹۱)



کامپیوترهای Z: جورج بول[۱۲۵] (۱۸۶۴ ـ ۱۸۱۵) ریاضی‌دان هم‌عصر[۱۲۶] بابیج، یک سیستم بنام منطق ریاضی[۱۲۷] ابداع کرده بود

که به کمک آن سیستم وی می‌توانست هر مسئله را به مسئله‌ای تبدیل کند[۱۲۸] که فقط دارای جواب «درست[۱۲۹]» یا «نادرست[۱۳۰]» باشد. بدین ترتیب مسائل به آسانی حل می‌شدند. با استفاده از منطق ریاضی بول، یک مهندس جوان آلمانی بنام کُنراد سوزه، Konrad Zuse یک ماشین الکترومکانیکی ابداع کرد که در آن به جای استفاده از سیستمهای دهدهی، از سیستم دودویی اعداد استفاده می‌شد. در این سیستم برای نمایش اعداد از کلیدهای «باز و بسته[۱۳۱]»، «۰ و ۱»، «روشن و خاموش[۱۳۲]» استفاده می‌کردند. در تمام کامپیوترهای امروزی از این روش نمایش اعداد یعنی سیستم دودویی در حافظه استفاده می‌شود.

کامپیوتر Z1 سوزه، کامپیوتری بود که براساس سیستم دودویی با نقطه شناور[۱۳۳] کار می‌کرد. این کامپیوتر در سال ۱۹۳۶ ساخته شد. کامپیوتر Z2 ی سوزه یک کامپیوتر اوتوماتیک بود که در سال ۱۹۳۹ یا احتمالاً در سال ۱۹۴۱ ساخته شد. این کامپیوتر توسط برنامه کنترل می‌شد و براساس سیستم دودویی کار می‌کرد.

طرح کامپیوتر دیگری که قابل کنترل بوسیلهٔ برنامه بود با نام Z4 در سال ۱۹۴۲ شروع شد. این کامپیوتر دارای حافظهٔ مکانیکی منحصر بفرد[۱۳۴] بود. کامپیوتر Z4 در سال ۱۹۵۰ در دانشگاه صنعتی شهر زوریخ، در سوئیس نصب[۱۳۵] و راه‌اندازی شد[۱۳۶] و مورد بهره‌برداری قرار گرفت.

ماشین تیورینگ: استفاده از سیستم دودویی اعداد باعث حل بسیاری از مسائل مکانیکی گردید و اینکار توسط کامپیوتر به‌راحتی انجام می‌شد. امّا همچنان یک سؤال اساسی باقی ماند:

«چه مسایلی را می‌توان بوسیلهٔ ماشین با پردازشهای مکانیکی حل کرد؟»، آلن تیورینگ[۱۳۷] (۱۹۵۴ - ۱۹۱۲) در مقاله‌ای که آن را در سال ۱۹۳۶ به چاپ رساند از نظر تئوری تشریح کرد که هرگاه یک ماشین ساده بتواند یک محاسبه را انجام دهد این کار توسط یک ماشین دیگری انجام‌شدنی است. علاوه براین وی مسئله توقف The Halting Problem را در حلقه‌های نامتناهی برنامه کامپیوتری حل کرد و قبل از آنکه کامپیوتری ساخته شود طبق الگوریتمی نحوهٔ برخورد کامپیوتر و عکس‌العمل آن را در پاسخ به این مسئله تشریح کرد. ماشین تیورینگ یک ماشین با ماشین تیورینگ محدودیتی در اندازهٔ نوار ایجاد نمی‌کرد، در نتیجه حافظهٔ آن نامحدود بود. این ماشین به عنوان شکل پذیرفته شدهٔ کامپیوترهای همه منظوره[۱۴۱] با ظرفیت محاسبهٔ بالا مورد توجه بسیار قرار گرفت، طرح ماشین تیورینگ توسط Jon Barwise و John Etchemendy برای شرکت اَپل مکینتاش پیاده‌سازی شد.

کُلوسوس: در طی جنگ جهانی دوم، دانشمندان آلمانی ماشینی ابداع کرده بودند بنام Enigma برای رمزدار کردن پیغامهای نظامی. این ماشین یک مجموعهٔ مکانیکی از تعدادی چرخ و سیم‌پیچ بود که حروف رمز را به تصادف به عنوان ورودی دریافت می‌کرد. تلاش برای ساختن ماشینی که بتواند کدهای Enigma را رمزگشایی کند در سال ۱۹۳۹ شروع شد و ارتش انگلستان این کار را به عهدهٔ یک تیم از بهترین مغز[۱۴۲]های ریاضی انگلیس محول کرد که آلن تیورینگ نیز در آن عضویت داشت. در ابتدا برای رمزگشایی Enigma، از چندین کامپیوتر الکترومکانیکی نظیر کامپیوترهای خانوادهٔ Z سوزه استفاده شد اما این کامپیوترها سرعت کافی نداشتند و کارها بکندی پیش می‌رفت. برای این منظور اولین کامپیوتر الکترونیکی با برنامهٔ ثابت[۱۴۳] که دارای ۲۰۰۰ لامپ خلاء[۱۴۴] بود در سال ۱۹۴۳ ساخته شد و کار عملی خود را شروع کرد. این کامپیوتر، کامپیوتر کلوسوس[۱۴۵] نام داشت و به کمک آن ارتش انگلستان توانست پیغام[۱۴۶] سری ارتش آلمان را لحظه به لحظه رمزگشایی کند و بسیاری معتقدند به کمک این کامپیوتر بود که متحدین توانستند در جنگ جهانی دوم پیروز از میدان نبرد خارج شوند.

دنبالهٔ تاریخ محاسبات و کامپیوتر را در شمارهٔ بعد بخوانید.

* * *

واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Computer
2 - Game
3 - Screen
4 - Problems Solving
5 - Aspect
6 - Computing
7 - Architecture
8 - Components
9 - Coding
10 - Algorithm
11 - Flow Chart
12 - Age
13 - Counting
14 - Fingers
15 - Decimal Base
16 - Information
17 - Characteristic
18 - Rapid changes
19 - Life style
20 - Achievement
21 - Ability
22 - Memory
23 - Stored
24 - Holds
25 - Complex
26 - Logical
27 - Slow
28 - Field
29 - Social Life
30 - Engineering
31 - Device
32 - Data
33 - Process
34 - Information
35 - Sensor
36 - Concept

37 - Class
38 - General
39 - Analog
40 - Digital
41 - Numbers
42 - Quantity
43 - Physical
44 - Represent
45 - Electrical voltage
46 - Velocity
47 - Rotation
48 - Electrical current
49 - Distances
50 - Measurement
51 - Error
52 - Operate
53 - Special purpose
54 - Flexibility
55 - Volume
56 - Binary
57 - Sequence
58 - Converts
59 - Internal
60 - Time - consuming
61 - Restriction
62 - Temperature
63 - Humidity
64 - Significant fingures
65 - Hybrid
66 - Get
67 - Main
68 - Search
69 - Invention
70 - Implementation
71 - Abacus
72 - Origin
73 - Successive
74 - Slide Rule
75 - Table
76 - Compass
77 - Analog
78 - Product
79 - Desk calculator
80 - Design
81 - Details
82 - Randomly
83 - Adding
84 - Pascal's Adder
85 - Wheel
86 - Gear
87 - Trigonometrical
88 - Extracting of Root
89 - Describe
90 - Attempt
91 - is due to
92 - Area Bounded By
93 - Curve
94 - Punched card
95 - Statistician
96 - Column
97 - Tabulating
98 - Interpretation
99 - Electrical Sensors
100 - Modifications
101 - Census
102 - Loom
103 - Joseph Jacquard
104 - Input
105 - Weaving
106 - Holes
107 - Charles Babbage
108 - Stored Program
109 - Programmable
110 - Infinite
111 - Mathematical Functions
112 - Decimal Place
113 - Differences
114 - Difference Engine
115 - Analyticul Engine
116 - Memory Unit
117 - Intermediate Result
118 - Arithmetic & Logic Unit
119 - Father of Computer
120 - Lady Ada Augusta countess of lovelace
121 - Bernoulli Numbers
122 - First published computer program
123 - Programming Language
124 - High Level
125 - George Boole
126 - Contemporary
127 - Mathematical Logic
128 - Reduce
129 - True
130 - False
131 - Open & close
132 - On & off
133 - Floating point
134 - Unique
135 - Install
136 - Boot
137 - Alan Turing
138 - Tape
139 - Finite state
140 - Output
141 - General purpose
142 - Best Mathematical Brains
143 - Fixed program
144 - Vacuum tube
145 - Clossus
146 - Message

ادب ریاضی

من هیچ وقت کار مفیدی نکرده‌ام. هیچکدام از کشفیات من، مستقیم یا غیرمستقیم، در جهت مثبت یا منفی، تا به حال کوچکرین تغییری در آسایش جهانیان ایجاد نکرده‌اند. و احتمال هم نمی‌رود که چنین کنند. من البته به تعلیم سایر ریاضیدانها هم پرداخته‌ام، اما ریاضیدانهایی مثل خودم. و کار آنها هم، لااقل تا حدی که من به انجام آن کارها کمک کرده‌ام، به همان اندازهٔ کار خودم بدون فایده بوده است. با معیارهای عملی، ارزش زندگی ریاضی من هیچ است، و خارج از محدودهٔ ریاضیات هم به هر حال اندک است. تنها چیزی که می‌تواند مرا از محکومیت قطعی به ابتربودن نجات دهد، این است که پذیرفته شود من چیزی شایستهٔ آفرینش خلق کرده‌ام. در اینکه من چیزی آفریده‌ام شکی نیست؛ بحث بر سرارزش این آفریده است.

پس معنای زندگانی من و همهٔ آن دیگرانی که به همان معنای موردنظر من ریاضیدان بوده‌اند این است که: من چیزی به دانش بشری افزوده‌ام، و به دیگران کمک کرده‌ام تا آنها هم چیزهایی به آن بیافزایند؛ و این چیزها ارزشی دارند که تنها از لحاظ مرتبه و نه از لحاظ نوع با ابداعات ریاضیدانان بزرگ یا هنرمندان ریز و درشت دیگری که از خود آثاری ماندگار به جا گذاشته‌اند، تفاوت دارد.

هاردی

نشر ریاضی، رضا کرمی

اثبات نادرستی

«ادامهٔ منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی‌پور

◆ اثبات نادرستی[1]

در فصل قبل نادرستی استدلالات نادرست شامل گزاره‌های مرکب تابع ارزشی را با نسبت دادن ارزشهای راستیی به گزاره‌های سادهٔ ترکیب کننده‌شان به طریقی که مقدمه‌هایشان را راست و نتایجشان را دروغ کنند، ثابت می‌کردیم. در این‌جا برای اثبات نادرستی استدلالات نادرست شامل تسویرات از روشی بسیار نزدیک و وابسته به آن روش استفاده می‌کنیم. روش اثبات نادرستیی که در شرف توصیف آنیم با فرض اساسیمان در این مورد که دست‌کم یک فرد موجود است، ارتباط دارد.

فرض وجود دست‌کم یک فرد را می‌توان به بی‌نهایت طریق مختلف : اگر دقیقاً یک فرد موجود باشد، یا اگر دقیقاً دو فرد موجود باشند، یا اگر دقیقاً سه فرد موجود باشند، و غیره برقرار کرد. در مورد هر حالت یک تعادل منطقی اکید بین قضایای کلی نامرکب و ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی (شخصی) وجود دارد، به این ترتیب، اگر دقیقاً یک فرد، مثلاً a، موجود باشد، در این صورت :

$$[(x)\,\varphi x] \equiv \varphi a \quad \text{و} \quad [(\exists x)\,\varphi x] \equiv \varphi a$$

اگر دقیقاً دو فرد، مثلاً a و b، موجود باشند، در این صورت :

$$[(x)\,\varphi x] \equiv [\varphi a \wedge \varphi b] \quad \text{و} \quad [(\exists x)\,\varphi x] \equiv [\varphi a \vee \varphi b]$$

و در مورد هر عدد k، اگر دقیقاً k فرد، مثلاً a، b، c، ...، k موجود باشند، در این صورت

$$[(x)\,\varphi x] \equiv [\varphi a \wedge \varphi b \wedge \varphi c \wedge \ldots \wedge \varphi k]$$

و

$$[(\exists x)\,\varphi x] \equiv [\varphi a \vee \varphi b \vee \varphi c \vee \ldots \vee \varphi k]$$

راستی این دو شرطیها نتیجهٔ فوری تعاریفمان از سورهای عمومی و وجودی است. در این‌جا از چهار قاعدهٔ تسویر مذکور در بخش قبل استفاده‌ای به عمل نیامده است. بنابراین در مورد هر عالم یا مدل[2] ناتهی شامل هر تعداد متناهی افراد، هر قضیهٔ کلی منطقاً معادل ترکیب تابع ارزشیی از قضایای فردی است. در نتیجه به ازای هر چنین مدلی هر استدلال شامل سورها منطقاً معادل استدلالی شامل تنها قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنهاست.

استدلال شامل سورهایی درست است اگر و فقط اگر با حداقل یک فرد، بی‌توجه به این‌که چند فرد در آن موجود است درست باشد. بنابراین هر استدلال شامل سورها درست است اگر و فقط اگر به ازای هر عالم یا مدل ناتهی ممکنی منطقاً معادل استدلال تابع ارزشیی باشد که درست است. در نتیجه می‌توانیم نادرستی یک استدلال مفروض را با نمایش دادن یا توصیف کردن مدلی که استدلال مفروض به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست است، اثبات کنیم. به این مقصود می‌توانیم با ترجمهٔ استدلال شامل سورهای مفروض به استدلالی منطقاً معادل و شامل قضایای فردی و ترکیبات تابع ارزشی آنها نایل شویم. به عنوان مثال، استدلال زیر را داریم :

H W
تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.

E
تمام فیلها سنگین‌اند.

بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

ابتدا این استدلال را به صورت زیر علامتی می‌کنیم :

$$(x)\,[Wx \Rightarrow Hx]$$

$$(x)\,[Ex \Rightarrow Hx]$$

$\therefore$ (x) [Wx ⇒ Ex]

در حالت مدل شامل دقیقاً یک فرد، مثلاً a، استدلال مفروض منطقاً معادل

Wa ⇒ Ha

Ea ⇒ Ha

$\therefore$ Wa ⇒ Ea

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa» و «Ha» و F به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. این نسبت ارزشهای راستی طریق مختصر توصیف مدل مورد بحث به عنوان مدلی است که تنها شامل یک فرد a که W (ماهی وال) و H (سنگین) است اما E (فیل) می‌باشد.[۳] در نتیجه استدلال اصلی به ازای مدل شامل دقیقاً یک فرد درست نیست، و بنابراین نادرست است.

باید تأکید شود که در اثبات نادرستی استدلالات شامل سورها از قواعد تسویرمان استفاده نشده است. در مورد مدل شامل تنها یک فرد a گزارهٔ «Wa ⇒ Ha» را از گزارهٔ «(x) [Wx ⇒ Hx]» با استفاده از UI استنتاج نمی‌کنیم، چه این دو گزاره در مورد این مدل منطقاً معادل‌اند زیرا در آن «Wa ⇒ Ha» تنها مثال جانشین تابع گزاره‌ای «Wx ⇒ Hx» است.

می‌شود چنین اتفاق بیفتد که یک استدلال نادرست شامل سورها، به ازای هر مدل شامل دقیقاً یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی درست باشد، هر چند که، به ازای هر مدل شامل بیش از یک فرد، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزشی نادرست خواهد شد. به عنوان مثال؛ استدلال

W
تمام ماهیهای وال سنگین‌اند.
E
بعضی فیلها سنگین‌اند.
بنابراین تمام ماهیهای وال فیل‌اند.

که به صورت

(x) [Wx ⇒ Hx]

(∃ x) [Ex ∧ Hx]

$\therefore$ (x) [Wx ⇒ Ex]

علامتی می‌شود را در نظر می‌گیریم. این استدلال به ازای مدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل

Wa ⇒ Ha

Ea ∧ Ha

$\therefore$ Wa ⇒ Ea

است که استدلالی درست است. اما به ازای مدلی شامل دو فرد a و b استدلال مفروض منطقاً معادل

(Wa ⇒ Ha) ∧ (Wb ⇒ Hb)

(Ea ∧ Ha) ∨ (Eb ∧ Hb)

$\therefore$ (Wa ⇒ Ea) ∧ (Wb ⇒ Eb)

است که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Wa»، «Wb»، «Ha»، «Hb»، «Eb»، و ارزش راستی F به «Ea» ثابت می‌شود که نادرست است. در نتیجه استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن مدل، منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

* * *

یادداشتها

1 . Proving Invalidity

2 . Universe or model

۳. در این جا فرض بر این است که توابع گزاره‌ای سادهٔ «Ax»، «Bx»، «Cx»، ... نه لازم‌اند، یعنی، منطقاً تصدیق همهٔ افراد (به عنوان مثال: x یکسان با خودش است)، نه ناممکن، یعنی، منطقاً تکذیب همهٔ افراد (به عنوان مثال، x متفاوت با خودش است).

همچنین فرض می‌کنیم که تنها روابط منطقی بین توابع گزاره‌ای ساده آنهایی هستند که توسط مقدمات استدلال نادرست ثابت شده، بیان یا منطقاً و به طور ضمنی مقرر شده‌اند. نکتهٔ این محدودیتها در این است که نسبت به دلخواه دادن ارزشهای راستی به مثالهای جانشین این توابع گزاره‌ای ساده را بدون ناسازگاری مجاز می‌کند ـ چه البته توصیفات مدلیمان باید سازگار باشند.

* * *

مرجع:

Symbolic Logic

Irving M . Copi

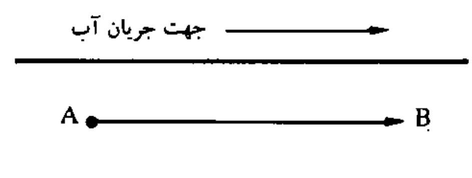
بردارها[1]

(قسمت اول)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

● مفهوم بردار

قایق کوچکی را در نقطه‌ای مانند: A از یک رودخانه پرآبی بدون حرکت در نظر می‌گیریم. حال اگر تصور کنیم که این قایق از نقطهٔ A فقط در اثر جریان آب شروع به حرکت کند ودر نقطه‌ای دیگر مانند B متوقف شود، در اصطلاح مسافت طی شدهٔ AB را که دارای اندازه و استداد و جهت است را یک بردار می‌نامیم.



برای اینکه نشان دهیم یک پاره‌خط جهت‌دار است یک پیکان در بالای پاره‌خط مفروض قرار می‌دهیم. مانند: بردار $\overrightarrow{AB}$؛ که نشان ـ دهندهٔ پاره‌خطی جهت‌دار از A به B و به اندازهٔ $|\overrightarrow{AB}|$ است.

بنابراین بدیهی است که یک پاره‌خط جهت‌دار است؛ هرگاه یک سرآن به عنوان ابتدا (نقطهٔ شروع یا مبدأ) و سر دیگرش به عنوان انتها (نقطهٔ پایان یا مقصد) در نظر گرفته شود.

برای درک بیشتر بردار می‌توان تأثیر یک یا چند نیرو روی یک جسم را نیز بیان کرد. مثلاً فرض کنید جسم ساکنی به وزن $\overrightarrow{W}$ را می‌خواهیم جابه‌جا کنیم. اگر چند نفر با نیروهای F_1، F_2، ...، F_n به این جسم در جهت و اندازه‌های مختلف اثر گذارند و مجموع یا برآیند نیروهای وارده را $\overrightarrow{F}$ بنامیم؛ بدیهی است وقتی $\overrightarrow{F} > \overrightarrow{W}$ باشد، جسم حرکت خواهد کرد و در صورتی که $\overrightarrow{F} \leq \overrightarrow{W}$ باشد، جسم حالت سکون خود را حفظ خواهد کرد.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} > \overrightarrow{W}$$

شرط جابه‌جایی جسم: $\overrightarrow{F} > \overrightarrow{W}$ (بردار برآیند)

بنابراین وقتی دربارهٔ تأثیر یک نیرو روی یک جسم مطالعه می‌کنیم باید:

۱) نقطه اثر

۲) اندازه

۳) راستا یا استداد

آن نیرو را مشخص کنیم.

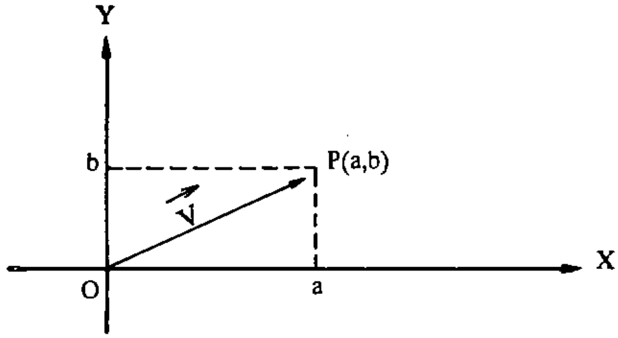
● طریقه‌های نشان دادن یک بردار و مؤلّفه‌های آن روی دو محور عمود بر هم.

هرگاه A و B دو نقطه از صفحه باشند، پاره‌خط جهت‌دار AB را به‌صورت زوج مرتب (A,B) و یا به صورت <A و B> نشان می‌دهند.

هر نقطهٔ P(a,b) در صفحهٔ یک و تنها یک بردار مثل: $\overrightarrow{OP}$ و برداری مانند: $\overrightarrow{OP}$ فقط و فقط یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند. بردار $\overrightarrow{OP}$ به‌نام بردار مکان نقطهٔ $\overrightarrow{P}$ خوانده می‌شود.

---

1. Vectors



بنابراین بردار $\vec{V}$ را که ابتدای آن O و انتهای آن نقطهٔ $P(a,b)$ در صفحهٔ مختصات XOY است؛ بردار نظیر دوتایی مرتب (a,b) می‌نامند.

اعداد a و b را مؤلّفه‌های $\vec{OP} = \vec{V}$ می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$\vec{V} = <a,b> \quad \text{یا} \quad \vec{V} \sim (a,b)$$

هر نقطه از صفحه مانند: $P(a,b)$ را می‌توان با یک ماتریس 1×2 به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

در این صورت گفته می‌شود که $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یک بردار ستونی است.

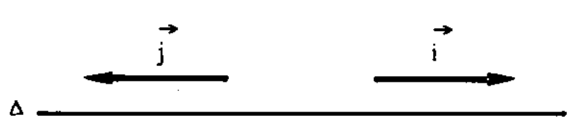
همچنین مختصات نقطهٔ P را می‌توان با یک ماتریس سطری 2×1 به‌صورت $[a \quad b]$ نیز نمایش داد، که دراین صورت گفته می‌شود $\vec{OP}$ به‌طریق‌ماتریس‌سطری $[a\ b]$ نشان‌داده‌شده است:

$$\vec{OP} = [a\ b]$$

● بردار یکانی (واحد)

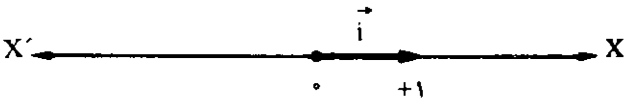
هر بردار به اندازهٔ واحد را یک بردار یکانی می‌نامند. اگر امتداد بردار یکانی $\vec{i}$ موازی خط Δ باشد، بردار $\vec{i}$ را بردار یکانی راستای Δ گوییم.

هر راستا دو بردار یکانی دارد، مانند: بردارهای یکانی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برای راستای Δ (مطابق شکل).



اگر یک بردار یکانی برروی یک محور چنان باشد که آغازش بر صفر و پایانش بر ۱+ منطبق باشد، آن بردار را بردار یکانی (واحد) محور می‌نامیم.

هر محور فقط یک بردار واحد دارد مانند: بردار یکانی $\vec{i}$ برای محور X′OX (مطابق شکل).



تجربیات فیزیکی نشان می‌دهند که:

اگر $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ نیروهای وارد به یک نقطهٔ مادی (جرمی متمرکز در یک نقطهٔ فضا) مانند: P باشند، آنگاه روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 \qquad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 \qquad \text{(جابه‌جایی)}$$

اگر نماد $\vec{o}$ نشان دهد که به P نیرویی وارد نمی‌شود، یا به عبارت دیگر به P، نیرویی‌معادل صفر وارد می‌شود، برای هر نیروی دیگر مؤثر بر P مانند $\vec{F}$ داریم:

$$\vec{o} + \vec{F} = \vec{F} + \vec{o} = \vec{F} \qquad \text{(عضو خنثی)}$$

تجربه نشان می‌دهد که اگر نیروی $\vec{F}_1$ به P وارد شود و نیروی $\vec{F}_2$ که اندازهٔ آن مساوی $\vec{F}_1$ ولی جهت آن‌برخلاف $\vec{F}_1$ است نیز روی P اثر گذارد، این دو نیرو یکدیگر را خنثی خواهند کرد. به عبارت دیگر، برای نیروی معین $\vec{F}$ نیرویی که با نماد $-\vec{F}$ نشان می‌دهیم وجود دارد به‌طوری که داریم:

$$\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{o} \qquad \text{(عضو وارون)}$$

$\vec{o}$ عضو بی‌اثر جمع و $-\vec{F}$ وارون $\vec{F}$ در مجموعهٔ بردارها نامیده می‌شوند. فرض کنیم نیروی $\vec{F}$ روی P تأثیر کند. اندازهٔ این نیرو را باعلامت $|\vec{F}|$ نشان می‌دهیم. برای هر $k\in IR$ و $k\neq 0$، نیروی $k\vec{F}$ که بر P اثر می‌کند را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

اندازهٔ $k\vec{F}$ برابر $|\vec{F}|\ |k|$ است. اگر $k>0$ باشد، جهت $k\vec{F}$

همان جهت $\vec{F}$ است و اگر $k<0$ باشد، جهت $k\vec{F}$ برخلاف جهت $\vec{F}$ است.

همچنین تجربیات فیزیکی ضرب عدد در بردار را به شکل زیر نشان می‌دهد:

$$k(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=k\vec{F}_1+k\vec{F}_2$$

$$(k_1+k_2)\vec{F}=k_1\vec{F}+k_2\vec{F}$$

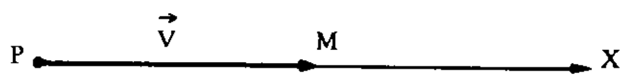
$$k_1(k_2\vec{F})=(k_1k_2)\vec{F}$$

برای تکمیل تعریف $k\vec{F}$، فرض می‌کنیم که $0.\vec{F}=\vec{0}$ باشد.

توجه داشته باشید که تمام خاصیتهای بیان شده از نظر ریاضی نیز معتبر هستند. مسأله‌ای که در این‌جا مطرح می‌شود، تعیین برآیند نیروهای $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$،...و $\vec{F}_n$ است. برای این منظور نمایش هندسی نیروها را تعریف می‌کنیم.

● نمایش هندسی نیروها ـ تعریف بردار

فرض می‌کنیم که نیروی $\vec{F}$ به نقطهٔ مادی P اثر می‌کند. نیمخط PX که از P شروع می‌شود و همراستای $\vec{F}$ است را رسم می‌کنیم. هر واحد نیرو را با یک واحد طول نمایش می‌دهیم، مثلاً: یک کیلوگرم را با یک سانتی‌متر نشان می‌دهیم. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ مساوی $a\neq 0$ باشد، $|\vec{F}|=a$، نقطهٔ M که فاصلهٔ آن از P برابر a واحد طول است را در نظر می‌گیریم.



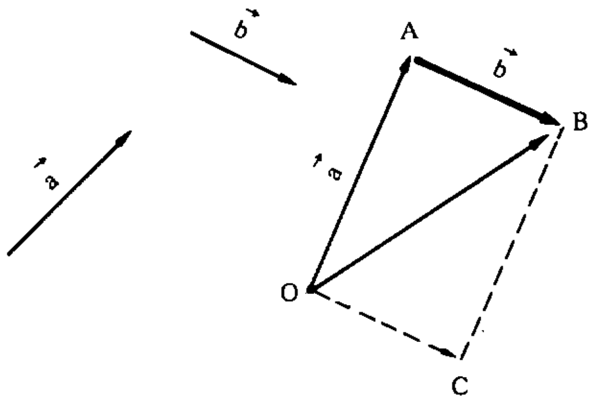
پاره‌خط PM که ابتدای آن P و انتهای آن M است، یک پاره‌خط جهت‌دار نامیده می‌شود، که آن را بردار $\vec{V}$ می‌نامیم.

لازم است تذکر دهیم که کمیتهای دیگری مثل: سرعت و شتاب نیز وجود دارندکه مانند: نیرو برای بیان آنها به پاره‌خطهای جهت‌دار یا بردارها نیاز داریم.

مطالعه و بررسی بردارها یعنی؛ پاره‌خطهای جهت‌دار که در اصل کمیتهای هندسی هستند، نه تنها از نظر فیزیکی بلکه به‌طور کلی از نظر ریاضی اهمیت فراوانی دارد. لازم است توضیح دهیم که گرچه تعریف بردار را با تکیه به مفهوم فیزیکی نیرو بیان کردیم، ولی می‌توان خواص بردارها را صرف‌نظر از این‌ارتباط مورد بررسی و مطالعه قرار داد.

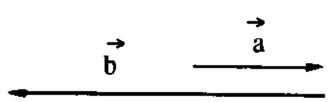
● جمع بردارها

هرگاه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده باشند، از نقطه‌ای مانند: O بردار $\overrightarrow{OA}$ را برابر $\vec{a}$ و از نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{AB}$ را برابر $\vec{b}$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OB}$ را مجموع هندسی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم. مجموع هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با $\vec{a}+\vec{b}$ نمایش می‌دهیم. در شکل زیر دیده می‌شود که اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همراستا نباشند OB قطر متوازی‌الاضلاع OABC است که بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ به ترتیب با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر هستند. در این حالت می‌گوییم که مجموع هندسی دو بردار قطر متوازی‌الاضلاع است که بر آن دو بردار بنا می‌شود.

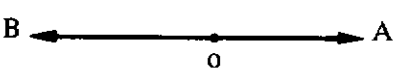


در شکلهای زیر مجموع دو بردار همراستا نمایش داده شده است:

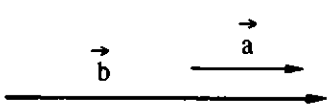
۱) دو بردار مخالف



(جمع دو بردار مخالف)



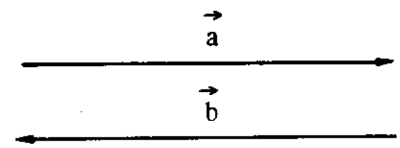
۲) دو بردار موافق



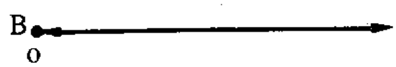
(جمع دو بردار موافق)



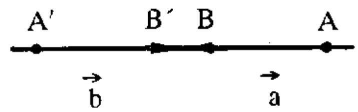
۳) (دو بردار زوج)



(جمع دو بردار زوج)



۴) (دو بردار متقابل یا قرینه)

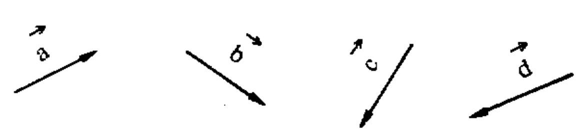


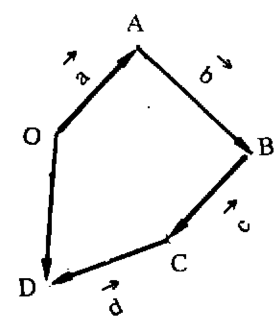
با توجه به شکل (۳) می‌توان نوشت: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{o}$

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

در شکل (۳) مجموع دو بردار صفر شده است، زیرا o و B برهم منطبق شده‌اند.

اگر چند بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ داشته‌باشیم، مجموع آنها را چنین تعریف می‌کنیم: از نقطه‌ای مانند O بردار $\overrightarrow{OA}$ را هم اندازهٔ $\vec{a}$ و از نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{AB}$ را برابر $\vec{b}$ و از نقطهٔ B بردار $\overrightarrow{BC}$ را برابر $\vec{c}$ و سرانجام از نقطهٔ c بردار $\overrightarrow{CD}$ را برابر $\vec{d}$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OD}$ را مجموع هندسی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ می‌نامیم و با $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دیده می‌شود که مجموع چند بردار به تریب بردارها بستگی ندارد و به هر ترتیبی که بردارهای موردنظر را با هم جمع کنیم در هر صورت به یک بردار خواهیم رسید که با مجموع بردارها برابر است. به عنوان مثال: بردارهای زیر را با دو ترتیب مختلف جمع می‌کنیم.

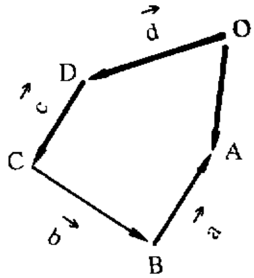




$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

حالت (۱)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$



حالت (۲)

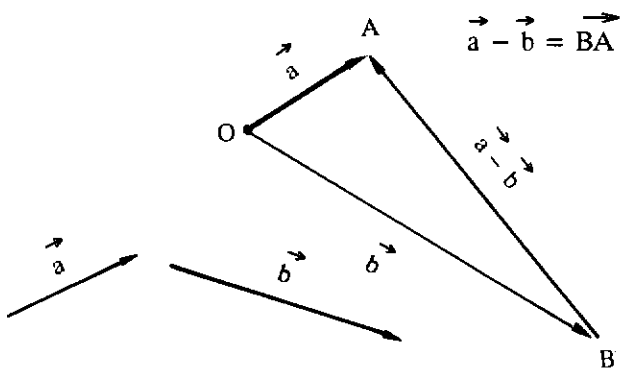
● **تفریق دو بردار**

بنا به تعریف تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ برداری است مانند: $\vec{c}$ به‌طوری که داشته‌باشیم:

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$$

بردار $\vec{c}$ را با $\vec{a}-\vec{b}$ نمایش می‌دهیم که مانند شکل زیر، برای یافتن آن از نقطه‌ای مانند: O دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به ترتیب برابر با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رسم می‌کنیم، بردار $\overrightarrow{BA}$ تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ است:

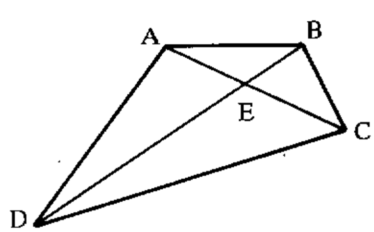
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$



بنابراین بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AB}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ و $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

مثال ۱: در شکل زیر هر پاره‌خط متناظر با یک بردار است، حاصل هریک از مجموعهای داده شده را حساب کنید:



الف) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} = ?$

ب) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC}) = ?$

ج) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{BD}) = ?$

حل: الف)

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD}$$

ب) $\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

ج)
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$$
$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

• ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو برابر

حاصل‌ضرب داخلی یا نقطه‌ای دو بردار عددی حقیقی (یا اسکالر) است و بردار نیست. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{V_1} = < a_1 , b_1 >$ و $\overrightarrow{V_2} = < a_2 , b_2 >$ دو بردار از فضای برداری V_2 باشند.

حاصل‌ضرب داخلی $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ که با نماد $\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2}$ نشان داده می‌شود، عبارت عددی زیر است:

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = < a_1 , b_1 > \cdot < a_2 , b_2 > = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

برهان: اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌ترتیب بردارهای یکانی (واحد) محورهای x و y باشند، داریم:

$$\overrightarrow{V_1} = < a_1 , b_1 > = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{V_2} = < a_2 , b_2 > = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

و همچنین حاصل ضربهای نقطه‌ای زیر را نیز به آسانی می‌توان تحقیق کرد:

$$\vec{i} . \vec{i} = ۱ \ , \ \vec{j} . \vec{j} = ۱ \ , \ \vec{i} . \vec{j} = ۰$$

زیرا خواهیم دید که حاصل‌ضرب نقطه‌ای دوبردار عمود بر هم صفر است و حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار موازی و یا منطبق بر هم برابر یک است.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = < a_1 , b_1 > \bullet < a_2 , b_2 > = (a_1\vec{i} + b_1\vec{j})(a_2\vec{i} + b_2\vec{j})$$
$$= a_1a_2\vec{i}.\vec{i} + a_1b_2\vec{i}.\vec{j} + b_1a_2\vec{j}.\vec{i} + b_1b_2\vec{j}.\vec{j}$$
$$= a_1a_2 (۱) + a_1b_2 (۰) + b_1a_2 (۰) + b_1b_2 (۱)$$
$$= a_1a_2 + b_1b_2$$

مثال ۲: وضع بردارهای $\overrightarrow{V_1} = < -۱ , \frac{۳}{۴} >$ و $\overrightarrow{V_2} = < ۳,۴ >$ نسبت‌به هم چگونه است.

حل:

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = < -۱ , \frac{۳}{۴} > \cdot < ۳,۴ > = (-۱)(۳) + (\frac{۳}{۴})(۴)$$
$$= -۳ + ۳ = ۰$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار صفر است و در نتیجه دو بردار برهم عمودند.

تبصره: حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردار $\vec{V} = < a,b >$ درخودش چنین است:

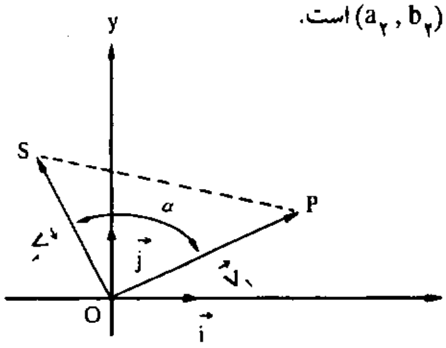
$$\vec{V} . \vec{V} = a^۲ + b^۲$$
$$\Rightarrow |\vec{V}|^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

قضیّه: هرگاه α زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ باشد، یعنی $(\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2}) = \alpha$، آنگاه

$$\overrightarrow{V_1} . \overrightarrow{V_2} = |\overrightarrow{V_1}| \ |\overrightarrow{V_2}| \cos (\overrightarrow{V_1} , \overrightarrow{V_2}) = |\overrightarrow{V_1}| \ |\overrightarrow{V_2}| \cos\alpha$$

برهان: شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

فرض کنیم: $\overrightarrow{V_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ و $\overrightarrow{V_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ و همچنین، $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OS}$ نمایش موضعی $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ باشد. P نقطهٔ (a_1 , b_1) و S نقطهٔ (a_2 , b_2) است.



با توجه به شکل در مثلث $\overset{\Delta}{OPS}$ قانون کسینوسها رامی‌نویسیم:

$$|\overrightarrow{PS}|^۲ = |\overrightarrow{V}_۱|^۲ + |\overrightarrow{V}_۲|^۲ - ۲|\overrightarrow{V}_۱|\ |\overrightarrow{V}_۲| \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{V}_۱|^۲ + |\overrightarrow{V}_۲|^۲ - |\overrightarrow{PS}|^۲}{۲|\overrightarrow{V}_۱|\ |\overrightarrow{V}_۲|}$$

می‌دانیم:

$$\overrightarrow{PS} = \langle a_۲ - a_۱ , b_۲ - b_۱ \rangle = (a_۲ - a_۱)\,\vec{i} + (b_۲ - b_۱)\,\vec{j}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \frac{(a_۱^۲ + b_۱^۲) + (a_۲^۲ + b_۲^۲) - \left[(a_۲ - a_۱)^۲ + (b_۲ - b_۱)^۲\right]}{۲\,|\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲|}$$

$$= \frac{۲a_۱a_۲ + ۲b_۱b_۲}{۲\,|\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲|} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{|\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲|} = \frac{\vec{V}_۱ . \vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲|}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{V}_۱ . \vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲|} \Rightarrow \vec{V}_۱ . \vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱|\,|\vec{V}_۲| \cos\alpha$$

با توجه به اینکه $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۲ = \overrightarrow{V}_۲ . \overrightarrow{V}_۱$$ (قانون تعویض‌پذیری)

و همچنین روابط زیر را نیز می‌توان بسادگی تحقیق کرد:

$$\overrightarrow{V}_۱ . (\overrightarrow{V}_۲ + \overrightarrow{V}_۳) = \overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۲ + \overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۳$$ (قانون پخش‌پذیری)

هرگاه $\overrightarrow{V}_۱$ و $\overrightarrow{V}_۲$ بردارهایی در $\overrightarrow{V}_۲$ بوده و c یک اسکالر باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$c\,(\overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۲) = (c\overrightarrow{V}_۱) . \overrightarrow{V}_۲$$

$$\overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۱ = |\overrightarrow{V}_۱|^۲$$

$$۰ . \overrightarrow{V}_۱ = \overrightarrow{V}_۱ . ۰ = ۰$$

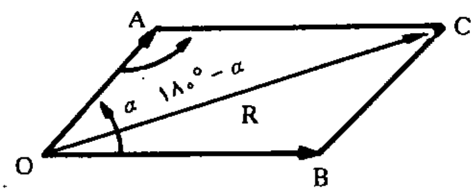
$$(\overrightarrow{V}_۱ . \overrightarrow{V}_۲ = ۰) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{V}_۱ = ۰ \vee \overrightarrow{V}_۲ = ۰ \vee (\overrightarrow{V}_۱,\overrightarrow{V}_۲) = \pm\frac{\pi}{۲})$$

● **اندازهٔ برآیند دو بردار**

دوبردار $\overrightarrow{V}_۱$ و $\overrightarrow{V}_۲$ را درنظرگرفته و برآیند (مجموع‌هندسی) آنها را مشخص‌می‌کنیم.

اگــر $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V}_۱$ و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V}_۲$ و $(\overrightarrow{V}_۱,\overrightarrow{V}_۲) = \alpha$ و $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{R}$ مجموع هندسی (برآیند) آنها باشد، در مثلث $\overset{\Delta}{OAC}$ داریم:

$$OA = |\overrightarrow{V}_۱| \quad \text{و} \quad AC = |\overrightarrow{V}_۲| \quad \text{و} \quad O\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - \alpha$$



طبق رابطهٔ کسینوسها می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{OAC} : OC^۲ = OA^۲ + AC^۲ - ۲OA \times AC \cos O\hat{A}C$$

$$\Rightarrow |\vec{R}|^۲ = |\vec{V}_۱|^۲ + |\vec{V}_۲|^۲ - ۲|\vec{V}_۱|.|\vec{V}_۲| \cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

و باتوجه به $\cos(۱۸۰^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ رابطهٔ بالا را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$|\vec{R}|^۲ = |\overrightarrow{V}_۱|^۲ + |\overrightarrow{V}_۲|^۲ + ۲|\overrightarrow{V}_۱|.|\overrightarrow{V}_۲| \cos(\overrightarrow{V}_۱,\overrightarrow{V}_۲) \quad \text{(I)}$$

بنابراین، بین چهار جزو $|\overrightarrow{V}_۱|$ و $|\overrightarrow{V}_۲|$ و $|\overrightarrow{R}|$ و $(V , V) = \alpha$ سه‌جزو معلوم باشد، می‌توان با استفاده از رابطهٔ (I) جزو مجهول را محاسبه کرد.

مثال ۳: طول‌دو بردار $\overrightarrow{V}_۱$ و $\overrightarrow{V}_۲$ به‌ترتیب ۶ و ۴ و زاویهٔ‌بین‌دوبردار ۱۲۰° است. طول بردار برآیند را حساب کنید.

حل: طبق رابطه برآیند دو بردار (رابطهٔ I) خواهیم داشت:

$$|\vec{R}|^۲ = ۶^۲ + ۴^۲ + ۲ \times ۶ \times ۴ \cos ۱۲۰^\circ$$

$$= ۳۶ + ۱۶ - ۲۴ = ۲۸ \Rightarrow |\vec{R}| = ۲\sqrt{۷}$$

مثال ۴: اگر ۳ = $|\vec{V_1}|$ و ۴ = $|\vec{V_2}|$ و $|\vec{V_1}+\vec{V_2}|=\sqrt{13}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$|\vec{V_1}+\vec{V_2}| = |\vec{R}| \Rightarrow |\vec{R}|^2 = |\vec{V_1}|^2 + |\vec{V_2}|^2 + 2|\vec{V_1}||\vec{V_2}|\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2})$$

$$\Rightarrow 13 = 9 + 16 + 2 \times 3 \times 4 \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) \Rightarrow$$

$$\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \cos 120^\circ \Rightarrow (\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 120^\circ$$

تمرین: اگر ۳ = $|\vec{V_1}|$ و $|\vec{V_1}+\vec{V_2}| = \sqrt{13}$ و $(\vec{V_1},\vec{V_2})=120^\circ$ باشد، اندازهٔ $|\vec{V_2}|$ را حساب کنید.

راهنمایی: با استفاده از فرمول اندازهٔ برآیند دو بردار (رابطهٔ I) مانند مثال قبل نتیجه بگیرید که ۴ = $|\vec{V_2}|$ است.

• قرینهٔ یک بردار

قرینهٔ $\vec{a}$ به $-\vec{a}$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر قرینهٔ یک بردار مانند: $\vec{a}$ برداری است مانند: $-\vec{a}$ که با بردار $\vec{a}$ هم‌اندازه، همراستا و مختلف‌الجهت با آن باشد. با توجه به مطلب فوق می‌توان نوشت:

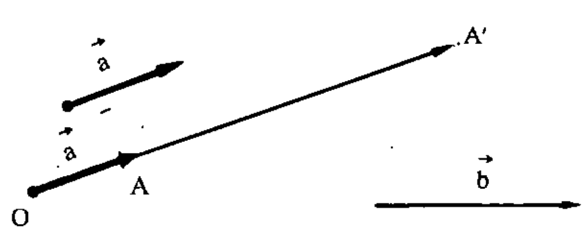
$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$$

مثال ۵: اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باهم زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهند، بردارهای زیر را رسم کنید:

۱) $4\vec{a}$ ۲) $\vec{a} + 3\vec{b}$ ۳) $2\vec{a} - \vec{b}$

حل: ۱) اگر $\vec{OA} = \vec{a}$ باشد، $\vec{OA'} = 4\vec{a}$ است.

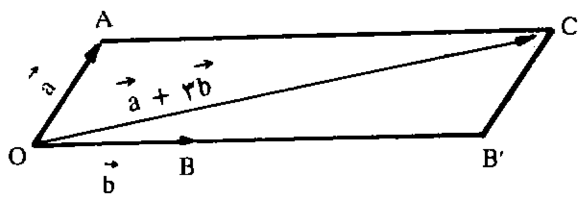
باتوجه به اینکه $|\vec{OA'}| = 4\,|\vec{OA}|$ اختیار شده باشد.



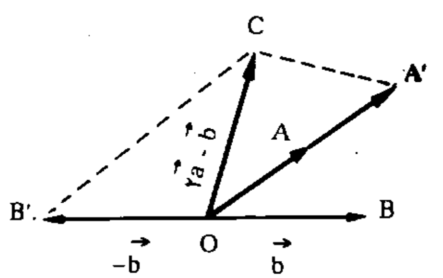
۲) با توجه به شکل زیر داریم:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB'} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$(|\vec{OB'}| = 3|\vec{OB}|)$$



۳) برای پیدا کردن $2\vec{a} - \vec{b}$ ابتدا بردار $2\vec{a}$ و سپس بردار $-\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم و سرانجام مجموع هندسی آنها یعنی: $2\vec{a} + (-\vec{b})$ یا همان $2\vec{a} - \vec{b}$ را رسم می‌کنیم.



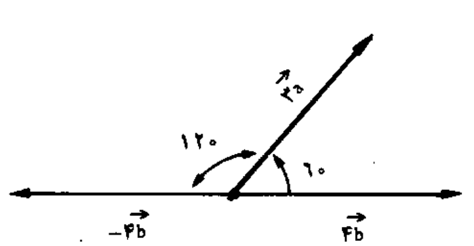
مثال ٦: اگر ۲ = $|\vec{a}|$ و ۱ = $|\vec{b}|$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $3\vec{a} - 4\vec{b}$ ۲) $-3\vec{a} - 2\vec{b}$ ۳) $3\vec{a} + 4\vec{b}$

حل: ۱) داریم:

$$3\vec{a} - 4\vec{b} = 3\vec{a} + (-4\vec{b})$$

$$(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



با فرض $\vec{V_1}=3\vec{a}$, $\vec{V_2}=4\vec{b}$ خواهیم داشت:

$|\vec{V_1}|=3|\vec a|=3\times2=6$ و

$|\vec{V_2}|=|-4\vec b|=4|\vec b|=4\times1=4$

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطهٔ I) نتیجه می‌شود:

$$|\vec R|^2=|3\vec a+(-4\vec b)|^2=|\vec{V_1}+\vec{V_2}|^2=$$

$$|\vec{V_1}|^2+|\vec{V_2}|^2+2|\vec{V_1}|.|\vec{V_2}|\cos120^\circ$$

$$|3\vec a-4\vec b|^2=6^2+4^2+2\times6\times4\cos120^\circ$$

$$=36+16+48(-\frac{1}{2})=28$$

$$\Rightarrow |3\vec a-4\vec b|=2\sqrt{7}$$

۲) داریم:

$|-3\vec a|=3|\vec a|=3\times2=6$ و $|-3\vec b|=3|\vec b|=3\times1=3$

$$(-3\vec a,-3\vec b)=(\vec a,\vec b)=60^\circ$$

$$|-3\vec a-3\vec b|^2=|-3\vec a|^2+|-3\vec b|^2+2|-3\vec a|.|-3\vec b|\cos60^\circ$$

$$=6^2+3^2+2\times6\times3(\frac{1}{2})=36+9+18=63$$

$$\Rightarrow |-3\vec a-3\vec b|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$

۳) داریم:

$|3\vec a|=3|\vec a|=3\times2=6$ و $|4\vec b|=4\times1=4$

$$(3\vec a,4\vec b)=60^\circ$$

بنابراین:

$$|3\vec a+4\vec b|^2=|3\vec a|^2+|4\vec b|^2+2|3\vec a|.|4\vec b|\cos60^\circ$$

$$=6^2+4^2+2\times6\times4(\frac{1}{2})=36+16+24=76$$

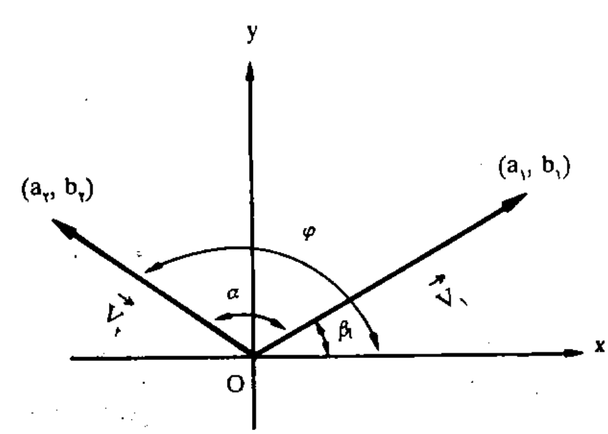
$$\Rightarrow |3\vec a+4\vec b|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$$

تمرین: اگر $|\vec a|=4$ و $|\vec b|=3$ و $(\vec a,\vec b)=30^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $2\vec a+\vec b$ ۲) $3\vec a-2\vec b$ ۳) $-2\vec a-3\vec b$

تعبیر هندسی حاصل‌ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار

دوبردار غیرصفر $\vec{V_1}=\langle a_1,b_1\rangle$ و $\vec{V_2}=\langle a_2,b_2\rangle$ را در دستگاه مختصات با زاویهٔ بین $\alpha=(\vec{V_1},\vec{V_2})$ در نظر می‌گیریم.



با فرض $\overrightarrow{V_۱} = ۳\vec{a}$ ، $\overrightarrow{V_۲} = ۴\vec{b}$ خواهیم داشت:

$$|\overrightarrow{V_۱}| = ۳|\vec{a}| = ۳\times۲ = ۶ \text{ و}$$

$$|\overrightarrow{V_۲}| = |-۴\vec{b}| = ۴|\vec{b}| = ۴\times۱ = ۴$$

با استفاده از دستور برآیند دو بردار (رابطهٔ I) نتیجه می‌شود:

$$|\vec{R}|^۲ = |۳\vec{a} + (-۴\vec{b})|^۲ = |\overrightarrow{V_۱} + \overrightarrow{V_۲}|^۲ =$$

$$|\overrightarrow{V_۱}|^۲ + |\overrightarrow{V_۲}|^۲ + ۲|\overrightarrow{V_۱}|.|\overrightarrow{V_۲}| \cos ۱۲۰^\circ$$

$$|۳\vec{a} - ۴\vec{b}|^۲ = ۶^۲ + ۴^۲ + ۲\times۶\times۴\cos ۱۲۰^\circ$$

$$= ۳۶ + ۱۶ + ۴۸(-\tfrac{۱}{۲}) = ۲۸$$

$$\Rightarrow |۳\vec{a} - ۴\vec{b}| = ۲\sqrt{۷}$$

۲) داریم:

$$|-۳\vec{a}| = ۳|\vec{a}| = ۳\times۲ = ۶ \text{ و } |-۳\vec{b}| = ۳|\vec{b}| = ۳\times۱ = ۳$$

$$(-۳\vec{a}, -۳\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = ۶۰^\circ$$

$$|-۳\vec{a} - ۳\vec{b}|^۲ = |-۳\vec{a}|^۲ + |-۳\vec{b}|^۲ + ۲|-۳\vec{a}|.|-۳\vec{b}|\cos ۶۰^\circ$$

$$= ۶^۲ + ۳^۲ + ۲\times۶\times۳(\tfrac{۱}{۲}) = ۳۶ + ۹ + ۱۸ = ۶۳$$

$$\Rightarrow |-۳\vec{a} - ۳\vec{b}| = \sqrt{۶۳} = ۳\sqrt{۷}$$

۳) داریم:

$$|۳\vec{a}| = ۳|\vec{a}| = ۳\times۲ = ۶ \text{ و } |۴\vec{b}| = ۴\times۱ = ۴$$

$$(۳\vec{a}, ۴\vec{b}) = ۶۰^\circ$$

بنابراین:

$$|۳\vec{a} + ۴\vec{b}|^۲ = |۳\vec{a}|^۲ + |۴\vec{b}|^۲ + ۲|۳\vec{a}|.|۴\vec{b}|\cos ۶۰^\circ$$

$$= ۶^۲ + ۴^۲ + ۲\times۶\times۴(\tfrac{۱}{۲}) = ۳۶ + ۱۶ + ۲۴ = ۷۶$$

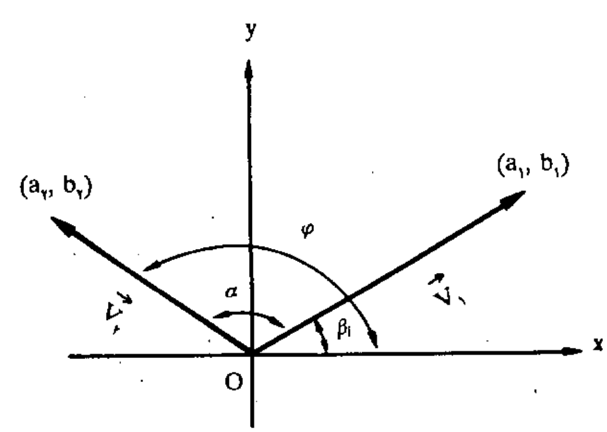
$$\Rightarrow |۳\vec{a} + ۴\vec{b}| = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

تمرین: اگر $|\vec{a}| = ۴$ و $|\vec{b}| = ۳$ و $(\vec{a}, \vec{b}) = ۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ بردارهای زیر را حساب کنید:

۱) $۲\vec{a} + \vec{b}$ ۲) $۳\vec{a} - ۲\vec{b}$ ۳) $-۲\vec{a} - ۳\vec{b}$

تعبیر هندسی حاصل‌ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار

دوبردار غیرصفر $\overrightarrow{V_۱} = <a_۱, b_۱>$ و $\overrightarrow{V_۲} = <a_۲, b_۲>$ را در دستگاه مختصات با زاویهٔ بین $\alpha = (\overrightarrow{V_۱}, \overrightarrow{V_۲})$ در نظر می‌گیریم.



و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \cos(\varphi - \beta) = \cos\varphi \cos\beta + \sin\varphi \sin\beta$$

با توجه به شکل داریم: $\alpha = \varphi - \beta$

اما با توجه به نمودار، داریم:

$$\sin\beta = \frac{b_۱}{|\vec{V}_۱|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_۱}{|\vec{V}_۱|} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{b_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

$$\cos(\pi - \varphi) = \frac{-a_۲}{|\vec{V}_۲|} \Rightarrow -\cos\varphi = \frac{-a_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha = \frac{a_۲}{|\vec{V}_۲|} \cdot \frac{a_۱}{|\vec{V}_۱|} + \frac{b_۱}{|\vec{V}_۱|} \cdot \frac{b_۲}{|\vec{V}_۲|} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{|\vec{V}_۱||\vec{V}_۲|}$$

$$= \frac{\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱||\vec{V}_۲|}$$

ودر نتیجه داریم:

$$\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱||\vec{V}_۲| \cos\alpha$$

همچنین داریم:

$$\cos\alpha = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲} \cdot \sqrt{a_۲^۲ + b_۲^۲}} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{\sqrt{(a_۱^۲ + b_۱^۲)(a_۲^۲ + b_۲^۲)}}$$

مثال ۷: زاویهٔ‌بین دو بردار $\vec{V}_۱ = <-۳, ۴>$ و $\vec{V}_۲ = <۰, ۲>$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\cos\alpha = \frac{(-۳)(۰) + (۴)(۲)}{\sqrt{\left[(-۳)^۲ + ۴^۲\right]\left[(۰)^۲ + ۲^۲\right]}} = \frac{۸}{۱۰} = ۰/۸$$

$$\cos\alpha = ۰/۸ \Rightarrow \alpha = \text{Arc}\cos(۰/۸) \simeq ۳۶°$$

مثال ۸: زاویهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۳$ باشد، زاویه‌ای که دو بردار $(\vec{a} + \vec{b})$ و $(\vec{a} - \vec{b})$ با هم می‌سازند را حساب کنید.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + ۲\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^۲ = ۲^۲ + ۲ \times ۲ \times ۳\cos\frac{\pi}{۳} + ۳^۲ = ۱۹$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^۲ = ۱۹ \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{۱۹}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - ۲\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$|\vec{a}|^۲ - ۲\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^۲$$

$$= ۲^۲ - ۲ \times ۲ \times ۳\cos\frac{\pi}{۳} + ۳^۲ = ۷ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۷}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}||\vec{a} + \vec{b}| \cos[(\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})]$$

$$|\vec{a}|^۲ - |\vec{b}|^۲ = ۴ - ۹ =$$

$$\sqrt{۷} \times \sqrt{۱۹} \cos((\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b})) \Rightarrow ((\vec{a} - \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b})) \simeq ۱۱۵°/۷$$

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۰)

فروشندهٔ دوره‌گرد

MICROMATH
Summer 1992
David Green
Lought borough University of Technology

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

□ مقدمه

مسألهٔ معروف فروشندهٔ دوره‌گرد[1] در رابطه با یافتن کوتاهترین مسیر مسافرت به چند شهر، به هر ترتیب، و هر شهر یکبار، و بازگشت به شهر مبدأ، مسأله‌ای آسان فهم است که بلافاصله به عنوان مسأله‌ای که در دنیای واقعی از اهمیت خاصی برخوردار است شناخته شده است.

بـه ازای تعداد اندکی شهر (مثلاً ۱۰) می‌توان از کامپیوتر کوچکی[2] برای محاسبهٔ جمیع مسیرها و بنابراین یافتن کوتاهترین مسیر با یقینی مطلق بهره برد. اما در مورد تعداد بسیاری از شهرها آزمون جمیع مسیرهای ممکن کاری تقریباً ناممکن است.

حتی ابرکامپیوترهای[3] امروزه نیز نمی‌توانند از عهدهٔ مسألهٔ مشهور ۴۲ ـ شهر[4] برآیند، و محاسبه نشان می‌دهد که حل مسألهٔ ۱۰۰ ـ شهر از این طریق هیچ‌گاه ممکن نیست، زیرا در این مورد در حدود $۱۰^{۱۵۶}$ مسیر برای بررسی موجودند!

روشهای بسیار کاراتری از رهیافت «رام‌نشدنی» فوق برای یافتن جواب بهینهٔ[5] مسأله موجودند اما جمیع آنها از لحاظ محاسباتی بسیار سنگین‌اند.

اخیراً گزارش شده است که «بزرگترین نمونه‌ای که تا این زمان به‌طور بهینه حل شده تنها شامل ۳۱۸ شهر است» [۱].

بسیاری معتقدند که اشکال مزبور ـ محاسبات لازمی که با افزون شدن تعداد شهرها خارج از کنترل می‌شوند ـ از ویژگیهای خود مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد است. البته جستن بهترین جواب یک چیز است و در دست داشتن آن چیز دیگر!

مقالهٔ حاضر گزارش دو روش مستقیم، یکی برمبنای نقشه ودیگری برمبنای جدول، است که نتیجه‌هایی نسبتاً مناسب با محاسباتی بالنسبه اندک به‌دست می‌دهند. مسألهٔ مورد بحث امکاناتی بسیار برای تحقیقات مبتنی بر کلاس درس یا شخصی و پروژه‌هایی در سطحهای وسیع ـ در مورد ریاضیات و محاسبه، و حتی جغرافیا یا اقتصاد ـ به دست می‌دهد.

□ تعریف مسألهٔ مورد نظر

فروشنده‌ای در شهر $T_۱$ باید سفری به شهرهای $T_۲$ ، $T_۳$ ، ... ، T_n ، به هر ترتیب و هر شهر یکبار، کرده به $T_۱$ بازگردد. کدام مسیر کل فاصلهٔ مسافرت را به حداقل می‌رساند؟

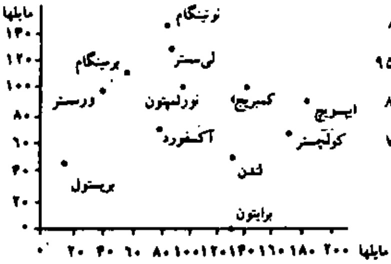
□ نمایش گرافیکی[6]

در این نمایش نقشه‌ای برای نشان دادن شهر تهیّه می‌شود. با به‌کار گرفتن دستگاهی، مختصات شهرها را مشخص می‌کنیم، که از آنها می‌توان فاصله‌های بین شهرها را محاسبه کرد. دستگاه مزبور بین هر دو شهر را کوتاهترین مسیرهای، مستقیم‌الخط در نظر گرفته است.

درک چنین تنظیمی، چون رسم شود، ساده و تشخیص مسیرهای مناسب آن آسان است. اگر قرار شود که از کامپیوتری استفاده به عمل آید، در این صورت ورودی می‌تواند به‌صورت مختصات جدول فاصلهٔ بین شهرها باشد.

◆ مختصات شهری

برمینگام ۵۷,۱۱۷	لندن ۱۳۰,۵۱
برایتون ۱۴۰,۰	لی‌ستر ۸۷,۱۲۷
بریستول ۱۶,۱۴۶	نورثمپتون ۹۵,۱۰۱
کمبریج ۱۴۹,۹۵	نوتینگام ۸۴,۱۴۶
کولچستر ۱۷۴,۷۶	آکسفورد ۷۹,۶۷
ایپسویچ ۱۸۴,۸۹	ورستر ۳۸,۹۸



□ نمایش جدولی[7]

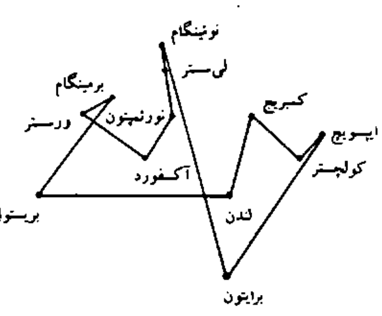
در این نمایش جدولی از فاصله‌های بین شهری تهیّه می‌شود. این روش، با تجویز استفاده از فاصله‌های جاده‌ای واقعی ـ نیز تهیّهٔ مسیرهای یک طرفه یا عدم مسیر، روشی عمومیتر است.

تعیین مسیرهای مناسب، به علت این‌که اساساً طبیعتی عددی دارند، آسان نیست، و در این مورد نمی‌تواند نمایش گرافی‌هاسنی معنی‌داری موجود باشد. نیز داده‌های تهیّه شده می‌توانند به‌جای فاصله با هزینهٔ سفر، زمان سفر یا عامل دیگری مرتبط باشند.

□ روش نزدیکترین مکان بعدی[8]

این روش بسیار ساده، که نتیجه‌های مناسبی به دست می‌دهد، خواهان این است که در هر مرحله فروشندهٔ مورد بحث به نزدیکترین شهر نرفته مسافرت کند.

فرض می‌کنیم فروشنده‌ای مایل باشد که از مبدأ سفرش در نوتینگام، و پیش از بازگشتش به این مبدأ، از یازده شهر دیگر دیدن کند. در این صورت، با استفاده از داده‌های مختصاتی، روش نزدیکترین مکان بعدی، مسیر نشان داده شده در زیر را به طول ۷۱۷ مایل پیدا می‌کند. در این مورد جمیع مسیرهای بین شهرها به خط مستقیم فرض شده و فاصله‌های بین شهرها مستقیماً با استفاده از برنامهٔ مزبور از مختصات مربوطه محاسبه شده‌اند.



این مسیر، چنان‌که آشکار است، مسیری مناسب نیست. اما، هنگامی که به جای ۴۷۹۱۰۱۶۰۰ مسیر تنها یک مسیر محاسبه شده باشد چه انتظاری می‌توان داشت؟

در واقع، به جای این مسیر، شروع از شهر مجاور لی‌ستر، مسیر بازگشت به مبدأ بسیار بهتری (۶۳۳ مایل) را به دست می‌دهد.

این موضوع راهی ساده، برای اصلاح این روش، بدون افزایش محاسبه‌های بسیار مفصل، به دست می‌دهد. به عبارت دیگر از آن‌جا که مسیری بسته مورد نظر است می‌توانیم مسیر مورد بحث را از هر شهر آغاز و به آن ختم کنیم.

بنابراین با تکرار روش اساسی مزبور در مورد هریک از شهرها ممکن است جوابی بهتر به‌دست آوریم (و معمولاً می‌آوریم).

در واقع با تکرار روش مزبور «بهترین» مسیر را، با ۵۹۶ مایل فاصله، به دست می‌آوریم و با این همه باید تنها دوازده مسیر را محاسبه بکنیم.

این مسیر در واقع مسیر بهینه که ۵۲۸ مایل است نیست، اما قابل قبول (۱۳٪ بیشتر) ومحققاًبسیار بهترازمسیراوّلی (۳۸٪ بیشتر) است.

مقدار محاسبهٔ لازم برای روش نزدیکترین مکان بعدی به کار رفته در مورد n شهر متناسب است با n^2، اگر یکبار به کار رود و با n^3 اگر با شروع از هر شهر تکرار شود.

افراد بشری می‌توانند از عهدهٔ «حل» چنین مسأله‌های کوچکی، در صورتی که آنها را به‌طور گرافیکی نمایش دهند، بخوبی برآیند.

افراد بشر، در مورد مسأله‌ای بزرگ، یا اگر تنها جدول فاصله‌ها را داده باشند، از کارایی بسیار کمتری برخوردار خواهند بود.

ادامه دارد...

* * *

یادداشتها

1. Travelling Saleman
2. microcomputer
3. Supercomputers
4. 42 - city problem
5. optimum solution
6. graphical representation
7. Tabular representation
8. Nearest Next Place method

کاربردهایی از تابع همنگار (هموگرافیک) در هندسه

● دکتر احمد شرف‌الدین

خلاصه. در سطور آینده تابع همنگار و تابع جبری را تعریف می‌کنیم و بیان خواهیم کرد که تابع همنگار، تابع جبری یک‌به‌یک است و این خاصیت را در محاسبه طول نیمساز مثلث و اثبات رابطه‌های نیوتن و دکارت به کار خواهیم برد.

۱. تعریف تابع همنگار. تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ که در آن a، b، c، و d اعداد حقیقی و x متغیری است با شرط $x \neq -\frac{d}{c}$ تابع همنگار نامیده‌می‌شود.

۲. تعریف تابع جبری

۱.۲. تعریف تابع همانی. تابع $y = x$ تابع همانی نامیده می‌شود.

۲.۲. تابع ثابت. تابع $y = c$ که در آن c مقدار ثابتی است تابع ثابت نامیده می‌شود.

۳.۲. تعریف تابع جبری. تابع جبری تابعی است که با اجرای اعمال جبری (یعنی جمع، ضرب، تقسیم، توان، و ریشه‌یابی) روی تابع همانی و تابع ثابت حاصل می‌شود به شرط آن‌که تعداد اعمال جبری متناهی باشد.

مثال. تابعهای زیر تابعهای جبری‌اند:

$$y = ۲x \quad \text{و} \quad y = ۲x + ۷ \quad \text{و} \quad y = ۵x^۲ + ۶x - ۴$$

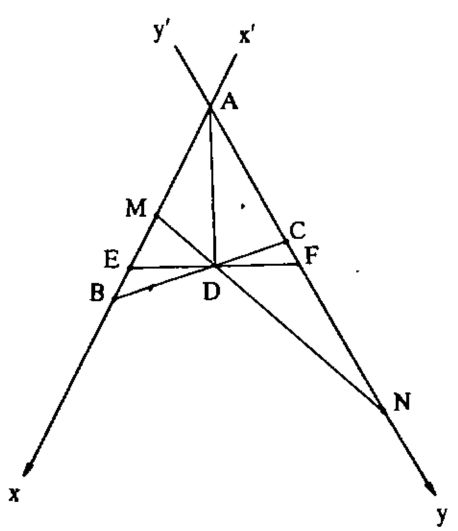
$$\text{و} \quad y = \sqrt[۳]{x^۲ + ۱} \quad \text{و} \quad y = \frac{۴x + ۱}{x^۲ + ۷}$$

۳. تابع جبری یک‌به‌یک. اگر یک تابع جبری یک‌به‌یک باشد آنگاه آن تابع همنگار است.

۴. محاسبه طول نیمساز مثلث. در مثلث ABC، طولهای دو ضلع AB و AC را به ترتیب c و b و اندازه زاویه A را α می‌نامیم. اگر طول نیمساز AD را l بنامیم ثابت کنید رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l}$$

حل. دو محور $x'x$ و $y'y$ را با مبدأ مشترک A، به ترتیب منطبق بر دو خط AB و AC اختیار می‌کنیم. نقطه دلخواه M را روی خط AB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و محل برخورد خط MD را با خط AC، نقطه N می‌نامیم.



اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ را به ترتیب روی دو محور x'x و y'y با x و y نشان می‌دهیم. چون به ازای هر نقطه M از خط AB یک نقطه N از خط AC حاصل می‌شود و برعکس به ازای هر نقطهٔ N از خط AC یک نقطه M از خط AB حاصل می‌شود پس یک رابطه یک‌به‌یک بین x و y وجود دارد. اما این رابطه جبری است زیرا با اجرای اعمال جبری روی x و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی)، عبارت y حاصل می‌شود (برای اثبات این مطلب می‌گوییم در مثلث AMD با معلوم بودن طولهای $\overline{AM}$ و $\overline{AD}$ و اندازه زاویه MAD، اندازه زاویه ADM حساب می‌شود. سپس در مثلث ADN با معلوم بودن طولهای AD و اندازه‌های دو زاویه DAN و ADN طول ضلع AN حساب می‌شود. تمام اعمالی که بکار می‌بریم جبری هستند و تعداد آنها متناهی است. باید توجه داشت که ما محاسبه نکرده‌ایم که طولانی باشد بلکه فقط با استدلال ثابت کرده‌ایم که مقدار $\overline{AN}$ بر حسب مقدار AM بوسیله یک تابع جبری به دست می‌آید).

با توجه به مطالب مذکور تابع y بر حسب x یک تابع همنگار است که آن را با رابطه زیر بیان می‌کنیم:

$$y = \frac{mx + n}{px + q} \qquad (۱)$$

اگر در شکل مقدار $\overline{AM}$ را برابر y اختیار کنیم آنگاه مقدار $\overline{AN}$ برابر x می‌شود پس می‌توان در رابطه (۱) جای x و y را عوض نمود و چنین نوشت:

$$x = \frac{my + n}{py + q} \qquad (۲)$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $m = -q$. با توجه به این مطلب رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \qquad (۳)$$

حال توجه می‌کنیم که اگر نقطه M روی محور x'x به سوی نقطه A میل کند آنگاه نقطه N روی محور y'y به سوی همان نقطه A میل می‌کند. پس اگر در رابطه (۳)، مقدار x به سوی صفر میل کند مقدار y به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که $n = ۰$. لذا رابطه (۳) به صورت زیر است:

$$y = \frac{mx}{px - m} \qquad (۴)$$

رابطه (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۵)$$

پس هنگامی که نقطه M روی خط AC حرکت می‌کند بین دو مقدار متغیر $\overline{AM}$ و $\overline{AN}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{AN}} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۶)$$

برای تعیین مقدار ثابت $\frac{p}{m}$ یک حالت خاص در نظر می‌گیریم: حالتی که $\overline{AM} = \overline{AN}$ باشد. از نقطه D عمودی بر خط AD رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن عمود را با دو خط AC و AB به ترتیب E و F می‌نامیم. با توجه به رابطه (۵) چنین می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{p}{m} \qquad (۷)$$

از طرفی چنین داریم:

$$l = \overline{AD} = \overline{AE}\cos\frac{\alpha}{۲} \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{p}{m} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۹)$$

رابطه (۵) با توجه به رابطه (۹) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۰)$$

اگر نقطه M بر روی نقطه B جای گیرد آنگاه نقطه N بر روی نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان در رابطه (۱۰) به جای x و y به ترتیب c و b گذاشت و رابطه زیر را به دست آورد:

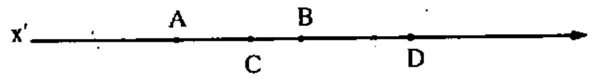
$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۱)$$

که همان رابطه مطلوب است. از این رابطه طول نیمساز مثلث (یعنی l) بر حسب b و c (یعنی طولهای دو ضلع AC و AB) و اندازه زاویه A حساب می‌شود.

۵. تقسیم توافقی

۱.۵ تعریف تقسیم توافقی. بر محور x'x چهار نقطه A، B، C و D در نظر می‌گیریم. می‌گوییم این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۲)$$



۵ . ۲ . کاربرد تابع همنگار در تقسیم توافقی

سه نقطه A ، B و C را بر محور x'ox در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه D را بر محور x'ox طوری تعیین کنیم که چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند یعنی رابطه زیر مسلم باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۳)$$

برای این منظور دو خط موازی AP و BQ رسم می‌کنیم و بر خط AP نقطه دلخواه $M \neq A$ را اختیار می‌کنیم و محل برخورد خط ML با خط BQ را نقطه N می‌نامیم. بر خط BQ نقطه L را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{NB} = \overline{BL}$ باشد. نقطه D محل برخورد خط ML با خط AB نقطه مطلوب است یعنی چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. برای اثبات می‌گوییم از تشابه دو مثلث CAM و CBN رابطه زیر حاصل می‌شود :

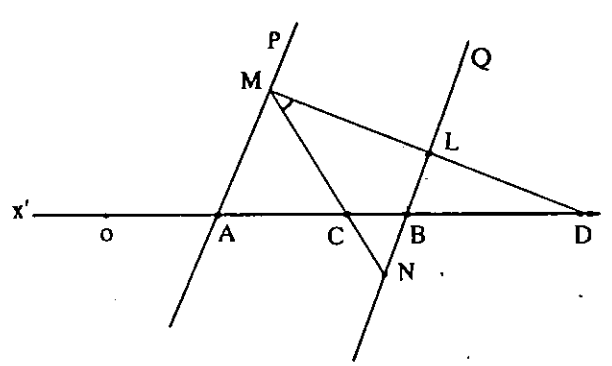
$$\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{BN} \qquad (۱۴)$$

همچنین از تشابه دو مثلث DAM و DBL رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AM}{BL} \qquad (۱۵)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۴) و (۱۵) با رعایت آنکه $NB = BL$ ، حاصل می‌شود :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$



که چون علامتهای جبری در نظر گرفته شود رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

حال اگر دو نقطه A و B را ثابت نگاه داریم و نقطه C را روی محور x'x حرکت دهیم نقطه D روی این محور حرکت می‌کند. اما از ترسیم پیشگفته نتیجه می‌شود که به ازای هر نقطه C فقط یک نقطه D حاصل می‌شود و برعکس.

اگر قرار دهیم $\overline{OC} = x$ و $\overline{OD} = y$ ، از مطالب بالا نتیجه می‌شود یک رابطه یک‌به‌یک بین x و y وجود دارد. این رابطه جبری است زیرا ترسیم پیشگفته نشان می‌دهد که مقدار y بر حسب x با اجرای اعمال جبری روی x و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی) حاصل می‌شود زیرا رابطه تشابه دو مثلث یک رابطه جبری است.

پس تابع y بر حسب x یک تابع جبری یک‌به‌یک است یعنی یک تابع همنگار به صورت زیر :

$$y = \frac{mx + n}{px + q} \qquad (۱۶)$$

اکنون می‌گوییم اگر نقطه C بر نقطه D جای گیرد آنگاه نقطه D بر نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان جای x و y را در رابطه (۱۶) عوض کرد یعنی می‌توان نوشت :

$$x = \frac{my + n}{py + q} \qquad (۱۷)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که $m = -q$. با توجه به این مطلب تابع (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \qquad (۱۸)$$

۵ . ۳ . رابطه نیوتن . اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند و نقطه O وسط پاره خط AB باشد آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه نیوتن مشهور است برقرار است :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}\,.\,\overline{OD} \qquad (۱۹)$$

برهان. محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ O اختیار می‌کنیم. دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم. اگر نقطه C را روی خط AB حرکت می‌دهیم آنگاه نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. اگر قرار دهیم $OC = x$ و $OD = y$ رابطه زیر برقرار است (بنابر مطلب

شماره ۵ . ۲) :

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \quad (۲۰)$$

اگر نقطه C روی خط AB حرکت کند و به سوی نقطه O میل کند نقطه D به سوی بی‌نهایت می‌رود پس اگر در رابطه (۲۰) مقدار x به سوی صفر میل کند مقدار y به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. از این مطلب نتیجه می‌شود که ۰ = m پس رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$y = \frac{n}{px} \quad (۲۱)$$

پس

$$xy = \frac{n}{p} = \text{ثابت} \quad (۲۲)$$

پس هنگامی‌که نقطه C و D حرکت می‌کنند حاصل‌ضرب $\overline{OC}.\overline{OD}$ ثابت می‌ماند.

$$\overline{OC}.\overline{OD} = \frac{n}{p} \quad (۲۳)$$

برای تعیین این مقدار ثابت یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه A (یا B) میل کند در این صورت نقطه D به سوی نقطه A (یا B) میل می‌کند و نتیجه می‌گیریم که :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \frac{n}{p} \quad (۲۴)$$

رابطه (۲۳) با توجه به رابطه (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$$

۵ . ۴ . رابطه دکارت. اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه دکارت مشهور است برقرار است :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

برهان. دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم و نقطه C را روی خط AB را حرکت می‌دهیم. نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ A اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم :

$\overline{AC} = x$ و $\overline{AO} = y$. بنابر مطلب شماره (۵ . ۲) ، بین x و y یک رابطه همنگار به صورت زیر برقرار است :

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \quad (۲۵)$$

اگر نقطه C حرکت کرده و به سوی نقطه A میل کند نقطه D حرکت کرده و به سوی نقطه A میل می‌کند پس اگر در رابطه (۲۵) مقدار x بسوی صفر میل کند مقدار y نیز به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که ۰ = n یعنی رابطه (۲۵) به صورت زیر است :

$$y = \frac{mx}{px - m} \quad (۲۶)$$

از رابطه (۲۶) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \quad (۲۷)$$

یعنی وقتی دو نقطه C و D حرکت می‌کنند. رابطه زیر مسلم است :

$$\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \quad (۲۸)$$

برای تعیین این مقدار ثابت، یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه B میل کند. در این صورت نقطه D نیز به سوی نقطه B میل می‌کند. با توجه به این مطلب از رابطه (۲۸) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AB}} = \frac{p}{m} \quad (۲۹)$$

و یا

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{p}{m} \quad (۳۰)$$

رابطه (۲۸) با رعایت رابطه (۳۰) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$$

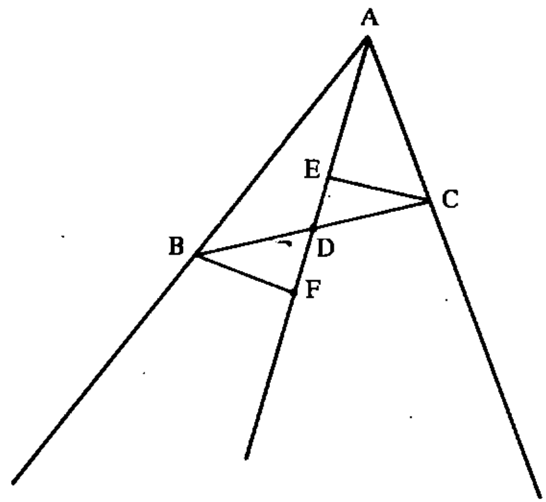
۵ . ۵ . محاسبه طول نیمساز مثلث . در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم و اندازه زاویه A را α می‌نامیم. می‌خواهیم رابطه زیر را ثابت کنیم :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$$

برهان. از دو نقطه B و C عمودهای BF و CE را بر خط AD فرود می‌آوریم. می‌گوییم چهار نقطه A ، D ، E و F تشکیل تقسیم

توافقی می‌دهند. برای اثبات این مطلب می‌گوییم از تشابه دو مثلث DBF و DEC رابطه زیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{DE}{DF} = \frac{CE}{BF} \qquad (۳۱)$$



از تشابه دو مثلث ABF و ACE رابطه زیر حاصل می‌شود :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{CE}{BF} \qquad (۳۰)$$

از مقایسه دو رابطه (۲۹) و (۳۰) رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE}{AF} \qquad (۳۱)$$

رابطه (۳۱) با رعایت علامتهای جبری، به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

پس چهار نقطه A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. لذا می‌توانیم رابطه دکارت را به صورت زیر بنویسیم (بنابر ۵ . ۴) :

$$\frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}} \qquad (۳۲)$$

اما در دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و AFB دو رابطه زیر برقرار است.

$$\overline{AE} = \overline{AC}\cos\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \overline{AF} = \overline{AB}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (۳۳)$$

رابطه (۳۲) با رعایت دو رابطه (۳۳) به صورت زیر درمی‌آید :

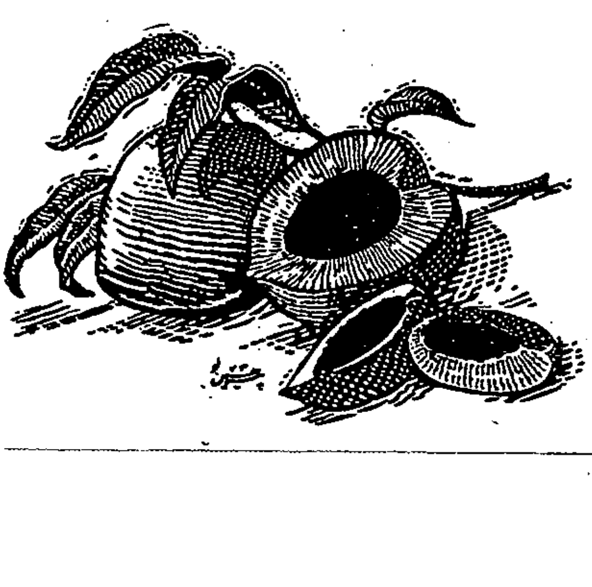
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$$

این مسئله را در شماره (۴) حل کرده‌ایم.

تفریح اندیشه ۱

ضخامت لایهٔ نرم آلبالو با ضخامت هستهٔ آن یکی است. می‌پذیریم که شکل آلبالو و هسته گرد است. آیا شما می‌توانید در ذهنتان برآورد کنید که حجم قسمت نرم آلبالو از حجم هسته، چند بار بیشتر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۰)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور — Kutepov & Rubanov

اثبات چند اتحاد مثلثاتی به کمک فرمول اویلر

فرمول اویلر عبارت است از:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x \quad (۱)$$

که در آن e مبنای لگاریتم طبیعی یا بسط $(۱+\frac{۱}{n})^n$ چون $n \to \infty$ و i عدد $\sqrt{-۱}$ است. به کمک این فرمول می‌توان بسیاری از اتحادهای مثلثاتی از جمله اتحادهای زیر را به اثبات رساند.

اثبات اتحاد اساسی مثلثات: $\sin^۲x + \cos^۲x = ۱$. (۱)

حل: در فرمول اویلر $-x$ را به جای x قرار می‌دهیم:

$$e^{-xi} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x \quad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$e^{xi} . e^{-xi} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)$$

$$e^{۰} = \cos^۲x - i^۲ \sin^۲x$$

$$۱ = \cos^۲x - (-۱) \sin^۲x$$

$$\sin^۲x + \cos^۲x = ۱$$

(۲) اثبات اتحادهای:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

حل: اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$e^{xi} . e^{yi} = e^{(x+y)i} \quad (۳)$$

با استفاده از فرمول اویلر داریم:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{(x+y)i} = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

با استفاده از این رابطه‌ها و (۳) داریم:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

$$\cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y$$

$$+ i^۲ \sin x \sin y = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$

$$(\cos x \cos y - \sin x \ \sin y) + (\sin x \cos y + \cos x \sin y)i = \cos (x + y) + i \sin (x + y)$$

با برابر هم قرار دادن قسمتهای حقیقی و قسمتهای انگاری از دو طرف، اتحادهای مطلوب را به‌دست می‌آوریم.

(۳) اثبات اتحادهای:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

حل: تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(e^{xi})^2 = e^{2xi}$$

با استفاده از این تساوی و فرمول اویلر خواهیم داشت:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$\cos^2 x + i^2 \sin^2 x + 2i \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2i \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x$$

در نتیجه:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

و

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

(۴) استخراج فرمول دموآور:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

حل: تساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(e^{xi})^n = e^{nxi} \qquad (۴)$$

بااستفاده از فرمول اویلر چون nx را به جای x قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx \qquad (۵)$$

اکنون چون در طرفین رابطهٔ (۴) از فرمولهای (۱) و (۵) قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos nx + i \sin nx$$

که همان رابطهٔ دموآور است.

تبصره. همان‌طور که در فوق هم اشاره شد به کمک فرمول اویلر می‌توان بسیاری از اتحادهای مثلثاتی را اثبات کرد و از خواننده می‌خواهیم که خود در این مورد به تحقیق پرداخته اتحادهای دیگری را به اثبات برساند.

ادب ریاضی

ددکیند زندگی طویل و آرامی داشته است. با اینکه برخی از آثارش (نظریهٔ او دربارهٔ اعداد اصم) برای دانشجویان آنالیز که یک نسل قبل از مرگ او به وجود آمدند، کلاسیک و عادی شده بود، وی بزودی در شمار ریاضی‌دانان افسانه‌ای درآمد و در مدت حیاتش بسیاری از مردم او را در شمار درگذشتگان محسوب می‌داشتند. دوازده سال قبل از مرگش «تقویم ریاضی‌دانان» که از طرف مؤسسهٔ نشریات توبنر «Teubner» منتشر می‌شد تاریخ مرگ ددکیند را چهارم سپتامبر ۱۸۹۹ میلادی نوشته بود و این موضوع خیلی باعث خنده و تفریح «آن مرحوم» شد و در نامه‌ای که به ناشر تقویم مزبور نوشت چنین متذکر شد:

«احتمالاً ممکن است تاریخ روز و ماه که برای وفات من داده‌اید صحت داشته باشد، لیکن تاریخ سال حتماً اشتباه است. طبق دفتر یادداشتهایم در آن روز از صحت کاملی برخوردار بوده‌ام و حتی با دوست و مهمان برجستهٔ خودم آقای ژرژ کانتور استاد دانشگاه هال مباحثهٔ پرحرارتی دربارهٔ «دستگاه و نظریه» داشته‌ایم.»

ریاضی‌دانان نامی، اریک تمپل بل

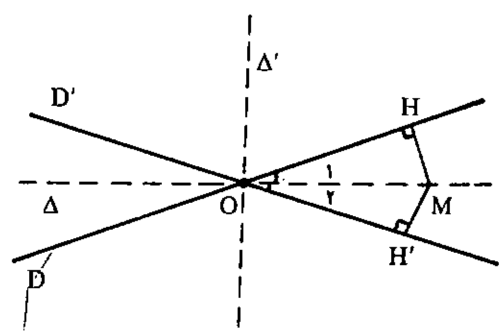
حسن صفاری

مکان هندسی

(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

۳ـ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط است.



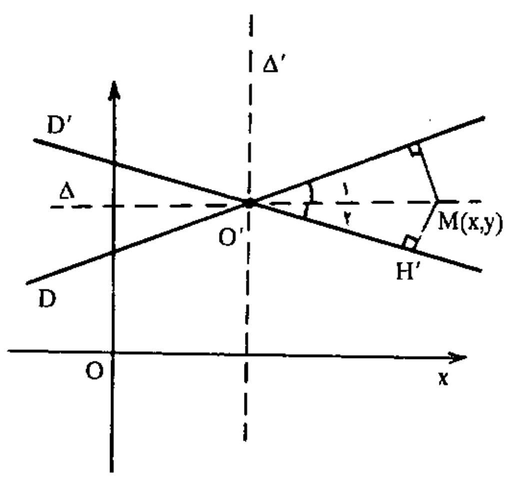
اثبات: دو خط متقاطع D و D′ را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط را رسم می‌کنیم و Δ و Δ′ می‌نامیم.

اولاً ـ اگر M نقطه‌ای واقع بر یکی از نیمسازها (دو خط Δ و Δ′) باشد، از دو خط D و D′ به یک فاصله است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک زاویه حاده متساویند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و OM = OM و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$) پس: MH = MH′.

ثانیاً ـ اگر M نقطه‌ای باشد که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد (MH = MH′) ، در این صورت روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط D و D′ واقع است، زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک ضلع متساویند (OM = OM و MH = MH′ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$) پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ یعنی OM نیمساز زاویهٔ HOH′ است.

◆ **اثبات به روش تحلیلی**

فرض می‌کنیم $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x + b'y + c' = 0$ باشد. در این صورت اگر M (x , y) نقطه‌ای باشد که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:



$$MH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} , MH' = \frac{|a'x + b'y \quad c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

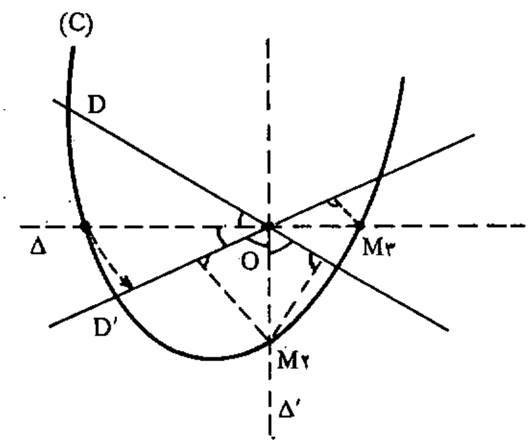
$$MH = MH' \Rightarrow \boxed{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}} \quad (1)$$

معادلهٔ (۱) که به صورت

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^{2}+b'^{2}}}$$

نیز نوشته می‌شود، دو خط راست عمود بر هم را که همان خطوط Δ و Δ′ نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ می‌باشند، مشخص می‌کند. به‌عکس مشخص است، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و D′ به یک فاصله است یعنی روی نیمساز زاویه‌های بین دو خط D و D′ قرار دارد.

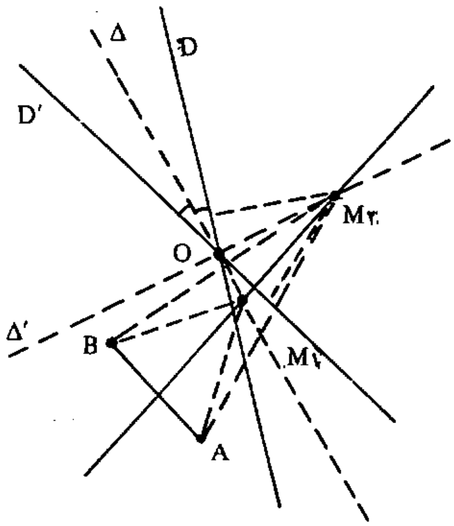
مثال ۱ : دو خط متقاطع D و D′ و منحنی (c) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (c) پیدا کنید که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد.



حل : خطهای Δ و Δ′ نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) جواب مسأله است و به تعداد نقاط برخورد، جواب وجود دارد. (در شکل بالا ۳ جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2 و M_3).

مثال ۲ : دو خط متقاطع D و D′ و دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد.

حل : نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′، همچنین عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های تقاطع این عمودمنصف با نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′ جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. (در شکل بالا دو جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2).



مثال ۳ : معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط $D:۳x-۴y-۱=۰$ و $D':۷x+۲۴y-۵=۰$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^{2}+b'^{2}}}$$

$$\frac{۳x-۴y-۱}{\sqrt{۹+۱۶}}=\pm\frac{۷x+۲۴y-۵}{\sqrt{۴۹+۵۷۶}}$$

$$\Rightarrow\frac{۳x-۴y-۱}{۵}=\pm\frac{۷x+۲۴y-۵}{۲۵}$$

$$\Rightarrow ۱۵x-۲۰y-۵=\pm(۷x+۲۴y-۵)$$

$$۱۵x-۲۰y-۵=۷x+۲۴y-۵\Rightarrow ۸x-۴۴y=۰$$

$$\Rightarrow\boxed{۲x-۱۱y=۰}$$

$$۱۵x-۲۰y-۵=-۷x-۲۴y+۵\Rightarrow$$

$$۲۲x+۴y-۱۰=۰\Rightarrow\boxed{۱۱x+۲y-۵=۰}$$

مثال ۴: نقطه‌ای از منحنی (c) به معادلهٔ $y = \frac{x+1}{2x-1}$ را تعیین کنید که از دو خط $D: x + 2y - 1 = 0$ و $D': x - 2y + 3 = 0$ به یک فاصله باشد.

حل: معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط D و 'D را به دست می‌آوریم و نقطه تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow$$

$$x+2y-1 = \pm(x-2y+3)$$

$$\Rightarrow x+2y-1 = x-2y+3 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x+2y-1 = -x+2y-3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

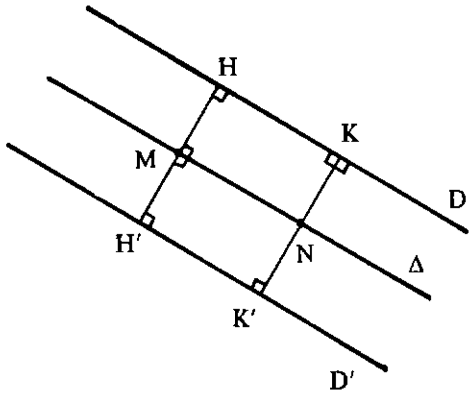
معادلات نیمسازهای زوایای بین دو خط D و 'D.

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow M_2 \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

نقاط جواب مسأله

۴ـ مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متوازی به یک فاصله است، خطی است راست موازی آن دو خط و به یک فاصله از آن دو خط.



اثبات: دو خط راست متوازی D و 'D را در نظر می‌گیریم. اگر M نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد (MH = MH')، از نقطهٔ M خط Δ را به موازات دو خط راست D و 'D رسم می‌کنیم.

اولاً ـ هر نقطه‌ای مانند N از خط Δ ، از دو خط D و 'D به یک فاصله است زیرا چهار ضلعیهای MHKN و MH'K'N مستطیل یا مربعهای متساویند. $N \in \Delta \Rightarrow NK = NK'$

ثانیاً ـ هر نقطه‌ای که از دو خط D و 'D به یک فاصله باشد، روی خط Δ واقع است. $NK = NK' \Rightarrow N \in \Delta$

پس خط Δ مکان هندسی مورد نظر است.

◆ **اثبات به روش تحلیلی**

دو خط راست متوازی D و 'D به معادله‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{ax+by+c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow ax + by + c = \pm(ax + by + c')$$

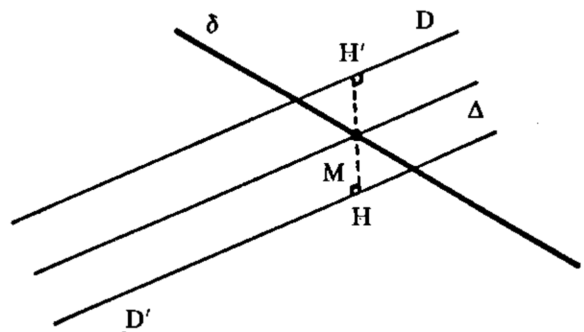
$$\Rightarrow \boxed{2ax + 2by + c + c' = 0} \;(1)\; \text{یا} \; \boxed{ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0}$$

معادلهٔ (۱) خط راستی است که با دو خط D و 'D موازی است زیرا:

$$m/D = m/D' = m/\Delta = \frac{-a}{b}$$

به عکس، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و 'D به یک فاصله است.

مثال ۱: دو خط راست موازی D و 'D و خط δ (یا منحنی C) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط δ (یا منحنی C) پیدا کنید که از دو خط D و 'D به یک فاصله باشد.



حل: مکان هندسی نقاطی را که از دو خط متوازی D و 'D به یک فاصله‌اند، رسم می‌کنیم (خط Δ). نقطهٔ برخورد این خط با خط δ (یا منحنی C) جواب مسأله است.

مثال ۲: دو خط $D: x - ۲y + ۱ = ۰$ و $D': ۲x - ۴y + ۳ = ۰$ مفروضند. روی سهمی به معادلهٔ $x^۲ + ۸y - ۲x - ۸ = ۰$ نقطه‌ای بیابید که از دو خط فوق به یک فاصله باشد.

حل: دو خط فوق موازی‌اند بنابراین معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که از این دو خط به یک فاصله است به صورت زیر است:

$$D: x - ۲y + ۱ = ۰ \text{ یا } D: ۲x - ۴y + ۲ = ۰$$

$$D': ۲x - ۴y + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta: ۲x - ۴y + \frac{۳+۲}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۴y + \frac{۵}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{۴x - ۸y + ۵ = ۰}$$

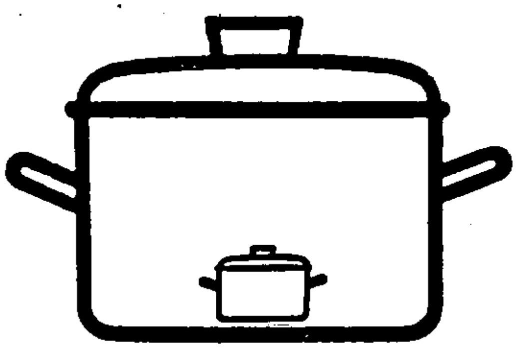
حال نقطهٔ برخورد این خط با سهمی به معادلهٔ $x^۲ + ۸y - ۲x - ۸ = ۰$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^۲ + ۸y - ۲x - ۸ = ۰ \\ ۴x - ۸y + ۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_۱ \begin{vmatrix} x = ۱ \\ y = \frac{۹}{۸} \end{vmatrix} \quad M_۲ \begin{vmatrix} x = -۳ \\ y = -\frac{۷}{۸} \end{vmatrix}$$

تفریح اندیشه ۲

دو قابلمهٔ مسی با شکل یکسان و ضخامت یکسان دیواره‌ها مفروض است. گنجایش یکی ۸ بار از گنجایش دیگری بیشتر است. وزن آن چقدر بیشتر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

دو خاصیت مهم در انتگرال معین

● سیامک جعفری (دبیر ریاضی - اهواز)

$$۱)\ \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$$

اثبات:

$$a - x = u \Rightarrow -dx = du,$$

$$\int_{0}^{a} f(a-x)\,dx = \int_{a}^{0} -f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\,dx$$

اکنون با هم جمع می‌کنیم:

$$I + I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین:

$$I = \frac{\pi}{4}$$

* چندین بار هم می‌توان از این خاصیت استفاده کرد.

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

حل:

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{\cos^2(\pi - x)}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\pi \sin x}{\cos^2 x}\,dx - \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

اکنون می‌توان جمع کرد:

انتگرال دوّم همان I در صورت مسئله، است که به طرف چپ منتقل می‌کنیم.

برای محاسبه این انتگرال ساده $\cos x = u$ می‌گیریم.

$$2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$2I = -\pi \int \frac{du}{u^2} = -\pi \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{\pi}{u}$$

$$2I = \frac{\pi}{\cos x}\Big|_0^\pi = \pi\left(\frac{1}{\cos\pi} - \frac{1}{\cos 0}\right) = \pi(-1-1)$$

$$I = -\pi$$

که مقدار آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

* اگر حد پایین صفر نباشد می‌توانیم با روش زیر آنها را تبدیل کنیم:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$x = a\theta + b \Rightarrow \begin{cases} a(\frac{\pi}{2}) + b = \pi \\ a(0) + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta + \frac{\pi}{2}) \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta . \sin\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \frac{\pi}{2}) \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \frac{\pi}{2}) \cos\theta \, d\theta$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta + \frac{\pi}{2}) \cos\theta - (\theta - \frac{\pi}{2}) \cos\theta \, d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 . \frac{\pi}{2} \cos\theta \, d\theta = \pi [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2I = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

خاصیت دیگر که حالت کلّیتر مسألهٔ قبلی است.

$$2) \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

اثبات:

حد بالا $u = a + b - b = a$

$a + b - x = u \Rightarrow -dx = du$

حد پایین $u = a + b - a = b$

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int_b^a f(u)\,du$$

$$= \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال:

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{\sqrt{1+3-x}}{\sqrt{4-(1+3-x)} + \sqrt{1+3-x}} dx$$

$$I = \int_1^3 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx$$

$$2I = \int_1^3 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}} dx \Rightarrow I = 1$$

به‌عنوان تمرین انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$1) \int_0^\pi \frac{x\,dx}{1 + \sin x}$$

$$2) \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{tg x}} dx$$

هنر محاسبه یا راه‌های میان بُر

در محاسبهٔ اعداد

نوشتهٔ جرالد و. کِلی
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

☐ اشاره:

آیا مایلید باسرعتی معادل دو یا سه برابر سرعتِ معمول، اعداد را محاسبه کنید؟ آیا مایلید با یک محاسبهٔ سریعِ ذهنی، درستی یا نادرستی نتایج عملیات ماشین حساب خود را بررسی کنید؟

هرگز به دوستان و آشنایانی که بادقت کامل و سرعتی خیره کننده چنین محاسباتی را انجام می‌دهند، رشک نبرید، زیرا توانایی آنان در انجام دادن این گونه محاسبات، عموماً ذاتی نیست؛ شما نیز می‌توانید با پیروی از روشهای ارائه شده در این **مقاله**[1] به چنین مهارتهایی دست یابید.

هنر محاسبه یا چگونگی محاسبهٔ سریع و آسان اعداد، روش درست و آزموده شده‌ای است که شما را در رویارویی با ریاضیات مورداستفاده در زندگی روزمره - انجام دادن عملیات مربوط به جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ... - یاری می‌دهد. در واقع پدیدآورندهٔ کتاب حاضر بر آن بوده است تا راه‌ها و شگردهای سریع و آسان محاسبهٔ اعداد راکه مدارس از ارائه آنها غفلت ورزیده‌اند، به خواننده بیاموزد.

برای هر راه میان بُر، چند مثال داده شده است تا خواننده به چگونگی کاربرد آن کاملاً آشنا شود. با این حال، کوشش شده است تا تمرینها و مثالها، کوتاه و مختصر باشد.

یکی از ویژگیهای روش مذکور، آن است که پاسخ مثالها همراه با برهان مربوط آمده است. برهان ارائه شده، نشان می‌دهد که استفاده از راه میان بُر تا چه حد ساده‌تر از راه حلِّ معمولی است. نتیجهٔ به‌دست‌آمده غالباً چنان شگفت‌آور است که باور کردنش مشکل می‌نماید و این خود انگیزه‌ای برای ایجاد عادتِ خوبِ بررسیِ درستی یا نادرستی نتایج است.

البته راه‌های میان بُر در محاسبهٔ اعداد برای جایگزینی کار با ماشین حساب نیست. بلکه برعکس مجال برای بهره‌مندی از این هر دو شیوهٔ محاسبه باقی است. دیری است که برای اعجازِ الکترونیک در محاسبات پیچیده هیچ رقیبی پا به میدان نگذارده است. اما در مورد مسأله‌های ساده‌تر یک راه میان بُر یا محاسبهٔ ذهنی سریع، غالباً پاسخ را سریعتر از ماشین به دست می‌دهد. و این‌جاست که باید گفت: «ابزارهای قدیمی و مورداعتماد، یعنی مداد و کاغذ را نادیده نینگار.» مداد و کاغذ کم هزینه‌اند، به‌آسانی حمل می‌شوند، هرگز به باتری نیاز ندارند، حاصل محاسبات را ثبت می‌کنند و از این رو می‌توان نتایج به‌دست آمده را بازبینی کرد. هرکدام از این دو، مزایای خاص خود را دارند. بنابراین، بسته به نیاز، می‌توان یکی از این روشها یا آمیزه‌ای از آنها را در حل مسأله‌ها به کار گرفت.

باید به خاطر داشت که بهترین شیوهٔ دستیابی به‌سرعت، دقت و سهولت در محاسبهٔ اعداد، انجام دادن تمرینهای پیگیر و منظم است. باشد که این مطالب شما را به درک بهتر از اصول حساب و شگفتیهای کار با اعداد رهنمون سازد.[2]

---

(۱) برگرفته و ترجمه شده از کتاب:
Kelly, W. Gerald. Short - Cut Math . Dover Publications, Tm C. N. Y, 1984.

(۲) ـ م . برداشت از سخن ناشرِ کتاب و توضیح ناشرِ کتاب خارجی مشابهِ کتاب موردِ ترجمهٔ حاضر.)

□ اصول روشهای میان بُر درمحاسبهٔ اعداد

۱ ـ ۱ ـ راه‌های اصلی ساده کردن محاسبات

شیوه‌های میان بُر در محاسبهٔ اعداد براساس تغییر دادن اعداد و عملیاتِ «دشوار» به اعداد و عملیاتِ آسانتر استوار است. برای مثال، در مورد یافتن حاصل جمع ۲۹ و ۳۶ می‌توان عدد ۱ را به ۲۹ اضافه و از ۳۶ کم کرد تا مسأله به شکل ۳۵ + ۳۰ تبدیل شود. در این صورت پاسخ مسأله یعنی ۶۵ فوری به‌دست می‌آید. به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که افزودن و کم کردنِ عددِ ۱، مسأله را آسان می‌کند ولی تغییری در پاسخ نمی‌دهد. این اصل، یعنی اصلِ «هم ارزی» که در محاسبهٔ اعداد به‌عنوان روشِ میان بُر موردِاستفاده قرار می‌گیرد، دستیابی به پاسخِ درست را آسانتر و سریعتر می‌کند.

از این روش نیز می‌توان درضرب استفاده کرد. برای مثال، ۱۵ × ۲۸ را در نظر بگیرید. اگر ۲۸ را نصف (= ۱۴) و ۱۵ را دو برابر (= ۳۰) کنیم، مسأله به‌صورت ۳۰ × ۱۴ در می‌آید و چنان که می‌بینید پاسخ، یعنی ۴۲۰، بآسانی به‌دست می‌آید. و این همان نتیجه‌ای است که از ضرب ۲۸ × ۱۵ گرفته می‌شُد.

سبب دشوار شدن محاسبات همواره «اندازهٔ» اعداد نیست، بلکه «نوعِ» اعداد نیز می‌تواند مشکل آفرین باشد. البته می‌دانید که ضرب‌کردن یک عدد در ۱۰ بسیار آسانتر از ضرب کردن آن در ۹ است، هرچند که ۱۰ از ۹ بزرگتر است. با این حال، عددِ «دشوارِ» ۹ را می‌توان به دو عددِ «آسانِ» ۱۰ منهایِ ۱ (که برابر ۹ است) بدل کرد. بنابراین، برای ضرب کردن عددی در ۹، می‌توان آن را در ۱۰ ضرب و عدد موردنظر (مضروب فیه) را از حاصل ضرب کم کرد. به این ترتیب:

۳۷ × ۹ = ۳۷۰ ، ۳۷۰ − ۳۷ = ۳۳۳. البته ۳۷۰ − ۳۷ همان ۳۷ × (۱۰ − ۱) است که جایگزین ۳۷ × ۹ شده است. هر دو روش، پاسخ واحدی به‌دست می‌دهد.

عددهای ۰، ۱، ۱۰ و ۲ جزء آسانترین عددها هستند. همین طور عددهای ۱۰۰، ۱۰۰۰ و جز آنها و نیز سایر «عددهای مختوم به صفر» مانند ۲۰ و ۳۰ و ... کار محاسبه را آسان می‌کنند. بنابراین اگر بتوان عدد دشواری را به یکی از این عددها تبدیل کرد، راه رسیدن به پاسخِ سریع هموار می‌شود.

چه بسا که تبدیل یک عمل دشوار به دو یا سه عمل ساده کار محاسبه را آسانتر و سریعتر می‌کند؛ درست همان گونه که پیمودنِ یکایک پلّه‌های میانِ طبقه‌های اوّل و دوّم یک ساختمان راحت‌تر از کوشش برای پیمودن آنها با یک جهشِ بلند است. برای مثال: در مورد ضرب ۶۴ در ۲۵ می‌توان ۴۶ را بر ۴ تقسیم (= ۱۶) و حاصل را در ۱۰۰ ضرب کرد تا نتیجه، یعنی ۱۶۰۰ به‌دست آید. این عمل بدان سبب نتیجه بخش است که تقسیم بر ۴ و ضرب در ۱۰۰، درست مانند ضرب کردن در $\frac{۱۰۰}{۴}$ (یعنی مساوی ۲۵) است.

یک راه دیگرِ ساده‌کردن محاسبه آن است که عددها را به جزءهای آسانتر تقسیم کنید. برای‌مثال، در موردتقسیم‌عددی بر ۱۶، می‌توان آن عدد را بر ۲ و سپس بر ۸ تقسیم کرد یا این‌که دوبار آن را بر ۴ تقسیم کرد، زیرا ۸ × ۲ و ۴ × ۴ هرکدام مساوی ۱۶ است. برای تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ می‌توان مقسوم را نصف کرد (= ۱۲) و حاصل را بر ۸ تقسیم کرد تا نتیجه (= ۱۴) به‌دست آید، یا این‌که ۲۲۴ را بر ۴ تقسیم (= ۵۶) و حاصل را بار دیگر به ۴ بخش کرد (= ۱۴). چنان‌که ملاحظه می‌شود، تقسیم ۲۲۴ بر ۱۶ همان نتیجهٔ واحد، یعنی ۱۴ را می‌دهد؛ زیرا هر سه راهِ مذکور هم ارز هستند.

یک عدد را نیز می‌توان به ترتیبی دیگر به چند پاره تقسیم کرد، مثلاً تقسیم به یکان، دهگان، صدگان و ... زیرا انجام دادن محاسبه با یک عددِ تقسیم شده به جزءهای کوچکتر، بسیار آسانتر خواهد بود. برای مثال، عدد ۶۱۳ را می‌توان به صورت ۳ + ۱۰ + ۶۰۰ در آورد. چنانچه بخواهید عدد ۶۱۳ رادرعدد دیگری مثل ۱۲ ضرب کنید، می‌توانید هرجزء را در آن عدد ضرب و نتیجه‌های به‌دست آمده را با هم جمع کنیم، به این ترتیب:

```
۶۰۰ × ۱۲  =  ۷۲۰۰
 ۱۰ × ۱۲  =   ۱۲۰
  ۳ × ۱۲  =    ۳۶
─────────    ─────
۶۱۳ × ۱۲  =  ۷۳۵۶
```

علاوه بر روشهای معرفی شده در بالا، می‌توان باحذف یا آسان کردن روند محاسبهٔ‌اعداد مانند «انتقال» درجمع وضرب، «ده بر یک» در تفریق، پیچیدگیهای تقسیم «طولانی» و لزوم به‌ یاد سپاریِ نتایج به هنگام حل مسأله‌ها به‌طور ذهنی (که درنظر بسیاری از افراد دشوار است) راه‌های میان‌بر دیگری اندیشید.

۱ ـ ۲ ـ نتایج دلخواه شما

درضمن حل کردن مسأله، بهتر است فقط به «نتایج» هر مرحله بیندیشید و از پرداختن به جزئیات نالازم در آن مرحله خودداری کنید. برای مثال: به هنگام دیدن ۳۶ ÷ ۹ بی‌درنگ به ۴ فکر کنید و

از وارد شدن به جزئیات محاسبه، یعنی گفتن: ۳۶۰ تقسیم بر ۹ می‌شود ۴ مرتبه، صرف‌نظر کنید. همین‌طور مثلاً به‌هنگام انجام دادن عمل جمع ۸ + ۱۱ + ۵، اگر بگویید: ۵ به‌علاوهٔ ۱۱ می‌شود ۱۶، به علاوهٔ ۸ می‌شود ۲۴، کاری جز کُند کردنِ رونـدِ محاسبه انجام نداده‌اید. پس بهتر است در ضمن محاسبه، فقط به: ۲۴ و ۱۶ بیندیشید.

تا می‌توانید واژه‌های مورد استفاده در هر محاسبه را حذف و ذهن خود را برنتایج متمرکز کنید، چه حلّ مسأله‌ها بدون ذکر واژه‌ها، سریعتر انجام می‌شود. اعداد و محاسبات مانند: حروف الفبا و خواندن هستند. وقتی به واژه‌ای برمی‌خورید، برای هجی کردن یک یک حروف مکث نمی‌کنید، بلکه آن واژه رابه‌طور کلی مشاهده و درک می‌کنید. همین طور برای دریافتِ تک تک واژه‌ها توقف نمی‌کنید، بلکه واژه‌ها راکلاً باهم می‌خوانید و به مفهوم کلی آنها می‌اندیشید. اگر در مورد اعداد و محاسبات همین کار را بکنید، مسأله‌ها با سرعت و سهولت بیشتری حل می‌شود.

۱ ـ ۳ ـ آمیختن فعالیتهای ذهنی و نوشتاری برای گرفتن بهترین نتیجه‌ها در ریاضی

هدف از ارائهٔ راه‌های میان بر در محاسبات تنها حل مسأله به‌طور ذهنی یا آنی نیست؛ هرچند که با استفاده از آنها می‌توانید به چنین منظوری برسید. صَرفِ اندکی وقت برای یادداشت کردن نکات مهم در جریان محاسبات، غالباً بسرعت بخشیدن در کار کمک می‌کند. به نکته‌ای که درپی می‌آید توجه کنید، تا موضوع برایتان روشنتر شود:

باهر محاسبه، ذهن ما متوجه دو فرآیند می‌شود: ۱) توجه کافی برای درک هر مرحله‌از مسأله و ۲) ثبت و ضبط نتایج هر مرحله برای استفاده در مرحله‌های بعد. طبعاً هرچه یک مسألهٔ ریاضی طولانیتر و پیچیده‌تر باشد و برای حل آن تنها به فعّالیّت ذهنی خود اکتفا کنید، ناگزیرید موارد بیشتری را به ذهن بسپرید و به همان نسبت میزان اشتباه‌های احتمالی شما افزونتر خواهد شد.

ازطرفی اگر تمامی نکات مهم مسأله را یادداشت کنید، ناچار خواهید بود که نتایج یکایک مرحله‌ها را به ذهن بسپرید. بلکه در عوض خواهید توانست فکر خود را برراه حل متمرکز کنید. با این‌که یادداشت برداری ممکن است زمان بیشتری بگیرد، ولی احتمال بروز اشتباه راکم می‌کند واین در نهایت، موجب صرفه‌جویی در وقت خواهد شد.

بیشتر اوقات می‌توانید با بهره‌مندی از هر دو روشِ ذهنی و نوشتاری به حداکثر سرعتِ همراه با درستی و دقت دست یابید. برای مثال، در مورد ضرب ۴۹۸۳۷ در ۱۱، لازم نیست که تمامی جزئیات را یادداشت کنید یا به‌عنوان یک ورزش فکری با آن کلنجار بروید. بلکه کافی است که برخی از حاصل ضربها را یادداشت و آنها را جمع کنید تا پاسخ به‌دست آید، به این ترتیب:

```
 ۴۹۸۳۷
۴۹۸۳۷
──────
```

همین‌طور اگر بخواهید ۲۱۸۴ را بر ۲۴ تقسیم کنید، بهتر است نخست، آن را بر ۳ تقسیم و حاصل یعنی ۷۲۸ را بنویسید، تا ناگزیر به حفظ کردن آن نباشید، سپس آن را بر ۸ تقسیم کنید تا نتیجه (۹۱) به‌دست آید.

بافراگیری برخی از راه‌های میان بُرِ ارائه شده در این سلسله مقاله‌ها، خواهید توانست مسأله‌ها را به‌طور ذهنی یا حتی نظری حل کنید. برخی دیگر از راه‌های میان بُر به شما نشان می‌دهد که بهترین راه حل آن است که در پاره‌ای موارد صرفاً به مداد و کاغذ اکتفا کنید و یا این‌که فقط نکات مهم مراحل حلّ مسأله را یادداشت کنید تا به نتیجه درست و سریع برسید. به هرحال، در نهایت بسته به تصمیم و تشخیص شماست که چه مقدار از حل مسأله را در ذهن انجام دهید و چه مقدار را یادداشت کنید، تا به نتیجه‌ای درست و سریع برسید. با این‌که سرعت در حل مسأله یک عاملِ مطلوب به شمار می‌آید، ولی آشکار است که استفاده از یک راه‌حلِ میان بُر که منجر به پاسخ نادرست شود، کاری بی‌حاصل است. درصورت لزوم، در مراحل نخستِ تمرین بهتر است از راه حلهای طولانیتر استفاده کنید تابه نتیجه درست دست یابید.

۱ ـ ۴ ـ برآورد پاسخ تقریبی وگِرد کردن اعداد

پیش‌از حلّ مسأله و یافتن پاسخ، لازم است میزان درستی ودقت پاسخ خود را مشخّص کنید. چنانچه پیشاپیش پاسخ تقریبی مسأله را بدرستی تخمین بزنید، می‌توانید از بسیاری محاسبات غیرضروری ارقام صرف‌نظر و در وقت صرفه‌جویی کنید. یافتن پاسخ تقریبی مستلزم آن است که «ارقامِ مهم» تشکیل دهندهٔ اعداد مسأله ـ ارقامی که برای تخمین شما اهمیّت دارند ـ را مشخّص کنید.

برای مثال: اگر بهای ۲ عدد مداد ۱۹۷ ریال باشد، در محاسبهٔ بهای ۳ عدد مداد مرتکب اشتباه فاحشی نخواهید شد، چه می‌توان پیش‌از حل مسأله تخمین زد که پاسخ در حدود ۳۰۰ ریال است. یا اگر بخواهید دیواری به مساحت ۲۳۸۶ متر مربع را رنگ کنید و بدانید که هر قوطی بزرگ رنگ ۵۰ متر مربع را می‌پوشاند، درصورتی که عددِ مساحت را گِرد کنید (= ۲۵۰۰ مترمربع)، می‌توانید میزان تقریبی رنگ مصرفی را به‌طور ذهنی سریعتر از استفاده از مداد و کاغذ محاسبه کنید.

۱ ـ ۵ ـ امتحان کردن پاسخ مسأله از طریق «طرحِ نُه نُه»

می‌توان پاسخ مسأله را با حل کردن دوبارهٔ آن، یا به روش بازبینی به ترتیب معکوس و یا به روشی دیگر امتحان کرد. حل کردن دوبارهٔ مسأله به‌روشی متفاوت باروش معمول سبب می‌شود که از تکرار اشتباهی که ممکن است برحسب معمول پیش‌آید، جلوگیری گردد.

برای بازبینی پاسخ مسأله‌های مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم راه‌های مختلفی وجود دارد که در مقاله‌های بعدی (درفصلهای راجع به هریک از چهار عمل اصلی که در شماره‌های آتی مجله خواهد آمد) به تفکیک از آنها سخن خواهیم گفت.

یکی از راه‌های مذکور، طرح کردنِ نُه نُهِ عددِ پاسخ مسأله است که می‌توان از آن در مورد چهار عمل اصلی استفاده کرد. این روش برمبنای خاصیت جالب توجه عدد ۹ استوار است. هرگاه عددی بر ۹ تقسیم شود، باقیمانده برابر خواهد بود با حاصل جمع رقمهای تشکیل دهندهٔ آن عدد (مقسوم) یا حاصل جمع رقمهای تشکیل دهندهٔ مقسوم پس از «طرح کردنِ» نُه نُه آن. شاید این خاصیتِ عدد ۹ شگفت‌انگیز به نظر آید، اما درک و فهم آن با توجه به مثالهای زیر آسان خواهد بود:

ـ مثال (۱): ۷ = باقیمانده و ۱ = ۹ ÷ ۱۶

مجموع ارقام عدد ۱۶ (یعنی ۷ = ۶ + ۱) برابر است باباقیماندهٔ تقسیم ۱۶ بر ۹.

ـ مثال (۲): ۶ = باقیمانده و ۲ = ۹ ÷ ۲۴

مجموع ارقام عدد ۲۴ (۶ = ۴ + ۲) نیز با ۶ برابر است.

ـ مثال (۳): ۲ = باقیمانده و ۴ = ۹ ÷ ۳۸

البته مجموع ارقام عدد ۳۸، عدد ۲ نیست، بلکه ۱۱ است. اما پس از طرحِ نه نه آن (کم کردن ۹ از ۱۱) باقیمانده ۲ می‌شود که همان باقیماندهٔ تقسیم ۳۸ بر ۹ است.

برای طرح نُه نُه و به دست آوردن باقیمانده‌ها می‌توانید به چهار روش زیر عمل کنید:

الف: طرح نُه نُه از طریق تقسیم:

عدد را بر ۹ تقسیم کنید تا باقیمانده به‌دست آید:

باقیمانده	عدد
۱	۴۶
۴	۵۸
۰	۱۹۸
۵	۶۳۶۸

ب: طرح نه نه از طریق جمع:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد را جمع کنید و چنانچه مجموع ارقام تشکیل دهندهٔ حاصل جمع از یک رقم بیشتر شد، آنها را نیز جمع کنید تا یک باقیماندهٔ یک رقمی به دست آید. درصورتی‌که باقیمانده ۹ باشد و یا عددی باشد که توسط ۹ عاد شود، باقیمانده را صفر تلّقی کنید:

باقیمانده	عدد
۱	۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰ ; ۱ + ۰ =
۴	۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳ ; ۱ + ۳ =
۰	۱۹۸ : ۱ + ۹ + ۸ = ۱۸ ; ۱ + ۸ = ۹ ;
۵	۶۳۶۸ : ۶ + ۳ + ۶ + ۸ = ۲۳ ; ۲ + ۳ =

ج: طرح نُه نُه از طریق تفریق:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد را جمع کنید و هر بار که حاصل جمع برابر ۹ یا از ۹ بیشتر شد، ۹ را از آن کم کنید. این عمل را چندان تکرار کنید تا باقیمانده نهایی از ۹ کمتر شود.

باقیمانده	عدد
۱	۴۶ : ۴ + ۶ = ۱۰ ; − ۹ =
۴	۸۵ : ۸ + ۵ = ۱۳ ; − ۹ =

۱۹۸ : ۱+۹ =۱۰ ;-۹ =۱ ;+۸ =۹; -۹= ۰

همچنین : ۱۹۸ : ۱+۹+۸ =۱۸;-۹=۹;-۹= ۰

۶۳۶۸ : ۶+۳=۹;-۹=۰;+۶+۸=۱۴;-۹= ۵

همچنین: ۶۳۶۸ : ۶+۳+۶+۸=۲۳;-۹=۱۴;-۹= ۵

د: طرح نُه نُه از طریق حذف کردن ۹ ها:

ارقام تشکیل دهندهٔ عدد ـ بجز ۹ها و ترکیبهای معادل ۹ مانند: «۶ و ۳»، «۵ و ۴»، «۱ و ۳ و ۵» و جز آنها ـ را جمع کنید. حذف کردن ۹ها و ترکیبهای معادل ۹ سبب صرفه‌جویی در وقت می‌شود. سپس اگر حاصل‌جمع ارقام برابر ۹ یا از ۹ بیشتر شد، آن را نُه نُه طرح کنید تا باقیمانده به‌دست آید.

باقیمانده		عدد
۱ =۹-; ۱۰ =۶ + ۴	; هیچ ۹ ی نیست که حذف شود	۴۶:
۴ =۹- ; ۱۳=۵+ ۸ ;	« « « «	۸۵:
۰	= ۸ + «۱» و ۹ را حذف کنید	۱۹۸:
۵ = ۹- ;۱۴= ۸ + ۶;	«۳» + «۶» را حذف کنید	۶۳۶۸:

چنان‌که ملاحظه می‌کنید، حذف کردن ۹ها آسانترین راهِ طرحِ نه نه، بویژه در مورد اعداد بزرگ، است. در مقاله‌های آتی از چگونگی استفاده از «طرح نه نه» برای امتحان کردن سریع نتایج مسأله‌های مربوط به چهار عمل اصلی آگاه خواهید شد.

در خاتمه باید دانست که هیچ یک از روشهای امتحان کردن پاسخ مسأله، برهانی قاطع بردرستی پاسخ ارائه نمی‌دهد، زیرا همواره این احتمال هست که در حین بازبینی درستی یا نادرستی پاسخ نیز مرتکب اشتباه شوید و این تأییدی اشتباه‌آمیز برعمل قبلی باشد. بااین حال، هرگاه کارِ بازبینی مسأله را تمام کردید، معمولاً می‌توانید بپذیرید که پاسخ درست است.

ادب ریاضی

اگر دو عدد مُنطق (گویا) با هم مساوی باشند این نکته کاملاً بدیهی است که جذر این دو عدد نیز با هم مساوی هستند، به این طریق از تساوی ۶ = ۳ × ۲ چنین نتیجه می‌شود که :

$$\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$$

لیکن این نکته به هیچ وجه بدیهی نیست که

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$$

و بنابراین تساوی $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ نیز به هیچ وجه محقق نیست.

اکنون که هیچ گونه قطعیتی بر حقیقت رابطهٔ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ که در مدرسهٔ متوسطه همچون واقعیتی تدریس می‌شود وجود ندارد، خوب است در این باره مطالعهٔ بیشتری کنیم و علت این موضوع را درک کنیم.

مسأله در این است که باید جذر اعداد ۲ و ۳ و ۶ را استخراج کرد و نتیجهٔ این کار سه سلسله اعداد اعشاری پایان‌ناپذیر و عاری از هر گونه قانونی است. آنگاه باید دو عدد اوّلی را در هم ضرب کرد و نتیجه گرفت که حاصل آن مساوی با سومی است. از آن‌جا که هر قدر تعداد ارقام اعشاری را ادامه دهیم هیچ‌گونه جذر صحیحی برای این سه عدد به دست نمی‌آید، بنابراین واضح است که اثبات تساوی این اعداد به وسیلهٔ ضرب هرگز جامهٔ عمل نخواهد پوشید.

ریاضی‌دانان نامی، اریک تمپل بل

حسن صفاری

معرفی کتاب



□ روشهایی از جبر

ترجمه: حمیدرضا امیری

ناشر: انتشارات مدرسه، چاپ اول، پاییز ۷۳

اولین کتاب از سریِ کتابهای کوچک ریاضی بوده که بقیهٔ این کتابها نیز قرار است از طرف انتشارات مدرسه به چاپ برسند. کتاب **روشهایی از جبر** کتابی است برای دانش‌آموزانِ دبیرستان که مباحث آن برای دانش‌آموزانِ هر دو نظام آموزشی مفید است و نیز دبیران ریاضی می‌توانند از آن بهره بگیرند. کتاب دارای شش فصل است که عبارتند از ۱ـ توابع جبری که شامل رادیکالها و لگاریتمها نیز می‌باشد ۲ـ چند جمله‌ایها و توابع گویا. ۳ـ توابع درجه دوم و معادلاتِ درجه دوم. ۴ـ اثبات ریاضی که شامل بعضی از مفاهیم منطقی و انواع اثباتهای ریاضی از قبیل برهان خلف و استقراء می‌باشد. ۵ـ دنباله‌ها و سریها، این فصل شامل تصاعدها و سریهای عددی و هندسی است. ۶ـ نابرابریها، در این فصل نامساویهای خطی و غیرخطی مورد حل و بحث قرار می‌گیرند.

در سرتاسر کتاب علاوه بر توضیح کافی برای هر مبحث از مثالهای حل شدهٔ فراوان استفاده شده تا مفاهیم مزبور بهتر برای خواننده درک شود.

کتاب از نثر بسیار ساده و روان برخوردار است و در انتهای هر فصل تمرینهایی آورده شده است که جواب کوتاه آنها در آخر کتاب موجود می‌باشد.

□ ابتکارهایی در ریاضیات

راس هانسبرگر

ترجمه: سیامک کاظمی، ویراستهٔ دکتر علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی

این کتاب از بین کتابهای چاپ جامعهٔ ریاضی آمریکا انتخاب شده است. از پیشگفتار کتاب چنین برمی‌آید که کتاب شامل گفتارهایی کوتاه و مستقل در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی است. در بسیاری از گفتارهای آن، شرح کارهایی از ریاضیدانهایِ برجسته، از جمله گاوس، آمده است، و باریک بینی و ابتکار که خصیصهٔ اصلی هر کار ریاضی درجه اول در هر سطحی است، نشان داده می‌شود.

گفتار اول کتاب دربارهٔ **احتمال و عدد π** است، و مطلب اول آن چنین است: احتمال این که دوعدد صحیح و مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، برابر $6/\pi^2$ است. یکی از تمرینهای این گفتار نیز عبارت از این است که: سه نقطهٔ A، B، و C به تصادف روی محیط دایره‌ای انتخاب می‌شوند. احتمال این که ΔABC مثلث حاد الزاویه‌ای باشد چقدر است؟

گفتار دوم در مورد **اعداد فرد و زوج** است. در این گفتار مؤلف ابتدا به آوردن مسأله‌ای دربارهٔ شبکه‌ها پرداخته است.

گفتار سوم دربارهٔ **مسألهٔ سیلوستر دربارهٔ سه تاییهای همخط** است. این مسأله مجموعهٔ متناهی S ی از نقاط متمایز در صفحه را جستجو می‌کند که همگی بر یک خط راست واقع نبوده دارای این خاصیت باشند که هر خط راستی، که دو نقطه از S را به هم وصل می‌کند، شامل حداقل یک نقطهٔ دیگر S باشد.

گفتارهای دیگر کتاب، به‌ترتیب، عبارتند از:

جبر گزاره‌ها، سری فیری، یک ویژگی a^n، تجزیهٔ مربع به مربعهای کوچک‌تر، نوشتن یک عدد به‌صورت مجموع مربعات دو عدد، مسألهٔ برابر محیطی، پنج شگفتانه در حساب، مسأله‌ای از رگیومونتانوک، دنباله‌های مکمل، حساب فیثاغورسی، اعداد زائد، ماسکرونی و اشتاینر، یک ویژگی بعضی از اعداد دوره‌ای، قضیهٔ باربیه، سری عکسهای اعداد اول، مسألهٔ وان اسخوتن.

حل تمرینها، کتابنامه، و فهرست راهنما از مطالب پایانی کتابند. کتاب برای دانش‌آموزان جستجوگر و دبیران هنرور نوشته شده است و خواندنش برای هر دو این گروه واجب می‌نماید.

❑ **مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی**
شمارهٔ دوم: ویراستار غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: انتشارات مدبّر

شمارهٔ دوم مجموعه با تأخیری نه اندک در دی‌ماه ۱۳۷۲ شمسی منتشر شد. در این شماره در مقدمهٔ ویراستار با خبر می‌شویم که آقای **موسی آذرنوش**، که از دبیران ریاضی باسابقهٔ این مرزوبوم بودند و مجلهٔ برهان در شمارهٔ چهارم خود مصاحبه‌ای با ایشان را انتشار داده بود، در ۲۲ بهمن ۱۳۷۱ شمسی به رحمت ایزدی پیوستند، رحمة‌الله علیه. در مقالهٔ **سامان ریاضی** می‌خوانیم که: قضایای ریاضی عامند اما عامه‌پسند نیستند و به تعبیری دیگر «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» تعریف کردن ریاضیات کار آسانی نیست، و یادگرفتنش گرچه به ظرافت شیشه، کار شیشه دلان نه، امتیاز اصلی در ریاضیات نه جستجوی فایده و کاربرد است و نه تحرّی حقیقت، بلکه تنها همسازی درونی است. در مقالهٔ **ریاضیات گسستهٔ** آن می‌خوانیم که: علاقه به دلایل راست یا دروغ بودن گزاره‌ها، یکی از مواردی است که ریاضیات را جاذب می‌کند. ریاضی‌دان، اغلب نه تنها به این مطلب که چه چیز راست است، بلکه به این موضوع نیز که چرا راست است، علاقه‌مند است.

در نظریهٔ گرافها با تعاریف و مثالهای گرافها آشنا می‌شویم. در مقالهٔ **ابوالوفا بوزجانی** در می‌یابیم که ابوالوفا با دانشمند معاصر خود بیرونی مکاتبه داشته است، و در مقالهٔ **فصلی از یک کتاب** با فصلی از کتاب خواندنی **هنر ریاضی ورزیدن** آشنا می‌شویم. در مجله با مسألهٔ مشهور **سریهای سینوسی و کسینوسی** نیوتن برخورد می‌کنیم، و در **یادنامهٔ محمد بن موسی خوارزمی** آن با بعضی از کارهای این دانشمند معروف آشنایی حاصل می‌کنیم. در مقالهٔ **نیوتن و اندیشهٔ ریاضی زمان** ما با فلوکسیونهای نیوتن محشور می‌شویم و در **داستان غم‌انگیزی به نام کنکور دانشگاه** ملاحظه می‌کنیم که گناه مشکلات کنکور به عهدهٔ چه کسی است. از مقاله‌های دیگر مجموعه **توابع و نمودارهای آنها، ماتریسها، تکه‌هایی از مجله‌های ریاضی، هندسه فضائی، هندسهٔ تصویری، فرهنگ ریاضیات،** و **مسائل برای حل** می‌باشند، و آخر مجله با **تعمیم قضیهٔ فیثاغورس** آشنا می‌شویم.

مجموعه مجله‌ای است که برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی و دانشجویان در کار تعلیم و تعلم ریاضی، نیز دبیران ریاضی تهیّه می‌شود و خواندنش بر هر یک از این سه گروه لازم می‌نماید.

❑ **فرهنگ ریاضیات آکسفورد**
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: انتشارات مدبر

فرهنگ ریاضیات آکسفورد کتابی است که به شرح موضوعات ریاضی در حد دبیرستان و سالهای اوّل دانشگاه پرداخته و این کار را با دقتی قابل تحسین و ایجازی قابل توجه متقبل شده و البته که از عهدهٔ آن نیز برآمده است.

کتاب علاوه بر این، در شرح زندگی ریاضی‌دانها نیز مطالبی دارد و خوانندهٔ علاقه‌مند را با بزرگ‌ترین و مشهورترین آنها آشنایی بیشتری می‌دهد.

در کتاب با ریاضی‌دانهایی از قبیل **آبل، آپولونیوس، آرگان، اقلیدس، اودوکسوس اویلر، اینشتاین، ارشمیدس، بورباکی، بول، پنانو، پاسکال، پوانکاره، توم، تیلور، خانوادهٔ برنولی، خوارزمی، ددکیند، دکارت، ریمان، فرما، فوریه، فون نویمان، فیبو ناتچی، فیثاغورس، کانتور، کوشی، گالوا، گاوس، گودل، لاپلاس، لایب نیتز، لژاندر، نیوتن، وایراشتراس، همیلتون، هیلبرت،** آشنا می‌شویم. و به مطالبی از قبیل: استقرای ریاضی، استوانهٔ بیضوی، سهموی و هذلولوی، افراز، الگوریتم انتقال، انتگرال، عددهای اوّل، بردارها، برهان مستقیم، پیمانهٔ همنهشتی، بهرهٔ ساده و مرکب، پارادوکس راسل، عمل پاشنه‌ای، پس ـ ضرب، پوشایی، تابع، تابع اوّلیّه، تابع اویلر، تابع کراندار، تابع هدف، تثلیث زاویه، تربیع دایره، تقسیم زرین، تنزل نمایی، تورم، ثابت اویلر، جبر خطی، چند جمله‌ای تیلور، حاصل‌ضرب اسکالر و برداری، حاصل‌ضرب والیس، حجم جسم دورانی، حد، حدس گلدباخ، حذف گاوس ـ ژردان، حساب‌انتگرال، حساب دیفرانسیل، خط اویلر، دامنه، دترمینان، درخت، درونیابی، دستگاه معادلات خطی، دنباله، رابطه، ریشه، زیر حلقه، زیرگروه، سوپرمم، سور، سوگراف، صورت پلکانی تحویل یافته، عدد فیبوناتچی، فرمول هرو، فرمول بخشی، قاعدهٔ زنجیری، قاعدهٔ سیمسن، قضیهٔ چهار رنگ، قضیهٔ کوچک فرما، قضیهٔ لایب نیتز، کاردیوئید، گراف، گره، لم دست دادن، ماتریس، مارپیچ، مجانب، مجموعه، محور، مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، مشتق، معادلات، مکان هندسی، میانگین، میدان، مینیمم، نگاشت، نمودار، نوار موبیوس، همسایگی، یک ریختی، و بسیاری مطالب دیگر برخورد می‌کنیم.

فرهنگ ریاضیات آکسفورد کتابی است مورد نیاز دانش‌آموز و دانشجو، که معلم و دبیر را نیز به کار می‌آید و از آن‌جا که اصطلاحات ریاضی انگلیسی و فارسی نیز در متن و انتهای آن آمده مرجع مترجمان نیز تواند بود.

جواب نامه‌ها

آقای مهران مهرداد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از ارسال حل مسائل مسابقه‌ای «برهان» شمارهٔ (۸) به عرض می‌رسانیم که متأسفانه نامهٔ شما بعداز زمان مقرر شده به دست ما رسیده است و در مورد مقالهٔ شما تحت عنوان «تحقیقی در مورد قضّیهٔ فرما» باید بگوییم که مقاله‌ای تحت همین مضمون را در شمارهٔ (۴۰) «رشد ریاضی» می‌توانید مشاهده کنید.

آقای مهدی وحیدی اربابی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

با تشکر از ارسال مسائل و تست حل شدهٔ شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید تستهای جدید و مطلوبتری را بفرستید.

آقای فرشاد داوودی فرد؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که حدس شما در رابطه با رتبهٔ اعداد اوّل همان‌طوری که خود شما به آن اشاره کرده‌اید کلی نیست و فقط برای تعداد محدودی اعداد اوّل صادق است و این از نظر ریاضی نمی‌تواند مورد توجه باشد، زیرا قوانین و احکام و قضایایی از نظر ریاضی معتبر و باارزش هستند که تناقض‌پذیر نباشند. در هر صورت تلاش شما برای دستیابی به ضابطهٔ مورد نظر در رابطه با اعداد اوّل تحسین‌برانگیز است، موفق و پیروز باشید.

آقای رضا جمشیدیان؛ دبیر ریاضی (اصفهان)

با تشکر از نامهٔ شما، در صورت لزوم و درجای مناسب از مطالب و مسائل ارسالی شما استفاده خواهیم کرد.

آقای بهزاد مسگرزاده؛ دانش آموز رشته ریاضی (ارومیه)

با تشکر از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که در صورت لزوم از آنها در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

خانم مرضیهٔ محمدی کجیدی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

ضمن تشکر از دو مسألهٔ حل شده ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای علی ایمانی، دانش آموز رشته ریاضی (بابل)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم، در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای حسین روح الامینی؛ دانش آموز رشته ریاضی (سیرجان)

از ارسال مسائل و تستهای حل شدهٔ شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

خانم زینب جعفری؛ دانش آموز رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی یک مسألهٔ حل شده در رابطه با مشتق است به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای امیرحسین عمودالعلائی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که جواب

دادن به مسائل خصوصی جزو اهداف مجله نیست و باز کردن چنین بخشی نیز در مجله با حجم کاری زیاد و روزافزون مجله ممکن نیست.

آقای حسین فخررنجبری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز)

با تشکر از مطلب ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد. متذکر می‌شویم که مطالب و مسائل ارسالی باید مطابق با نیاز و ضرورت دانش‌آموزان دبیرستان باشد تا به درج آنها اقدام کنیم.

آقای علی گشاس؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

ضمن تشکر به عرض می‌رسانیم که از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای محمد مقدم؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد علی مهتدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بناب)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای یحیی افشار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (قم)

از مطلب ارسالی شما متشکریم. امیدواریم امکان درج آن به وجود آید.

آقای محمد توسلی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (آمل)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد.

خانم لاله تراب‌نژاد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها برای شماره‌های بعدی مجله انتخاب خواهیم کرد. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای بابک سلیمانزاده؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از دو مسأله حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم نغمه هاشمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کرج)

با تشکر به اطلاع می‌رسانیم که امید است از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما برای شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

آقای داریوش باقرلو دانش‌آموز رشته ریاضی (خوی)

پس از عرض سلام متقابل و تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است امکان درج آنان برای شماره‌های بعدی به‌وجود آید.

آقای امید قطره‌سامانی (اصفهان)

ضمن تشکر از تستهای ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از آنان استفاده خواهد شد.

آقایان نادر فنایی و حجت‌ا... شریفی دانش‌آموزان رشته ریاضی (آباده فارس)

ضمن سلام و تشکر متقابل از ارسال مسائل حل شدهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آنان برای شماره‌های بعدی مجله به‌وجود آید.

آقای داریوش دیدبان دانش‌آموز رشته ریاضی (کاشان)

از مسائل ارسالی حل شدهٔ شما متشکریم. در صورت لزوم در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

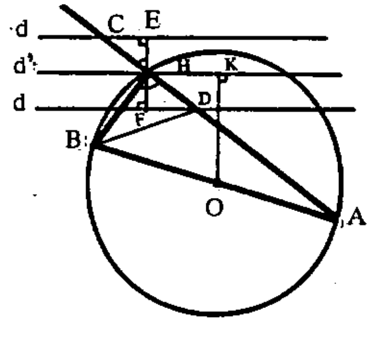
آقای علی ایمانی (بابل)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسائل از سطح مطلوب‌تری برخوردار باشد.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۰

حل مسئله ۱ـ از آقای سبحان نظری دانش آموز سال سوم ریاضی، نورآباد ممسنی

فرض می‌کنیم مسئله حل شده و خطی که d را در نقطهٔ C و d′ را از نقطهٔ D قطع می‌کند جواب مسئله باشد. از نقطهٔ B به نقاط C و D وصل می‌کنیم. مثلث BCD در رأس B متساوی‌الساقین است، زیرا BC=BD است و ارتفاع BH از این مثلث عمود منصف قاعدهٔ CD است، پس $\widehat{BHD} = ۹۰°$ و HC = HD، یعنی نقطهٔ H وسط پاره‌خطی است که دو سرش روی دو خط موازی d و d′ واقع است. لذا مکان هندسی نقطهٔ H خط راست d″ موازی خطوط d و d′ و به یک فاصله از این دو خط است (اگر از H عمودهای HE و HF را بر خطوط d و d′ فرود آوریم، دو مثلث قائم‌الزاویه CHE و DHF با هم برابرند، پس HE = HF است).



از طرفی چون $\widehat{BHA} = ۹۰°$ است، پس نقطهٔ H روی دایره‌ای به قطر AB قرار دارد. بنابراین برای حل مسئله به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

خط d″ را موازی دو خط d و d′ و به یک فاصله از این دو خط رسم می‌کنیم.

آنگاه دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم، اگر نقطهٔ تقاطع این دو را H بنامیم، و از A به H وصل کنیم، خط AH جواب مسئله است، و به تعداد نقاط برخورد خط d″ با دایرهٔ به قطر AB، مسئله دارای جواب است.

بحث: نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را O نامیده و فاصلهٔ این نقطه از خط d″ را l می‌نامیم (OK = l). سه حالت پیش می‌آید:

۱) اگر $\frac{AB}{۲} > l$ باشد، خط d″ دایرهٔ به قطر AB را در دو نقطه قطع می‌کند و مسئله دو جواب دارد.

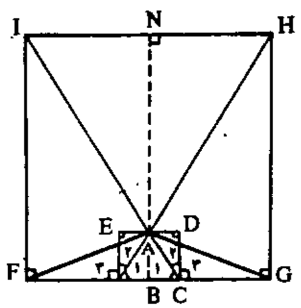
۲) اگر $\frac{AB}{۲} = l$ باشد، خط d″ مماس بر دایرهٔ به قطر AB است و مسئله یک جواب دارد.

۳) اگر $\frac{AB}{۲} < l$ باشد، خط d″ دایرهٔ به قطر AB را قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.

حل مسئله ۲ ـ از آقای علی نصیری امینی، دانش آموز سال سوم ریاضی، تهران

دو مثلث متساوی‌الساقین AEB و ACD متساویند زیرا:

$$\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ = ۳۰° \ , \ EB = BA = AC = CD$$



پس $\hat{E}_۱ = \hat{D}_۱ = ۷۵°$. از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویه EBG و FCD با هم برابرند زیرا:

$$\widehat{EBG} = \widehat{DCF} = ۹۰° \ , \ \hat{E}_۱ = \hat{D}_۱ = ۷۵° \ , \ EB = DC$$

در نتیجه $BG = CF$ خواهد بود. از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ IFC و HBG با هم برابر می‌باشد چون:

$$\hat{F} = \hat{G} = ۹۰^\circ \qquad \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = ۶۰^\circ \qquad FC = BG$$

از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $IF = HG$ ، امّا بنابه‌فرض $IF \parallel HG$ است. بنابراین چهارضلعی IFGH که دو ضلع مقابلش متوازی و مساوی هستند مستطیل است (متوازی‌الاضلاعی است که زاویهٔ قائمه دارد پس مستطیل است).

حال کافی است ثابت کنیم که دو ضلع مجاور این مستطیل با هم برابرند. داریم:

$$EB \parallel HG \Rightarrow \Delta GAH \sim \Delta EAB \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{EB}{HG} \text{ و } AB = EB$$

$$\Rightarrow HA = HG \qquad (۱)$$

از طرفی مثلث AIH متساوی‌الاضلاع است زیرا به علت موازی بودن IH و BC با مثلث متساوی‌الاضلاع ABC متشابه است. پس:

$$IH = AH = AI \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $IH = HG$ بنابراین، چهارضلعی IFGH مربع است.

دو مربع BCDE و FGHI نسبت به مرکز متجانس A مجانس یکدیگرند زیرا:

$$\Delta AHI \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AI} = \frac{BC}{IH}$$

$$\Delta AEB \sim \Delta GHA \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AG} = \frac{EB}{GH}$$

$$\Delta ACD \sim \Delta FIA \Rightarrow \frac{DC}{FI} = \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AI}$$

از رابطه‌های‌فوق نتیجه‌می‌شودکه: $\frac{AC}{AI} = \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AF}$

و یا $\boxed{\frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD}}$. این رابطه نشان می‌دهد که مربع IFGH مجانس مربع EBCD نسبت به مرکز تجانس A است. برای محاسبهٔ نسبت تجانس اندازهٔ ضلع مربع IFGH را a' می‌نامیم و ارتفاعهای رأس A در دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و AIH را رسم می‌کنیم. داریم:

$$AM = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}, \quad AN = \frac{a'\sqrt{۳}}{۲}, \quad MN = IF = a' \Rightarrow$$

$$AM + AN = IF \Rightarrow \frac{a\sqrt{۳}}{۲} + \frac{a'\sqrt{۳}}{۲} = a' \Rightarrow$$

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a'(۲-\sqrt{۳})}{۲} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}(۲+\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow K = ۲\sqrt{۳} + ۳ \qquad \text{نسبت تجانس دو مربع}$$

امّا نسبت مساحتهای دو مربع، مساوی مجذور نسبت تشابه است پس:

$$\frac{S_{IFGH}}{S_{EBCD}} = K^2 = (۲\sqrt{۳}+۳)^2 = ۲۱ + ۱۲\sqrt{۳}$$

نام کسانی که حل درست یک یا دو مسئله از مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۰ را فرستاده‌اند:

۱ـ آقای نادر مطیع، تهران (۱ و ۲)
۲ـ آقای ارسلان چوپانی، تهران (۱ و ۲)
۳ـ آقای سیدروزبه مصطفوی‌پور، تهران (۱ و ۲)
۴ـ آقای سبحان نظری، نورآباد ممسنی (۱ و ۲)
۵ـ آقای علی نصیری امینی، تهران (۱ و ۲)
۶ـ آقای محمد بشیری (۱ و ۲)
۷ـ آقای علی قنبریان، تهران (۱ و ۲)
۸ـ آقای محمدعلی ملیحی، تهران (۱)
۹ـ آقای امیر سیفی، تهران (۱)
۱۰ـ آقای بیژن صادقی، تهران (۱)
۱۱ـ آقای شبگیر حسنی، تهران (۱)
۱۲ـ آقای علی نخودچی، مشهد (۱)
۱۳ـ آقای شهاب ایلکا، تهران (۱ و ۲)
۱۴ـ آقای علیرضا خلیق، تبریز (۲)
۱۵ـ خانم ساناز پاسدار، تبریز (۱ و ۲)

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ نمودار گردشی‌ای رسم کنید و برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا شمارهٔ کارمندی و حقوق ناخالص کارمندان یک مؤسسه را بخواند و طبق تعرفهٔ زیر حقوق خالص کارمندان را همراه با شمارهٔ کارمندی با پیغام مناسب چاپ کند.

الف ـ کسور ثابت ۵٪

ب ـ مالیات تا ۷۰۰۰۰ ریال معاف

ج ـ مالیات از ۷۰۰۰۱ الی ۱۱۰۰۰۰ ریال به ازای هر ۱۰۰۰۰ ریال افزایش به ترتیب: ۶، ۸، ۱۰، ۱۲ درصد بر مازاد

د ـ مالیات از ۱۱۰۰۰۱ ریال الی ۱۵۰۰۰۰ ریال، ۲۲ درصد

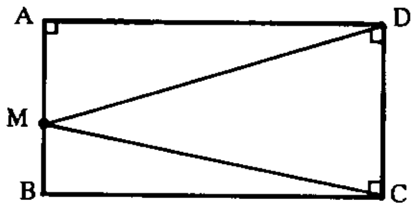
هـ ـ مالیات از ۱۵۰۰۰۱ ریال بیشتر ۴۴ درصد بر مازاد

(مسایل مسابقه‌ای کامپیوتر)

◆ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

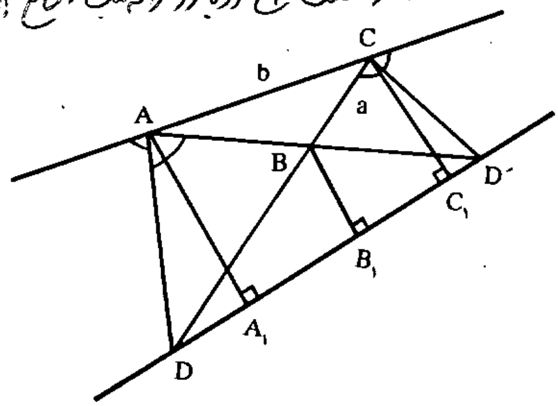
۱ـ در مستطیل ABCD بر ضلع AB نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که $AM^2 = AB \cdot MB$ باشد. از M به C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید: $MD^2 - MC^2 = MA \cdot MB$.

(فرستنده آقای رضا، شاه‌اکبری از نیشابور)



۲ـ ثابت کنید فاصلهٔ سه‌رأس هر مثلث از خطی که پای نیمسازهای زوایای خارجی دو رأس مثلث را به هم وصل می‌کند، به نسبت عکس اضلاع مقابل به این رأسها است. یعنی در شکل زیر داریم:

$$\frac{AA_1}{\frac{1}{a}} = \frac{BB_1}{\frac{1}{b}} = \frac{CC_1}{\frac{1}{c}}$$



۳ـ هرگاه $A = \{x - y , ۳\}$ و $B = \{x + y , ۱\}$ و داشته باشیم، $(A \times B) = (B \times A)$، مقادیر x و y را به دست آورید.

۴ـ رابطهٔ زیر روی IR^2 تعریف شده است، خواص این رابطه را بررسی کنید.

$(a , b) R (c , d) \Leftrightarrow (a - c)(b - d) = ۰$

۵ـ هرگاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید: $aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$.

$([a] = \{x \in A \mid xRa\})$

۶ـ تابع $f: IN \to IN$ با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ مفروض است، خاصیت یک به یکی و پوشایی را برای این تابع بررسی کنید.

۷ـ با استفاده از ماتریسهای تبدیل (ماتریس دوران حول مبدأ) و تبدیلات متوالی ثابت کنید:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ و $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

۸ـ معادله $۱۵ - \left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = ۸ \left(\frac{a - x}{x - b}\right)$ را حل کنید.

۹ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۱۰ \end{matrix} \right.$ گذشته، فاصلهٔ مبدأ مختصات از آن مساوی (۱۰) باشد.

۱۰ـ ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی تصاعد هندسی بسازد، سه ارتفاع آنها نیز تصاعد هندسی می‌سازد.

۱۱ـ از رابطهٔ $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = ۰$، رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$\cos\alpha \cos 2\alpha + \cos\beta \cos 2\beta + \cos\gamma \cos 2\gamma = 6\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

(راهنمایی: از اتحاد $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ استفاده کنید.)

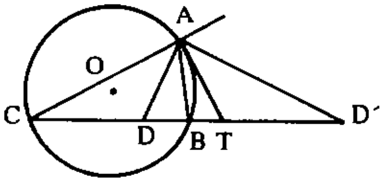
(فرستنده: آقای علی‌گشاس دانش‌آموز رشته ریاضی از اهواز)

۱۲ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

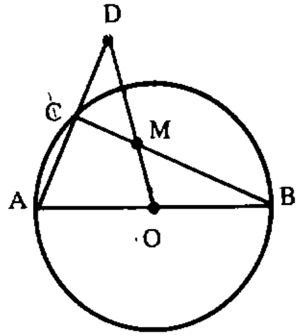
$$tg\frac{1}{2}\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{-2}{3}\right) - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

◆ مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ـ مثلث ABC مفروض است. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ T قطع کند. نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویهٔ A را نیز رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقاط D و D′ قطع کنند (نقطهٔ B بین D و D′ است). ثابت کنید که: $TA^2 - TB^2 = BD \cdot BD'$.



۲ـ قطر AB از دایرهٔ O مفروض است. از نقطهٔ A به نقطهٔ دلخواه C از این دایره وصل می‌کنیم و نقطهٔ D را در امتداد AC چنان اختیار می‌کنیم که AC = CD باشد. از C به B و از O به D وصل می‌کنیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ M، وقتی نقطهٔ C دایرهٔ O را می‌پیماید، تعیین کنید.



۳ـ ثابت کنید مجموعهٔ n تاییهای مرتب با درآیه‌های گویا همراه با دو عمل جمع n تاییها (مؤلفه به مؤلفه) و ضرب عدد در یک n تایی (در هر مؤلفه ضرب می‌شود) یک فضای برداری روی IR تشکیل نمی‌دهد.

$$Q^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, a_2, ..., a_n \in Q\}$$

۴ـ هرگاه بردارهای V_1، V_2 و V_3 در فضای برداری V مستقل خطی باشند، آیا بردارهای $(V_1 - V_2 - V_3)$ و $(2V_1 + V_2 - V_3)$ و $(3V_1 - 2V_3)$ استقلال خطی دارند؟ چرا؟

۵ـ عبارات بولی زیر را ساده کنید:

(الف) $A = (a + b' + c')(a' + b)(a + bc)$

(ب) $B = (ab + c)' + a'c + cb' + b$

۶ـ اولاً معین کنید به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد به شرطی که مجموع آنها فرد باشد. ثانیاً به چند طریق می‌توان از بین این اعداد ۳ عدد انتخاب کرد به‌طوری که مجموع آنها فرد باشد.

۷ـ چند عدد کوچکتر از یک میلیون به کمک ارقام ۸ و ۹ می‌توان درست کرد؟

۸ـ دو شخص A و B به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال زدن A به هدف $\frac{1}{4}$ و احتمال زدن B به هدف $\frac{2}{5}$ است، اگر A و B باهم تیراندازی کنند احتمال آنکه حداقل یکی به هدف بزند چقدر است؟

۹ـ مطلوب است تعیین کلیهٔ اعدادی که عدد $(2^{12n} - 1)$ بر آنها بخش‌پذیر است $n \in N$.

۱۰ـ مطلوب است محاسبهٔ حدّ $\frac{n! + (n-1)! + (n+1)!}{(n-2)! + (n+2)! + n!}$ وقتی $n \to +\infty$، $n \in N$.

۱۱ـ مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که بتوان دو مماس عمود بر هم بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ رسم کرد.

۱۲ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$6\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{8}\right) + \cos\frac{x}{2} = 2$$

(فرستنده: آقای علی‌کشاس دانش‌آموز رشته ریاضی از اهواز)

۱۳ـ در مثلث ABC داریم $b^3 + c^3 = a^2(b + c)$، ثابت کنید: $\hat{A} = 60°$.

(فرستنده: آقای مهدی محمدی دانش‌آموز رشته ریاضی از آمل)

◆ مسائل کامپیوتر سال سوم ریاضی

۱ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد π را به کمک ۲۰ جملهٔ حاصلضرب زیر محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \dots$$

۲ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا تعداد جملات سری زیر را بخواند و سپس مقدار π را محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

۳ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا مقدار e (عدد اویلر) را با

استفاده از سری

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

محاسبه کرده نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند و به محض اینکه مقدار یک جمله کمتر از 10^{-6} شد به محاسبه خاتمه دهد. مقدار e را از طریق تابع کتابخانه‌ای به‌دست آورده و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

۴ـ شرایط تمرین ۳ را در مورد مقدار تقریبی e^{-1} پیاده کنید که در آن:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

۵ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد طبیعی N را از ورودی بخواند و یکبار بدون استفاده از حلقه‌های FOR و WHILE، و بار دیگر با استفاده از حلقهٔ FOR، مجموع زیر را محاسبه کرده و نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$\sum_{I=0}^{N} 2^I = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^N$$

(فرستنده مسائل شمارهٔ ۴ و ۵ آقای سیدرضا حسینی، دبیر دبیرستانهای سنندج)

● مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ـ دو بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -\vec{i} + \vec{k}$ مفروضند. مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(3\vec{V}_1) \cdot (-2\vec{V}_2)$

ب) ($-\frac{2}{3}\vec{V}_2$ و $\frac{3}{5}\vec{V}_1$)

ج) اندازهٔ جبری تصویر بردار $2\vec{V}_1 + 3\vec{V}_2$ روی بردار $3\vec{V}_1 - 4\vec{V}_2$.

د) $|(\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2) \wedge (-\vec{V}_1 + \vec{V}_2)|$

۲ـ دو خط d و d' به معادلات زیر مفروضند:

$$d : \frac{x+2}{2} = \frac{y - a + 2b - 2}{2b} = z \qquad (b \neq 0)$$

$$d' : \frac{2x - b}{b} = \frac{y - (a+1)(2b+1)}{(a+1)(2b+1) - 1} = \frac{z - b - 1}{b}$$

اولاً: مقدار a را چنان تعیین کنید که این دو خط در ازای جمیع مقادیر حقیقی b برهم عمود باشند. سپس به ازای $a = -1$ تحقیق کنید دو خط در نقطهٔ ثابت A، که مختصاتش را پیدا می‌کنید متقاطعند.

ثانیاً: با همان مفروضات، خط دیگر

$$d'' : \begin{cases} x = z - c \\ y = -1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. مقدار b را به قسمی بیابید که خط d'' با دو خط d و d' زاویه‌های متساوی تشکیل دهد.

ثالثاً: اگر $a = -1$ و $b = 1$ باشد:

الف) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط d و d' است و ثابت کنید به ازای مقداری از c، که آن را تعیین خواهید کرد، خط d'' می‌تواند بر این صفحه منطبق باشد.

ب) به ازای $c = 2$ مختصات نقاط تلاقی خط d'' را با دو خط d و d' یافته، این دو نقطه را B و C بنامید و تحقیق کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. آنگاه معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشند.

ج) هرم SABC را به حجم ۹ طوری در نظر می‌گیریم که $SA = SB = SC$ بوده؛ و رأس S پایین صفحهٔ xoy واقع باشد. مختصات این رأس را حساب کنید.

د) مختصات رأسهای مقطع صفحهٔ xoy را در هرم SABC تعیین کنید.

(از آقای م ـ ا ـ گیتی‌زاده دبیر ریاضی)

۳ـ هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

ب) $p \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۴ـ ثابت کنید استنتاج زیر معتبر است (با ذکر قوانین):

۱) $(p \wedge q) \Rightarrow r \wedge$

۲) $(p \wedge \sim r)$

$\therefore q \Rightarrow s$

۵ـ اگر R حلقه‌ای باشد فاقد مقسوم علیه صفر، ثابت کنید معادلهٔ $ax = b$ در حلقهٔ R جوابی منحصر به فرد دارد (حداکثر یک جواب دارد).

۶ـ می‌دانیم کلیه ایده‌آلهای حلقهٔ اعداد صحیح به شکل KZ هستند که $KZ = \{kx | x \in Z\}$ ثابت کنید $mZ + nZ = dZ$ که در آن $d = (m,n)$.

به‌طور کلّی اگر I_1 و I_2 ایده‌آلهای حلقهٔ R باشند داریم:

$I_1 + I_2 = \{a + b |\ a \in I_1 , b \in I_2\}$

۷ـ تعین کنید در خارج قسمت و باقیماندهٔ یک تقسیم چه تغییری رخ می‌دهد هرگاه: الف) مقسوم‌علیه را به مقسوم بیفزاییم (یا کم کنیم)، ب) ۳ برابر مقسوم علیه را به مقسوم بیفزاییم.

۸ـ ثابت کنید اگر عدد صحیح a مضرب ۷ نباشد در این صورت:

$a^3 = 7K \pm 1$

۹ـ مطلوب است تعیین دو عدد که مجموعشان ۱۸۷ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۳۰ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد.

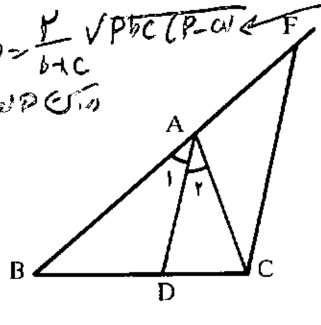
۱۰ـ بدون استفاده از مشتق ثابت کنید، تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{x + 4 + 3\sqrt{x + 4}}$ در دامنه‌اش یک به یک است.

۱۱ـ در تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + m}{x - 1}$، m را چنان بیابید تا بین طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع فوق رابطه $4x'x'' + 3(x'+x'') = 6$ برقرار باشد.

۱۲ـ مطلوب است محاسبهٔ $\int \frac{4 \sin x \cos x\, dx}{\sqrt{2\sin^2 x + \cos^2 x}}$

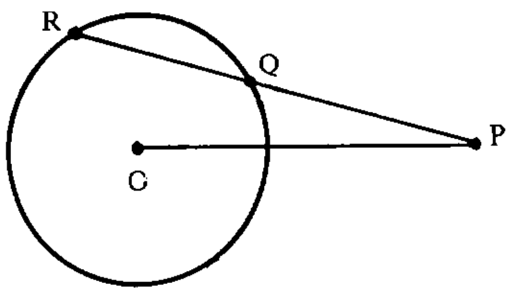
◆ مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز زاویهٔ داخلی A رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطهٔ F قطع کند. اندازهٔ پاره‌خط CF را برحسب اضلاع مثلث به دست آورید.



۲ـ نقطهٔ P خارج یک دایره و به فاصلهٔ ۱۳ سانتی‌متر از مرکز آن واقع است. خطی از P رسم شده است که دایره را در نقطه‌های Q و R چنان قطع کرده که پاره‌خط PQ برابر ۹ سانتی‌متر و پاره‌خط QR برابر ۷ سانتی‌متر است. شعاع دایره را حساب کنید.

فرستنده: آقای رضا نصیری دانش‌آموز از زنجان



۳ـ نامعادلهٔ زیر به‌ازای چه مقادیری از x برقرار است:

$$\log_5^x > \log_{125}(3x - 2)$$

(فرستنده: آقای مجید شهبازی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان))

۴ـ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$16y^2 + 4x^2 + 32y + x^4 - 4x^2y^2 + 16 = ?$

(فرستنده: آقای سروش عباس‌پور دانش‌آموز دبیرستان مرکز شهیدبهشتی ساری)

۵ـ اگر a و b و c جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید:

$a^3 + b^3 + c^3 = a^2b^2c^2 (a^{-3} + b^{-3} + c^{-3})$

(فرستنده مسائل ۵ و ۶: آقای محمد توسلی دانش‌آموز رشته تجربی آمل)

۶ـ در صورتی‌که $\log_b^a$ و $\log_c^b$ و $\log_a^c$ به ترتیب تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند مطلوب است محاسبهٔ a و b و c از دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \log_2^a + \log_2^b + \log_2^c = 10 & (\log a \neq 0) \\ a = b + c \end{cases}$$

۷- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x^2+xz+z^2=4 \\ y^2+yz+z^2=7 \end{cases}$$

(فرستنده: آقای محمدعلی مهتدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بناب))

۸- با شرط $b>0$ و $a>0$، حاصل عبارت زیر را حساب کنید:

$$S=\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{\dots}}}}}}}$$

(فرستنده: خانم لاله تراب‌نژاد دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز))

۹- مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

(راهنمایی: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$)

$$S=\operatorname{Arc}\sin\frac{23}{26}-\operatorname{Arc}\cos\frac{11}{13}$$

(فرستندهٔ مسائل ۱ و ۲: آقای حسین روح‌الامینی دانش‌آموز رشته ریاضی (سیرجان))

۱۰- از روابط زیر رابطه‌ای مستقل از x پیدا کنید:

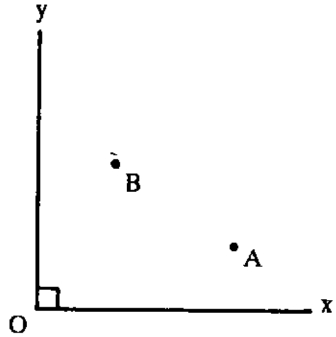
$$\begin{cases} a\sin^2x-b\cos^2x=p \\ a\sin^4x+b\cos^4x=q \end{cases}$$

◆ مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱- اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث حاصل از تقاطع خط Δ به معادلهٔ $2x-3y-6=0$ با محورهای مختصات را به دست آورید.

۲- اگر $|\vec a|=3$ و $|\vec b|=5$ و $(\widehat{\vec a,\vec b})=\frac{\pi}{3}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $(\vec a+\vec b).(\vec a-\vec b)$

۳- دو نقطهٔ A و B درون زاویهٔ قائمهٔ xoy مفروضند. روی نیمخطهای ox و oy به ترتیب نقاط P و Q را چنان پیدا کنید که $AP+PQ+QB$، کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۴- حدّ زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x\,\sin 2x\,\sin 3x}{x^3}\right)$$

۵- اگر $y=a\sin mx+b\cos mx$ باشد، ثابت کنید:

$$y''+m^2y=0$$

(فرستنده مسائل ۴ و ۵ آقای فرزاد نصیری، رشته ریاضی از اراک)

۶- در تابع با ضابطهٔ پارامتری زیر y'_x را به دست آورید:

$$\begin{cases} x=2\operatorname{tg}3\alpha+3 \\ y=2\sin3\alpha-5 \end{cases}$$

۷- نمودار تغییرات تابع با ضابطهٔ مفروض $y=2mx-(2m-1)x^3$ همواره از چند نقطهٔ ثابت می‌گذرد؟

۸- اگر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ مفروض $y=\frac{ax+b}{x+a}$ محور xها را در $x=-1$ قطع کند و خط $x=-2$ مجانب منحنی باشد، مقادیر a و b را تعیین کنید.

۹- اگر ماکزیمم تابع با ضابطهٔ مفروض $f(x)=2x^3-3mx^2$ برابر ۸ باشد، مقدار m را تعیین کنید.

۱۰- حاصل عبارت $T=\sin^6 15^\circ+\cos^6 15^\circ+\sin^4 15^\circ+\cos^4 15^\circ$ را حساب کنید.

(فرستنده: آقای حسین روح‌الامینی دانش‌آموز رشته ریاضی (سیرجان))

۱۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

(فرستنده: آقای علی‌گشاس دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز))

◆ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 1$ از نیمساز ربع دوم و چهارم را به‌دست آورید.

۲ـ معادلهٔ زیر دارای چند ریشهٔ حقیقی است:

$$(x-1)^3 + (x-2)^3 + \dots + (x-101)^3 = 0$$

۳ـ به ازای چه مقادیری از k تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{k+2x}{kx+8}$ مقداری ثابت است؟

۴ـ حدود m برای آن‌که نقطهٔ $P(-2, 3)$ داخل دایره به معادلهٔ $2x^2 + 2y^2 + 2my = 18$ باشد را به‌دست آورید.

۵ـ اندازهٔ مماس مرسوم از نقطهٔ $M(2, -3)$ بر دایرهٔ به معادلهٔ $3x^2 + 3y^2 - 6y = 9$ را حساب کنید.

۶ـ اگر $\int_0^{\frac{\pi}{m}} \sin\frac{mx}{2}\,dx = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۷ـ یک جواب عمومی معادلهٔ $\cos x\,(3\sin x + 3\cos x) = \frac{3}{2}$ را به‌دست آورید.

۸ـ اگر در مثلثی رابطهٔ $\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} - \cos^2\hat{C} = 1$ برقرارباشد، زاویهٔ C چه‌قدر است؟

تفریح اندیشه ۳

دو نفر یکی بزرگسال و دیگری بچه با لباس یکسان در هوای باز یخبندان ایستاده‌اند. کدام یک از آنها بیشتر سردش است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

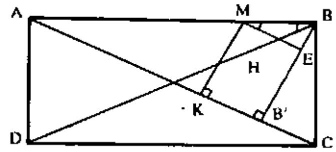


حل مسائلِ برهانِ شمارهٔ ۱۱

◻ حل مسائل ریاضیات سال اول

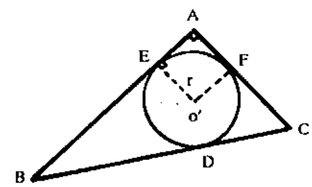
۱ـ از نقطهٔ B عمود BB' را بر قطر AC فرود می‌آوریم و از M عمود ME را بر BB' رسم می‌کنیم. چهار ضلعی $MEB'K$ مستطیل است. پس، $MK = EB'$. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH و MBE به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند بنابراین $MH = BE$ و درنتیجه داریم:

$$MH + MK = BE + EB' = BB' = C^{te}$$



۲ـ دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را رسم می‌کنیم ونقاط تماس این دایره با اضلاع BC و AB و AC را به‌ترتیب D و E و F می‌نامیم. می‌دانیم که $AE = AF$ و $CD = CF$ و $BD = BE$ است.از طرفی‌داریم:

$$AB + AC + BC = 2p \Rightarrow$$
$$AE + EB + AF + FC + BD + DC = 2P \Rightarrow$$
$$2AE + 2BD + 2CD = 2P \Rightarrow AE + BC = P \Rightarrow$$
$$AE = P - BC \Rightarrow AE = P - a$$



اما چهار ضلعی $O'EAF$ مربع است بنابراین $AE = r$ است پس:

$$r = p - a \Rightarrow 2r = 2p - 2a \Rightarrow$$
$$2r = a + b + c - 2a = b + c - a \Rightarrow 2r + a = b + c$$

امادرمثلث‌قائم‌الزاویه ABC $(\hat{r} = 90^\circ)$ $a = BC = 2R$ است. پس:

$$\boxed{b + c = 2R + 2r}$$

۳ـ روش اول: دو حالت درنظر می‌گیریم، اگر $P \equiv T$ در این‌صورت $(p \vee q) \equiv T$ و اگر $P \equiv F$ در این صورت باید $\sim P \equiv T$ وچون طبق‌فرض $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv T$ لذاباید $q \equiv T$ که باز نتیجه می‌شود $(p \vee q) \equiv T$ حال اگر $p \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد باید $p \equiv F$ و $(\sim p \wedge q) \equiv F$ و چون $\sim p \equiv T$ پس باید $q \equiv F$ که نتیجه می‌شود $(p \vee q) \equiv F$ بنابراین همواره $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q)$.

روش دوم: از خاصیت توزیع‌پذیریِ $\vee$ نسبت به $\wedge$ استفاه می‌کنیم:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv T \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee q)$$

۴ـ گزارهٔ‌سوری $\forall x \in IR ,\ \frac{x+1}{2x-1} \in IR$ نادرست‌است زیرا برای $x = \frac{1}{2}$، $\frac{x+1}{2x-1} \notin IR$ و از طرفی گزارهٔ $(p \Rightarrow p)$ که تالیِ گزارهٔ $[(r \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$ می‌باشد همواره درست بوده و می‌دانیم هر ترکیب شرطی که تالیِ آن درست باشد همواره درست خواهد بود، بنابراین در ترکیب دو شرطیِ مزبور چون دو طرف هم ارز نیستد همواره ارزش نادرست خواهیم داشت.

۵ـ باتوجه به تعریف $A_k = [-K , K]$ واضح است که

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

بنابراین باتوجه به‌قضایای اصلیِ اجتماع و اشتراک و تعمیم آنها داریم:

الف) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = A_1$

ب) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{15} = A_{15}$

ج) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_n$

۶ـ فرض کنیم $(A \cup B) = \phi$ ثابت می‌کنیم $A = \phi$ و $B = \phi$

می‌دانیم $\rightarrow A \subset (A \cup B) \overset{\text{طبق فرض}}{\Longrightarrow} A \subset \phi$ (۱)

از طرفی عمواره $\Rightarrow \phi \subset A$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow A = \phi$

و به‌ترتیب ثابت می‌شود $B = \phi$.

از طرفی می‌دانیم اگر $A = B$ آنگاه $A' = B'$ و برعکس. بنابراین ثابت کردیم: (درمسألهٔ فوق به‌جای A، A' و به‌جای B، B' قرار داده‌ایم.)

$$(A' \cup B') = \phi \Rightarrow A' = \phi \wedge B' = \phi$$

یابه‌عبارت دیگر: $(A' \cup B')' = \phi' \Rightarrow (A')' = \phi' \wedge (B')' = \phi'$

یا $\rightarrow \quad (A \cap B) = M \Rightarrow A = M \wedge B = M$

۷ـ

$$\frac{2^{1/5}}{1+\sqrt{2}+(3)^{\frac{1}{2}}} + 9^{0/25} + \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{2}+3^{\frac{1}{2}}} + 9^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2^3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt[4]{9} - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{[\sqrt{3}+(\sqrt{2}+1)][\sqrt{3}-(\sqrt{2}+1)]} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{3-2-1-2\sqrt{2}} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{-2\sqrt{2}} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= -(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1) + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 1$$

۸ـ

$$\text{جمع}\quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 19 \\ 4x + y + z = 15 \\ x + 3y + 2z = 19 \end{cases}$$

$$7x + 7y + 7z = 63 \Rightarrow x + y + z = 9$$

$$x + y + z = m + 4 \Rightarrow 9 = m + 4 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

۹ـ $a > 0$ داریم: $(a - 1)^2 \geq 0$:

طرفین نامساوی را بر $a > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Rightarrow \boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2} \Rightarrow \boxed{\text{۲} \geq \text{عکس آن + هر عدد مثبت}}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + 1 + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 2$$

به طرفین ۳ واحد اضافه می‌کنیم.

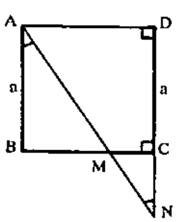
$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 6$$

$$3 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 9$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9$$

◻ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ (حل از آقای رضا، شاه‌اکبری از نیشابور) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و AND مشابهند زیرا $\hat{A}_1 = \hat{N}_1$ و $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ پس:



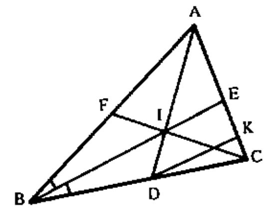
$$\frac{AB}{DN}=\frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{AM}=\frac{DN}{AN}\Rightarrow \frac{a^2}{AM^2}=\frac{DN^2}{AN^2}=\frac{AN^2-a^2}{AN^2}\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{AM^2}=\frac{AN^2-a^2}{AN^2}=1-\frac{a^2}{AN^2}\Rightarrow \frac{a^2}{AM^2}+\frac{a^2}{AN^2}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}}$$

۲ـ از نقطهٔ D خطی موازی نیمساز BE رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ K قطع کند. در مثلث ADK داریم:



$$IE \parallel DK \Rightarrow \frac{AI}{ID}=\frac{AE}{EK}\Rightarrow$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AE}{EC}\times\frac{EC}{EK}\Rightarrow$$

$$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{a}\times\frac{EC}{EK} \qquad (۱)$$

از طرفی در مثلث BCE داریم:

$$DK \parallel BE \Rightarrow \frac{KC}{KE}=\frac{DC}{DB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{EC}{KE}=\frac{b+c}{c} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{a}\times\frac{b+c}{c}=\frac{b+c}{a}$$

در نتیجه $\boxed{\frac{IA}{ID}=\frac{b+c}{a}}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که

$$\frac{IC}{IF}=\frac{a+c}{b}\ ,\ \frac{IB}{IE}=\frac{a+b}{c}$$

۳ـ $A=\{۱,۲,۳\}$

الف) $R_1=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳)\}$

رابطهٔ R_1 خاصیت تقارنی ندارد زیرا، $(۳,۲)\notin R_1$ و نیز خاصیت تعدی ندارد زیرا، $۱R_1۲$ و $۲R_1۳$ ولی $۱\not R_1۳$ و همچنین خاصیت پاد تقارن ندارد زیرا $۱R_1۲$ و $۲R_1۱$ ولی $۲\neq۱$، بنابراین رابطهٔ R_1 فقط خاصیت بازتابی دارد.

ب) $R_2=\{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$

$۳\not R_2۳ \Rightarrow$ خاصیت بازتابی ندارد

$۱R_2۲ \wedge ۲R_2۱$ و $۲\neq۱ \Rightarrow$ خاصیت پادتقارنی ندارد

$۲R_2۳$ و $۳\not R_2۲ \Rightarrow$ خاصیت تقارنی ندارد

۴ـ می‌خواهیم ثابت کنیم اگر $(A\times B)=(C\times D)$ آنگاه $A=C$ و $B=D$.

طبق فرض

$\Longleftarrow$ فرض کنیم $[x\in A \wedge y\in B \Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)$

$(x,y)\in(C\times D)\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D]\Rightarrow A\subset C\wedge C\subset A$

و $B\subset D \wedge D\subset B$

در واقع به یکباره ثابت کردیم $A=C$ و $B=D$.

۵ـ با فرض xRy و yRz نمی‌توان ثابت کرد xRz بنابراین، به‌دنبال مثال نقض هستیم:

$$۲\times۰+۳\times۲=۶\Rightarrow ۰R۲$$

$$۲\times۲+۳\times\frac{۲}{۳}=۶\Rightarrow ۲R\frac{۲}{۳}$$

ولی واضح است که $\frac{۲}{۳}\not R\,۰$ زیرا $۶\neq ۲\times۰+۳\times\frac{۲}{۳}$.

۶ـ

الف) $f: IR^2\to IR^2$

$f(x,y)=(x+۱\ ,\ y-۴)$

ب) $f: IR^2\to IR^2$

$f(x,y)\to(x,\sqrt{y})$

ج) $f: IR^2\to(R^+\cup\{۰\})^2$

$f(x,y)=(x^2,y^2)$

د) $f: IR^2\to IR^2$

$f(x,y)=(۲x+y$ و $۶x+۳y)$

۷ـ برای حل این تمرین رجوع کنید به مقالهٔ گروه، پیدایش و کاربرد نظریه گروهها در برهان ۱ (سال اول).

۸ـ

$$(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)=۳۵$$

$$(x+۲)(x+۳)(x+۱)(x+۴)=۳۵$$

فرض می‌شود: $x^2+۵x=y$

$$(x^2+۵x+۶)(x^2+۵x+۴)=۳۵$$

$$(y+۶)(y+۴)=۳۵\Rightarrow y^2+۱۰y-۱۱=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۱\\y=-۱۱\end{cases}$$

$$x^2+۵x=۱ \qquad \begin{cases}x^2+۵x=-۱۱\\x^2+۵x+۱۱=۰\\\Delta<۰\end{cases}$$

$$x^2+۵x-۱=۰$$

$$\boxed{x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۹}}{۲}}$$

۹ـ $a_1 \quad a_1q \quad a_1q^2 \quad a_1q^3$

$$\begin{cases}a_1+a_1q^3=\frac{۳۵}{۴}\\a_1q+a_1q^2=\frac{۱۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(۱+q^3)=\frac{۳۵}{۴}\\a_1q(۱+q)=\frac{۱۵}{۲}\end{cases}$$

دو معادله را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱+q^3}{q(۱+q)}=\frac{\frac{۳۵}{۴}}{\frac{۱۵}{۲}}\Rightarrow\frac{(۱+q)(۱+q^2-q)}{q(۱+q)}=\frac{۷}{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{۱+q^2-q}{q}=\frac{۷}{۶}\Rightarrow ۶q^2-۱۳q+۶=۰$$

$$q=\frac{۱۳\pm\sqrt{۲۵}}{۱۲}=\frac{۱۳\pm۵}{۱۲}\Rightarrow\boxed{q=\frac{۳}{۲},\frac{۲}{۳}}$$

۱۰ـ

$$\log_x y=\frac{۱}{\log_y x}$$

$$\Rightarrow \log_y x+\frac{۱}{\log_y x}=\frac{۵۰}{۷} \qquad \text{فرض می‌شود:}\ \log_y x=a$$

$$a+\frac{۱}{a}=\frac{۵۰}{۷}\Rightarrow\frac{a^2+۱}{a}=\frac{۵۰}{۷}\Rightarrow ۷a^2-۵۰a+۷=۰$$

$$a=\frac{۲۵\pm\sqrt{۵۷۶}}{۷}=\frac{۲۵\pm۲۴}{۷}\Rightarrow a=۷,\frac{۱}{۷}$$

$$\log_y x=۷\Rightarrow x=y^7\ ,\ xy=۲۵۶\Rightarrow x=\frac{۲۵۶}{y}$$

از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم: $x=y^7\Rightarrow\frac{۲۵۶}{y}=y^7$,

$$\log\frac{۲۵۶}{y}=\log y^7\Rightarrow\log۲۵۶-\log y=۷\log y$$

$$\log۲۵۶=۸\log y\Rightarrow\log ۲^8=۸\log y$$

$$\Rightarrow ۸\log z=۸\log y$$

$$\Rightarrow\log y=\log ۲\Rightarrow\boxed{y=۲}\Rightarrow\boxed{x=۱۲۸}$$

$\log_y x=\frac{۱}{۷}$ با شرط x>y قابل قبول نیست.

۱۱ـ

$$a^{\cos^2x}+a^{\sin^2x}=a+۱\Rightarrow a^{\cos^2x}+a^{۱-\cos^2x}=a+۱$$

$$\Rightarrow a^{\cos^2x}+\frac{a}{a^{\cos^2x}}=a+۱\Rightarrow(a^{\cos^2x}=y)\,y+\frac{a}{y}=a+۱$$

$$\Rightarrow y^2-(a+۱)y+a=۰\Rightarrow y=\frac{a+۱\pm\sqrt{(a+۱)^2-۴a}}{۲}$$

$$\Rightarrow y=\frac{a+۱\pm\sqrt{(a-۱)^2}}{۲}=\frac{a+۱\pm|a-۱|}{۲}$$

$$=\frac{a+۱\pm(a-۱)}{۲}$$

$y=a$ یا $y=۱ \Rightarrow a^{\cos^2x}=a$ یا $a^{\cos^2x}=۱$

$\Rightarrow\cos^2x=۱$ یا $\cos^2x=۰$

$\Rightarrow \cos x=\pm۱$ یا $\cos x=۰$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\cos x=۱\Rightarrow\cos x=\cos۰\Rightarrow x=۲k\pi\\\cos x=-۱\Rightarrow\cos x=\cos\pi\Rightarrow x=۲k\pi\pm\pi\end{array}\right.$$

یا $\cos x=۰\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x$

$=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ یا $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۲ـ

$$\begin{cases}\sqrt{۲}\sin x=\sin y\\b\cos x=\cos y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲\sin^2x=\sin^2y\\b^2\cos^2x=\cos^2y\end{cases}$$

از جمع روابط دستگاه داریم:

$$۲\sin^2x+b^2\cos^2x=\sin^2y+\cos^2y=۱$$

$$۲(۱-\cos^2x)+b^2\cos^2x=۱\Rightarrow(b^2-۲)\cos^2x=-۱$$

$$\cos^2x=\frac{-۱}{b^2-۲}=\frac{۱}{۲-b^2}\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۲-b^2}\leq۱$$

$$\Rightarrow ۲-b^2\geq۱\Rightarrow b^2\leq۱$$

$$\Rightarrow|b|\leq۱$$

□ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ(حل از آقای بهروز بیرامی از نقده). می‌دانیم که در هر چهار ضلعی، مجموع مربعات اندازه‌های اضلاع، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو قطر، به‌اضافهٔ چهار برابر مجذور اندازهٔ پاره‌خطی که وسطهای دو قطر چهار ضلعی را به هم وصل می‌کند.

$$y-1=\pm 2 \Rightarrow y=3 , y=-1$$
$$\Rightarrow x=2 , -2 \Rightarrow$$
$$M_1(2,3,2) , M_2=(-2,-1,2)$$

-۴.

$1)\ [(p \Rightarrow q) \wedge r] \Rightarrow q \quad \wedge$
$2)\ \sim p \quad \wedge$
$3)\ q \Rightarrow s \quad \wedge$
$4)\ \sim s$
$\therefore r \Rightarrow p$

$5)\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ از ۱ و عطف مقدمات
$6)\ (\sim p \vee q) \equiv p \Rightarrow q$ از ۲ و ادخال فاصل
$7)\ (r \Rightarrow q)$ از ۵ و ۶ و انتزاع
$8)\ (r \Rightarrow s)$ از ۷ و ۳ و قیاس
$9)\ \sim r$ از ۴ و ۸ و نقیض انتزاع
$10)\ \therefore (\sim r \vee p) \equiv r \Rightarrow p$ از ۹ و ادخال فاصل

۵ـ چون F میدان است بنابراین تمام اعضای مخالف صفر در آن وارونِ ضربی داشته و همواره داریم:

طبق فرض $x^{-1}+y^{-1}=1 \Rightarrow xy(x^{-1}+y^{-1}) = xy \quad (1)$

از طرفی: $xy(x^{-1}+y^{-1}) = x+y \overset{(1)}{\Rightarrow} xy = x+y = 1$

$\Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = y^{-1}$

۶ـ واضح است که هر دو عدد صحیحِ متوالی نسبت به هم اولند یعنی، $(a,(a+1))=1$ حال اگر $d=(a,(2a+1))$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|a \Rightarrow d|2a \\ d|2a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow d|(2a+1)-2a \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

و اگر $d=((a+1)$ و $(2a+1))$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|a+1 \Rightarrow d|2a+2 \\ d|2a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow d|(2a+2)-(2a+1) \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

پس دو به‌دو نسبت به هم اولند.

حال اگر $d=((2a+1)$ و $\frac{a(a+1)}{2})$ در این‌صورت:

$$d\left|\frac{a(a+1)}{2} \Rightarrow d\right| 2\times\frac{a(a+1)}{2} \Rightarrow d|a^2+a \Rightarrow d|2a^2+2a \quad (1).$$

از طرفی: $d|2a+1 \Rightarrow d|2a^2+a \quad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow d|(2a^2+2a)-(2a^2+a) \Rightarrow d|a \quad (3)$

پس ثابت شد $d|a$ و داشتیم $d|2a+1$ و نیز ثابت کردیم که $(a,(2a+1))=1$ پس $d|1$ یعنی $d=1$.

۷ـ طبق فرض داریم $a+b=324$ از طرفی اگر $(a,b)=d$ داریم:

$a=a'd$ و $b=b'd$ که $(a',b')=1$

$a+b=324 \Rightarrow a'd+b'd=(a'+b')d=324$

$=2^2\times 3^4 \quad (1)$

از طرفی چون مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b عبارت هستند از مقسوم‌علیه‌های d پس، تعداد مقسوم‌علیه‌های d نیز ۱۲ می‌باشد. با توجه به رابطهٔ (۱) باید $d=2^\alpha\times 3^\beta$ و $(\alpha+1)(\beta+1)=12$ بنابراین $d=2^2\times 3^3$ یا $d=108$ بنابراین، $a'+b'=3$ که با توجه به $(a',b')=1$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a'=1 \\ b'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=108 \text{ و } b=216$$

$$\left.\begin{array}{l} a'=2 \\ b'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=216 \text{ و } b=108$$

۸ـ اثبات به استقراء روی n.

$$p(1): A^1=\begin{bmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha & \sqrt{2}\sin\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p(1)\equiv T$$

$p(k)\equiv T \Rightarrow A^k =$ فرض استقراء $=$

$$\begin{bmatrix}\cos k\alpha+\sin k\alpha & \sqrt{2}\sin k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin k\alpha & \cos k\alpha-\sin k\alpha\end{bmatrix}$$

$p(k+1): A^{k+1} =$ حکم استقراء $=$

$$\begin{bmatrix}\cos(k+1)\alpha+\sin(k+1)\alpha & \sqrt{2}\sin(k+1)\alpha \\ -\sqrt{2}\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha\end{bmatrix}$$

$$A^{k+1}=A\times A^k=\begin{bmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha & \sqrt{2}\sin\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos k\alpha+\sin k\alpha & \sqrt{2}\sin k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin k\alpha & \cos k\alpha-\sin k\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos k\alpha+\cos\alpha\sin k\alpha+\sin\alpha\cos k\alpha-\sin\alpha\sin k\alpha & \sqrt{2}\cos\alpha\sin k\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha\cos k\alpha \\ -\sqrt{2}\sin\alpha\cos k\alpha-\sqrt{2}\sin k\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\sin k\alpha+\cos\alpha\cos k\alpha-\cos\alpha\sin k\alpha-\sin\alpha\cos k\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\alpha+\sin(k+1)\alpha & \sqrt{2}\sin(k+1)\alpha \\ -\sqrt{2}\sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha\end{bmatrix}$$

۹ـ می‌خواهیم ثابت کنیم وارون هر ماتریس پایین مثلثی، پایین مثلثی است. اگر $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0$ معادلهٔ سرشتمایی ماتریس پایین مثلثی A باشد طبق قضیهٔ کیلی هامیلتون این ماتریس در معادله سرشتمایی‌اش صدق می‌کند یعنی:

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=\bar{0}$$

از طرفی چون A وارون‌پذیر است $a_0\neq 0$ پس:

$$A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I)=-a_0I$$

$$\Rightarrow A\left[\frac{-1}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right]=I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\left(-\frac{1}{a_0}A^{n-1}-\dots-\frac{a_1}{a_0}I\right)$$

و می‌دانیم اگر ماتریسی پایین مثلثی باشد هر توان آن نیز پایین مثلثی بوده و جمع چند ماتریس پایین مثلثی، پایین مثلثی است پس، A^{-1} پایین مثلثی می‌باشد.

-۱۰

اولاً:

$$y=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}-5$$
$$y+6=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1$$
$$y+6=(\sqrt{x}+1)^3 \Rightarrow y=(\sqrt{x}+1)^3-6$$
$$\Rightarrow f(x)=(\sqrt{x}+1)^3-6$$

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty]$ اگر $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1}+1)^3-6=(\sqrt{x_2}+1)^3-6$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x_1}+1)^3=(\sqrt{x_2}+1)^3$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1}+1=\sqrt{x_2}+1 \Rightarrow \sqrt{x_1}$$
$$=\sqrt{x_2} \Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$$

بنابراین تابع فوق در فاصله (∞+ و ۰) یک به یک است.

ثانیاً:

$$y=(\sqrt{x}+1)^3-6 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)^3=y+6$$
$$\sqrt{x}+1=\sqrt[3]{y+6} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt[3]{y+6}-1$$
$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+6}-1)^2$$

حال جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$\Rightarrow y=(\sqrt[3]{x+6}-1)^2=f^{-1}(x)$$

-۱۱

$$x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$$
$$\sqrt{3}-3\sqrt{3}x^2=3x-x^3$$
$$\sqrt{3}(1-3x^2)=3x-x^3$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

فرض می‌کنیم: $x=tg\,a$.

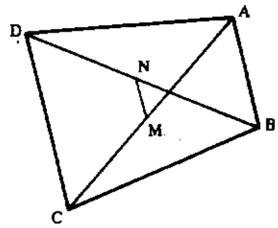
$$\sqrt{3}=\frac{3tg\,a-tg^3a}{1-3tg^2a} \Rightarrow tg\,3a=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3}$$
$$3a=k\pi+\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow a=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{3}$$

k	a	x
۰	$\frac{\pi}{9}$	$tg\frac{\pi}{9}=x_1$
۱	$\frac{4\pi}{9}$	$tg\frac{4\pi}{9}=x_2$
۲	$\frac{7\pi}{9}$	$tg\frac{7\pi}{9}=x_3$

به‌ازای سایر مقادیر k برای x همان جوابهای قبلی حاصل می‌شود.

-۱۲

یعنی، در چهار ضلعی ABCD که وسطهای قطرها را M و N نامیده‌ایم، داریم:



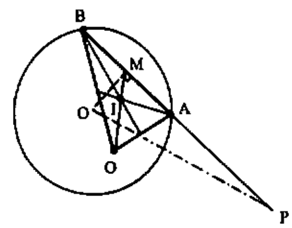
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$

که با فرض $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=l_1$ و $AC^2+BD^2=l_2$ داریم:

$l_1 = l_2 + 4MN^2 \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{4}(l_1 - l_2)$

$\Rightarrow \boxed{MN=\frac{1}{2}\sqrt{l_1-l_2}}$

۲ـ می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر AB وقتی قاطع PAB تغییر می‌کند دایره‌ای به قطر OP است. (یا قسمتی از این دایره که داخل دایرهٔ O واقع است. درصورتی که نقطهٔ P خارج دایره باشد). حال اگر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث QAB را I بنامیم، چون Q نقطه‌ای ثابت و $\frac{QI}{QM}=\frac{2}{3}$ است. پس مکان هندسی نقطهٔ I مجانس مکان هندسی نقطهٔ M نسبت به مرکز تجانس Q و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ است. یعنی مکان مطلوب یک دایره است که مجانس دایرهٔ به قطر OP است نسبت به مرکز تجانس Q، و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$.



۳ـ فرض کنیم V یک فضای برداری روی IR باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم جابجایی جمع را می‌توان از سایر اصول فضای برداری نتیجه گرفت. فرض کنیم x و y دو عضو دلخواه V باشند، داریم:

$(1+1)(x+y)=(1+1)x+(1+1)y= x+x+y+y \quad (1)$

از طرف دیگر داریم:

$(1+1)(x+y)=1(x+y)+1(x+y)=x+y+x+y \quad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow x+x+y+y = x+y+x+y$

و باتوجه به قانون حذف در گروه $(V, +)$ داریم:

$x+y=y+x$

۴ـ شرط لازم: فرض کنیم اعضای مجموعهٔ $A=\{V_1,V_2,\dots,V_n\}$ وابسته خطی باشند. در این صورت اسکالرهایی چون $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ هستند که لااقل یکی از آنها مثلاً $\alpha_i \neq 0$ و $\alpha_1V_1+\dots+\alpha_iV_i+\dots+\alpha_nV_n = \vec{0}$. حال اگر طرفین را بر $\alpha_i \neq 0$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$V_i = (\frac{-\alpha_1}{\alpha_i})V_1 + \dots + (\frac{-\alpha_n}{\alpha_i}V_n)$

یعنی V_i به‌صورت ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشته‌شد.

شرط کافی: فرض کنیم لااقل یکی از بردارها را برحسب ترکیب خطی از بقیه بردارها بتوان نوشت، در این صورت:

$V_i = \lambda_1V_1 + \lambda_2V_2 + \dots + \lambda_nV_n$

$\Rightarrow V_i - \lambda_1V_1 - \lambda_2V_2 - \dots - \lambda_nV_n = \vec{0}$

رابطهٔ اخیر نشان دهندهٔ یک ترکیب خطی از n بردار V_1 تا V_n است که مساوی با بردار صفر شده و می‌دانیم حداقل ضریب V_i، یک است و مخالف باصفر، پس این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

۵ـ الف) ۶ نفر به !۶ طریق می‌توانند سخنرانی کنند که در نیمی از این تعداد A بعداز B و نیمی دیگر B بعداز A سخنرانی خواهد کرد. پس، تعداد راههایی که B بعداز A سخنرانی می‌کند برابر است با $\frac{6!}{2}$.

ب) اگر بخواهیم شخص B بلافاصله بعد از A سخنرانی کند، B و A را یک نفر فرض کرده که با ۴ نفر دیگر ۵ نفر شده و به !۵ طریق می‌توانند سخنرانی کنند.

۶ـ

$xyz + x(x'+y) + y(x'+y') + xy'z + xz'$

$=xyz+xy+yx'+xy'z+xz' \quad (x(x'+y)=xy, y(x'+y')=yx')$

$= xyz + y\underbrace{(x+x')}_{1} + xy'z + xz'$

$= xyz + xy'z + y + xz'$

$= xz(y+y') + y + xz'$

$= xz + y + xz' = xz + xz' + y$

$= x(z+z') + y = x + y$

۷ـ

$P(x) \div (x-1)$: باقیمانده 3، خارج قسمت $Q_1(x)$ $\Rightarrow P(x)=(x-1)Q_1(x)+3 \Rightarrow \boxed{P(1)=3}$

$P(x) \div (x-2)$: باقیمانده 7، خارج قسمت $Q_2(x)$ $\Rightarrow P(x)=(x-2)Q_2(x)+7 \Rightarrow \boxed{P(2)=7}$

$P(x) \div (x-3)$: باقیمانده 13، خارج قسمت $Q_3(x)$ $\Rightarrow P(x)=(x-3)Q_3(x)+13 \Rightarrow \boxed{P(3)=13}$

$P(x) \div (x-1)(x-2)(x-3)$: باقیمانده mx^2+nx+k، خارج قسمت $Q(x)$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + mx^2 + nx + k$

$x=1 \Rightarrow P_{(1)} = m + n + k = 3$

$x=2 \Rightarrow P_{(2)} = 4m + 2n + k = 7$

$x=3 \Rightarrow P_{(3)} = 9m + 3n + k = 13$

$-1\begin{cases} m+n+k=3 \\ 4m+2n+k=7 \end{cases} \Rightarrow 3m+n=4$

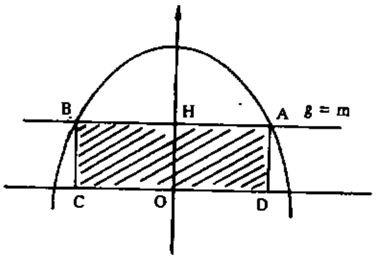
$-1\begin{cases} m+n+k=3 \\ 9m+3n+k=13 \end{cases} \Rightarrow 8m+2n=10$

$-2\begin{cases} 3m+n=4 \\ 8m+2n=10 \end{cases} \Rightarrow 2m=2$

$\Rightarrow \boxed{m=1}, \boxed{n=1}, \boxed{k=1}$

$\Rightarrow mx^2+nx+k=x^2+x+1$

۸ـ اگر $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ فرض شود داریم: $\begin{cases} AH=x \\ OH=y \end{cases}$



در نتیجه طول ضلع مستطیل (2x) و عرض آن (y) است:

مساحت مستطیل = طول × عرض

$S = 2xy$

$S = 2x(27 - x^2) \Rightarrow S = 2(27x - x^3)$

$S' = 2(27 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

x		-3		3	
S'	−		+		−
S	↘		↗		↘

پس x = 3 طول ماکزیمم است:

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow S_{Max} = 2(27 \times 3 - 27) = 108$

۹ـ

$y_1 = x^2 - 2x$

$y'_1 = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	−∞	−1	0	1	2	3	+∞
y'_1	−	−	−	+	+	+	
y_1	+∞ ↘	3 (A) ↘	0 (B) ↘	−1 (C) ↗	0 (D) ↗	3 (E) ↗	+∞

$y_2 = x^3 - 3x^2 + 2$

$y'_2 = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

x	−∞	−1	0	1	2	3	+∞
y'_2	+	+	−	−	+	+	
y_2	−∞ ↗	−2 (F) ↗	2 (G) ↘	0 (H) ↘	−2 (I) ↗	2 (K) ↗	+∞

$y_3 = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} < 0$

$x = 0$ مجانب قائم

$y = 0$ مجانب افقی

x	−∞	−1	0	1	+∞
y'_3	−	−	‖ −	−	
y_3	0 ↘	−1 (L) ↘	−∞ ‖ +∞ ↘	1 (M) ↘	0

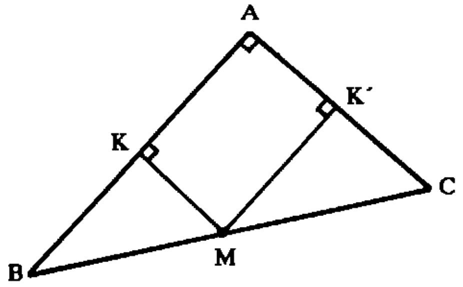
مسائل برای حل

- **هندسه: محمدهاشم رستمی**
- **ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری**
- **جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری**
- **کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم**

● مسائل ریاضیات سال اول

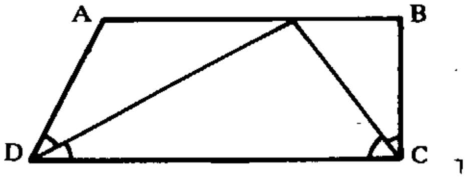
۱ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر نقطهٔ M وسط وتر BC، R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث و MK و MK′ فاصلهٔ نقطهٔ M از دو ضلع AB و AC باشد، ثابت کنید: $MK + MK' = R + r$.

(فرستنده آقای بهادر طالبی دانش‌آموز دبیرستان ولایت تبریز)



۲ـ خط راست xy و نقطهٔ A غیرواقع بر آن مفروضند. خطی موازی خط xy رسم کنید که از نقطهٔ A، و از خط xy به یک فاصله باشد.

۳ـ در ذوزنقه ABCD، قاعدهٔ کوچکتر AB برابر مجموع اندازه‌های دو ساق AD و BC است. $(AB = AD + BC)$.
ثابت کنید نیمسازهای زوایای درونی C و D از این ذوزنقه روی قاعدهٔ AB متقاطعند.



۴ـ هرگاه ارزش گزارهٔ $\sim(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow q$ درست باشد ثابت کنید همواره ارزش $(p \wedge q)$ درست است.

۵ـ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

(الف) $(\forall t\in \mathbb{R}; t\le -t) \Leftrightarrow (\nexists x\in \mathbb{Z}; x^2\ge x)$

(ب) $(\exists y\in \mathbb{Q}; (\frac{y+1}{y^2-\frac{1}{2}})\notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall n\in \mathbb{N}; n^2+1>2)$

۶ـ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۲K عضوی، ۴۸ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۳K عضوی کمتر است، عدد طبیعی K را معین کنید.

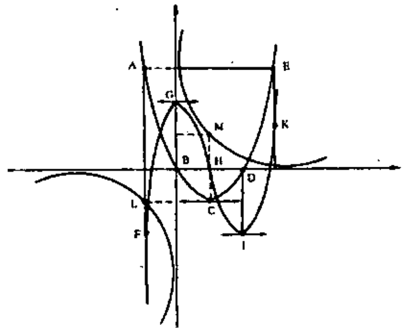
۷ـ ثابت کنید: اگر $(B \cap C) = C$ و $(A \cap B) = B$، آنگاه $C \subset B \subset A$ و برعکس.

۸ـ ابتدا ثابت کنید، $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
سپس با استفاده از آن ثابت کنید: اگر $B \cap C = \phi$ آنگاه
$(A - B) \cup (A - C) \cup (A - D) = A$

۹ـ اگر $x + y = \sqrt{5}$ و $x \cdot y = 1$، آنگاه $(x^4 + y^4)$ را محاسبه کنید.

۱۰ـ اگر تساوی $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد A و B و C را بیابید.

۱۱ـ حاصل کسر $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}$ را بیابید.



۱۰- $A = tg^2 20° + tg^2 40° + tg^2 80°$

به طرفین تساوی عدد ۳ را اضافه می‌کنیم:

$$A + 3 = 1 + tg^2 20° + 1 + tg^2 40° + 1 + tg^2 80° = \frac{1}{\cos^2 20°} + \frac{1}{\cos^2 40°} + \frac{1}{\cos^2 80°}$$

$$= \frac{(\cos 40° \cos 80°)^2 + (\cos 20° \cos 80°)^2 + (\cos 20° \cos 40°)^2}{(\cos 20° \cos 40° \cos 80°)^2}$$

$$= \frac{[\frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 40°)]^2 + [\frac{1}{2}(\cos 100° + \cos 60°)]^2}{(\frac{1}{4}\cos 60°)^2} + \frac{[\frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 20°)]^2}{(\frac{1}{4}\cos 60°)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}[(\cos 40° - \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} - \cos 80°)^2}{\frac{1}{16}} + \frac{(\frac{1}{2} + \cos 20°)^2]}{\frac{1}{16}}$$

$$= 16(\cos^2 40° + \frac{1}{4} - \cos 40° + \frac{1}{4} + \cos^2 80° - \cos 80° + \frac{1}{4} + \cos^2 20° + \cos 20°)$$

$$= 16(\frac{3}{4} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 80°}_{\cos^2 40°} - \cos 40° + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 160°}_{\cos^2 80°} - \cos 80° + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 40°}_{\cos^2 20°} + \cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cos 80° - \frac{1}{2}\cos 40° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}(2\cos 60° \cos 20°) + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \cos 60° \cos 20° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\cos 20° + \frac{1}{2}\cos 20°)$$

$$= 16(\frac{9}{4}) = 36 \Rightarrow A + 3 = 36 \Rightarrow \boxed{A = 33}$$

۱۱-

$$S_n = tg^2\frac{a}{2}tg a + 2tg^2\frac{a}{2^2}tg\frac{a}{2} + ... + 2^{n-1}tg^2\frac{a}{2^n}tg\frac{a}{2^{n-1}}$$

داریم:

$$tg^2\frac{a}{2}\, tg\, a = tg\, a - tg\, a + tg^2\frac{a}{2}\, tg\, a = tg\, a - tg\, a\,(1 - tg^2\frac{a}{2})$$

$$= tga - \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}(1 - tg^2\frac{a}{2}) = tga - 2tg\frac{a}{2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$S_n = tga - 2tg\frac{a}{2} + 2\,tg\frac{a}{2} - 4tg\frac{a}{4} + ...$$

$$+ 2^{n-1}tg\frac{a}{2^{n-1}} - 2^n tg\frac{a}{2^n}$$

$$\Rightarrow S_n = tga - 2^n tg\frac{a}{2^n}$$

$$S_n = tga - 2^n tg\frac{a}{2^n} = tga - 2^n\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\cos\frac{a}{2^n}}$$

$$\Rightarrow S_n = tga - \frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}} \times \frac{a\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(tga - \frac{a}{\cos\frac{a}{2^n}} \times \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = tga - \lim_{n\to\infty}(\frac{a}{\cos\frac{a}{2^n}}) \times \lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = tga - a \times 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = tg\, a - a$$

□ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱- حجم متوازی‌السطوحی که بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و $\vec{OC}$ یالهای‌جانبی آن باشند، برابر است با قدر مطلق حاصل ضرب مختلط این سه‌بردار.

یعنی: $V = |\vec{OC}\ \vec{OA}\ \vec{OB}|$ و یا:

$$V = |\vec{OC}.(\vec{OA} \wedge \vec{OB})|$$

اما بنا به‌فرض $\vec{OC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$ پس:

$$V = |\vec{OC}.\vec{OC}| = |\vec{OC}|^2 \Rightarrow 36 = |\vec{OC}|^2 \Rightarrow |\vec{OC}| = 6$$

۲- شرط متوازی بودن دو خط را می‌نویسیم:

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

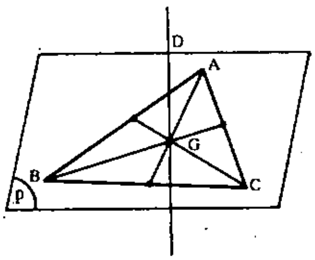
$$D: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = -3t + 5 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1(2, 1, -3)$$ بردار هادی خط D

$$D': ax + 1 = (b+1)y - 2 = 3z \Rightarrow \vec{V}_2(\frac{1}{a}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{3})$$ بردار هادی خط D'

$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{b+1}} = \frac{-3}{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$2a = b + 1 = -9 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-9}{2}}, \quad \boxed{b = -10}$$

۳- الف) مکان هندسی جواب مسأله خطی است که در نقطهٔ تقاطع میانه‌های مثلث بر صفحهٔ مثلث، عمود می‌شود. برای نوشتن معادلهٔ این خط کافی است مختصات نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC و تصاویر بردار عمود بر صفحهٔ این مثلث را پیدا کنیم.



G مرکز ثقل مثلث

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1 + 0 + 1}{3} = 0$$

$$y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2 + 1 + 0}{3} = 1$$

$$z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 1 + 2}{3} = 2$$

$$A\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{vmatrix} 0 + 1 = 1 \\ 1 - 2 = -1 \\ 1 - 3 = -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AC}\begin{vmatrix} 1 + 1 = 2 \\ 0 - 2 = -2 \\ 2 - 3 = -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC}\begin{vmatrix} -3 = p \\ -3 = q \\ 0 = r \end{vmatrix}$$

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 0}{-3} = \frac{y - 1}{-3}, \quad z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ z = 2 \end{cases}$$ معادلهٔ مکان هندسی مطلوب

ب) نقطهٔ تقاطع کره به معادلهٔ $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 12$ را با خط D به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 12 \\ x = y - 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(y-1)^2 + (y-1)^2 + 4 = 12 \Rightarrow$$

$$2(y-1)^2 = 8 \Rightarrow (y-1)^2 = 4 \Rightarrow$$

مخرج کسر را در $\frac{\cos x}{\cos x}$ ضرب می‌کنیم:

$$I=\int\frac{\sqrt{۲}\,dx}{\cos x\sqrt{\sin ۲x}}$$

$$I=\int\frac{\sqrt{۲}\,dx}{\cos^۲x\sqrt{\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}}}=\int\frac{\sqrt{۲}\,dx}{\cos^۲x\sqrt{\frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲x}}}$$

$$=\int\frac{\sqrt{۲}\,dx}{\cos^۲x\sqrt{۲tgx}}=\int\frac{dx}{\cos^۲x\sqrt{tgx}}$$

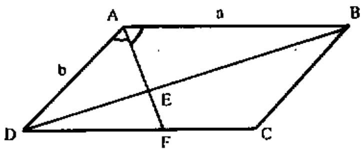
$$=\int\frac{(۱+tg^۲x)dx}{\sqrt{tgx}}$$

$$=۲\int\frac{(۱+tg^۲x)dx}{۲\sqrt{tgx}}=۲\sqrt{tgx}+C$$

▢ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ دو مثلث AEB و DEF متشابهند پس داریم:

$$\frac{EA}{EF}=\frac{EB}{ED}\quad(۱)$$



از طرفی در مثلث DAB پاره‌خط AE نیمساز زاویه درونی A است پس:

$$\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{AD}\quad(۲)$$

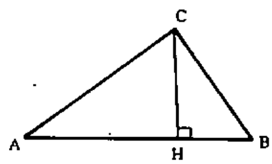
از مقایسه روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{EA}{EF}=\frac{AB}{AD}=\frac{a}{b}$$

۲ـ داریم $AH=m+۴$ و $BH=m+۱$ و $CH=m+۲$

از طرفی: $CH^۲=BH\,.\,AH$.

پس:



$$(m+۲)^۲=(m+۱)(m+۴)\Rightarrow\boxed{m=۰}$$

$$\Rightarrow AH=۴\,,\ BH=۱\,,\ CH=۲$$

$$\Rightarrow AB=AH+BH=۴+۱=۵$$

$$AC^۲=AH.AB=۴\times۵=۲۰\Rightarrow AC=۲\sqrt{۵}$$

$$BC^۲=BH.BA=۱\times۵=۵\Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AC.BC=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵})(\sqrt{۵})=۵$$

۳ـ

$$a^۳+b^۳-a^۲b-ab^۲-a-b$$
$$=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)-ab(a+b)-(a+b)$$
$$=(a+b)(a^۲-ab+b^۲-ab-۱)$$
$$=(a+b)(a^۲-۲ab+b^۲-۱)$$
$$=(a+b)((a-b)^۲-۱)$$
$$=(a+b)(a-b-۱)(a-b+۱)$$

۴ـ فرض می‌کنیم که: $A=\sqrt[۴]{m}+\sqrt[۴]{n}$ پس داریم:

$$A^۴=(\sqrt[۴]{m}+\sqrt[۴]{n})^۴=\sqrt[۴]{m^۴}+۴\sqrt[۴]{m^۳}\sqrt[۴]{n}+۶\sqrt[۴]{m^۲}\sqrt[۴]{n^۲}+۴\sqrt[۴]{m}\sqrt[۴]{n^۳}+\sqrt[۴]{n^۴}$$
$$=m+n+۴\sqrt[۴]{m}\sqrt[۴]{n}(\sqrt[۴]{m^۲}+\sqrt[۴]{n^۲})+۶\sqrt{mn}$$

می‌دانیم:

$$x^۲-ax+b=۰:\begin{cases}m+n=a & \text{(مجموع ریشه‌ها)}\\ mn=b & \text{(حاصل ضرب ریشه‌ها)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^۴=a+۴\sqrt[۴]{b}(\sqrt{m}+\sqrt{n})+۶\sqrt{b}$$

با فرض: $B=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ داریم:

$$B^۲=m+n+۲\sqrt{mn}\Rightarrow B^۲=a+۲\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$B=\sqrt{a+۲\sqrt{b}}$$
$$\Rightarrow A^۴=a+۴\sqrt[۴]{b}(\sqrt{a+۲\sqrt{b}})+۶\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt[۴]{a+۴\sqrt[۴]{b}\sqrt{a+۲\sqrt{b}}+۶\sqrt{b}}$$

روش دوم: ریشه‌های معادله چنین هستند:

$$n=\frac{a-\sqrt{a^۲-۴b}}{۲}\quad\text{و}\quad m=\frac{a+\sqrt{a^۲-۴b}}{۲}$$

بنابراین، کافی است m و n را جایگزین کنیم.

۵ـ

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=۱۱\\x+\sqrt{y}=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+y=۲+۹\\x+\sqrt{y}=۴+۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-۲=۹-y\\x-۴=۳-\sqrt{y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}①\ \sqrt{x}-۲=(۳-\sqrt{y})(۳+\sqrt{y})\\②\ (\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)=۳-\sqrt{y}\end{cases}$$

در رابطهٔ ۲ بجای $(\sqrt{x}-۲)$ مساویش را از رابطهٔ ۱ قرار می‌دهیم:

$$(۳-\sqrt{y})(۳+\sqrt{y})(\sqrt{x}+۲)=۳-\sqrt{y}$$
$$(۳-\sqrt{y})(۳+\sqrt{y})(\sqrt{x}+۲)-(۳-\sqrt{y})=۰$$
$$(۳-\sqrt{y})\left[(۳+\sqrt{y})(\sqrt{x}+۲)-۱\right]=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳-\sqrt{y}=۰\Rightarrow\sqrt{y}=۳\Rightarrow\boxed{y=۹}\\(۳+\sqrt{y})(\sqrt{x}+۲)-۱=۰ & \text{(غیرممکن)}\end{cases}$$

$$\sqrt{x}+y=۱۱\Rightarrow\sqrt{x}+۹=۱۱$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=۲\Rightarrow\boxed{x=۴}$$

۶ـ اگر قطر مستطیل را با R و طول و عرض مستطیل را به‌ترتیب به x و y نمایش دهیم، داریم:

$x^۲+y^۲=R^۲$ و محیط مستطیل $=۲(x+y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+y^۲=۱۶۹\\\frac{۳}{۲}\times۲(x+y)=۵۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲+y^۲=۱۶۹\\x+y=۱۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s^۲-۲p=۱۶۹\\s=۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=۶۰\\s=۱۷\end{cases}$$

$$\Rightarrow z^۲-۱۷z+۶۰=۰\Rightarrow\Delta=۲۸۹-۲۴۰=۴۹$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۷+۷}{۲}=\frac{۲۴}{۲}=۱۲\ ,\ y=\frac{۱۷-۷}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

۵ = عرض مستطیل و ۱۲ = x طول مستطیل

۷ـ می‌توان نوشت:

$$S_n=۴+۳۴+۳۳۴+۳۳۳۴+...+\underbrace{۳۳۳...۳۴}_{n\text{ مرتبه}}$$
$$=۳+۳۳+۳۳۳+۳۳۳۳+...+۳۳۳...۳۳+n(۱)$$
$$=\frac{۱}{۳}(۹+۹۹+۹۹۹+۹۹۹۹+...+۹۹۹...۹۹)+n$$
$$=\frac{۱}{۳}(۱۰-۱+۱۰^۲-۱+۱۰^۳-۱+۱۰^۴-۱+...+۱۰^n-۱)+n$$
$$=\frac{۱}{۳}\underbrace{(۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+۱۰^۴+...+۱۰^n)}+n-\frac{n}{۳}$$
$$=\frac{۱}{۳}(۱۰)\left(\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}\right)+\frac{۲n}{۳}=\frac{۱۰(۱۰^n-۱)}{۲۷}+\frac{۲n}{۳}$$
$$\Rightarrow S_n=\frac{۲n}{۳}+\frac{۱۰}{۲۷}(۱۰^n-۱)$$

۸ـ

$$۹\log x^۲=۶\log ۳\Rightarrow ۳\log x^۲=۲\log ۳$$
$$\Rightarrow\log x^۶=\log ۹\Rightarrow x^۶=۹$$
$$\Rightarrow|x|=\sqrt[۶]{۹}\Rightarrow|x|=\sqrt[۳]{۳}$$

۹ـ داریم:

$$(\sin^۴x-\cos^۴x)^۲=\left[(\sin^۲x-\cos^۲x)\underbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)}_{۱}\right]^۲$$
$$=(\sin^۲x-\cos^۲x)^۲$$
$$\sin^۸x+\cos^۸x-۲\sin^۴x\cos^۴x=$$
$$\sin^۴x+\cos^۴x-۲\sin^۲x\cos^۲x\quad(۱)$$

و همچنین داریم:

$$\underbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲}_{۱}=\sin^۴x+\cos^۴x+۲\sin^۲x\cos^۲x=۱$$
$$\Rightarrow\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x\quad(۲)$$

با جایگزینی رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$\sin^8x + \cos^8x - 2\sin^4x\cos^4x$

$= 1 - 4\sin^2x\cos^2x$

$\Rightarrow \sin^8x + \cos^8x$

$= 1 - 4\sin^2x\cos^2x + 2\sin^4x\cos^4x \quad (3)$

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۳) داریم:

$$\frac{\sin^8x + \cos^8x}{1 - 4\sin^2x\cos^2x + 2\sin^4x\cos^4x} - 2\sin^2x\cos^2x$$

$$= 1 - 2\sin^2x\cos^2x = \sin^4x + \cos^4x$$

۱۰- طرفین معادله را در ۱- ضرب می‌کنیم:

$$-\sin 2x + 12(\sin x - \cos x) - 12 = 0$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$1 - \sin 2x + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$

$$1 - 2\sin x\cos x + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$

$$(\sin x - \cos x)^2 + 12(\sin x - \cos x) - 13 = 0$$

با فرض $\sin x - \cos x = y$ داریم:

$$y^2 + 12y - 13 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+13) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } y = -13$$

جواب $y = -13$ قابل قبول نیست، زیرا:

$$y = \sin x - \cos x = -13 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$= -13 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-13}{\sqrt{2}} < -1$$

بنابراین داریم:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

یا $x = 2k\pi + \pi$

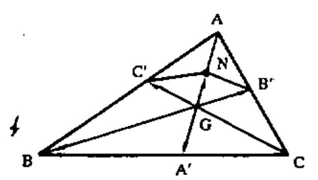
□ حل مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

۱- نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را G و وسط پاره‌خط AG را N می‌نامیم. از N به B' و C' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی GB'NC' متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

$\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GN}$ پس $NB' \parallel GC'$ و $NB' = \frac{GC}{2} = GC'$

امّا بردار $\overrightarrow{GN}$ قرینهٔ $\overrightarrow{GA'}$ است یعنی $\overrightarrow{GN} = -\overrightarrow{GA'}$ پس:

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$$



۲- در مکعب، مساحت هر صفحهٔ قطری برابر است با $a^2\sqrt{2}$ پس:

$$a^2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow V = a^3 = 64\ cm^3$$

حجم مکعب

۳- می‌دانیم که $S = 4\pi R^2$ کره، پس:

$$4\pi R^2 = 108\pi \Rightarrow R^2 = 27 \Rightarrow$$

$R = 3\sqrt{3}$ شعاع کره

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (3\sqrt{3})^3 = 108\sqrt{3}\pi$$

$$\alpha^\circ \text{ حجم قاچ } = \text{ حجم کره } \times \frac{\alpha^\circ}{360}$$

$$= 108\sqrt{3}\pi \times \frac{60}{360} = 18\sqrt{3}\pi$$

۴- برای حل معادلهٔ $|x-2| + |x+1| = 5$ سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$x > 2 : x - 2 + x + 1 = 5 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$$

$$x < -1 : -(x-2) - (x+1) = 5 \Longrightarrow -2x = 4 \Longrightarrow x = -2$$

معادله در حالت $-1 < x < 2$ دارای جواب نیست. زیرا به تساوی‌های عددی غیر ممکن می‌رسیم. بنابراین معادله، تنها دارای دو جواب $x = -2$ و $x = 3$ است.

۵- حد، عبارت $\frac{x^n + x^3 + 73}{mx^7 + 2x^2 + 74}$ برابر $-\frac{3}{4}$ شده است، پس درجهٔ صورت و مخرج باید مساوی باشند: $n = 7$

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^7 + x^2 + 73}{mx^7 + 2x^2 + 74}\right) \simeq \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^7}{mx^7} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

۶- شرایط پیوستگی در نقطهٔ $M(-1, 3)$ چنین است:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 3$$

$$\begin{cases} k(-1)^3 + s = 3 \\ k(-1)^2 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - k = 3 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ s = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2 & x < -1 \\ -x^2 + 4 & x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 4$$

$$x \geq -1 : f'(x) = -2x \Rightarrow f'(2) = -4$$

$$x < -1 : f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x \Rightarrow$$

$$f''(-3) = -6(-3) = 18$$

$$\frac{f'(2)\ f''(-3)}{f(0)} = \frac{(-4)(18)}{4} = -18$$

۷-

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+d)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+d)^2}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+d)^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{(1+d)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (d+1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow d + 1 = \pm 1 \Rightarrow d = -1 \pm 1 \Rightarrow d = 0 \text{ یا } d = -2$$

۸-

$$f(x) = x^3 + ax + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a$$

$$m = f'(-1) = 3(-1)^2 + a = a + 3$$

$$9x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow m' = \frac{-9}{3} = -3$$

$mm' = -1$ (شرط عمود بودن) : $(a+3)(-3) = -1$

$$a = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-8}{3}}$$

۹-

$$S = \cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

طرفین تساوی را در $32\sin\frac{\pi}{11}$ ضرب می‌کنیم:

$$32\,S\sin\frac{\pi}{11} = 16\,(2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11})\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 8\,(2\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11})\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 4\,(2\sin\frac{4\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11})\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 4\sin\frac{8\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 4\sin(\pi - \frac{8\pi}{11})\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 4\sin\frac{3\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 2\sin\frac{6\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = 2\sin(\pi - \frac{6\pi}{11})\cos\frac{5\pi}{11}$$

$$= 2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11} = \sin\frac{10\pi}{11} = \sin(\pi - \frac{10\pi}{11}) = \sin\frac{\pi}{11}$$

$$\Longrightarrow 32S\sin\pi = \sin\frac{\pi}{11} \Longrightarrow S = \frac{1}{32}$$

۱۰-

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = m \\ \sin\alpha + \sin\beta = n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = m \\ 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = n \end{cases}$$

از ضرب دو رابطهٔ دستگاه داریم:

$$\left(2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) = mn$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = mn \Rightarrow$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{mn}{2\sin(\alpha+\beta)} \quad (1)$$

اکنون طرفین رابطه‌های دستگاه را به توان ۲ می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=m^2+n^2$$

$$4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=m^2+n^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{m^2+n^2}{4} \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)=\frac{m^2+n^2}{2mn}$$

□ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ

$$AH=\frac{|-4(-1)+2(2)-2m|}{\sqrt{16+4}}=\frac{\sqrt{20}}{2m}$$

$$|4+4-2m|=\frac{20}{2m} \Rightarrow |8-2m|=\frac{10}{m}$$

$$2m(4-m)=\pm 10 \Rightarrow m(4-m)=\pm 5 \Rightarrow$$

$$m^2-4m\pm 5=0$$

$$m=2\pm\sqrt{4-(\pm 5)}=2\pm\sqrt{4\pm 5}$$

$$\Rightarrow m=2\pm\sqrt{9}=2\pm 3 \Rightarrow m=2+3$$

$$=5 \Rightarrow \boxed{m=5}$$

۲ـ در حالت عمومی داریم:

$$y=\frac{3mx-6}{m-2x}=\frac{3mx-6}{-2x+m}$$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{\Delta}{(cx+d)^2}$$

می‌دانیم اگر علامت مشتق همواره مثبت باشد، تابع همواره صعودی است، بنابراین شرط صعودی بودن تابع هموگرافیک در حالت عمومی $\Delta > 0$ است:

$$\Delta = ad-bc = 3m^2-12>0 \Rightarrow 3m^2>12 \Rightarrow m^2>4$$

$$\Rightarrow m>2 \ \text{یا}\ m<-2$$

۳ـ اگر خطِ مفروض $m^2y+4mx+4=0$ قائم بر دایره به معادلهٔ ساده شدهٔ $x^2+y^2+2x-2y=4$ باشد، مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط قائم صدق می‌کند:

$$o'(-1,1): m^2(1)+4m(-1)+4=0 \Rightarrow (m-2)^2=0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

۴ـ می‌دانیم محل تلاقی قطرهای بیضی مرکز تقارن آن است و بیضی فوق بر محورهای مختصات مماس است، پس داریم:

$$2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow b=3$$

$$3y+12=0 \Rightarrow 3y=-12 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow a=4$$

و در نتیجه بیضی قائم است و داریم: $o'(3,-4)$

و معادلهٔ بیضی چنین است:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

۵ـ معادلهٔ خط مماس بر هذلولی به معادلهٔ عمومی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ واقع بر هذلولی چنین است: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ بنابراین داریم:

$$8x^2-18y^2=72 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

M واقع بر هذلولی است، پس مختصات آن در معادلهٔ هذلولی صدق می‌کند:

$$x_M=3: \frac{3^2}{9}-\frac{y_M^2}{4}=1 \Rightarrow y_M=0 \Rightarrow M(3,0)$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{9}-\frac{(0)y}{4}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \quad \text{(معادلهٔ خط مماس)}$$

۶ـ داریم:

$$M(\sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha): \left|\begin{array}{l} x=\sin\alpha \\ y=\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$$

از حذف α بین x و y معادلهٔ مکان به‌دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} x^2=\sin^2\alpha \\ y^2=\operatorname{tg}^2\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{x^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \\ \frac{1}{y^2}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{x^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \\ \frac{1}{y^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \end{array}\right.$$

$$\overset{\text{(از تفاضل معادلات)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

با توجه به‌فرض $\alpha \neq k\pi$ داریم:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=1 \quad \text{(معادلهٔ مکان)}$$

۷ـ

$$V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi y^2\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}16\sin^2x\,dx$$

$$=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=8\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

$$\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\pi\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\left(\frac{-\pi}{2}-0\right)\right)=8\pi^2 \quad \text{(واحد حجم)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=8\pi^2 \quad \text{(واحد حجم)}}$$

۸ـ معادلهٔ کلاسیک نوع اول به‌فرم عمومی $a\sin x+b\cos x=c$ وقتی دارای جواب است که داشته باشیم:

$$\Delta=a^2+b^2-c^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq c^2 \quad \text{(شرط جواب)}$$

بنابراین برای معادلهٔ

$$2m(\sin x+\cos x)=m(\sin x-\cos x)+\sqrt{5}$$

یا: $2m\sin x+2m\cos x=m\sin x-m\cos x+\sqrt{5}$

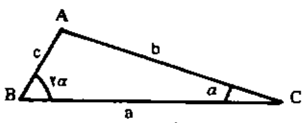
و یا: $m\sin x+3m\cos x=\sqrt{5}$ داریم:

$$\Delta=m^2+9m^2-5=10m^2-5<0 \Rightarrow 10m^2<5$$

$$\Rightarrow m^2<\frac{5}{10} \Rightarrow m^2<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$ آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

۹ـ با توجه به شکل زیر:



می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin(\pi-3\alpha)}=\frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a}{\sin 3\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a}{3-4\sin^2\alpha}=c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3-4\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)}=c \Rightarrow \frac{a}{3-2+2\cos 2\alpha}=c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+2\cos 2\alpha}=c \Rightarrow 1+2\cos 2\alpha=\frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2\alpha=\frac{a}{c}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha=\frac{a-c}{2c}}$$

جوابهای تفریح اندیشه

*** جواب ۱**

از مفاد مسأله برمی‌آید که قطر آلبالو ۳ برابر بزرگتر از قطر هستهٔ آن است. بنابراین، حجم آلبالو ۳ × ۳ × ۳ یعنی ۲۷ برابر بیشتر است. هسته ۱/۲۷، و نرمه بقیهٔ ۲۶/۲۷ حجم آلبالو را دارد. بنابراین حجم نرمه ۲۶ برابر حجم هستهٔ آلبالو است.

*** جواب ۲**

هر دو قابلمه اشکال هندسی متشابهی هستند. هرگاه گنجایش قابلمهٔ بزرگتر ۸ برابر بیشتر باشد آنگاه همهٔ اندازه‌های خطی آن ۲ برابر بزرگتر هستند یعنی ؛ ارتفاع و عرض آن در هر دو جهت دو برابر بیشتر است. اما از آن جا که ارتفاع و عرض آن دوبرابر بیشتر است سطح آن ۲ × ۲ یعنی ۴ برابر بیشتر است، زیرا نسبت مساحت اجسام متشابه مانند نسبت مجذور اندازه‌های خطی است. اگر ضخامت جدارها یکی باشد وزن قابلمه به سطح آن بستگی دارد. از اینجا جواب سؤال مسأله به دست می‌آید : قابلمهٔ بزرگتر ۴ برابر سنگینتر از قابلمهٔ کوچکتر است.

*** جواب ۳**

قبل از اینکه آن را حل کنیم، مسألهٔ مشابهی منتها تا اندازه‌ای ساده‌تر را در نظر می‌گیریم.

دو دیگ (یا دو سماور) ، یکی کوچک و دیگری بزرگ، از یک جنس و به یک شکل، پر از آب جوش هستند، کدام یک زودتر سرد می‌شود؟

اجسام معمولاً از سطح سرد می‌شوند و بنابراین آن دیگ زودتر سرد می‌شود که هر واحد حجمش با سطح بیشتر متناظر باشد. هرگاه یک دیگ n برابر بلندتر و پهنتر از دیگری باشد، آنگاه سطح آن n^2 برابر، و حجم آن n^3 برابر بیشتر است. یک واحد سطح دیگ بزرگتر با حجم n برابر بیشتر متناظر است و بنابراین، دیگ کوچکتر، زودتر باید سرد شود.

به همین علت هم، بچه‌ای که در هوای یخبندان ایستاده است باید بیشتر از شخص بزرگسالی که لباس یکسان با لباس بچه را به تن دارد سرد شود، زیرا مقدار گرمای تولید شده در هر سانتیمتر مکعب جسم برای هر دو نفر تقریباً مساوی است، لیکن سطح سرد شوندهٔ تن بچه که با هر سانتیمتر مکعب متناظر است از شخص بزرگسال بیشتر است.

این پدیده همچنین باعث می‌شود که انگشتان دست و بینی بیشتر از دیگر اندامها ـ که سطح آنها نسبت به حجم آنها آن‌قدر زیاد نیست ـ سرد یا دچار سرمازدگی شود.

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 2
Serial numbers ; 12
Winter 1994

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 268 , Iranshahr - e - Shomali Ave. Tehran , Iran Post code: 15875

Contents:

1. The first word
2. You, too, can be successful in your mathematics lessons — Parviz Shahriāri
3. Relation - properties of relations — Hamid Reza Amiri
4. A brief history of mathematics magazins in Iran
5. Coordinate system — Ahmad Ghandehari
6. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
7. Foundations of computer — H. Ebrahimzadeh Gholzom
8. Proving of invalidity — G. R. Yassipour
9. Vectors — M. R. Hashemi Mosavi
10. Short articles of authentic mathematics journals — G. R. Yassipour
11. Some applications of homographic function — Dr. A. Sharafeddin
12. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods — G. R. Yassipour
13. Locus — M. H. Rostami
14. Two important properties of definite integral — Siamak Ja fari
15. The art of computation — H. Nasirnia
16. Introduction to some books
17. Answers to letters
18. Solutions of contest problems (No. 10)
19. Problems
20. Solutions and hints of problems (No. 11)

ابوسهل بیژن‌بن رستم کوهی

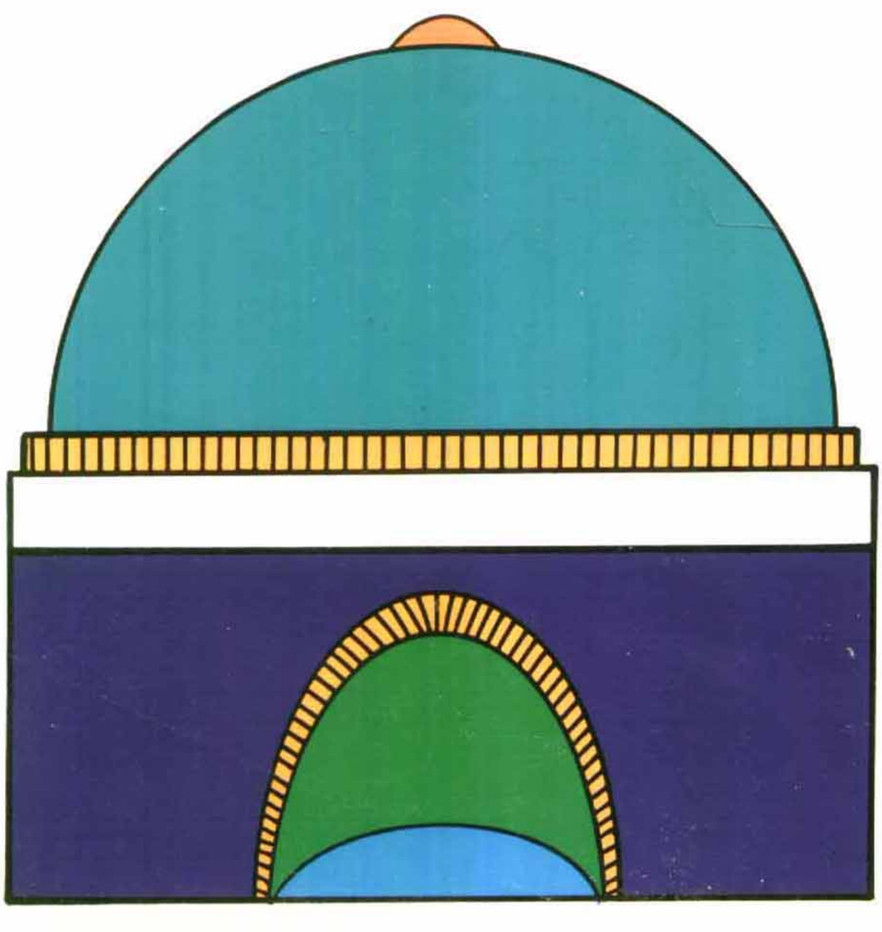
اهل طبرستان، در سدهٔ چهارم هجری قمری می‌زیسته (فوت در ۴۰۵ هجری)، در بغداد به دستور شرف‌الدوله فرزند عضدالدولهٔ دیلمی با همکاری مستقیم ابوالوفای بوزجانی، به رصد و تنظیم جدولهای اخترشناسی مشغول بوده است.

این دانشمند ایرانی، برای رصد خورشید وسیله‌ای ساخت که بسیار دقیق بود و از دانشمندان ساکن بغداد خواسته بود تا این وسیله را مورد آزمایش قراردهند. دانشمندان، دوبار به فاصله سه ماه، این وسیله را مورد آزمایش قرار دادند و دقت کار آن‌را تأیید کردند. دومین تأییدنامهٔ دانشمندان را، به زبان فارسی امروزی، در زیر می‌خوانید:

«به نام خداوند بخشندهٔ مهربان. روز سه‌شنبه، سه شب مانده به پایان جمادی‌الاخر سال ۳۷۸ هجری، یازدهم شهریور ۳۵۷ یزدگردی و ۱۸ ایلول سال ۱۲۹۹ اسکندری، برای بار دوم، گروهی از داوران و نام‌آوران اخترشناس و مهندس و دیگرانی از اهل دانش اخترشناسی و هندسه، گردهم آمدند تا کاربرد وسیله‌ای راکه برای رصد خورشید، در آمدن به رأس میزان ساخته شده، آزمایش کنند. بعد از گذشت چهار ساعت از این روز، که سه‌شنبه باشد، هریک از حاضران، به خط خود، به درستی آن‌چه حاضر بود و مشاهده کرده‌بودند، گواهی دادند.»

قاضی ابوبکر فرزند ضبه، ابوسعد یونس نصرانی شیرازی؛ قاضی ابوالحسن خوزی؛ ابواسحاق ابراهیم فرزند هلال صابی؛ ابوالوفا محمد فرزند محمد؛ ابوحامد احمد فرزند محمدالصاغانی صاحب اسطرلاب؛ ابوالحسن محمد فرزند محمد السافری؛ ابوالحسن مغربی؛ بیژن فرزند رستم صاحب رصد.

او به دستور شرف‌الدوله دیلمی اولین رصدخانه را در بغداد بنا کرد که سقفش به‌صورت نیمکره و به‌قطر حدود ۲۰ متر بود که در حقیقت اولین بنای پلانتاریوم جهان است.



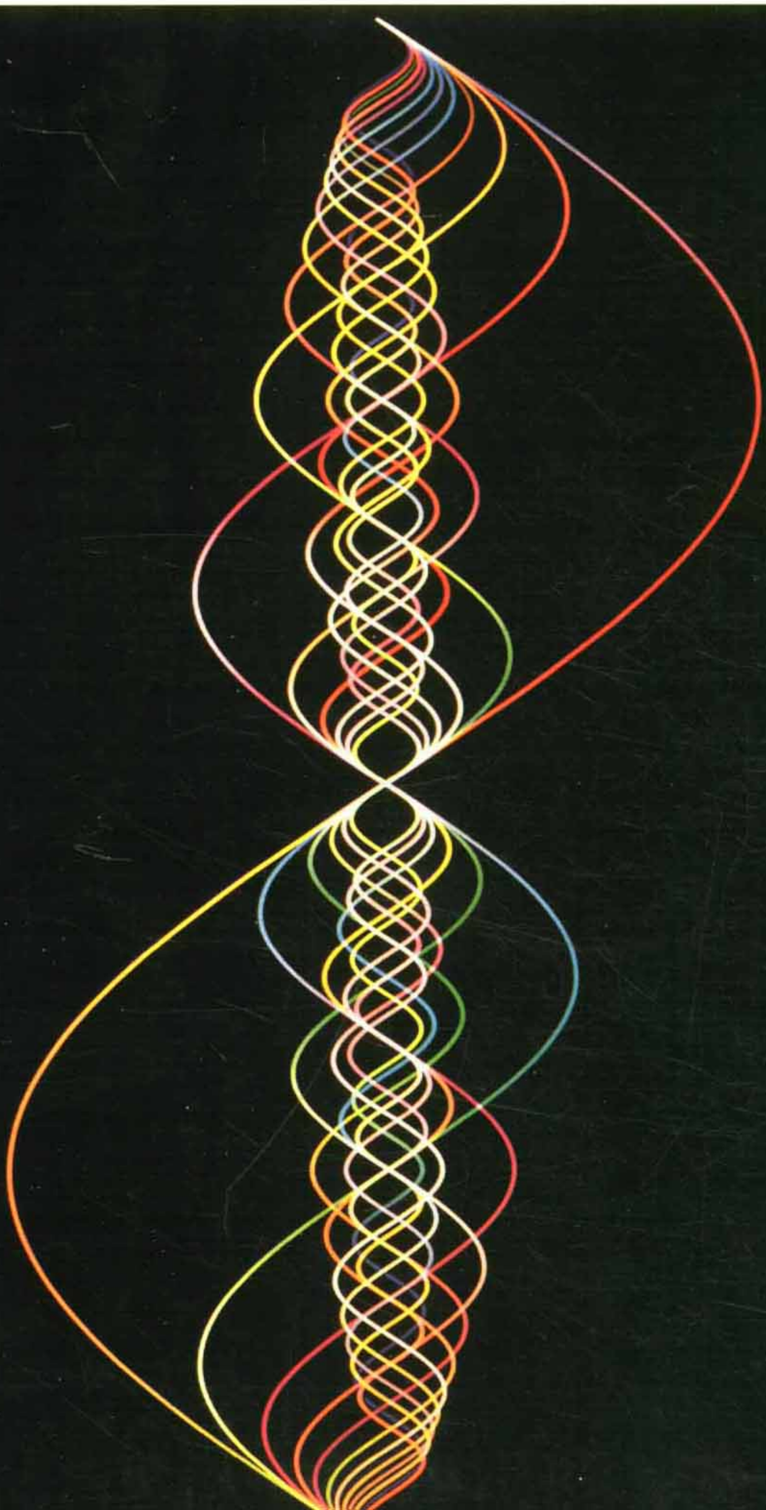
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۳

سال چهارم، بهار ۱۳۷۴، شمارهٔ سوم، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به
وزارت آموزش و پرورش

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
• سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:
آقایان: • حمیدرضا امیری • احمد قندهاری • غلامرضا یاسی‌پور
• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • محمدهاشم رستمی

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو
• حروفچینی: یگانه • چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

سال چهارم، بهار ۱۳۷۴، شمارهٔ سوم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحک و اصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات مجله بارسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اول ۱
• شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید / پرویز شهریاری ۲
• حد: تعریف حد تابع (قسمت اول) / احمد قندهاری ۶
• تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۲) / ۱۱
• رابطه‌های هم ارزی و کلاسهای هم ارزی / حمیدرضا امیری ۱۴
• اثبات نادرستی / غلامرضا یاسی‌پور ۱۹
• آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۱
• حل یک مسأله به روشهای جبری، هندسی، ... / احمد شرف‌الدین ۲۴
• بردارها (قسمت دوم) / محمدرضا هاشمی موسوی ۲۸
• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۱) / غلامرضا یاسی‌پور ۳۷
• مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۲) / حسین ابراهیم‌زاده قلزم ۴۰
• مکان هندسی (قسمت چهارم) / محمدهاشم رستمی ۴۶
• پیش‌گویی و عدد جادویی هفت / حسن نصیرنیا ۵۰
• دربارهٔ مسائل ساختمانی در هندسه فضایی / پرویز شهریاری ۵۱
• آشنایی با اعداد مختلط (قسمت اول) / روح‌الله جهانی‌پور ۵۵
• طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۱) / غلامرضا یاسی‌پور ۶۲
• جواب نامه‌ها ۶۶
• معرفی کتاب ۶۸
• حل مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۱۱ ۷۰
• مسائل برای حل ۷۳
• حل مسائل برهان شماره ۱۲ ۸۰

■ نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹



چاپ سیزدهمین شمارهٔ مجله ریاضی برهان تقریباً مصادف است با ایام فرخندهٔ هفتهٔ معلم و بجاست که **حرف اوّل** را در ستایش مقام معلم و از زبانِ ثمرهٔ این درختِ پُربار یعنی یکی از دانش‌آموزان، و در قالبِ نثری آمیخته با ریاضیات، بشنویم:

تو باشکوه‌ترین لحظهٔ موعودی، همواره دوستت خواهم داشت چرا که:

به من آموختی که باید، سپیدیها را مجذور کرد و از سیاهیها جذر گرفت، زیباییها را در ده به توان ده ضرب کرد و زشتیها را بر آن تقسیم کرد. به من آموختی تا منحنی اکیداً نزولیِ پشتِ خمیدهٔ آن پیرزن دردمند را بر صفحهٔ کاهگلی دیوار کلبه‌اش همواره به خاطر داشته باشم. تو عدالت را در تساوی اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع، استواری را در مثلث قائم‌الزاویه و نظم را در قالب تمامی «n» ضلعیهای منتظم به ما نمایاندی.

در محضر بزرگوارت آموختیم که باید از همهٔ بدیهای دیگران فاکتور گرفت. آموختیم که اعداد حقیقی با دربرداشتن اعداد گنگ زیباترند، چرا که حقیقت زیباست و آموختیم که هر روزمان باید نقطهٔ عطفی باشد برای تغییر علامت از منفی به مثبت بی‌نهایت، از سرازیری به سمت اعلا و از اکیداً نزولی به سمت اکیداً صعودی، به سمت مثبتِ بی‌نهایت، به سمت آن حقیقت نامتناهی.

آموختیم که همه چیز را در قالب اعداد مثبت و در ناحیهٔ اوّل مثلثاتی که ناحیهٔ مثبتهاست، بررسی کنیم و «اکسترمم» لطف و صمیمیت، پاکی و صفا را «ماکزیمم» درنظر بگیریم و در همان حال، کینه و نفرت را به سمت «صفر» میل دهیم.

تو را تا همیشه تاریخ سپاس خواهم گفت چرا که در محضر تو آموختم چگونه انسان باشم و در خدمت به دیگران از پارامترهای موجود پافراتر نهم و در بی‌نهایت عشق ورزیدن غوطه‌ور گردم. تو درس زندگی را در قالب فرمولها و روابط منطقی ریاضی به من آموختی و مرا با هنر ریاضی ورزیدن، مأنوس کردی، پس: تو را ای بزرگ شخصیت فداکار، تا ابد دوست خواهم داشت و دعای خیرم را نثار راهت خواهم کرد.

(دانش‌آموز سال چهارم ریاضی‌ـفیزیک، دبیرستان فرزانگان تهران، منطقه ۴)

والسلام

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۳)

پرویز شهریاری

□ مسأله‌های ریاضی را چگونه حل کنیم؟

اکنون به یکی از اساسیترین بخشهای خود می‌رسیم و تلاش می‌کنیم، ضمن چند مقاله، به این پرسش حیاتی پاسخ دهیم که: با مسأله‌های ریاضی چگونه برخورد کنیم تا بالاترین بهره را برده باشیم؟

هر کسی که فعالیت می‌کند ـ چه علمی و چه اجتماعی ـ همیشه با «مسأله‌هایی» رو به رو می‌شود که، برای ادامهٔ کار خود، ناچار است آنها را «حل» کند. همهٔ ما باید این توانایی را داشته باشیم که از موقعیتها و پیش‌آمدهای تازه نهراسیم و بتوانیم راه خروج از «بن‌بستها» را بیابیم. برای این منظور، باید قبل از هر چیز، موقعیت مسألهٔ خود را مورد بررسی انتقادی قرار دهیم و، با تجزیه و تحلیل دقیق آن، «داده‌ها» و «خواستها»ی مسأله را بخوبی بشناسیم، یعنی؛ برای خود روشن کنیم: چه هدفهایی را در نظر گرفته‌ایم و، برای رسیدن به آنها، چه امکانهایی در اختیار داریم؟

در این‌جا، «تجزیه و تحلیل» را بجای «آنالیز» گرفته‌ایم، چرا که در زبان فارسی، بهتر از واژهٔ تنهای «تجزیه» مقصود را بیان می‌کند. خود واژهٔ «آنالیز» از زبان یونانی کهن گرفته شده و به‌معنای «روش مطالعهٔ پدیده‌ها، براساس تجزیهٔ آن به بخشهای جداگانه» است. وقتی یک پژوهشگر با پدیده‌ای بغرنج که جنبه‌های گوناگونی دارد (یعنی با یک «پدیدهٔ کامل») رو به رو می‌شود، تلاش می‌کند، بخشهای جداگانه‌ای از این «پدیدهٔ کامل» را مورد بررسی قرار دهد و، سپس، در ارتباط با این بخشها، نتیجه‌گیری خود را دربارهٔ ساختار «پدیدهٔ کامل» ارائه دهد. عمل تقسیم «پدیدهٔ کامل» به جنبه‌های مختلف خود، «تجزیه»؛ و تلفیق این نتیجه‌ها به‌هم و به‌دست آوردن داوری کلی دربارهٔ تمامی پدیده، «تحلیل» و مجموعهٔ آنها، «تجزیه و تحلیل» است.

در این رشته مقاله‌ها، فعلاً به بررسی مفهوم دقیق «تجزیه و تحلیل» در مسأله‌های ریاضی، که منجر به حل مسأله می‌شود، نمی‌پردازیم و فرض را بر این می‌گیریم که مسأله را حل کرده‌ایم. در این جا، به این پرسش پاسخ می‌دهیم که: آیا بعد از حل مسأله، کار را تمام شده بدانیم و به سراغ مسأله‌ای دیگر یا کاری دیگر برویم یا دور و بر همان مسأله به جست و جو بپردازیم و در پی کشف نکته‌های تازه‌ای باشیم؟

گرچه خود حل مسأله، اگر با نیروی اندیشه و نه با یاری دیگران انجام گیرد، در تکامل خلاقیت ذهن و شکوفا شدن نیروی اندیشه، اهمیت جدی دارد، ولی مهمتر از آن، توجه به نکته‌های جنبی مسأله و پرداختن به «چیزهایی» است که به‌ظاهر از ما نخواسته‌اند:

ـ آیا مسأله، راه حل یا راه حلهای دیگری دارد؟

ـ چه مسأله‌هایی در شباهت با این مسأله حل می‌شوند؟

ـ آیا عکس مسأله معنا دارد و آیا قابل حل است؟

ـ آیا مسأله، حالتهای خاص دارد؟

ـ آیا می‌توان مسأله را تعمیم داد؟ و غیره و غیره.

در این رشته مقاله‌ها، با تفصیل بیشتر و با آوردن مثال، در این باره‌ها صحبت می‌کنیم.

□ معادله و شکل، مُدلهای آزمایشی‌اند؛ مواظب باشید، شما را فریب ندهند.

معادله و شکل، ابزار حل مسأله‌اند، برای حل یک مسأله از «حساب» یا «جبر»، تلاش می‌کنیم؛ خود را به «معادله» یا «دستگاهی از معادله‌ها» برسانیم و، به‌کمک آن، مجهول یا مجهولها را به‌دست آوریم. همچنین عادت کرده‌ایم، برای حل یک مسألهٔ هندسی، از

«شکل» استفاده کنیم. شکلی تقریبی رسم می‌کنیم و روی آن، هدف خود را جست و جو می‌کنیم.

این کار (چه در حساب و جبر و چه در هندسه)، روش درستی است. هر وقت بتوانیم، برای مشکل خود و برای حل مسألهٔ موردنظر خود، مُدلی بسازیم، آزمایش روی آن، کار ما را ساده‌تر و ملموستر می‌کند و، در نتیجه، رابطهٔ بین هدف و امکانهای موجود را، بهتر و روشنتر درک می‌کنیم. ذهن آدمی، بدون «مُدل سازی»، حتی نمی‌تواند کار استدلال را آغاز کند. اگر بخواهید دو عدد ساده را در ذهن خود با هم جمع کنید، بدون تجسم نماد دو عدد، به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسید و، نماد عدد، نوعی مُدل برای عدد است. در هندسه، بهترین مُدل و بهترین دستگیرهٔ مادی برای استدلال ذهنی، شکل است.

توجه کنید: کار روی مُدل نوعی آزمایش است و آزمایش نمی‌تواند جانشین استدلال ریاضی شود. ممکن است آزمایش روی یک مُدل موفقیت‌آمیز باشد، ولی مُدل دیگر، ما را به بن‌بست بکشاند. یکی از علتهای این وضع آن است که مُدل، تنها بخشی از حقیقت موضوع مورد نظر ما را، منعکس می‌کند، نه تمامی آن‌را. مُدل کاریکاتوری از حقیقت است و ممکن است بسیاری از جنبه‌های حقیقت را پنهان کرده باشد.

مُدل مسأله‌های جبری و هندسی، یعنی معادله و شکل هم، از این خصلت دور نیستند. به‌ویژه، در شکلهای هندسی، عدم دقت در رسم، عدم توجه به «ماهیت وجودی شکل» و یا جست و جو نکردن حالتهای ممکن دیگر، ممکن است آن را از حقیقت دور کند. وقتی برای حل یک مسأله هندسی، می‌خواهیم شکلی را رسم کنیم، علاوه بر توانایی در تجسم شکل، به‌ویژه شکلهای فضایی، باید همواره خود را در برابر این پرسشها قرار دهیم:

- آیا چنین شکلی می‌تواند وجود داشته باشد؟
- آیا شکلی که رسم کرده‌ایم، دست کم تا حد معقول، درست و دقیق است؟
- آیا شکل، معرف حالت خاصی از مسأله است یا حالت کلی آن؟

و...

شبیه چنین پرسشهایی را می‌توان دربارهٔ معادله‌ای که تشکیل داده‌ایم، مطرح کرد.

عدم توجه به این پرسشها و تنها متوسل شدن به آزمایش، روی مُدل ناقص خود، ممکن است ما را به نتیجه‌ای کاملاً دور از واقع برساند.

با مثال می‌توان مطلب را روشنتر کرد.

مثال ۱. پیاده و دوچرخه‌سواری، در یک‌لحظه، از نقطهٔ A به‌سوی نقطهٔ B حرکت کردند.در همان لحظهٔ حرکت این دو نفر، سومی با اتومبیل، از نقطهٔ B به‌سوی نقطهٔ A حرکت کرد، یک ساعت بعد از آغاز حرکت به دوچرخه‌سوار و بعد از پیمودن $\frac{۱۴۲}{۱۷}$ کیلومتر دیگر، به پیاده رسید. او را بلافاصله سوار کرد، برگشت و خود را به دوچرخه سوار رساند. می‌دانیم فاصلهٔ بین دو نقطهٔ BA برابر ۱۰۰ کیلومتر است و پیاده، ساعتی ۵ کیلومتر راه می‌رود. سرعت اتومبیل چند کیلومتر در ساعت است؟

اگر سرعت اتومبیل را u کیلومتر در ساعت و سرعت دوچرخه را v کیلومتر در ساعت بگیریم، آن‌وقت $u + v = ۱۰۰$؛ و با توجه به شرط رسیدن اتومبیل به‌پیاده، بعد از تبدیل‌ساده، معلوم‌می‌شود که u ، ریشهٔ این معادله است:

$$۱۷x^۲ - ۱۳۷۵x + ۱۲۰۰ = ۰$$

این معادله دو ریشه دارد: ۸۰ و $\frac{۱۵}{۱۷}$، یعنی سرعت اتومبیل یا ۸۰ کیلومتر در ساعت است و یا $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت.

روشن است که هنوز مسأله حل نشده است، زیرا نمی‌دانیم اتومبیل با کدام یک از این سرعتها حرکت کرده است! البته، موقعیت عملی به ما تلقین می‌کند که، سرعت اتومبیل، نمی‌تواند $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت باشد (که در نتیجه، سرعت دوچرخه $۹۹\frac{۲}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت می‌شود). ولی، این استدلال، خصلت ریاضی ندارد و نمی‌توان به دلیل تجربه‌های روزانه، «شرایط عملی» را در انتخاب جواب دخالت داد.

صورت مسأله را مرور می‌کنیم. آیا سرعت $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت، با فرضهای مسأله تناقض پیدا نمی‌کند؟ همهٔ فرضهای مسأله را، با دقت و از آغاز، از نظر می‌گذرانیم: جملهٔ اوّل، چیزی دربارهٔ سرعت اتومبیل به‌ما نمی‌دهد. بعد، اتومبیل، در $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتری نقطهٔ B به دوچرخه سوار می‌رسد و سپس (بعد از ۱۶ ساعت) با پیاده روبه رو می‌شود. ولی روشن است، اگر پیاده در این وضع، سوار اتومبیل بشود و دوچرخه سوار را دنبال کند، هرگز به دوچرخه سوار نمی‌رسد. بنابراین، سرعت اتومبیل نمی‌تواند $\frac{۱۵}{۱۷}$ کیلومتر در ساعت باشد.

تأکید این مطلب لازم است که، این نتیجه (یعنی، اتومبیل با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت حرکت کرده است)، نیازی به تحقیق و بررسی ندارد، زیرا می‌دانیم سرعت اتومبیل، تنها می‌تواند یکی از دو

عدد $\frac{۱۵}{۱۷}$ یا ۸۰ باشد؛ عدد $\frac{۱۵}{۱۷}$ کنار رفت، یعنی در پذیرفتن عدد دوم، هیچ تردیدی نباید داشت. مسأله به‌طور کامل حل شد.

مثال ۲. شخصی برای رسیدن به مقصد، ۱۰۰ کیلومتر را با اتومبیل و ۶۰ کیلومتر را با قایق موتوری رفت. در ضمن، زمان حرکت او در خشکی، ۱۵ دقیقه بیشتر از زمان حرکت او در آب بود. اگر سرعت اتومبیل، ۲۰ کیلومتر در ساعت، بیشتر از سرعت قایق باشد، سرعت اتومبیل را پیدا کنید.

اگر سرعت اتومبیل را ۷ کیلومتر در ساعت فرض کنیم، به‌سادگی معلوم می‌شود که، ۷، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{۱۰۰}{x} - \frac{۶۰}{x - ۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

این معادله، دو ریشه دارد: ۱۰۰ و ۸۰. مثل مثال ۱، این پرسش پیش می‌آید: سرعت اتومبیل در واقع، کدام یک از این دو عدد است؟ و مهمتر از آن: آیا مثل مثال ۱؛ به نکته‌ای از فرض توجه نکرده‌ایم؟

برای پاسخ دادن به این پرسش، به‌سراغ صورت مسأله می‌رویم و سرعتهای ۱۰۰ کیلومتر و ۸۰ کیلومتر را با جزء جزء فرض، ارزیابی می‌کنیم. این ارزیابی ما را قانع می‌کند، هر دو جواب، با همهٔ بخشهای فرض سازگارند. بنابراین، به این نتیجه می‌رسیم که: سرعت اتومبیل می‌تواند ۱۰۰ کیلومتر در ساعت و یا ۸۰ کیلومتر در ساعت باشد.

به این ترتیب، در این مثال، آنچه به عنوان فرض داده شده است، برای تعیین جوابی مشخص و منحصر، کافی نیست، به زبان دیگر، سرعت اتومبیل، به‌صورتی یک ارزشی، به‌دست نمی‌آید. با وجود این، توضیحهایی که در این جا آوردیم، برای کامل کردن حل مسأله لازم است. وقتی شرطهای مسأله، برای حل یک ارزشی آن کافی نیست، باید با بررسی مسأله، کافی نبودن شرط را روشن کنیم، در غیر این‌صورت، حل مسأله کامل نیست.

مثال ۳. می‌خواهیم در باکهای سه اتومبیل، ۵۰ لیتر بنزین بریزیم. چند لیتر بنزین باید در باک اوّل ریخت، تا در آن ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم باشد و، در ضمن، اگر ۲۶ لیتر بنزین از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزین در باک سوم برابر با مقدار بنزین در باک اوّل بشود؟

اگر فرض کنیم، باید در باک اتومبیل اوّل a لیتر بنزین بریزیم، بسادگی روشن می‌شود که a، ریشهٔ معادلهٔ زیر است:

$$۵۰ - (۲x - ۱۰) + ۲۶ = x - ۱۰$$

این معادله، تنها یک ریشه دارد: $x = ۳۲$. به‌نظرمی‌رسد که مسأله حل شده است. ولی بیشتر دقت کنیم.

نمی‌توان اطمینان داشت، برای برقرار بودن همهٔ شرطها، باید ۳۲ لیتر بنزین در باک اتومبیل اوّل ریخت. در واقع، واژهٔ «باید» که در اینجا به‌کار می‌بریم، مفهومی نزدیک به مفهوم اصطلاح ریاضی «لازم و کافی است» دارد، در حالی که، در این‌جا، تنها یکی از دو شرط را در نظر گرفته‌ایم: شرط لازم، یعنی؛ اگر بخواهیم شرطهای مسأله برقرار باشند لازم است در باک اتومبیل اوّل ۳۲ لیتر بنزین ریخته شود. هنوز معلوم نیست، این شرط، کافی هم باشد، یعنی اگر در باک اتومبیل اوّل ۳۲ لیتر بنزین ریخته شده باشد، آن‌وقت شرطهای مسأله برقرارند.

اگر استدلال را ادامه دهیم، معلوم می‌شود، برای برقراری شرطهای مسأله، باید در باک اتومبیل سوم «۴−» لیتر بنزین وجود داشته باشد که ممکن نیست. بنابراین، می‌توان به این نتیجه رسید که با فرضهای مسأله، نمی‌توان ۵۰ لیتر بنزین را بین سه باک اتومبیل تقسیم کرد، یعنی **مسأله جواب ندارد.**

مثال ۴. دو آلیاژ شامل مس و قلع در اختیار ماست. اوّلی ۳ کیلوگرم وزن دارد با ۴۰٪ مس، و دومی ۷ کیلوگرم وزن دارد با ۳۰٪ مس. از هر کدام این دو آلیاژ چند کیلوگرم انتخاب کنیم تا، به کمک آنها، آلیاژ تازه‌ای به‌وزن ۸ کیلوگرم با r٪ مس به‌دست آید؟

فرض می‌کنیم با a کیلوگرم از آلیاژ اوّل و $(۸ - a)$ کیلوگرم از آلیاژ دوم، آلیاژ تازه‌ای که شامل r٪ مس است، به‌دست آورده باشیم. در این‌صورت، a، ریشهٔ این معادله است:

$$۴۰x + ۳۰(۸ - x) = ۸r$$

این معادله، یک ریشه دارد: $۰/۸x - ۲۴$

حل مسأله تمام نشده است. باید تحقیق کنیم، اگر $(۰/۸r - ۲۴)$ کیلوگرم از آلیاژ اول و $(۳۲ - ۰/۸r)$ کیلوگرم از آلیاژ دوم انتخاب کنیم، آلیاژ تازه‌ای با عیار r٪ مس به‌دست می‌آید؟ و مهمتر از آن: آیا چنین انتخابی ممکن است؟

این مقدارها را از دو آلیاژ تنها وقتی می‌توان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$۰ \le ۰/۸r - ۲۴ \le ۳ \quad و \quad ۰ \le ۳۲ - ۰/۸r \le ۷$$

حل این دستگاه نامعادله‌ها، ما را به این جواب، برای r، می‌رساند:

$$۳۱/۲۵ \le r \le ۳۳/۷۵ \qquad (*)$$

یعنی؛ اگر r، با شرط (*) سازگار نباشد، آلیاژ مورد نظر مسأله را نمی‌توان تهیّه کرد و اگر r با شرط (*) سازگار باشد، آن‌وقت چنین آلیاژی قابل تهیّه است.

مثال ۵. اگر بدانیم در سه باک اتومبیل، روی هم ۵۰ لیتر بنزین و در باک اوّل ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم وجود دارد و، در ضمن، اگر ۲۶ لیتر بنزین از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزین در باکهای دوم و سوم برابر می‌شود. در ابتدا در باک سوم، چند لیتر بنزین بوده است؟

ظاهر این مسأله، با مسألهٔ مثال سوم تفاوتی ندارد. اگر فرض کنیم، در باک سوم a لیتر بنزین بوده است، آن‌وقت a، ریشهٔ معادلهٔ زیر است:

$$x + (x + ۲۶) + (x + ۳۶) = ۵۰.$$

این معادله یک ریشه دارد: $x = -۴$.

آیا مسأله حل شده و این جواب قابل قبول است؟ بله! برای روشن شدن مطلب، نیاز به اندکی توضیح داریم.

گزاره‌های شرطی را می‌شناسید: «اگر A، آنگاه B» یا «اگر A و B و C، آنگاه D» در حالتی که جزء اوّل این گزارهٔ شرطی، نادرست باشد، تمامی گزاره درست است. مثلاً می‌توان گفت:

«اگر $۵ < ۲$، آن‌وقت $-۴ < -۱$»

این گزاره از نظر «ایجاب منطقی»، (یا «استلزام منطقی») درست است، ولو این‌که، هر یک از بخشهای آن (یعنی؛ فرض و حکم) هر دو نادرست است.

در مسألهٔ مثال ۳، کاری را از ما خواسته بودند که عملی نبود؛ در حالی که در مثال مسألهٔ ۵، صحبت بر سر یک نتیجه‌گیری منطقی است؛ مسألهٔ ۵ می‌گوید: اگر در سه باک ۵۰ لیتر بنزین وجود داشته و اگر ... چه نتیجه‌ای برای باک سوم به دست می‌آید. در این‌جا، نمی‌خواهیم «عملی» را انجام دهیم، تنها باید به یک «نتیجه‌گیری منطقی» بپردازیم. و نتیجهٔ منطقی همان است که به‌دست آوردیم: «اگر در سه باک روی هم ۵۰ لیتر و اگر در باک اوّل ۱۰ لیتر بیشتر از باک دوم باشد و اگر بار نخستین ۲۶ لیتر از باک اوّل در باک سوم بریزیم، مقدار بنزینهای دو باک دوم و سوم برابر شود، آن وقت باید در باک سوم ۴- لیتر» بنزین وجود داشته باشد مسأله‌ای غیر عملی است، ولی نتیجه‌گیری ما، از نظر منطقی، درست است.»

مثالهایی که در این‌جا آوردیم، بسیار ساده و مقدماتی بود. در ادامهٔ مطلب، ابتدا مسأله‌های جدیتر و دشوارتری را از معادله‌های جبری و، سپس، نمونه‌هایی از شکلهای هندسی را، یعنی مُدلهایی‌را که ممکن است موجب فریب ما بشوند، می‌آوریم.

در این‌جا باز هم تأکید می‌کنم، هر قدر وقت برای حل یک مسأله صرف کنید، زیان نمی‌بینید، زیرا ثمر آن، بارور شدن اندیشهٔ شماست. این پند دانشمند ایرانی را همیشه به یاد داشته باشید که «راه چه یک فرسنگ و چه هزار فرسنگ، جز با رفتن به انجام نرسد» و تلاش کنید، خودتان راه را پیدا کنید، با اندیشهٔ خودتان و با کار مداوم خودتان، چرا که به‌قول کاپیتسا فیزیکدان بزرگ قرن بیستم «کار خوب را، با دست دیگران نمی‌توان انجام داد». از دیگران یاد بگیرید و، سپس، با اندیشهٔ خودتان، دربارهٔ آن‌چه یاد گرفته‌اید و یا به شما گفته‌اند، به ارزیابی بپردازید. همان‌طور که «گوت گری» گفته است «تنها کسانی در هیچ چیز تردید نمی‌کنند که چیزی نمی‌دانند» به یاد داشته باشید که یادگیری، بدون این که با خلاقیت همراه باشد، ارزش چندانی ندارد. «تحصیل کرده، تنها به‌معنای آن است که، خیلی چیزها، به او یاد داده‌اند، ولی هنوز این معنا را نمی‌دهد که او هم چیزی یاد گرفته است» [گ.لیختن برگ].

تا بعد

تفریح اندیشه ۱

با استفاده از ارقام ۱، ۱، ۹ و ۹ چند عدد چهار رقمی متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب در صفحهٔ ۳۹

حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت اوّل)

◆ احمد قندهاری

۱ـ۱. تغییرات $|x|$ وقتی x در فواصل مختلف واقع باشد.

فرض می‌کنیم: $a,b \in R$ و $۰ < a < b$

۱: اگر $a<x<b \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $۲<x<۵ \Rightarrow ۲<|x|<۵$

۲: اگر $-b<x<-a \Rightarrow a<|x|<b$

مثال: اگر $-۵<x<-۲ \Rightarrow ۲<|x|<۵$

۳: اگر $-a<x<b \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<b \Rightarrow ۰\le|x|<b \\ \text{یا} \\ -a<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<a \end{cases} \Rightarrow ۰\le|x|<b$

مثال: اگر $-۲<x<۵ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<۵ \Rightarrow ۰\le|x|<۵ \\ -۲<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<۲ \end{cases} \Rightarrow ۰\le|x|<۵$

۴: اگر $-b<x<a \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<a \Rightarrow ۰\le|x|<a \\ -b<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<b \end{cases} \Rightarrow ۰\le|x|<b$

مثال: اگر $-۶<x<۲ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le x<۲ \Rightarrow ۰\le|x|<۲ \\ -۶<x<۰ \Rightarrow ۰<|x|<۶ \end{cases} \Rightarrow ۰\le|x|<۶$

۱ـ۲ همسایگی: فرض می‌کنیم: $a\in R$ و $r\in R^+$

داریم:

۱: $|x|<r \Rightarrow -r<x<r$

مثال: $|x|<۲ \Rightarrow -۲<x<۲$

۲: $|x-a|<r \Rightarrow -r<x-a<r$ یا $a-r<x<a+r$

بنا به‌تعریف، مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $a-r<x<a+r$ صدق می‌کند، یک همسایگی به مرکز (a) و شعاع (r) است که آن را به‌صورت $N(a,r)$ هم نشان می‌دهند.

مثال: $|x-۳|<۱ \Rightarrow -۱<x-۳<۱$ یا $۲<x<۴$

مجموعهٔ اعدادی مانند x که در نامساوی $۲<x<۴$ صدق می‌کند یک همسایگی به مرکز (۳) و شعاع (۱) است. یا $N(۳,۱)$.

اگر $a-r<x<a+r$ و $x\neq a$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز به مرکز a و شعاع r گوییم. گاهی این همسایگی را محذوف نیز گویند. (کلمهٔ محذوف در این‌جا یعنی؛ مرکز همسایگی حذف شده است.)

مثال: اگر $۲<x<۴$ و $x\neq ۳$، آنگاه این فاصله را یک همسایگی بدون مرکز یا محذوف گوییم.

فرض کنید $x\to a$ و عدد a را مرکز همسایگی به شعاع r در نظر بگیریم. بعداً خواهیم گفت که x هیچ‌وقت به a نمی‌رسد پس همسایگی $a-r<x<a+r$ بدون مرکز باید باشد.

مثال: $\begin{cases} x\to ۲ \\ r=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲-۱<x<۲+۱$ یا $۱<x<۳ , x\neq ۲$

فاصلهٔ (۳ و ۱) را یک همسایگی بدون مرکز، به مرکز (۲) و شعاع (۱) گوییم.

قرارداد: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با α یا β یا ε یا σ نشان می‌دهیم و اعداد مثبت فوق‌العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم.

۱ـ۳. فرض کنیم $x\to ۲$ یا حدّ x عدد (۲) باشد، در این‌صورت x ضمن تغییرات به عدد (۲) از دو طرف نزدیک می‌شود.

الف: $x =$ ۱/۹ و ۱/۹۹ و ۱/۹۹۹ و ۱/۹۹۹۹ و ...

ب: $x =$ ۲/۱ و ۲/۰۱ و ۲/۰۰۱ و ۲/۰۰۰۱ و ...

در قسمت الف: هرقدر تعداد (۹) های عدد اعشاری ۱/۹۹۹۹ را اضافه کنیم، اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به (۲) نمی‌رسند.

در قسمت ب: هرقدر تعداد صفرهای بعداز ممیز و قبل از (۱) عدد اعشاری ۲/۰۰۰۱ را زیادتر کنیم اعداد حاصل به عدد (۲) نزدیکتر می‌شوند ولی هیچ‌وقت به عدد (۲) نمی‌رسند.

بنابراین وقتی $x\to ۲$ یا حدّ x برابر (۲) باشد حتماً $x \neq ۲$.

۴ ـ ۱. تعریف حدّ متغیر x: حدّ متغیر x عدد (a) است هرگاه $|x - a|$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر باشد ($x \to a$) پس $x \neq a$ و $|x - a| > ۰$) یعنی؛ $x \to a \Rightarrow ۰<|x-a|<\sigma$ اگر

سؤال: اگر $x \to ۲$، نشان دهید $۰<|x - ۲| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$

جواب: اگر به قسمت (۳ ـ ۱) درس برگردیم چنانچه در وضع الف، $x = ۱/۹۹۹۹$ و در وضع ب: $x = ۲/۰۰۰۱$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$|x - ۲| = \left|\begin{matrix} ۱/۹۹۹۹ - ۲ \\ \text{یا} \\ ۲/۰۰۰۱ - ۲ \end{matrix}\right| = \frac{۱}{۱۰۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰۰}\ ,\ x \neq ۲$$

$$\Rightarrow ۰ < |x - ۲| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

پس همواره می‌توان نوشت:

اگر $x \to a \Rightarrow ۰ < |x - a| < \sigma$

اگر $x \to ۲ \Rightarrow ۰ < |x - ۲| < \sigma$

اگر $x \to ۴ \Rightarrow ۰ < |x - ۴| < \sigma$

اگر $x \to -۳ \Rightarrow ۰ < |x + ۳| < \sigma$

اگر $x \to ۰ \Rightarrow ۰ < |x| < \sigma$

۵ـ۱. تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x به‌سمت عدد (۲) میل کند.

x را به‌عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود. جدول زیر را برای این منظور تنظیم کرده‌ایم.

x	f(x) = ۳x + ۱	x	f(x)=۳x+۱
۱/۹	۶/۷	۲/۱	۷/۳
۱/۹۹	۶/۹۷	۲/۰۱	۷/۰۳
۱/۹۹۹	۶/۹۹۷	۲/۰۰۱	۷/۰۰۳
۱/۹۹۹۹	۶/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۱	۷/۰۰۰۳
۱/۹۹۹۹۹	۶/۹۹۹۹۷	۲/۰۰۰۰۱	۷/۰۰۰۰۳

به‌طوری‌که جدول نشان می‌دهد وقتی x به عدد (۲) خیلی نزدیک می‌شود آنگاه، f(x) به عدد (۷) نزدیک می‌شود.

به‌نظر می‌آیدکه وقتی $x \to ۲$، آنگاه: حدِّ f(x) برابر (۷) است ولی نمی‌توان به‌طور قاطع گفت که وقتی $x \to ۲$، حدِّ f(x) برابر (۷) است زیرا نمی‌توان مطمئن بود برای مقادیری که در جدول آورده نشده است وضع چه خواهد شد.

این ادعا که وقتی $x \to ۲$، آنگاه $f(x) = ۷$ حد) نیاز به یک استدلال ریاضی دارد.

از جدول داده شده نتایج زیر به دست می‌آید.

اگر $|x - ۲|<۰/۱ \Rightarrow |f(x) - ۷|<۰/۳$

اگر $|x - ۲|<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۷|<۰/۰۳$

اگر $|x - ۲|<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۷|<۰/۰۰۳$

اگر $|x - ۲|<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۷|<۰/۰۰۰۳$

اگر $|x - ۲|<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x) - ۷|<۰/۰۰۰۰۳$

ملاحظه می‌کنیم که اگر بخواهیم $|f(x) - ۷| < ۰/۰۰۰۰۳$ باید $|x - ۲|<۰/۰۰۰۰۱$.

اگر بخواهیم $|f(x) - ۷|<۰/۰۰۰۳$ باید $|x - ۲|<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x) - ۷|<۰/۰۰۳$ باید $|x - ۲|<۰/۰۰۱$

و...

دوباره تابع f به معادله $f(x) = ۳x + ۱$ را وقتی $x \to ۲$ را در نظر بگیریم به‌گفتگوی جالب بین f(x) و x توجه کنید.

f(x) بـه x می‌گوید: می‌خواهم به عدد (۷) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x)-۷|$ کوچکتر از(۰/۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید به عـدد (۲) نزدیک شوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x) - ۷|$ بخواهـد کـوچکتر از (۰/۰۰۳) باشد، من‌باید به‌عدد (۲) آن‌قدرنزدیک‌شوم تا $|x - ۲|$ کوچکتر از (۰/۰۰۱) شود. دوباره f(x) به x می‌گوید: می‌خواهم به عـدد (۷) آن‌قـدر نـزدیک شـوم تـا $|f(x) - ۷|$ کـوچکتر از (۰/۰۰۰۳) شود. تو چه‌قدر باید بـه عـدد (۲) نـزدیک شـوی؟ x می‌گوید اگر $|f(x) - ۷|$ بخواهد کوچکتر از (۰/۰۰۰۳) باشد، من باید به عدد (۲) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|x - ۲|$ کـوچکتر از (۰/۰۰۰۱) شود. به‌همین ترتیب برای هر خـواست f(x)، x بـاید شرایط مناسب این خواست را ایجاد کند.

٦ ـ ۱ . تعریف حدّ تابع: فرض می‌کنیم f(x) در فاصله‌ای شامل (a) تعریف شده باشد (ممکن است f(x) در خود (a) تعریف نشده باشد).

$\begin{cases} \lim f(x) = b \\ x \to a \end{cases}$ هرگاه‌به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، عدد مثبتی‌مانند؛

σ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\underbrace{0 < |x - a| < \sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - b| < \varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}}$$

تعریف فوق را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0 : \underbrace{0 < |x - a| < \sigma}_{\text{گزارهٔ مقدم}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - b| < \varepsilon}_{\text{گزارهٔ تالی}} \quad (I)$$

در این‌جا $f(x)$ می‌گوید می‌خواهم به عدد (b) آن‌قدر نزدیک شوم تا $|f(x) - b|$ از (ε) کوچکتر شود. با حل مسأله تعیین کنید برای این خواست $f(x)$، x را چه‌قدر باید به عدد (a) نزدیک کنیم. رابطهٔ (I) را استلزام منطقی گویند. همان طوری‌که می‌دانید، به گزارهٔ شرطی همیشه درست استلزام منطقی گویند.

گزاره $0 < |x - a| < \sigma$ را گزارهٔ مقدّم و گزارهٔ $|f(x) - b| < \varepsilon$ را گزارهٔ تالی گوییم.

باید قسمت $|f(x) - b| < \varepsilon$ را حل کرد تا به قسمت $|x - a| < \sigma$ رسید. منظور از حل کردن پیدان کردن (σ) برحسب (ε) است، پس از پیدا کردن (σ) باید نشان دهیم؛ از گزارهٔ $|x - a| < \sigma$ می‌توان گزارهٔ $|f(x) - b| < \varepsilon$ را نتیجه گرفت. معمولاً به این قسمت حل می‌گویند برگشت پذیری مسأله.

مسأله ۱ : با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \lim (3x + 1) = 7 \\ x \to 2 \end{cases}$$

حل: باید ثابت‌کنیم برای هر $\varepsilon > 0$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{اگر} \quad \underbrace{0 < |x - 2| < \sigma}_{p} \Rightarrow \underbrace{|3x + 1 - 7| < \varepsilon}_{b}$$

$$\text{اگر} \ |3x + 1 - 7| < \varepsilon \Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Rightarrow 3|x - 2| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم (p)، ملاحظه می‌کنیم: $\sigma = \frac{\varepsilon}{3}$

حال اگر $\varepsilon = 0/03$، آنگاه $\sigma = 0/01$، اگر $\varepsilon = 0/003$، آنگاه $\sigma = 0/001$، اگر $\varepsilon = 0/0003$، آنگاه $\sigma = 0/0001$

پس به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک $\sigma > 0$ به‌دست آمده است.

دقّت کنید، اگر $\sigma \leq \frac{\varepsilon}{3}$ باشد باز هم درست است و جواب کاملتری است. حال برگشت‌پذیری مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$\text{اگر} \ |x - 2| < \sigma \ \text{و} \ \sigma \leq \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 2| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |3x + 1 - 7| < \varepsilon$$

توجه:

اگر در حلّ مسائل تعریف حدّ تابع، درست استدلال کنیم، حل ما می‌توانند شامل برگشت‌پذیری باشد. یا به عبارت دیگر باید برگشت‌پذیری مسأله در حل مُستتر باشد. به مسائل زیر دقت کنید:

مسألهٔ ۲: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \lim (x^2 - 5x) = -4 \\ x \to 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon > 0$ دست کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{اگر} \ 0 < |x - 1| < \sigma \Rightarrow |x^2 - 5x + 4| < \varepsilon$$
$$\text{اگر} \ |x^2 - 5x + 4| < \varepsilon \Rightarrow |(x - 1)(x - 4)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x - 1| \times |x - 4| < \varepsilon$$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای $|x - 4|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x \to 1 \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$$
$$-4 \quad -4 \quad -4$$
$$-4 < x - 4 < -2 \Rightarrow 2 < |x - 4| < 4$$

عدد (۴) از $|x - 4|$ در این شرایط بزرگتر است. این عدد را کران بالای $|x - 4|$ می‌گوییم. پس عبارت $|x - 1| \times 4$ از عبارت $|x - 1| \times |x - 4|$ بزرگتر است.

حال می‌توان گفت؛ اگر عبارت بزرگتر از ε کمتر باشد، مسلماً عبارت کوچکتر هم از ε کمتر خواهد شد. یعنی:

$$\text{اگر} \ |x - 1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times |x - 4| < \varepsilon$$

همین رابطهٔ برگشت‌پذیری را مسلّم می‌کند.

$$\Rightarrow |x - 1| \times 4 < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدم استلزام منطقی داریم: $\sigma = \frac{\varepsilon}{4}$ یا $\sigma \leq \frac{\varepsilon}{4}$

از طرفی چون شعاع همسایگی را عدد (۱) انتخاب کردیم، پس $0 < \sigma \leq 1$

بنابراین بهتر است بنویسیم: $\sigma = \mathrm{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۴}\}$. اگر $\frac{\varepsilon}{۴}$ بیشتر از (۱) باشد آنگاه $\sigma = ۱$ در غیراین‌صورت $\sigma \leq \frac{\varepsilon}{۴}$.

توجه (۱): به طوری‌که ملاحظه شد جواب مسأله یعنی؛ $\sigma \leq \frac{\varepsilon}{۴}$ به مقدار شعاع همسایگی بستگی دارد. اگر در این مسأله شعاع همسایگی را عددی مانند $(\frac{۱}{۲})$ انتخاب می‌کردیم آنگاه برای σ جواب: $\sigma \leq \frac{۲\varepsilon}{۷}$ به دست می‌آمد.

توجه (۲): اگر به نوع حل مسأله (۲) دقت کنیم، برگشت‌پذیری مسأله در آن مستتر است و نیازی به حلّ عملی برگشت‌پذیری نیست.

مسألهٔ ۳: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ (x^۴ + x - ۱) = ۱۷ \\ x \to ۲ \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > ۰$، دست‌کم یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $۰ < |x - ۲| < \sigma \Rightarrow |x^۴ + x - ۱ - ۱۷| < \varepsilon$

$|x^۴ + x - ۱۸| < \varepsilon$

می‌دانیم عبارت $(x^۴ + x - ۱۸)$ باید تجزیه شود، یکی از دو عامل تجزیه $(x - ۲)$ است پس این عبارت را بر $(x - ۲)$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شود.

$$x^۴ + x - ۱۸ \;\Big|\; \frac{x - ۲}{x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹} \qquad ۰$$

$$\Rightarrow |x^۴ + x - ۱۸| < \varepsilon \Rightarrow |(x - ۲)(x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - ۲| \times |x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹| < \varepsilon$$

در این‌جا فاصلهٔ همسایگی را مطرح می‌کنیم و کران بالای $(x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \to ۲ \\ r = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

می‌خواهیم کران بالای $(x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹)$ را پیدا کنیم. اگر فرض کنیم $y = x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹$ آنگاه $y' = ۳x^۲ + ۴x + ۴$ و معادله $y' = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد و تابع y اکیداً صعودی است بنابراین: کران بالای این تابع با شرط $۱ < x < ۳$ وقتی پیدامی‌شود که به‌جای x عدد (۳) را قراردهیم. درنتیجه کران‌بالای آن (۶۶) می‌شود:

اگر $|x - ۲| \times ۶۶ < \varepsilon \Rightarrow |x - ۲| \times |x^۳ + ۲x^۲ + ۴x + ۹| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - ۲| \times ۶۶ < \varepsilon \Rightarrow |x - ۲| < \frac{\varepsilon}{۶۶}$$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$$\sigma = \mathrm{Min}\ \{۱ \text{ و } \frac{\varepsilon}{۶۶}\}$$

مسأله ۴: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ (\frac{۱}{x}) = ۲ \\ x \to \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon > ۰$ دست‌کم یک عدد مثبت σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $۰ < |x - \frac{۱}{۲}| < \sigma \Rightarrow |\frac{۱}{x} - ۲| < \varepsilon$

$$|\frac{۱}{x} - ۲| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{۱ - ۲x}{x}| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-۲(x - \frac{۱}{۲})}{x}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow ۲\left|\frac{x - \frac{۱}{۲}}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x - \frac{۱}{۲}| \times \frac{۲}{|x|} < \varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع $(\frac{۱}{۴})$ را در نظر می‌گیریم و کران پایین $|x|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \to \frac{۱}{۲} \\ r = \frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} < x < \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴} < x < \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴} < |x| < \frac{۳}{۴}$$

کران پایین $|x|$، $(\frac{۱}{۴})$ است.

اگر $|x - \frac{۱}{۲}| \times \frac{۲}{\frac{۱}{۴}} < \varepsilon \Rightarrow |x - \frac{۱}{۲}| \times \frac{۲}{|x|} < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - \frac{۱}{۲}| \times ۸ < \varepsilon \Rightarrow |x - \frac{۱}{۲}| < \frac{\varepsilon}{۸}$$

با مقایسهٔ این رابطه باگزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌شود:

$$\sigma = \mathrm{Min}\ \{۱, \frac{\varepsilon}{۸}\}$$

مسألهٔ ۵: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\ \frac{x^۲ - ۲}{x - ۲} = ۷ \\ x \to ۳ \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > ۰$ دست‌کم یک عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

اگر $۰ < |x - ۳| < \sigma \Rightarrow |\frac{x^۲ - ۲}{x - ۲} - ۷| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x^۲-۲}{x-۲}-۷\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x-۲}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-۳)(x-۴)}{x-۲}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$$

حال همسایگی به مرکز (۳) و شعاع ($\frac{۱}{۲}$) را در نظر می‌گیریم و کران بالای $|x-۴|$ و کران پایین $|x-۲|$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to ۳ \\ r=\frac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

$$-۴\quad -۴\quad -۴$$

$$-\frac{۳}{۲}<x-۴<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۵}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$$

$$-۲\quad -۲\quad -۲$$

$$\frac{۱}{۲}<x-۲<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}<|x-۲|<\frac{۳}{۲}$$

کران بالای $|x-۴|$، $\frac{۳}{۲}$ و کران پایین $|x-۲|$، ($\frac{۱}{۲}$) است. توجه کنید، عبارت $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}$ از عبارت $|x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}$ بزرگتر است. حال می‌نویسیم:

اگر $|x-۳|\times\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|\times\frac{|x-۴|}{|x-۲|}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۳|\times ۳<\varepsilon \Rightarrow |x-۳|<\frac{\varepsilon}{۳}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزاره مقدّم نتیجه می‌شود: $\sigma = \text{Min}\,\{\frac{۱}{۲},\frac{\varepsilon}{۳}\}$

مسألهٔ ۶: به کمک تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x^۲-۳x+۳}=۱$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>۰$، دست‌کم عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری که

اگر $۰<|x-۱|<\sigma \Rightarrow \left|\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱\right|<\varepsilon$

عبارت داخل قدر مطلق را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\left|\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|(\sqrt{x^۲-۳x+۳}-۱)\times\frac{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^۲-۳x+۲}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-۱)(x-۲)}{\underbrace{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}_{\text{مثبت است}}}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$$

همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) را در نظر می‌گیریم. و کران بالای $|x-۲|$ و کران پایین عبارت $(\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱)$ رامحاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} x\to ۱ \\ r=۱\end{cases} \Rightarrow ۰<x<۲$$

$$-۲\quad -۲\quad -۲$$

$$-۲<x-۲<۰ \Rightarrow ۰<|x-۲|<۲$$

عدد (۲) کران بالای $|x-۲|$ است.

در مورد کران پایین $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ باید نکاتی را رعایت کنیم. عبارت $x^۲-۳x+۳$ به ازاء $x=\frac{۳}{۲}$ که در فاصله همسایگی $۰<x<۲$ هم واقع است و جواب مشتق عبارت $(x^۲-۳x+۳)$ است کمترین مقدار را دارد.

$$x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\sqrt{x^۲-۳x+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کران پایین عبارت $\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱$ وقتی $۰<x<۲$ باشد برابر $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$ است.

توجه کنید که عبارت $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}$ از عبارت $|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$ بزرگتر است حال می‌گوییم:

اگر $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-۱|\times\frac{۴}{\sqrt{۳}+۲}<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}$$

با مقایسهٔ این رابطه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma=\text{Min}\,[۱,\frac{(\sqrt{۳}+۲)\varepsilon}{۲}]$$

ادامه دارد

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۲)

گفتیم که مجلهٔ ریاضی یکان به‌طور ماهانه منتشر می‌شد و همین موضوع نشان دهندهٔ کوشش بسیار صاحب امتیاز آن است که مدیر و سردبیر آن نیز بود. در شمارهٔ ۷ این مجله مصاحبه‌ای با دکتر محسن هشترودی انجام گرفته است که نظر به معروفیتی که هنوز هم مرحوم هشترودی دارد تمام آن‌را در این‌جا می‌آوریم. در مطالعهٔ این مصاحبه باید در نظر داشته باشیم که اولاً: مصاحبه در متجاوز از سی سال قبل انجام گرفته است و بنابراین بعضی از مطالب آن‌که در آن ایام نو به‌نظر می‌رسیده است؛ اکنون لباس کهنگی بر تن کرده است، ثانیاً: بعضی از پیشنهادهای واقع در آن نه تنها در حال حاضر جامهٔ عمل پوشیده بلکه از آن مراحل نیز فراتر رفته است. ثالثاً: بعضی از دانشمندانی که در آن زمان توسط مرحوم هشترودی به‌عنوان معاصر معرفی شده‌اند، اکنون چهره در نقاب خاک پوشیده‌اند و جای خود را به دانشمندان جوانتر داده‌اند. خود استاد هشترودی نیز از این جهان فانی به‌سرای باقی شتافته است.

ـ جناب استاد، بیوگرافی جناب‌عالی گوشه‌ای از تاریخ ریاضیات معاصر ایران خواهد بود، از این جهت تقاضا دارد مختصری از شرح حال خود، سابقهٔ تحصیلات در ایران و خارج، استادانی که در پیشرفت مقام علمی آن جناب مؤثر بوده‌اند، بیان فرمایید.

ـ در ۲۲ دی ماه ۱۲۸۶ در تبریز متولد شده‌ام. تحصیلات ابتدایی را در مدارس اقدسیه و سیروس و متوسطه را در دارالفنون گذراندم. در سال ۱۳۰۴ امتحان دارالفنون را داده، چند سال تحصیل طب نمودم. سفر اوّل؛ به اروپا رفتم. در مراجعت در دانشسرای عالی (دارالمعلمین مرکزی) که تأسیس شده بود، رشتهٔ ریاضی را انتخاب نمودم و از فارغ‌التحصیلان دومین دورهٔ آن می‌باشم. سفر دوم؛ به فرانسه رفتم، از دانشکدهٔ علوم پاریس درجهٔ لیسانس و در ۱۹۳۷ از دانشگاه سوربن درجهٔ دکترای دولتی اخذ نمودم. در ۱۳۱۵ به ایران مراجعت نموده، با سمت دانشیاری در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی به‌تدریس مشغول شدم، در ۱۳۲۰ استاد شدم و بعد از آن علاوه بر سمت استادی دانشگاه دارای مشاغل زیر بوده‌ام: در ۱۳۲۱ رئیس فرهنگ تهران، در ۱۳۳۰ رئیس دانشگاه تبریز، در ۱۳۳۶ یک دورهٔ ریاست دانشکدهٔ علوم. در ۱۳۲۳ ازدواج نموده‌ام و صاحب سه فرزند یک پسر و دو دختر می‌باشم.

از جملهٔ معلمین من: در درجهٔ اول برادرم مرحوم محمدضیاءِ هشترودی که بنیان تعلیم من از اوست. مرحوم غلامحسین رهنما که بیشتر استادان و معلمین به‌طور کلی تربیت شدهٔ او هستند. و از معلمینی که زنده هستند همه در مبنای پرورش من سهیم‌اند. بخصوص آقای عبدالعظیم قریب استاد دانشگاه که مراتب علم و ادب، آن اندازه که دارم، از اوست. مخصوصاً تربیت روحی ما بیشتر محصلین از این رادمرد است. روحاً و اخلاقاً به همهٔ معلمین و مربیان خود مدیون می‌باشم.

آقای کیهان علاوه بر سمت تعلیم، در زمان معاونت دانشگاهی خود، دوران درازی، نظر تربیت را بر من داشتند.

خارج از هیأت تعلیمیّه، بسیاری از توفیقهای من (که خیلی بی‌قدر و ناچیز است) مدیون توجهات رهبر من آقای دکتر سیاسی است که همه می‌دانند در بنیان دانشگاه تهران و بزرگداشت استادان چه حق و وظیفه‌ای بر گردن داشتند که مأجور و ارجمند است و هنوز نیز رهبر و راهنمای جویندگانی مثل من می‌باشند.

از جمله استادان دانشگاهی من: در مرحلهٔ اوّل، مرحوم **الی کارتان**

بنیان‌گذار ریاضیات جدید که تقریباً همهٔ شؤون ریاضی به او مدیون است و استاد و راهنمای رساله و به‌طور کلی مربی علمی من بود. استادان فعلی دانشگاه پاریس که اغلب شاگردان همین استاد فقیدانَد از همدوره‌های تحصیلی و راهنمای من بوده‌اند مثل: پروفسور ازرمن در سوربن - پروفسور لیش‌له رووِیج در کلژدوفرانس - استاد فقید پروفسور وایل در پرینستون آمریکا (که در دوره‌ای که در پرینستون به مطالعه مشغول بودم راهنما و معلم من بود) - پروفسور سخوتن در رلفت هلند (که اکنون رئیس مرکز ریاضیات آمستردام است) - پروفسور وینوگرادف و استاد فقید فینی کف، استادان دانشگاه مسکو و چند نفر دیگر.

- رسالهٔ دکترای جناب‌عالی در چه مقوله‌ای تنظیم شده است و استاد راهنما که بوده است؟ چه تألیفات و مقاله‌ها تاکنون از جناب‌عالی چاپ شده است؟

- موضوع رسالهٔ دکترای من راجع به فضاهای تصویری عنصر (نقطه و خط یا صفحه) با التصاقهای هنجاری بوده است و استاد راهنما، همان‌طور که قبلاً بیان شد، استاد فقید الی‌کارتان بود.

از تألیفات و مقاله‌ها آنچه مربوط به ریاضیات است: چندین مقاله راجع به هندسهٔ اینفینی تزیمال - فضاهای عمومی بخصوص فضاهای غیر هلنوم - چند مقاله راجع به هندسهٔ فضاهای عادی و اشکال با مشابهت درونی - چند مقاله راجع به مکانیک تحلیلی و مسیرهای دینامیک - چند مقاله راجع به معادلات دیفرانسیل - تعمیم قضایای اولر در کسرهای مسلسل - به‌کار بستن کسرهای زنجیری در حل معادلات دیفرانسیل و بخصوص تشخیص حالات قابل حل معادلهٔ ریکاتی - قانون جبر دوگانه در مکانیک فضاهای عالی - فضاهای وایل با التصاق قائم - فضاهای سخوتن با انواریانهای ثابت و چند مقالهٔ دیگر. برخی از این مقالات به‌صورت مجموعه‌هایی به زبان فرانسه و از طرف دانشگاه تهران چاپ و منتشر شده است.

- با چه دانشمندان و مشاهیر علمی مکاتبه و مراوده داشته و تاکنون در چند کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان شرکت فرموده‌اید؟

- تاکنون در چهار کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان شرکت نموده‌ام: هاروارد، کمبریج آمریکا - آمستردام هلند - ادینبورگ انگلستان - نیس (کنگره ریاضی‌دانان زبان لاتین). علاوه بر شرکت در کنگره‌ها بنا به دعوت مجامع علمی کشورهای مختلف در این مجامع حضور یافته و سخنرانیهایی نموده‌ام از قبیل: دعوت آکادمی علوم شوروی - دعوت آکادمی علوم بخارست - دعوت دانشگاه مسکو و مجدداً دعوت آکادمی علوم شوروی - دعوت انستیتو ریهووت اسرائیل و معارفه با استادان این انستیتو - دعوت کنگرهٔ علمی پاکستان - دعوت دانشکدهٔ علوم پاریس برای ایراد سخنرانی.

با دانشمندانی که مکاتبه و مراوده دارم، علاوه بر استادانی که ذکر شد: پروفسور استرویک (استاد M.I.T آمریکا) - پروفسور زاریسکی‌چرن (شیکاگو) - پروفسورآلبرت (آمریکا) - پروفسور ایشلینسکی(مسکو) - آلکساندرف (لنینگراد) - کالوژنین (کیف) - جواد مقصوداف (باکو) - زگره‌و بومپیانی (ایتالیا) - چند نفر از استادان لندن و منچستر - پروفسور هایموویچی (دوبرادر - بخارست) - موی‌سیل، وران چانو (بخارست) - پروفسور استوی‌لف رئیس آکادمی ریاضی بخارست - دبیر کل آکادمی بخارست.

- دانشمندان ریاضی ایرانی که معروفیت بین‌المللی داشته و در ایران به‌سر نمی‌برند چه کسانند؟

- پروفسور رضا، آمریکا، دانشگاه سیراکوز نیویورک - دکتر خسرو شادان، مرکز اتمی ساکله پاریس - دکتر آوانیسیان، دانشگاه استراسبورگ (اخیراً از ایران رفته است) - دکتر اکبر زاده، پاریس (قرار است بزودی به ایران مراجعت کنند) - دکتر مرآت، مرکز تحقیقات فرانسه (دکتر شادان، دکتر اکبرزاده، دکتر مرآت، و خانم دکتر غزنوی استادان مرکز تحقیقات فرانسه هستند.) در فرانسه چند نفر دیگر هستند که اسامی آنها را فعلاً نمی‌دانم. در آمریکا: دکتر امیر معز، دکتر آبیان (تدریس می‌کنند)، دکتر علی اصغرزاده (استاد قدیمی دانشگاه کلمبیا) و چند نفر دیگر.

- مهمترین تحولی که در عصر حاضر در علوم ریاضی به عمل آمده است چیست و برنامه‌های دانشگاهی ایران تا چه حد با این تحول تطبیق شده است؟

- مهمترین تحول ریاضی، عنوان شدن علوم به‌صورت جدید که بی‌سابقه بوده و در نتیجهٔ اندیشه‌های کانتور و کلاین (مکتب آلمانی) پیش آمده است، مثل توپولوژی جبر مجرد - تئوری نمودارها - تئوری انفرماسیون - و به‌طور کلی نمونه و مُدل ریاضی برای فنون دیگر(ریاضیات عملی) - بخصوص توجه به میکرواستروکتورها که درپیشرفت فیزیک بسیار مؤثر بوده است.

در دانشگاه ایران مقدمات بعضی از این مواد تدریس می‌شود و امسال در نظر است که با مراجعت دکتر اکبرزاده و بعضی استادان دیگر، تدریس آنها تکمیل گردد.

- آیا تدریس ریاضیات جدید در دانشگاه، تجدید نظر در برنامهٔ

ریاضیات متوسطه را ایجاب می‌کند و در صورت لزوم، چه مقام علمی برای این تجدیدنظر صالحتر است؟

- برنامهٔ متوسطهٔ ایران باید با برنامه‌های ممالک دیگر هماهنگی داشته باشد و شاید ضرورت داشته باشد محصلین از دورهٔ دوم دبیرستان با مفاهیم جدید آشنایی یابند. جوانان را باید با توجه به احتیاجات علمی کشور و استعدادهای آنان راهنمایی کرد، و در قسمت زبان و ادبیات فارسی و زبان خارجه باید تعلیمات را خیلی ریشه‌دارتر و عمیقتر کرد، به‌طوری که هر محصل یک زبان خارجی را خوب بیاموزد زیرا مطالعه یا تحقیق و حتی تحصیل بی‌دانستن زبان خارجه و اقلاً دو زبان، میسر نیست.

صالحترین مقام برای تجدیدنظر در برنامه، دبیران مجرب فرهنگ می‌باشند که خود در جریان تحول و پیشرفت علوم‌اند و البته استادان دانشگاه نیز باید از تجربیات چندین سالهٔ خود نتیجه‌گیری کرده، نقاط ضعف تعلیمات متوسطه و احتیاجات اساسی دانش‌آموزان را گوشزد کنند.

- برای توسعهٔ سطح اطلاعات علمی دانش‌آموزان و آشنایی دبیران با مواد جدیدی که قرار است در برنامه گنجانیده شود چه راهی را پیشنهاد می‌فرمایید؟

- بد نیست که مسابقات عمومی در هر رشته بین محصلین برگزار شود و دانش آموزان ممتاز شناخته شوند و تشویق شوند و در تحصیل آنان مساعدت شده، حتی برای تحصیلات عالی در رشته‌ای که ممتاز هستند و ورود به دانشگاه، برای آنها تسهیلات لازم فراهم شود. نکتهٔ مهم آن‌که نباید همهٔ توجه را فقط به تهران داشت، چه بسیار محصلین ممتاز که در ولایات هستند و وقتی به تهران می‌آیند امکان اظهار وجود برای آنها فراهم نیست. بهتر آن است که این محصلین در دوران تحصیل شناخته شوند. دانشگاه‌های ولایات را باید مجهز کرد و امر (تشکیل کلاسهای مشترک در شهرستانها) که وزارت فرهنگ در نظر گرفته است تعقیب شود. از دبیران مجرب برای تدریس در این کلاسها استفاده شود و این کاری است که در کشورهای خارجی مورد رعایت است: معلمین و دبیران متوسطه را در دانشگاه‌ها به کارآموزی می‌گمارند که هم مربی جوانان می‌شوند و هم خودشان برای تدریس در دانشگاه آماده می‌گردند و به‌طور خلاصه معلم باید از صنف خودش تربیت شود، استاد خوب دانشگاه همان معلم خوب متوسطه است که راه کمال را طی کرده است. بسیاری از دبیرانی را که با آنها آشنایی دارم، می‌شناسم که مرتب مشغول مطالعه و تحصیل‌اند و بهترین کمک تدریس هم برای قسمتهای عالی، دبیران بوده‌اند چنان‌که در دانشکدهٔ علوم و دانشسرای عالی از وجود آنها استفاده می‌شود.

به محاذات ایجاد مسابقات درس بین محصلین، برای معلمین هم باید یک نوع انجمنها یا سمینارها تشکیل شود تا در پیشرفت اطلاعات علمی به آنان کمک کند و هم یک نوع ارتقای معنوی (و حتی اجتماعی) برای آنان پیش آورد. تشکیل کنگره‌های علمی و شرکت معلمین در آنها واجد کمال اهمیت می‌باشد. در کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان، یک قسمت بحث مربوط به تعلیم ریاضی است که راجع به روشهای تدریس تبادل‌نظر به عمل می‌آید. (گزارشی از کنگرهٔ بین‌المللی ۱۹۶۱ دربارهٔ روش تعلیم ریاضی در شمارهٔ ۳ و ۴ مجله درج شده است.)

- با چه مطبوعات علمی جهان همکاری دارید و مهمترین نشریهٔ ریاضی دنیا کدام است؟

- در جهان بیش از پانصد مجلهٔ ریاضی منتشر می‌شود که هر کدام در رشته‌ای تخصصی شده‌اند و ذکر نام همهٔ آنها میسر نیست. در ایران باید دانشگاه یا مؤسسه‌های ریاضی که تأسیس می‌شود همهٔ آنها را مشترک شود و در دسترس هر طالبی قرار دهد. مجله‌هایی هست مخصوص بررسی مقالات علمی که خلاصهٔ تمام مقالات علمی مجلات در آنها درج می‌شود و طالب می‌تواند احتیاجات خود را مرتفع کند. برای نمونه؛ معروفترین آنها MATHEMATICAL REVIEWS آمریکاست و در روسیه به زبان روسی مجله‌های معتبر منتشر می‌شود، و در همهٔ این مجله‌ها خلاصهٔ مقالات مجله‌های دیگر را نیز ذکر می‌کنند، در ایران هم اگر مؤسسه‌ای تشکیل شد؛ باید مترجمینی داشته باشد که این مقالات را ترجمه کنند و در اختیار طالبین بگذارند.

[a]

رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی

(برای دانش آموزان سال دوم ریاضی فیزیک و سوّم ریاضی نظام جدید)

● **حمیدرضا امیری**

دیدیم که رابطهٔ R روی مجموعهٔ نا تهی A می‌تواند دارای خواص بازتابی (انعکاسی)، تقارنی، پادتقارنی یا تعدی (تراگذری) باشد.

به‌عنوان مثال اگر $A = \{a , b , c , d\}$ و رابطهٔ R را به‌صورتِ:

$$R = \{(a , a) , (b , b) , (c , c) , (d , d) , (a , b) , (b , a)\}$$

تعریف کنیم، مشاهده می‌شود که رابطهٔ R ؛ ۳ خاصیتِ: انعکاسی، تقارنی و تعدی دارد. در حالت کلّی به چنین رابطه‌هایی که هر ۳ خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را باهم داشته‌باشند یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌گویند. لازم است، یادآوری کنیم که اگر رابطهٔ R ، ۳ خاصیت فوق را دارا بوده و علاوه بر آن مثلاً خاصیت پادتقارنی نیز داشته باشد بازهم یک رابطهٔ هم ارزی نامیده می‌شود.

مثال : رابطهٔ R روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود، ثابت کنید این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است. (m عددی صحیح و ثابت است)

$$\forall x , y \in Z ، xRy \Leftrightarrow x - y = mk \qquad (k \in z)$$

حل : می‌دانیم صفر مضرب هرعدد است؛ بخصوص $\circ = m \times \circ$ ($k = \circ$) پس:

$$۱)\ \forall x \in Z ، x - x = \circ = m \times \circ \Leftrightarrow xRx \quad \text{(خاصیت انعکاسی)}$$

$$۲)\ \forall x , y \in Z ، xRy \Rightarrow x - y = mk_۱$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین درمنفی ضرب}} y - x = m(-k_۱) \xRightarrow{-k_۱ = k_۲} y - x = mk_۲ \Rightarrow yRx$$

یعنی؛ بافرض این که xRy ثابت کردیم: yRx پس، خاصیت تقارنی نیز برقرار است.

$$۳)\ \forall x , y , z \in Z ، xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = mk_۱ \wedge$$

$$y - z = mk_۲ \xRightarrow{\text{طرفین دوتساوی را جمع می‌کنیم}} x - z = m \underbrace{(k_۱ + k_۲)}_{k_۳}$$

$$\Rightarrow x - z = mk_۳ \Rightarrow xRz \quad \text{(خاصیت تعدی دارد)}$$

بنابراین رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(لازم است توضیح دهیم که رابطهٔ R در مثال قبل به رابطهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ m معروف است.)

خواصِ انعکاسی، تقارنی و تعدی دریک رابطهٔ هم‌ارزی مانند: R که روی مجموعهٔ A تعریف شده و ارتباط بین این ۳ خاصیت می‌تواند بینِ اعضایی از A که باهم رابطهٔ R داشته باشند، ارتباط خاصی برقرار کند. به‌عنوان مثال اگر درمثال قبل قرار دهیم، $m = ۳$ داریم:

$$\forall x , y \in Z ، xRy \Leftrightarrow x - y = ۳ \qquad (k \in z)$$

درحقیقت اعدادی از Z باهم رابطهٔ R دارند که تفاضل آنها مضرب ۳ باشد مثلاً: ۱۵R۶ زیرا $۹ - = ۱۵ - ۶$ یا $(۳-) \times ۳ = ۱۵ - ۶$

حال اگر a عضوی از Z بوده و همهٔ اعداد صحیح که با a رابطهٔ R دارند (تفاضل هریک از آنها با a مضرب ۳ باشد) را درنظر بگیریم، مجموعه‌ای حاصل می‌شود که آن را **کلاس هم‌ارزیِ a** می‌نامند و بانماد [a] نمایش می‌دهند، درحالت کلّی:

اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A باشد و $a \in A$ ، کلاسِ هم ارزی a را بانماد [a] نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] = \{x \in A \mid x R a\}$$

به‌عبارت دیگر : $x \in [a] \Leftrightarrow xRa$

مثلاً در رابطهٔ $xRy \Leftrightarrow x - y = ۳k$ داریم:

$$[a] = \{x \in Z \mid x R a\} = \{x \in Z \mid x - a = ۳k\}$$

اگر $a = ۱$ در این صورت:

$$[۱] = \{x \in z \mid x - ۱ = ۳k \text{ یا } x = ۳k + ۱\}$$

$\Rightarrow [1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

حال اگر رابطهٔ هم ارزیِ R روی مجموعهٔ A^2 تعریف‌شده باشد، ($R \subset A^2 \times A^2$) در این‌صورت‌برای هر $(a , b) \in A^2$ کلاس هم‌ارزیِ (a , b) یا $[(a , b)]$ مطابق تعریفِ اصلی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[(a , b)] = \{(x , y) \in A^2 \mid (x , y) R (a , b)\}$$

مثال: رابطهٔ هم‌ارزیِ R روی $\mathbb{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف شده است اوّلاً، نـوعِ نـمودار کلاسهای هـم ارزی را مشـخص کـنید. ثـانیاً، $[(1,\sqrt{2})]$ را به صورت مجموعه‌ای تشکیل دهید.

$$\forall (a , b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, (a , b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

حل: بانوشتن یک کلاس هم ارزیِ دلخواه مانند: $[(a , b)]$ نمودار هرکلاس هم ارزی مشخص می‌شود:

$$[(a , b)] = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 , (x , y) R (a , b)\}$$
$$= \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + b = y + a\}$$
$$= \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + (b - a)\}$$
$$\Rightarrow [(1,\sqrt{2})] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x + (\sqrt{2} - 1)\}$$

و همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار دسته‌های هم ارزی این رابطه خطوطی به شکل $y = x + (b - a)$ است که می‌بینیم a و b نقشی در ضریب زاویه این خطوط نداشته و فقط عرض از مبدأ را تعیین می‌کنند یعنی، نمودار همهٔ کلاسهای هم ارزی خطوطی موازی باهم می‌باشند.

مثال: رابطهٔ R را روی مجموعهٔ $A = \{2,4,6,8\}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$R = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8), (4,6), (6,4)\}$$

واضح است که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم ارزی است.

حال کلاسهای هم ارزیِ این رابطه را تشکیل می‌دهیم:

$[2] = \{x \in A \mid xR2\} = \{2\}$
$[4] = \{x \in A \mid xR4\} = \{4 , 6\}$
$[6] = \{x \in A \mid xR6\} = \{6 , 4\}$
$[8] = \{x \in A \mid xR8\} = \{8\}$

همان‌طور که مشاهده مـی‌کنید: اولاً، هیچ‌کدام از کلاسهای هم ارزیِ این رابطهٔ هم ارزی تهی نیست. ثانیاً، کلاسهای هم ارزی یا از هم جدا هستند و عضو مشترکی ندارند و یا این که مساوی یکدیگرند ($[4] = [6]$) و ثالثاً، اجتماع کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، برابر با مجموعهٔ A است یعنی:

$$[2] \cup [4] \cup [8] = \{2\} \cup \{4,6\} \cup \{8\} = \{2,4,6,8\} = A$$

دراین‌جا خواصی را که راجع به کلاسهای هم ارزی در مثال قبل مشاهده کردید در حالت کلّی و به‌عنوان یک قضیّه مطرح و اثبات می‌کنیم.

قضیّه: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ هم ارزی باشد، در این صورت:

الف) کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، ناتهی‌اند.

ب) اگر $b \in [a]$ آنگاه $[a] = [b]$.

ج) اجتماع همهٔ کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، مساوی با مجموعهٔ A است.

اثبات:

الف) فرض کنیم: $[a]$ یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه باشد، چون رابطهٔ R هم‌ارزی است پس خاصیت انعکاسی دارد لذا aRa بنابراین طبق تعریف کلاسهای هم‌ارزی $a \in [a]$ پس، $[a] \neq \phi$.

ب) برای این‌که ثابت کنیم $[a] = [b]$، (بافرض $b \in [a]$) کافی است ثابت کنیم، $[a] \subset [b]$ و $[b] \subset [a]$.

فرض کنیم $x \in [a] \Rightarrow xRa \xRightarrow{b \in [a]} xRa \wedge aRb \xRightarrow{\text{R متعدی‌است}} xRb$
$\Rightarrow x \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b] \qquad (1)$

حال اگر: $x \in [b] \Rightarrow xRb \xRightarrow{b \in [a]} xRb \wedge bRa \xRightarrow{\text{R متعدی‌است}} xRa$
$\Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a] \qquad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow [a] = [b]$

تذکر: قسمت (ب) نشان می‌دهد که هر دو کلاس هم ارزی یا مساوی یکدیگرند و یا هیچ اشتراکی ندارند.

ج) اجتماع همهٔ کلاسهای هم ارزی را با E نشان می‌دهیم. چون طبق تعریف کلاسهای هم ارزی، هر کلاسِ هم ارزی زیر مجموعهٔ A است پس اجتماع این کلاسهای هم ارزی یعنی، E نیز زیر مجموعهٔ A است بنابراین، $E \subseteq A$. حال اگر فرض کنیم: $x \in A$ واضح است که $x \in [x]$، پس هر عضو از A دریکی از کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R وجود دارد و بنابراین در اجتماع کلاسها یعنی، E وجود خواهد داشت یعنی، $A \subseteq E$ و در کلّ ثابت شد، $A = E$.

مثال: مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ را درنظر می‌گیریم و رابطهٔ R را روی A^2 به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall(x , y) , (z , t) \in A^2, (x , y) R (z , t) \Longleftrightarrow y = t$$

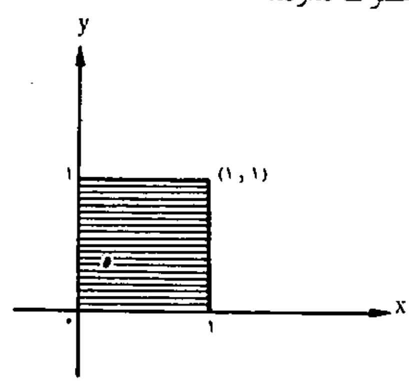
که: $A^2 = A \times A = \{(x , y) \mid 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1\}$

(مجموعهٔ $\{x \in IR \mid 0 \le x \le 1\}$ = A را به شکل $A = [0 , 1]$ نیز نشان می‌دهند.)

اولاً: براحتی می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است (اثبات به عهدهٔ خواننده). ثانیاً: همان طور که مشاهده می‌کنید؛ مجموعهٔ A^2 یعنی $[0,1] \times [0,1]$ سطح مربع واحد را نشان می‌دهد و اگر بخواهیم نمودار هر کلاس هم ارزیِ این رابطه را بشناسیم، داریم:

$$[(a , b)] = \{(x , y) \in A^2 \mid (x , y) R (a , b)\}$$
$$= \{(x , y) \in A^2 \mid y = b\}$$

یعنی: نمودار هر کلاس هم ارزی پاره خطی است در داخل سطح مربع واحد و موازی با محور xها که هیچ کدام از این پاره‌خطها یکدیگر را قطع نمی‌کنند! زیرا، هریک از این پاره‌خطها به یک کلاس هم‌ارزی تعلق دارد و می‌دانیم (ثابت شده) که کلاسهای هم ارزی عضو مشترک ندارند.



مثال: رابطهٔ R را روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x , y) , (z , t) \in IR^2 ، (x,y) R (z,t) \Leftrightarrow y - x^2 = t - z^2$$

الف) ثابت کنید، R رابطهٔ هم ارزی است.

ب) نمودار هرکلاس هم ارزی در این رابطه چه شکلی را در صفحهٔ مختصات معین می‌کند؟

اثبات:

اثبات ، قسمت (الف) به‌عهدهٔ خواننده.

ب) برای مشخص کردن نمودار هرکلاس هم ارزی یک کلاس هم‌ارزی دلخواه مانند: $[(a , b)]$ را درنظر می‌گیریم:

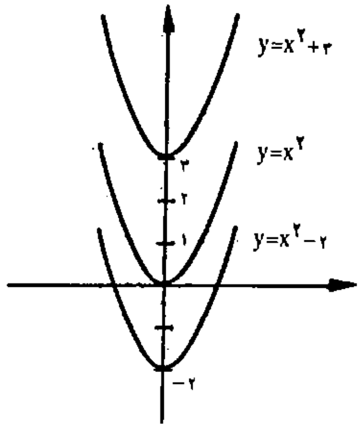
$$[(a , b)] = \{(x , y) \in IR^2 \mid (x , y) R (a , b)\}$$
$$= \{(x , y) \in IR^2 \mid y - x^2 = b - a^2\}$$
$$= \{(x , y) \in IR^2 \mid y = x^2 + (b - a^2)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودارهای کلاسهای هم ارزیِ این رابطه سهمیهایی به شکل $y = x^2 + (b - a^2)$ است مثلاً، نمودارِ $[(1 , 2)]$ سهمیِ $y = x^2 + 1$ است.

$[(1 , 1)] \rightarrow y = x^2$

$[(0 , 3)] \rightarrow y = x^2 + 3$

$[(-1 , -1)] \rightarrow y = x^2 - 2$



در این‌جا به تعریف **افراز** یک مجموعه می‌پردازیم، هرگاه A یک مجموعهٔ ناتهی بوده و بتوانیم تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های متمایز A مانند، A_1 ، A_2 ، ... ، A_n بیابیم به قسمی که اوّلاً، هریک از زیر مجموعه‌ها ناتهی باشند. ثانیاً، هیچ دوتایی از آنها باهم اشتراکی نداشته باشند (دو به دو از هم جدا باشند) و ثالثاً، اجتماع این زیرمجموعه‌ها برابر باخودِ مجموعهٔ A شود، در این صورت می‌گوییم: مجموعه‌هایِ A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مجموعه‌های افرازکنندهٔ مجموعهٔ A بوده و مجموعهٔ $E = \{A_1, A_2, ... , A_n\}$ یک افراز n عضوی از مجموعهٔ A است.

تبصره: در حالتی که $n = 1$ یعنی E یک افراز یک عضوی از مجموعهٔ A باشد، داریم: $E = \{A\}$. حال اگر بخواهیم تعریف افراز یک مجموعه را توسط نمادهای ریاضی یا به زبان ریاضی بیان کنیم می‌گوییم:

مجموعهٔ $E = \{A_1, A_2, ... , A_n\}$ یک افراز n عضوی برای مجموعهٔ ناتهیِ A است هرگاه،

۱) $\forall i ، A_i \neq \phi \qquad 1 \le i \le n$

۲) $\forall i , j ، A_i \cap A_j = \phi \qquad 1 \le i , j \le n$

۳) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال: یک افراز ۴-عضوی، یک افراز ۳ عضوی و یک افراز ۲ عضوی برای مجموعهٔ $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ بنویسید.

حل:

۱. اگر فرض کنیم: $A_1 = \{1\}, A_2=\{2\}, A_3=\{3\}, A_4=\{4\}$
در این صورت: $E_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ یک افراز ۴ عضوی برای A است.

۲. اگر فرض کنیم: $B_1 = \{1, 4\}$ و $B_2 = \{2\}$ و $B_3 = \{3\}$
دراین‌صورت $E_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$ یک افراز ۳ عضوی برای A است.

۳. و بالاخره اگر فرض کنیم: $C_1 = \{1, 2\}$ و $C_2 = \{3, 4\}$
در این صورت $E_3 = \{C_1, C_2\}$ یک افرازِ ۲ عضوی از A است.

مثال: برای مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان به‌صورت $E = \{IR^+, IR^-, \{0\}\}$ یک افراز ۳ عضوی نوشت.

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد صحیح زوج را با Z_E و مجموعهٔ اعداد صحیح‌فرد را با Z_O نمایش‌دهیم، دراین‌صورت، $E = \{Z_E, Z_O\}$ یک افراز ۲ عضوی برای Z است.

حال با توجه به قضیّه‌ای که راجع به کلاسهای هم ارزی یک رابطهٔ هم‌ارزی مانند R اثبات شد و باتوجه به تعریف افراز؛ بدیهی است که:

اگر R رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ ناتهیِ A باشد، مجموعهٔ کلاسهایِ هم‌ارزیِ رابطهٔ R یک افراز برای مجموعهٔ A است. (طبق قضیّهٔ کلاسهای هم‌ارزی هر سه خاصیتِ افراز را دارند.)

مثال: دیدیم که رابطهٔ $xRy \Leftrightarrow x - y = 3k$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی z بوده و کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه به قرار زیرند:

$$[0] = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \}$$
$$[1] = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$$
$$[2] = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$$

و واضح است که $[0] \cup [1] \cup [2] = Z$ یعنی: $E = \{[0], [1], [2]\}$ یک افراز Z است.

پس ثابت شد کلاسهای هم‌ارزی هر رابطهٔ هم‌ارزی مانند R روی مجموعهٔ A، یک افراز برای A است.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس مطلب فوق نیز برقرار است؟ یعنی آیا به ازای هر افراز برای A، رابطه‌ای هم‌ارزی روی A می‌توان تعریف کرد که این افراز همان کلاسهای هم‌ارزی آن رابطه باشند؟ جواب مثبت است که این سؤال و جواب آن را به‌صورتِ مسأله‌ای بیان و توضیح می‌دهیم.

مسأله: هرگاه $E = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد و رابطهٔ R را روی مجموعهٔ A به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\forall x, y \in A, xRy \iff \exists A_i \in E, x, y \in A_i$$

ثابت کنید: رابطهٔ R هم‌ارزی بوده و سپس نشان دهید مجموعهٔ کلاسهای هم ارزیِ رابطهٔ R، برابر است با E.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که رابطهٔ R روی A، هم‌ارزی است.

الف) چون A_i ها مجموعهٔ A را افراز می‌کنند، پس: هر $x \in A$ می‌بایست دریکی و فقط یک A_i باشد، بنابراین: xRx.

ب) باتوجه به تعریف رابطهٔ R داریم:

$$\text{اگر} \rightarrow xRy \Rightarrow \exists A_i \in E, x, y \in A_i \Rightarrow y, x \in A_i \Rightarrow yRx$$

ج) برای اثبات خاصیت تعدی فرض می‌کنیم: xRy و yRz و ثابت می‌کنیم xRz.

$$xRy \Rightarrow \exists A_i \in E, x, y \in A_i \qquad (1)$$
$$yRz \Rightarrow \exists A_j \in E, y, z \in A_j \qquad (2)$$

بنابراین y، هم در A_i و هم در A_j بوده و طبق تعریف افراز چون A_i و A_j جزء مجموعه‌های افراز کننده هستند، نمی‌توانند عضو مشترک داشته‌باشند مگر آن که $A_i = A_j$؛ در این صورت، باتوجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم، $x, z \in A_i$ و طبق تعریفِ رابطهٔ R، xRz.

حال ثابت می‌کنیم مجموعهٔ کلاسهای هم‌ارزیِ رابطهٔ R یعنی؛ $F = \{[a] \mid a \in A\}$ همان مجموعهٔ E است و یا به عبارت دیگر هر A_i یکی از کلاسهای هم‌ارزیِ رابطهٔ R است.

فرض کنیم: [x] یک کلاس هم‌ارزیِ دلخواه از رابطهٔ R باشد بنابراین:

$$[x] = \{a \in A \mid xRa\} = \{a \in A \mid \exists A_i \in E, x, a \in A_i\} = A_i$$

(چون A_k ها دو به دو عضو مشترکی ندارند لذا $x \in A_i$ نمی‌تواند در هیچ‌یک از $A_{k \neq i}$ ها باشد) یعنی هر کلاس هم‌ارزیِ رابطهٔ R یکی از A_i ها است. حال اگر فرض کنیم: $A_i \in E$، طبق تعریف افراز باید $A_i \neq \phi$ پس:

$$\exists x \in A \text{ و } x \in A_i$$

وچون طبق‌تعریف‌رابطهٔ R هرعضو A_i با x رابطه‌دارد، پس $[x] = A_i$.

روش عملی یافتن رابطهٔ هم‌ارزی R با در دست داشتن افرازی از A

طبق مسألهٔ قبل دیدیم که اگر $E = \{A_۱, A_۲, ... ,A_n\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد رابطهٔ R که به‌صورتِ $(xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E ، x , y \in A_i)$ تعریف می‌شود رابطه‌ای هم‌ارزی روی A بوده و A_iها همان کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه خواهندبود، از طرفی می‌دانیم؛ $R \subseteq A \times A$ یعنی، رابطهٔ R مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب که طبق تعریف رابطهٔ R در بالا زوج مرتبِ (x , y) زمانی در R است که هر دو مؤلفهٔ آن متعلق به یکی از مجموعه‌های افرازکننده باشند، مثلاً : $x , y \in A_k$ پس: طبق تعریف حاصل‌ضرب، $(x , y) \in A_k \times A_k$ ، پس: رابطهٔ R را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

$$\forall x , y \in A ، xRy \Leftrightarrow \exists A_i \in E ، (x , y) \in A_i \times A_i$$

این تعریف ما را به این واقعیت می‌رساند که هرگاه بخواهیم رابطهٔ R را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب داشته باشیم؛ کافی است، هریک از مجموعه‌های افرازکننده را در خودش ضرب کنیم و اجتماعِ مجموعه‌هایِ به‌دست آمده همان رابطهٔ R خواهدبود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: هرگاه $E = \{\{۱\} , \{۲,۳\} , \{۴,۵\}\}$ یک افراز برای مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ باشد رابطه‌ای هم‌ارزی چون R ، روی A بیابید و نشان دهید که هریک از اعضای E یکی از کلاسهای هم‌ارزی این رابطه است.

$$E_۱ = \{۱\} \times \{۱\} = \{(۱ , ۱)\}$$

$$E_۲ = \{۲ , ۳\} \times \{۲,۳\} = \{(۲,۲) , (۲,۳) , (۳,۲) (۳,۳)\}$$

$$E_۳ = \{۴, ۵\} \times \{۴,۵\} = \{(۴,۴), (۴,۵), (۵ ,۴), (۵ ,۵)\}$$

$$R = E_۱ \cup E_۲ \cup E_۳ \Rightarrow$$

$$R = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۲) , (۳ , ۳) , (۴ , ۴) , (۴ , ۵) , (۵ , ۴) , (۵ , ۵)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید؛ R رابطه‌ای هم‌ارزی بوده و اگر کلاسهای هم‌ارزیِ این رابطه را تشکیل دهیم؛ خواهیم داشت:

$[۱] = \{۱\}$
$[۲] = \{۲ , ۳\} = [۳]$
$[۴] = \{۴ , ۵\} = [۵]$

ادب ریاضی

ریاضی‌دان، بعدازاین‌که قضایا اثبات شدند، در جستجوی کاربرد آنها در طبیعت می‌افتد، و مسائل را حل می‌کند و جوابهای عددی سؤالاتی را که در طول تحقیقاتش مطرح شده‌اند، به‌دست می‌آورد.

تفریح اندیشه ۲

اگر عمل تعریف شده با $a . b = a^b + b$ را تعریف کند، ۳.(۱.۲) را بیابید.

جواب در صفحهٔ ۳۹

اثبات نادرستی

«ادامهٔ منطق ریاضی»

● غلامرضا یاسی‌پور

☐ دنبالهٔ مطالب قبل

مثال دیگر عبارت است از:

D	P
بعضی ایرانیها	مسلمانند.
	S
بعضی ایرانیها	باهوشند

بنابراین، بعضی مسلمانها باهوشند.

که به‌صورت زیر علامتی می‌شود:

$(\exists x)[\ Dx \wedge Px\ ]$

$(\exists x)[\ Dx \wedge Sx\ ]$

$\therefore\ (\exists x)[\ Px \wedge Sx\ ]$

این استدلال به ازای مُدلی شامل تنها یک فرد a منطقاً معادل:

$Da \wedge Pa$

$Da \wedge Sa$

$\therefore\ Pa \wedge Sa$

است‌که درست‌است. اما به‌ازای مدلی‌شامل‌دو فرد a و b معادل‌است با:

$(Da \wedge Pa) \vee (Db \wedge Pb)$

$(Da \wedge Sa) \vee (Db \wedge Sb)$

$\therefore\ (Pa \wedge Sa) \vee (Pb \wedge Sb)$

که با نسبت دادن ارزش راستی T به «Da»، «Db»، «Pa»، «Sb» و ارزش راستی F به «Pb» و «Sa» ثابت می‌شود که نادرست است. در این‌جا نیز استدلال اصلی نادرست است، زیرا مدلی وجود دارد که به ازای آن منطقاً معادل یک استدلال تابع ارزش نادرست است.

استدلال نادرست شامل سورها می‌تواند به ازای هر مدل دارای کمتر از k فرد درست باشد، هرچند که باید به ازای هر مدل شامل k یا بیشتر از k فرد نادرست باشد. در نتیجه دراستفاده ازاین روش برای اثبات نادرستی استدلالی شامل سورها ممکن است لازم شود که مُدلهای بزرگتر و بزرگتر را بررسی کنیم، و طبیعتاً این سؤال مطرح می‌شود که: در سعی در اثبات نادرستی استدلالی از این نوع، مدلی با چه بزرگی را باید بررسی کنیم؟ برای این سؤال پاسخی از لحاظ تئوری رضایت بخش به‌دست آمده است. به این ترتیب که اگر استدلالی شامل n علامت محمولی مختلف باشد در این صورت اگر به ازای مدلی شامل ۲^n فرد درست باشد، به ازای هر مدل درست است، یا از لحاظ عمومی درست است. این نتیجه تنها به ازای توابع گزاره‌ای یک متغیری برقرار است. و در مورد محمولات نسبی صادق نیست. این جواب گرچه از لحاظ تئوری رضایت‌بخش است از لحاظ عملی چندان مفید نیست، چه اگر می‌خواستیم در مورد درستی یا نادرستی هر یک از استدلالات مورد بحث قرار گرفته در این بخش، حالت از لحاظ تئوری قطعی را بررسی کنیم بایستی مُدلهای شامل هشت فرد را بررسی می‌کردیم.

☐ قضایای عمومی چندگانه

تا کنون توجه‌مان را به قضایای عمومی شامل تنها یک سور معطوف کرده‌ایم. قضیهٔ عمومی که دقیقاً شامل یک سور باشد به قضیهٔ عمومی یگانه[1] موسوم است. اکنون به قضایای عمومی چندگانه[2] که شامل دو یا بیشتر از دو سورند، می‌پردازیم. در کاربردمان از این عبارت، هر گزارهٔ مرکب که مؤلفه‌هایش قضایای عمومی‌اند یک

قضیهٔ عمومی چندگانه به‌حساب می‌آید. به‌عنوان مثال، شرطی «اگر تمام سگها گوشتخوار باشند در این صورت بعضی حیوانات گوشتخوارند» که به‌صورت:

$$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists x)[Ax \wedge Cx]$$

علامتی می‌شود، یک قضیهٔ عمومی چندگانه است. قضایای عمومی چندگانهٔ دیگر مرکبترند و به علامت‌نویسی پیچیده‌تری نیاز دارند. برای توسعهٔ علامت نویسی جدید باید بار دیگر به مفهوم تابع گزاره‌ای بازگردیم.

جمیع توابع گزاره‌ای که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند به‌عنوان مثالهای جانشین، یا قضایای ساده یا ترکیبات تابع ارزشی قضایای فردی دارندهٔ موضوعات یکسان را دارا بوده‌اند. اگر گزارهٔ مرکبی را که مؤلفه‌هایش قضایای سادهٔ دارای موضوعات مختلف، چون «$Fa \wedge Gb$» می‌باشند، مورد رسیدگی قرار دهیم؛ می‌توانیم آن را به‌عنوان مثال جانشین تابع گزاره‌ای «$Fx \wedge Gx$» یا تابع گزاره‌ای «$Fa \wedge Gx$» در نظر بگیریم. ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای فردی به‌صورت اجزایشان باشند. و در صورتی‌که گزارهٔ مرکبی را که در آن یک مؤلفه قضیهٔ عمومی است و مؤلفهٔ دیگر قضیهٔ فردی، چون «اگر تمام سگها گوشتخوارند، در این صورت راور «Rover» گوشتخوار است» که به‌صورت «$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cr$» علامتی می‌شود، بررسی کنیم، می‌توانیم آن‌را به‌صورت مثال جانشین تابع گزاره‌ای:

$$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

در نظر بگیریم. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که بعضی توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل قضایای عمومی به‌صورت اجزایشان باشند.

در این مرحله دو عبارت فنی جدید را می‌توان به‌طور کامل معرفی کرد. ظهور متغیر «x» را که در سور عمومی یا وجودی «(x)» یا «$(\exists x)$» ظاهر نمی‌شود یا در برد آن قرار نمی‌گیرد؛ ظهور آزاد[3] آن متغیر می‌نامیم. از طرف دیگر، ظهور متغیر «x» که یا قسمتی از یک سور است یا در برد سور «(x)» یا «$(\exists x)$» قرار می‌گیرد ظهور مقیّد[4] آن متغیر نامیده می‌شود.[5] به این ترتیب در عبارت:

$$(x)[Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow Cx$$

ظهور اول متغیر «x» جزئی از یک سور است و بنابراین مقید در نظر گرفته می‌شود. ظهورات دوم و سوم نیز ظهورات مقیدند، در صورتی‌که ظهور چهارم ظهوری آزاد است. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که توابع گزاره‌ای می‌توانند شامل ظهور آزاد و مقید متغیرات باشند. از طرف دیگر، جمیع ظهورات متغیرات در قضایا باید مقید باشند، زیرا هر قضیه‌ای باید راست یا دروغ باشد.

هر تابع گزاره‌ای باید دست کم یک ظهور آزاد از یک متغیر را در بر داشته باشد، در حالی‌که هیچ قضیه‌ای نمی‌تواند شامل ظهور آزاد متغیری باشد.

مرجع: Symbolic Logic
Irving M. Copi

یادداشتها:

1. singly general proposition
2. multiply general propositions
3. free occurrence
4. bound occurrence

۵. به طریق دیگر، اصطلاحات کمتر متداول متغیرهای «حقیقی» «real variables» در مورد متغیرهای آزاد و متغیرهای «ظاهری» «apparent variables» در مورد متغیرهای مقید به کار می‌رود.

تفریح اندیشه ۳

مجموع یک عدد طبیعی و چهار عدد طبیعی متوالی بعدی آن ۱۰۵ است. حاصل تفاضل میانگین این اعداد را از میانهٔ آنها بیابید.

جواب در صفحهٔ ۳۹

آموزش ترجمه متون ریاضی (۹)

● حمید رضاامیری

3. Subgroups

Let H be a non-void set and $*$ be a binary composition on H; let A be a non-void subset of H. We recall that A is said to be *closed subset* of H with respect to the binary composition $*$, if for each pair $a, b \in A$, $a * b \in A$. In that case the mapping $f: A \times A \to A$ in which $f(a, b) = a * b$ is called a *binary composition* on A *induced by* $*$.

Let G be a group and let A be a non-void subset of G. It may happen that A is closed with respect to the binary composition on G and A itself is a group under the induced composition. Such a situation occurs quite often. This leads to the following concept.

۳. زیرگروهها

فرض کنیم H مجموعه‌ای ناتهی بوده و * یک ترکیب دوتایی روی H؛ و فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از H باشد. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ A یک زیرمجموعهٔ بسته از مجموعهٔ H، نسبت به ترکیب دوتایی * گفته می‌شود، اگر برای هر دو عضو a و b ∈ A داشته باشیم، a * b ∈ A.

در آن‌حالت‌نگاشتِ f:A×A → A که در آن f(a , b) =a * b یک ترکیب دوتاییِ القاء شده توسط *، روی A نامیده می‌شود.

فرض کنیم G یک گروه بوده و A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از G باشد. ممکن است این امر رُخ دهد که A نسبت به ترکیب دوتاییِ تعریف شده روی G بسته بوده و خودِ A تحت القایِ این ترکیب یک گروه باشد. در چنین صورتی اغلب یک حالت مناسب رخ می‌دهد. این موضوع ما را به مفهوم زیر هدایت می‌کند.

Definition 2.14. Subgroup.

Let G be a group under a binary composition $*$ and let H be a non-void subset of G. Then H is called a *subgroup* of G if it satisfies the following:

(1) H is closed with respect to $*$. (Closure Property).

(2) H is a group under the binary composition of H induced by $*$.

Let e be the identity of a group G. Then trivially G and $\{e\}$ are subgroups of G. These subgroups are called *Improper subgroups* of G. A subgroup H of a group G, is called a *Proper subgroup* if it is different from G as well as from $\{e\}$.

If G is a group and H is a subgroup of G, for the sake of convenience we shall usually denote the induced binary composition of H by the same symbol which denotes the binary composition on G.

تعریف ۲.۱۴. زیرگروه

فرض کنیم G تحت ترکیبِ دوتاییِ * یک گروه بوده و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این صورت H را یک زیرگروه G می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) H نسبت به ترکیب دوتاییِ * بسته باشد (خاصیت بسته بودن).

(۲) H تحت ترکیب دوتاییِ القاء شده توسط * یک گروه باشد.

فرض کنیم e عنصر همانیِ (عضو خنثی) گروه G باشد. در این صورت بدیهی است که G و {e} زیرگروههای G می‌باشند. این زیرگروهها زیرگروههای ناسَرِهِ G نامیده می‌شوند. زیرگروهی چون H از گروه G زیرگروه سَره نامیده می‌شود، هرگاه با G و {e} اختلاف داشته باشد (H ≠ e , H ≠ G).

اگر G یک گروه و H زیرگروهِ G باشد، برای راحتی، جهت نمایش ترکیبِ دوتایی H از نمادی شبیه به نمادی که برای نمایش ترکیب دوتایی روی G به‌کار می‌رود، استفاده می‌کنیم.

Examples of Subgroups

EXAMPLE 16. The set E of all even integers is a subgroup of additive group $\mathbf{Z}$.

EXAMPLE 17. The set $\mathbf{Z}$ is a subgroup of the additive group $\mathbf{Q}$.

EXAMPLE 18. Let $G=\{1, -1, i, -i\}$, $H=\{1, -1\}$ where $i^2=-1$.

Then G is a group under usual multiplication of complex numbers and H is a subgroup of G.

مثالهایی از زیرگروهها

مثال ۱۶ . مجموعهٔ E شامل همهٔ اعداد صحیحِ زوج یک زیرگروه از گروه جمعیِ Z است.

مثال ۱۷ . مجموعهٔ Z یک زیرگروه از گروه جمعی Q است.

مثال ۱۸ . فرض کنیم $G = \{۱ , -۱, i , -i\}$ و $H = \{۱ , -۱\}$ که $i^۲ = -۱$.

در این صورت G تحت ضربِ معمولیِ اعداد مختلط یک گروه بوده و H زیرگروهی از G می‌باشد.

EXAMPLE 19. Let G be the multiplicative group of all non-singular 2×2 matrices over complex numbers. Let H be the set of the following eight matrices

$$\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}0 & i\\i & 0\end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

Clearly $H \subseteq G$. As was claimed in Example 8, H is a group under matrix mul iplication. Hence H is a subgroup of G.

مثال ۱۹ . فرض کنیم G گروه ضربیِ شامل همهٔ ماتریسهای نامنفرد ۲ × ۲ روی اعداد مختلط باشد. فرض کنیم H مجموعهٔ شاملِ هشت ماتریسِ زیر:

$$\pm\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}i & ۰\\۰ & -i\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}۰ & i\\i & ۰\end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix}۰ & ۱\\-۱ & ۰\end{bmatrix}$$

واضح است که $H \subseteq G$. برطبق آنچه در مثال ۸ ثابت شد، H تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. بنابراین H یک زیرگروه G است.

EXAMPLE 20. The set Q^+ of all positive rational numbers is a subgroup of the multiplicative group Q^* of all non-zero rational numbers.

From the fact that a group has only one idempotent [Prob. 1 § 2], and the inverse of any element of G is unique, the following is immediate.

مثال ۲۰ . مجموعهٔ Q^+ شامل همهٔ اعداد گویای مثبت یک زیرگروهِ ضربیِ گروه Q^* است (Q^* شاملِ همهٔ اعداد گویای ناصفر است).

با توجه به این واقعیت که یک گروه فقط دارای یک عنصر همانی بوده و وارون هر عضو از G منحصر به فرد است، بلافاصله می‌توان لِم زیر را نتیجه گرفت.

Lemma 2.15. *If G is a group and H is a subgroup of G, then*
(1) e, the identity of G, is also the identity of H,
(2) for each $a \in H$, $a^{-1} \in H$.■

We now prove a theorem which supplies us a criterion to check whether a given subset of a group is a subgroup or not.

لِم ۲.۱۵ . اگر G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد، در این صورت (۱) e، عضو همانیِ G، عضو همانیِ H نیز می‌باشد،

(۲) برای هر $a \in H$، $a^{-1} \in H$. ■

حال قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که توسط آن محکی به‌دست می‌آوریم برای چک کردن این که زیرمجموعه‌ای از یک گروه زیر گروه آن می‌باشد یا خیر.

Theorem 2.16. *A non-void subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.*

Proof: Let H be a subgroup of G and let $a, b \in H$. By lemma 2.15, (2), $b^{-1} \in H$. Consequently by the closure property of H, $ab^{-1} \in H$.

Conversely let H be a non-void subset of G such that for all $a, b \in H$; $ab^{-1} \in H$.

(I) Since H is non-void, there exists $a \in H$.
Thus $aa^{-1} \in H$ *i.e.*, $e \in H$. So H contains identity.
(II) Let $b \in H$. As $e \in H$, eb^{-1} *i.e.*, $b^{-1} \in H$.
Hence $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$.
(III) $a, b \in H \Rightarrow a$ and $b^{-1} \in H$ by (II)

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$$

i.e. $\quad ab \in H$, since $(b^{-1})^{-1}=b$.

Consequently H is a closed subset of G.

Trivially the induced binary composition on H is associative because the binary composition on G is associative. Hence H is a subgroup of G. ■

قضیهٔ ۲.۱۶ . زیرمجموعه‌ای ناتهی از یک گروه مانند G زیرگروهی از G است اگر و فقط اگر $a,b \in H \Leftarrow ab^{-۱} \in H$.

اثبات: فرض کنیم H زیرگروه G بوده و $a,b \in H$. با توجه به لِم ۲.۱۵ ، (۲) ، داریم، $b^{-۱}\in H$. بلافاصله با توجه به خاصیت بسته بودنِ H نتیجه می‌شود، $ab^{-۱}\in H$.

برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعهٔ ناتهی از G بوده به‌طوری که برای هر $a,b \in H \Leftarrow ab^{-۱} \in H$.

(I) چون H ناتهی است، عضوی چون $a \in H$ موجود است. بنابراین $aa^{-۱} \in H$ یعنی، $e \in H$. بنابراین H شامل عضو همانی می‌باشد.

(II) فرض کنیم $b \in H$. از آنجایی که $e \in H$، $eb^{-۱} \in H$ یعنی، $b^{-۱}\in H$.

بنابراین $b^{-1} \in H \Leftarrow b \in H$.

(III) $a,b \in H \Leftarrow a,b^{-1} \in H$ (با توجه به (II))

$$\Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$$

یعنی $ab \in H$، زیرا $(b^{-1})^{-1}=b$.

بنابراین H زیرمجموعه‌ای بسته از G می‌باشد.

بدیهی است ترکیب دوتایی القاء شده روی H شرکت‌پذیر است زیرا ترکیب دوتایی روی G شرکت‌پذیر است. پس H یک زیرگروه G است. ■

Theorem 2.17. Let G be a group and H be a finite non-void subset of G. Then H is a subgroup of G if and only if ab ∈ H for all a, b ∈ H.

Proof: If H is a subgroup of G then by definition

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Conversely let H be a finite non-void subset of G such that

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

Thus H is finite semi-group. Further the cancellation laws hold in H since the same hold in G. Hence H is a subgroup (Theorem 2.6). ■

قضیهٔ ۲.۱۷. فرض کنیم G یک گروه بوده و H یک زیرمجموعهٔ ناتهی متناهی از G باشد. در این صورت H یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر برای هر $a,b \in H$، $ab \in H$.

اثبات: اگر H یک زیرگروه G باشد در این صورت طبق تعریف

$$a,b \in H \Rightarrow ab \in H$$

برعکس فرض کنیم H یک زیرمجموعهٔ ناتهی متناهی از G بوده به قسمی که $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$.

در این صورت H یک نیم‌گروه متناهی می‌باشد. به علاوه چون قانون حذف در G برقرار است لذا در H نیز برقرار می‌باشد. بنابراین H یک زیرگروه است (با توجه به قضیهٔ ۲.۶). ■

ادب ریاضی

همسازی درونی به این معنی که بر هر چه می‌خواهی بناکن اما در این صورت باید آداب و ترتیب‌دان باشی و دیگر نمی‌توانی به خواست دلت عمل کنی و هرچه دل تنگت می‌خواهد بگویی. کار حساب و کتاب دارد و قدر و اندازه، و به این ترتیب به منطق می‌رسیم و نطق پا به میان می‌گذارد و سکه به نام کیمیای سخن زده می‌شود.

پس ریاضیات هم علم است و هم هنر. علم بدین معنی که کشف می‌کند و هنر بدان مفهوم که می‌آفریند. نیز علم به این معنی که آداب و تربیت دارد و هنر به آن مفهوم که زیباست، و در این صورت هم زبان می‌خواهد و هم منطقی در آن زبان، و نیاز به منطقی که این دو را توأمان داشته باشد و به یک کرشمه دو کار کند، پیدا می‌کند. و به این ترتیب منطق نمادین یا ریاضی پا به عرصهٔ ظهور می‌گذارد و در زمرهٔ حضور جای می‌گیرد و چنان می‌شود که به قول راسل و وایتهد، در نهایت با ریاضیات یکی می‌شود و در واقع ریاضیات به صورت شاخه‌ای از منطق روی می‌نماید.

از مقاله سامان ریاضی:

از مجلهٔ مجموعه مقالات و مسائل ریاضی

حل یک مسأله به‌روشهای جبری، هندسی، مثلثاتی، هندسه تحلیلی، و آنالیز

● دکتر احمد شرف‌الدین

در سطور آینده، یک مسألهٔ ریاضی را به چند روش با بهره‌گیری از مفاهیم جبر، هندسه، مثلثات، هندسهٔ تحلیلی، و آنالیز حل می‌کنیم. این شیوه حل، علاوه بر آن‌که جاذبه و زیبایی حل را بیشتر می‌کند چنین القا می‌کند که نباید تصور کنیم یک مسألهٔ معین، منحصراً به مبحثی خاص مربوط است.

مسأله. ثابت کنید مجموع هر عدد مثبت و عکس آن حداقل برابر (۲) است

باید ثابت کرد به‌ازای هر عدد $x > 0$ رابطه زیر برقرار است:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۱. حلهای جبری. در سطور آینده شش حل جبری برای اثبات رابطهٔ بالا ارائه می‌دهیم.

۱.۱. حل جبری یک. معادلهٔ زیر را که در آن m یک پارامتر است در نظر می‌گیریم:

$$x + \frac{1}{x} = m \qquad (1)$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از پارامتر m، معادله (۱) دارای جوابهای حقیقی است. معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - mx + 1 = 0 \qquad (2)$$

شرط وجود جواب چنین است:

$$\Delta = m^2 - 4 \geq 0$$

جواب این نامعادله چنین است: $|m| \geq 2$. پس اگر در عبارت $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ به‌جای x عددی مثبت بگذاریم مقدار حاصل حداقل برابر (۲) می‌شود.

۲.۱. حل جبری دوم. به‌ازای هر عدد حقیقی x چنین داریم:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

و یا:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x \qquad (3)$$

دو طرف نامعادله (۳) را بر x بخش می‌کنیم. با توجه به این‌که بنا به‌فرض مسأله، مقدار x مثبت است حاصل می‌شود:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

۳.۱. حل جبری سوم. به‌ازای مقادیر $x \geq 2$ بالبداهه چنین داریم:

$$x + \frac{1}{x} > 2$$

پس کافی است ثابت کنیم که به‌ازای $0 < x < 2$ نامساوی $x + \frac{1}{x} \geq 2$ مسلّم است. می‌گوییم هر عدد x متعلق به‌فاصلهٔ باز (۲ و ۰) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x = 1 - y \quad \text{و} \quad |y| < 1$$

وقتی x در فاصلهٔ (۲ و ۰) تغییر می‌کند چنین داریم:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + \frac{y^2}{1-y}$$

پس به‌ازای $0 < x < 2$ چنین داریم:

$$x + \frac{1}{x} = (1-y) + \left(1 + y + \frac{y^2}{1-y}\right) = 2 + \frac{y^2}{1-y}$$

اما مقدار کسر $\frac{y^2}{1-y}$ به‌ازای $y = 0$ برابر صفر است و به‌ازای

$1 > |y| > 0$ مثبت است پس حداقل مقدار تابع $x + \frac{1}{x}$ برابر ۲ است. (یادآور می‌شویم که $x > 0$ است.)

۴.۱. حل جبری چهارم. می‌گوییم دو تابع مذکور در زیر دارای یک مینیمم‌اند. (یادآور می‌شویم که $x > 0$ است.)

$$x + \frac{1}{x} \qquad (4)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \qquad (5)$$

زیرا هر یک از این دو تابع مجموع یک متغیر مثبت و عکس آن را نشان می‌دهد.

حال رابطهٔ مسلّم زیر را می‌نویسیم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad (6)$$

اگر مقدار مینیمم هر یک از دو تابع مذکور در شماره‌های (۴) و (۵) را m بنامیم از رابطهٔ (۶) نتیجه می‌شود:

$$m^2 = m + 2$$

جواب مثبت معادله اخیرالذکر ۲ است که مقدار مینیمم تابع $x + \frac{1}{x}$ است.

۵.۱. حل جبری پنجم. نامساوی مشهور زیر را به‌کار می‌گیریم:

$$\frac{u + v}{2} \geq \sqrt{u . v} \qquad (7)$$

یعنی میانگین حسابی دو عدد مثبت بزرگتر یا مساوی است با میانگین هندسی آن دو عدد. اگر در رابطهٔ (۷) به‌جای u و v به‌ترتیب x و $\frac{1}{x}$ بگذاریم، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x . \frac{1}{x}} = 1 \qquad (8)$$

از رابطهٔ (۸)، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \qquad (9)$$

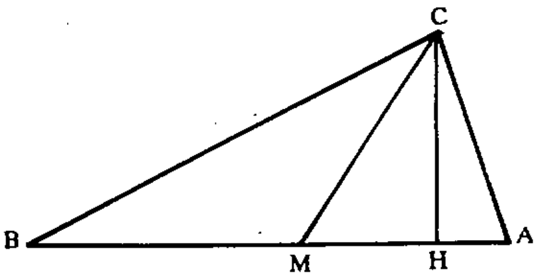
۶.۱. حل جبری ششم. از قضیّه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیّه. هرگاه حاصل‌ضرب دو تابع مثبت مقداری ثابت باشد، آنگاه مجموع آن دو تابع هنگامی مینیمم خود را احراز می‌کند که آن دو تابع مساوی شوند.

اکنون می‌گوییم که حاصل ضرب دو تابع x و $\frac{1}{x}$ ثابت است $\left(x . \frac{1}{x} = 1\right)$ پس مجموع آن دو تابع یعنی تابع $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ وقتی مینیمم خود را احراز می‌کند که $x = \frac{1}{x}$ باشد. جواب مثبت معادله $x = \frac{1}{x}$ برابر یک است و لذا مینیمم تابع $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ برابر ۲ است.

۲. حلّ هندسی. به کمک هندسه می‌توان حلهای متعددی برای مسأله مورد بحث ارائه کرد. در سطور زیر فقط به‌ذکر دو حل اکتفا می‌کنیم.

۱.۲. حلّ اوّل. پاره خط HA را به طول دلخواه x در نظر می‌گیریم و عمود HC را بر خط HA رسم می‌کنیم و بر آن طول HC را برابر یک اختیار می‌کنیم و سپس عمود CB را بر خط CA رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با خط HA، نقطهٔ B می‌نامیم.



در مثلث قائم‌الزاویه ABC چنین داریم:

$$\overline{HC}^2 = \overline{HA} . \overline{HB} \qquad (10)$$

از رابطهٔ (۱۰) با توجه به این‌که $\overline{HA} = x$ و $\overline{HC} = 1$ نتیجه می‌شود:

$$\overline{HB} = \frac{1}{x}$$

و بنابراین:

$$\overline{AB} = \overline{HA} + \overline{HB} = x + \frac{1}{x} \qquad (11)$$

اکنون میانه CM را رسم می‌کنیم و با توجه به این که در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه واردْ بر وتر نصف وتر است چنین می‌نویسیم:

$$\overline{AB} = 2\,\overline{CM} \qquad (12)$$

همچنین رابطهٔ مسلّم زیر را می‌نویسیم:

$$\overline{CM} \geq \overline{CH} \qquad (13)$$

زیرا خط CH بر خط AB عمود است و خط CM نسبت به خط AB مایل است و می‌دانیم که طول عمود کوچکتر از طول مایل است. تساوی دو پاره‌خط CM و CH موقعی برقرار می‌شود که $\overline{CA} = \overline{CB}$ باشد، در این صورت مثلث CAB متساوی الساقین می‌شود و میانه CM بر ارتفاع CH منطبق می‌شود. چون $\overline{CH} = 1$ است پس از رابطهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود که $\overline{CM} \geq 1$ و سپس از رابطهٔ (۱۲) نتیجه

می‌شود که $\overline{AB} \geq ۲$. بنابراین از رابطهٔ (۱۱) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

۲.۲. حل هندسی دوم. قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{a}{b}$$

پس:

$$\frac{۱}{x} = \frac{b}{a}$$

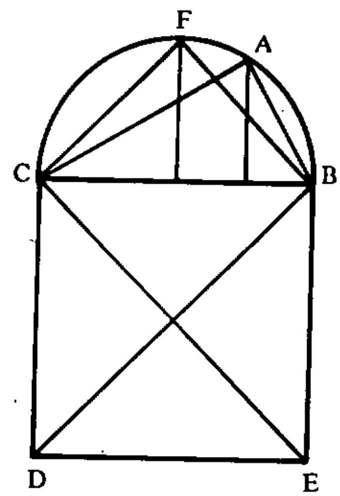
و بنابراین

$$x + \frac{۱}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^۲ + b^۲}{ab}$$

حال ثابت می‌کنیم هنگامی‌که $\frac{a}{b} > ۰$ است یعنی؛ $ab > ۰$ است چنین داریم:

$$\frac{a^۲ + b^۲}{ab} \geq ۲ \qquad (۱۴)$$

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با معلومات $A = \frac{\pi}{۲}$، $\overline{AB} = a$، و $\overline{AC} = b$ می‌سازیم.



مربع BCDE را روی وتر BC می‌سازیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس مساحت مربع BCDE که آن‌را S می‌نامیم چنین است:

$$S = a^۲ + b^۲$$

از طرفی مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC که آن‌را $S_۱$ می‌نامیم چنین است:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲} ab$$

برای اثبات درستی رابطهٔ (۱۴) کافی است رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$S \geq ۴S_۱ \qquad (۱۵)$$

اگر نقطهٔ F وسط نیمدایره به‌قطر BC باشد چنین داریم:

(۱۶) مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه‌OBC = مساحت‌مثلث‌قائم‌الزاویه BCF

اکنون حکم می‌کنیم که مساحت مثلث FBC بزرگتر یا مساوی مساحت مثلث ABC است زیرا این دو مثلث دارای قاعده مشترک BC اند ولی بین دو ارتفاع FM و AH از دو مثلث مفروض رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{FM} \geq \overline{AH}$$

زیرا:

$$\overline{FM} = \overline{MA} \geq \overline{AH}$$

تساوی $\overline{AH}$ و $\overline{FM}$ هنگامی برقرار می‌شود که نقطه A بر نقطه F منطبق شود. از تساوی (۱۶) نتیجه می‌شود که

(۱۷) (مساحت مثلث ABC) ۴ ≤ مساحت مربع BCDF

رابطهٔ (۱۷) همان رابطهٔ (۱۵) است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳. حل مثلثاتی. زاویه α را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم:

$$x = \operatorname{tg} \alpha$$

پس:

$$x + \frac{۱}{x} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$$

عبارت سمت راست تساوی بالا را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{۱}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

مختصر آن‌که

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

پس به‌جای آن‌که مینیمم تابع $x+\frac{۱}{x}$ را حساب کنیم، مینیمم تابع $\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ را حساب می‌کنیم. اما تابع $\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$ هنگامی مینیمم است که مخرج آن یعنی؛ $\sin ۲\alpha$ ماکزیمم باشد و این به ازای $۲\alpha = \frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود، یعنی؛ به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۴}$. پس تابع: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)$ به‌ازای $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ مینیمم است و چون $\operatorname{tg} \frac{\pi}{۴} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{۴} = ۱$ پس مینیمم تابع $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$ برابر (۲) است. بنابراین مینیمم تابع $(x + \frac{۱}{x})$ برابر (۲) است.

۴. حل با هندسه تحلیلی. منحنی C نمایش هندسی تابع

$$y = \frac{۱}{x} \quad x > ۰$$

را در نظر می‌گیریم. نقطه M به طول یک را روی منحنی C در نظر می‌گیریم. چنین داریم:

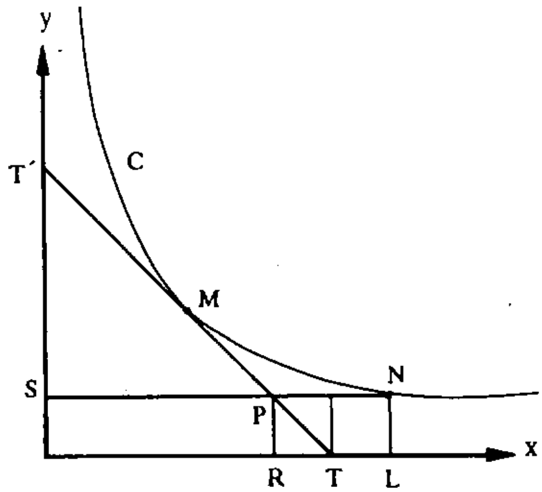
$$x_M + \frac{۱}{x_M} = ۲ \qquad (۱۸)$$

اکنون نقطهٔ دلخواه $N \neq M$ را روی منحنی C اختیار می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که رابطهٔ زیر مسلّم است:

$$x_N + \frac{۱}{x_N} > ۲$$

و نتیجه می‌گیریم که به ازای جمیع مقادیر $x > ۰$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$



معادلهٔ خط TT' مماس بر منحنی C در نقطهٔ M چنین است:

$$x + y = ۲$$

پس مختصات هر نقطه $P\ (x_p, x_p)$ از خط TT' در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x_p + y_p = ۲$$

تصاویر نقطهٔ N را روی دو محور ox و oy به ترتیب L و S می‌نامیم و نقطهٔ برخورد خط SN را با خط TT' به P نشان می‌دهیم و همچنین تصویر نقطهٔ P بر محور ox را R می‌نامیم. رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$x_N + y_N = x_N + \frac{۱}{x_N} = \overline{OL} + \overline{OS}$$

اما

$$\overline{OL} = \overline{OR} + \overline{RL}$$

و

$$\overline{L_N} = \overline{RP} = \overline{OS}$$

پس:

$$\overline{OL} + \overline{OS} > \overline{SP} + \overline{RP}$$

از طرفی

$$\overline{SP} + \overline{RP} = x_p + y_p = ۲$$

پس:

$$\overline{OL} + \overline{OS} > ۲$$

با توجه به رابطهٔ اخیرالذکر و رابطهٔ (۱۸)، نتیجه می‌شود که به ازای $x > ۰$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

۵. حل با آنالیز. در سطر زیر با به‌کارگیری مشتق مسألهٔ مورد بحث را حل می‌کنیم. به کمک آنالیز راه حلهای دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که از حوصله این مقاله خارج است.

مشتق تابع:

$$f(x) = x + \frac{۱}{x}$$

چنین است:

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲}$$

مشتق به‌ازای $x = ۱$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. به‌ازای $x = ۱$ تابع $f(x)$ مینیمم خود را که (۲) است، به‌دست می‌آورد.

تفریح اندیشه ۴

به چند طریق می‌توان چهار کلیدقطع و وصل را پهلوی هم قرار داد اگر هیچ دو کلید مجاوری نتواند خاموش باشد؟

در صورتی x و y دو رقم متفاوت باشند و z عدد طبیعی دلخواهی باشد، به ازای چند ترکیب x و y عدد $x + y(۱۰^z)$ می‌تواند بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

جواب در صفحهٔ ۳۹

بردارها

(قسمت دوم)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

◄ اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور

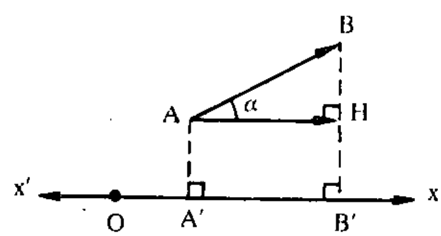
بردار $\overrightarrow{AB}$ و محور $x'ox$ واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم، $\overrightarrow{A'B'}$ تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ روی $x'ox$ را مشخص می‌کنیم. اگر زاویهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ با محور $x'ox$ برابر α باشد، از A پاره‌خط AH را موازی محور رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$|\cos\alpha| = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB\,|\cos\alpha|$$

و با توجه به رعایت جهت خواهیم داشت:

$$\overline{A'B'} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$$

یعنی؛ اندازهٔ جبری تصویر یک بردار بر یک محور برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ بردار در کسینوس زاویهٔ بین بردار و محور.



◄ حالات خاص

۱. $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \overline{A'B'} = |\overrightarrow{AB}|$

۲. اگر $0 \leq \alpha < 90^\circ$ باشد جهت $\overrightarrow{A'B'}$ با جهت مثبت محور یکی خواهد بود و در نتیجه اندازهٔ جبری $\overrightarrow{A'B'}$ مثبت خواهد بود و هنگامی‌که $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ باشد، جهت $\overrightarrow{A'B'}$ با جهت مثبت محور یکی نیست و $A'B'$ منفی خواهد بود.

۳. $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos\alpha = \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \overline{A'B'} = 0$

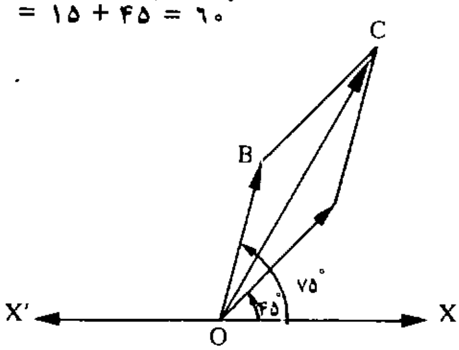
مثال۱۲: دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به‌طولهای مساوی بامحور OX به‌ترتیب زوایای 45° و 75° می‌سازند. زاویهٔ بردار $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ با محور OX چند درجه است؟

حل: اگر $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ باشد، چون $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ است، پس چهار ضلعی OACB لوزی است و قطر $\overrightarrow{OC}$ آن مجموع هندسی بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است، و نیمساز زاویهٔ $B\hat{O}A$ نیز می‌باشد. اما داریم:

$$B\hat{O}A = B\hat{O}X - A\hat{O}X = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

پس $C\hat{O}A = 15^\circ$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$C\hat{O}X = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

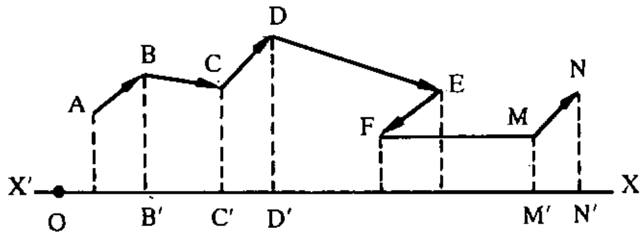


◄ تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور

هرگاه $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + ... + \overrightarrow{MN}$ و تصویر نقاط A و B و C و D و E و ... و M و N بر محور X'OX را A' و B' و C' و D' و E' و ... و M' و N' بنامیم بین اندازه‌های جبری تصاویر بردارهای فوق بر محور X'OX رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{A'N'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + ... + \overline{M'N'}$$

بنابراین اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چند بردار بر یک محور، برابر است با جمع جبری تصاویر آن بردارها بر آن محور.



مثال ۱۳: $|\vec{a}| = ۲\sqrt{۳}$ و $|\vec{b}| = ۳\sqrt{۲}$ و $|\vec{c}| = ۵$ و $|\vec{d}| = \sqrt{۳}$ و زوایای آنها با محور X'OX به‌ترتیب °۳۰ و °۴۵ و °۹۰ و °۱۵۰ است.

۱. بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را به مبدأ نقطهٔ O رسم و مجموع آنها را بیابید.

۲. اندازهٔ جبری تصویر هر بردار را بر محور X'OX تعیین کنید.

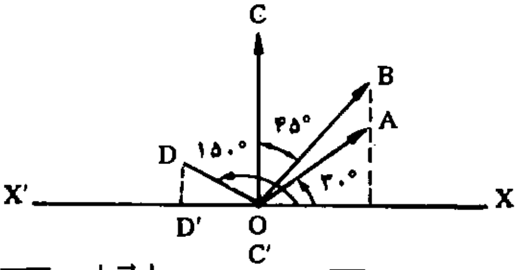
۳. اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی این بردارها بر محور X'OX را بیابید.

حل: بردارهای $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ و $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ را با شرایط مشخص شده رسم می‌کنیم و تصاویر نقاط A و B و C و D را روی محور X'OX به‌ترتیب A' و B' و C' و D' می‌نامیم. در این‌صورت خواهیم داشت: (منظور از $\bar{a}$، اندازهٔ جبریِ تصویر بردار $\vec{a}$ روی محور X'OX است.)

$$\bar{a} = \overline{OA'} = |\vec{a}| \cos ۳۰° = ۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳$$

$$\bar{b} = \overline{OB'} = |\vec{b}| \cos ۴۵° = ۳\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳$$

$$\bar{c} = \overline{OC'} = |\vec{c}| \cos ۹۰° = ۵ \times ۰ = ۰$$



$$\bar{d} = \overline{OD'} = |\vec{d}| \cos ۱۵۰° = \sqrt{۳} \cos (۱۸۰° - ۳۰°)$$

$$= -\sqrt{۳} \cos ۳۰° = -\frac{۳}{۲}$$

طبق قضیهٔ اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{R}$ یعنی؛ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{R}$ باشد، داریم:

$$\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} + \overline{OD'} = \overline{R}$$

پس می‌توان نوشت:

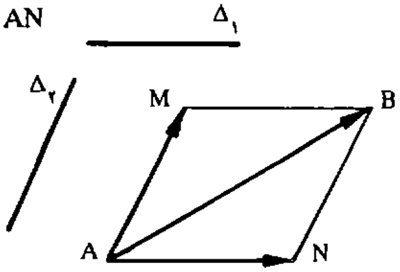
$$\overline{R} = ۳ + ۳ + ۰ - \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$ (اندازهٔ جبری تصویر بردار برآیند)

تذکر: اندازهٔ جبری یک بردار وقتی معنی دارد که بردار را هم‌راستای یک محور در نظر بگیریم. بنابراین اگر بردار $\overrightarrow{AB}$ هم‌راستای محور X'OX باشد آنگاه اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را با علامت $\overline{AB}$ نشان می‌دهیم.

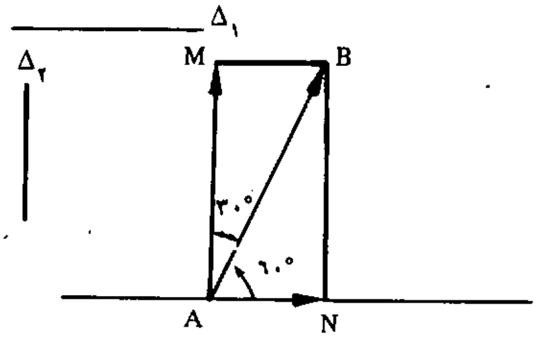
◄ تجزیه یک بردار به دو بردار با راستاهای معین

برای تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ به دو مؤلّفه در راستاهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ از A و B خطوطی به موازات این دو امتداد رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع AMBN به‌وجود آید. بردارهای $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ را مؤلّفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ در راستاهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ می‌نامند.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$



مثال ۱۴: بردار $\overrightarrow{AB}$ به‌طول ۵ سانتی‌متر را به دو مؤلفه در راستاهای عمود بر هم Δ_1 و Δ_2 تجزیه کنید در صورتی‌که راستای Δ_2 با AB زاویهٔ °۳۰ بسازد، آنگاه اندازهٔ مؤلّفه‌ها را از طریق محاسبه پیدا کنید.



حل: از نقاط B و A خطوطی موازی Δ_1 و Δ_2 رسم می‌کنیم تا مستطیل AMBN به‌وجود آید. $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ مؤلّفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ در دو راستای Δ_1 و Δ_2 می‌باشند، زیرا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

برای محاسبهٔ اندازهٔ این مؤلّفه‌ها در مثلث قائم‌الزاویهٔ ANB داریم:

$$\left|\vec{AN}\right| = \left|\vec{AB}\right| \cos 60^\circ = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AN}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\left|\vec{NB}\right| = \left|\vec{AM}\right| = \left|\vec{AB}\right| \cos 30^\circ$$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\vec{AM}\right| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

در این‌جا برای آشنایی با مسائل بردارها مسائل متنوعی را همراه با حلّ آنان ارائه می‌دهیم.

◄ مسائل با حل:

۱. از نقطهٔ O مرکز مربع ABCD (مطابق شکل زیر) به رأسهای آن وصل می‌کنیم. نشان دهید که چرا مجموع چهار بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ برابر بردار صفر است.

حل: داریم:

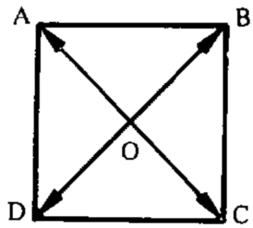
$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{O} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{O} \qquad (2)$$

با استفاده از تساویهای (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

$$=\vec{O}+\vec{O}=\vec{O}$$



۲. به‌طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$

حل: در متوازی‌الاضلاع ABCD می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} - (-\vec{b})$$

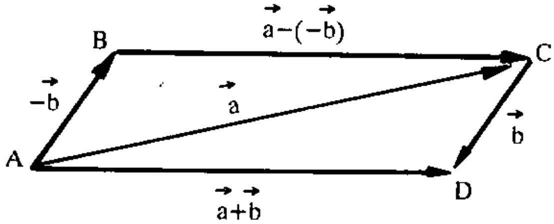
و

$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

هَمچنین داریم: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

پس رابطهٔ مطلوب نتیجه می‌شود:

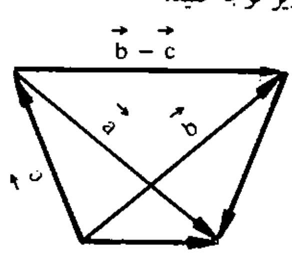
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$



تمرین: به‌طریق هندسی نشان دهید که:

$$\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$$

راهنمایی: به شکل زیر توجه کنید:



۳. به طریقهٔ برداری نشان دهید هرگاه خطی اوساط دو ضلع یک مثلث را به‌هم وصل کند، موازی با ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

حل: در مثلث ABC داریم:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \qquad (1)$$

طرفین این تساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{MN}$$

ولی طبق فرض داریم:

$$2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \quad \text{و} \quad 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$$

بنابراین از تساوی (۱) تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} \qquad (۲)$$

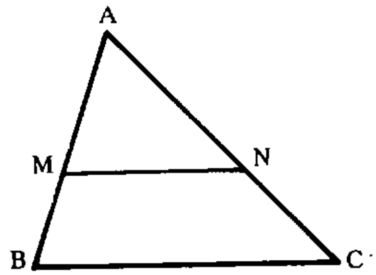
از طرفی در مثلث ABC داریم:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ روابط (۲) و (۳) رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

باتوجه به تعریف ضرب یک عدد حقیقی در یک بردار نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{MN}$ موازی $\overrightarrow{BC}$ بوده و طول آن نصف BC است.

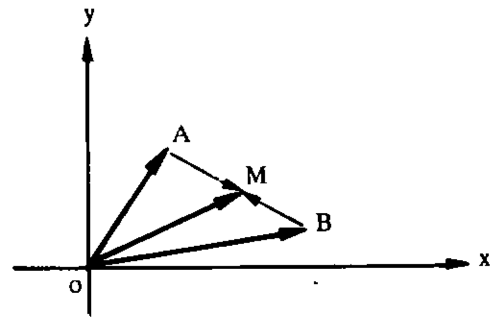


۴. در شکل زیر فرض می‌کنیم:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{m}{n} \qquad \text{(m و n اعداد حقیقی می‌باشند)}$$

نشان دهید که:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OM}$$



حل: در مثلث OAM داریم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث OBM می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} \qquad (۲)$$

طرفین تساویهای (۱) و (۲) را به‌ترتیب در n و m ضرب می‌کنیم:

$$n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{OM} \quad \text{و} \quad m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{OM}$$

در این‌جا دو تساوی بالا را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{BM} = (m+n)\overrightarrow{OM} \qquad (۳)$$

اما طبق فرض داریم:

$$n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB} \quad \text{یا،} \quad n\overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{MB} = \vec{O}$$

و با توجه به $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{BM}$، می‌توان نوشت:

$$n\overrightarrow{AM} + m\overrightarrow{BM} = \vec{O} \qquad (۴)$$

اگر در تساوی (۳) رابطهٔ (۴) را اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OM} \qquad (۵)$$

تساوی (۵) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} - (m+n)\overrightarrow{OM} = \vec{O}$$

تساوی (۵) رابطهٔ مطلوب است که آن را می‌توان به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{n+m}$$

بدیهی است اگر M وسط AB باشد $(m = n)$، خواهیم داشت:

$$m = n : \overrightarrow{OM} = \frac{n\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}}{n+n} = \frac{n(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{2n} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \qquad (۶)$$

تساوی (۶) بردار مکان نقطهٔ وسط یک بردار را بر حسب بردار مکان ابتدا و انتهای آن به‌دست می‌دهد.

تمرین: هرگاه نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC باشد (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

راهنمایی:

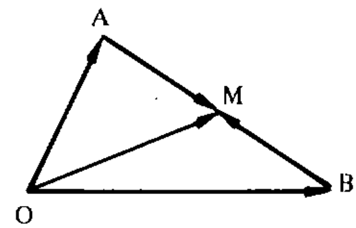
در مثلث OAM داریم: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \quad (۱)$

در مثلث OBM داریم: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$ (۲)

طبق فرض چون M وسط AB است پس داریم:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{O}$ یا $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

از جمع روابط (۱) و (۲) و استفاده از فرض رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.



۵. متوازی‌الاضلاع OABC مفروض است، روی قطر AC نقطهٔ M طوری واقع است که $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

حل: طبق فرض مسأله داریم: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$

پس می‌توان نوشت: $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})$

و یا: $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OM} \Rightarrow 3\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$

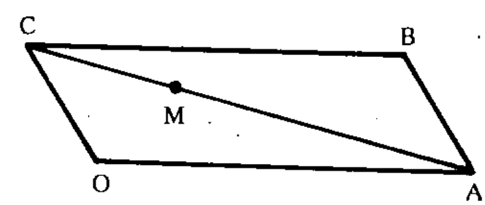
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

اما با توجه به شکل و استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB} \qquad (2)$$

بنابراین با اثر دادن رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{3}$$



۶. در تساوی برداری زیر مقدار K را چنان تعیین کنید که نقاط P و Q بر هم منطبق شوند:

$$\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QP}=(K-2)\overrightarrow{PB}$$

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QP}=(K-2)\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QP}=K\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QP}+2\overrightarrow{PB}=K\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+2(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PB})=K\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QB}=K\overrightarrow{PB}$$

$$3\overrightarrow{QB}=K\overrightarrow{PB}$$

بنابه فرض مسأله نقاط P و Q بر هم منطبق هستند، بنابراین: $\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{PB}$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$3\overrightarrow{PB}=K\overrightarrow{PB} \Longrightarrow K=3$$

۷. هرگاه داشته باشیم: $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$، بردار $\vec{a}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})$ را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{a}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OC}-4\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}-5\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12\\16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-35\\-15\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4+12-35\\7+16-15\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-19\\8\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a}=\begin{bmatrix}-\frac{19}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

تمرین: هرگاه $A(4,5)$ و $B(3,-1)$ و $C(-2,2)$ باشد، مطلوب است تعیین مختصات نقطهٔ X از تساوی زیر:

$$\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BC}$$

راهنمایی:

داریم: $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

و همچنین $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$

با جایگزینی بردارهای ستونی در تساوی داده شده، بردار $\overrightarrow{OX}$ را تعیین کنید.

۸. بردار $3\vec{i}+4\vec{j}$ را به‌صورت ترکیب خطی دو بردار $2\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{i}+2\vec{j}$ بنویسید.

حل: با توجه به فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$3\vec{i}+4\vec{j}=X(2\vec{i}+\vec{j})+Y(\vec{i}+2\vec{j})$$
$$=2X\vec{i}+X\vec{j}+Y\vec{i}+2Y\vec{j}$$
$$=(2X+Y)\vec{i}+(X+2Y)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2X+Y=3\\X+2Y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=\frac{2}{3}\\Y=\frac{5}{3}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$3\vec{i}+4\vec{j}=\frac{2}{3}(2\vec{i}+\vec{j})+\frac{5}{3}(\vec{i}+2\vec{j})$$

تمرین: بردار $7\vec{i}+4\vec{j}$ را به‌صورت ترکیب‌خطی دوبردار $3\vec{i}+4\vec{j}$ و $2\vec{i}+3\vec{j}$ بنویسید.

راهنمایی: $7\vec{i}+4\vec{j}=X(3\vec{i}+4\vec{j})+Y(2\vec{i}+3\vec{j})$

از مقایسهٔ طرفین تساوی، مقادیر X و Y را به‌دست آورید.

۹. سه نقطهٔ A و B و C مفروضند و نقطهٔ M بردار $\overrightarrow{BC}$ را به‌نسبت $\frac{2}{3}$ قطع می‌کند. بردار $\overrightarrow{AM}$ را برحسب دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بنویسید.

حل: داریم:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$
$$3\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BM} \qquad (1)$$

و

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$
$$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CM} \qquad (2)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را نظیر به نظیر جمع می‌کنیم:

$$5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM} \qquad (3)$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

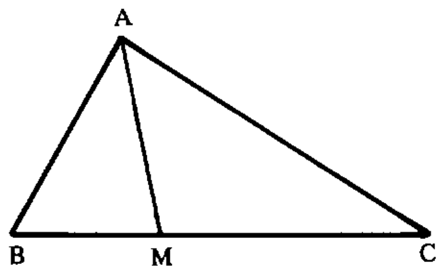
$$\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC} \Rightarrow 3\overrightarrow{BM}-2\overrightarrow{MC}=\vec{O}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}=\vec{O} \qquad (4)$$

با اثر دادن رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$5\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

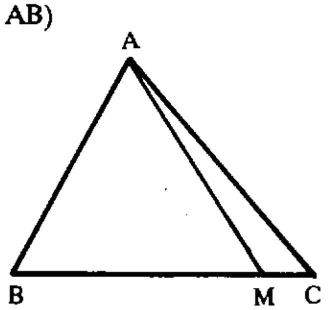
بنابراین $\overrightarrow{AM}$ بر حسب دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ چنین است:

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$$



۱۰. هر گاه M پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{1}{10}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{11}(10\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$$



حل: در مثلث AMC داریم:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM} \Rightarrow 10\overrightarrow{AC}+10\overrightarrow{CM}=10\overrightarrow{AM} \quad (1)$$

و در مثلث ABM داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM} \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$11\overrightarrow{AM}=10\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+10\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM} \qquad (3)$$

اما طبق فرض مسأله داریم:

$$\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{۱}{۱۰} \Longrightarrow ۱۰\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} \Longrightarrow ۱۰\,\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MB} = \vec{O}$$

$$\Longrightarrow ۱۰\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{O} \qquad (۴)$$

با اثر دادن رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۳) داریم:

$$۱۱\overrightarrow{AM} = ۱۰\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۱۱}(۱۰\,\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$$

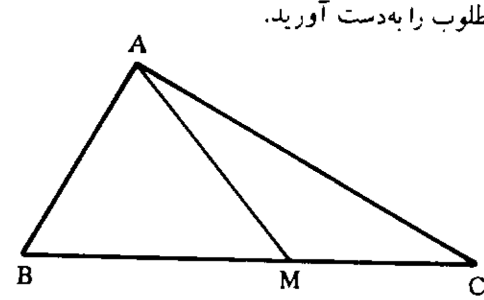
تمرین: هرگاه M پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{۳}{۲}$ تقسیم کند (مطابق شکل) ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۵}(۲\overrightarrow{AB} + ۳\,\overrightarrow{AC})$$

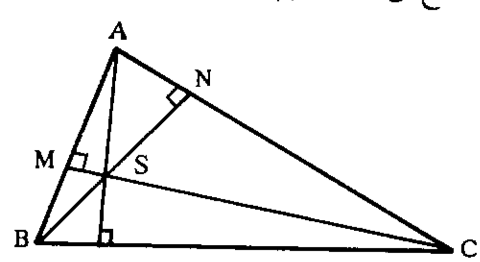
راهنمایی: در مثلث ABM داریم: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} \qquad (۱)$

و در مثلث ACM داریم: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} \qquad (۲)$

طرفین رابطهٔ (۱) را در عدد ۲ و طرفین رابطهٔ (۲) را در عدد ۳ ضرب کنید و سپس رابطه‌های به‌دست آمده را با هم جمع کنید. پس از استفاده از فرض مسأله یعنی؛ $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{۳}{۲}$ یا $۲\overrightarrow{BM}+۳\overrightarrow{CM}=\vec{O}$، رابطهٔ مطلوب را به‌دست آورید.



۱۱. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید که ارتفاعات هر مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (متقارب‌اند).



حل: فرض می‌کنیم ABC مثلثی است که ارتفاعات BN و CM آن در نقطهٔ S همدیگر را قطع می‌کنند. خطی از A و S می‌کشیم که BC را در نقطهٔ H قطع کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که AH بر BC عمود است.

فرض می‌کنیم که $\overrightarrow{CS}$ و $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{AS}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}$ نمایشهای بردارها باشند. چون BN ارتفاع مثلث است، بنابراین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{AC}$ صفر است:

$$\overrightarrow{BS} \,.\, \overrightarrow{AC} = ۰ \qquad (۱)$$

همچنین از این که CM ارتفاع مثلث است، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{CS} \,.\, \overrightarrow{AB} = ۰ \qquad (۲)$$

برای اثبات این‌که AH بر BC عمود است، نشان می‌دهیم:

$$\overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BC} = ۰ \qquad (۳)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \qquad (۴)$$

با استفاده از تساوی (۴) رابطهٔ (۳) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS} \,.\, (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{AC} \qquad (۵)$$

همچنین با توجه به شکل داریم:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} \qquad (٦)$$

و

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} \qquad (۷)$$

با جایگزینی تساویهای (٦) و (۷) در رابطهٔ (۵) داریم:

$$\overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}) \,.\, \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}) \,.\, \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CS} \,.\, \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BS} \,.\, \overrightarrow{AC}$$

با تعویض $\overrightarrow{BA}$ با $-\overrightarrow{AB}$ و استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$\overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} + ۰ + \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} + ۰$$

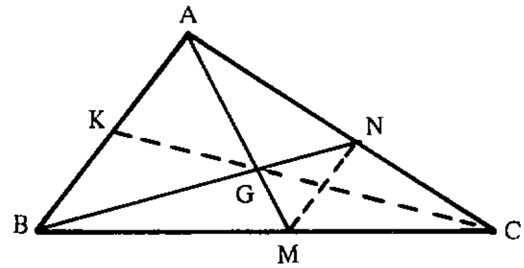
$$= -\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} = ۰$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AS} \,.\, \overrightarrow{BC} = ۰ \qquad (۸)$$

از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود که AH نیز بر BC عمود است. و در نتیجه ارتفاعات BN و CM و AH در یک نقطه برخورد دارند.

۱۲. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای

همدیگر را قطع می‌کنند که فاصلهٔ آن از هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ طول میانهٔ نظیر آن رأس است.



حل: فرض کنیم نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های AM و BN باشد، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{CN} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BA} \qquad (۱)$$

تساوی (۱) را نسبت به مبدأ G می‌توان چنین نوشت:

$$\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})$$

و یا: $$\overrightarrow{GN} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} \qquad (۲)$$

در تساوی (۲) اگر طرف دوم مخالف صفر باشد، برداری در راستای $\overrightarrow{AM}$ است و طرف اوّل برداری در راستای $\overrightarrow{BN}$ خواهد بود و چون این دو بردار متقاطعند، نمی‌توانند برابر باشند. بنابراین لازم است که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{GM} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} = \vec{O} \quad و \quad \overrightarrow{GN} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \vec{O}$$

و یا:

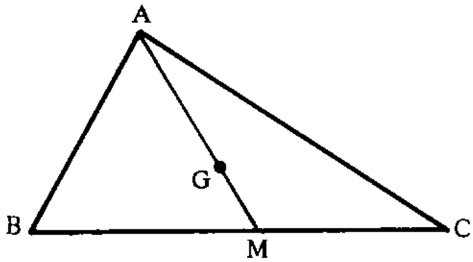
$$\overrightarrow{GM} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AG} \qquad (۳)$$

$$\overrightarrow{GN} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BG} \qquad (۴)$$

تساویهای (۳) و (۴) نشان می‌دهند که میانهٔ AM میانهٔ BN را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند و همین‌طور میانهٔ BN میانهٔ AM را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند. با همین استدلال ثابت می‌شود که میانهٔ CK نیز میانهٔ AM را به نسبت ۲ تقسیم می‌کند و در نتیجه میانهٔ CK نیز از نقطهٔ G می‌گذرد که در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

تمرین ۱ : مثلث ABC مفروض است، اگر G محل تلاقی سه میانهٔ مثلث و O نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ ABC باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{۳}$$



راهنمایی: با توجه به شکل داریم:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} \quad (\text{پاره‌خط AM میانه است})$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$$

$$۲\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (۱)$$

همچنین بنا به خاصیت برخورد میانه داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GM}} = ۲ \Longrightarrow ۳\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + ۲\overrightarrow{OM} \qquad (۲)$$

بین رابطه‌های (۱) و (۲) بردار OM را حذف کنید و رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.

تمرین ۲ : اگر $G_۱$ و $G_۲$ به‌ترتیب مراکز ثقل (محل تلاقی سه میانه) مثلثهای ABC و XYZ باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = ۳\overrightarrow{G_۱G_۲}$$

راهنمایی: با توجه به تمرین (۱) می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OG_۱} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{۳} \qquad (۱)$$

و

$$\overrightarrow{OG_۲} = \frac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ}}{۳} \qquad (۲)$$

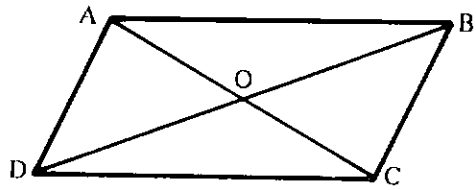
از تفاضل رابطهٔ (۱) و (۲) و با توجه به تساویهای زیر:

$$\overrightarrow{OG_۲} - \overrightarrow{OG_۱} = \overrightarrow{G_۱G_۲} \quad و \quad \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AX}$$

$$\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BY} \quad و \quad \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CZ}$$

رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرید.

۱۳. به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع متقابل با هم برابر و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.



حل: در شکل مقابل چون AB با DC موازی است، داریم:

$$\overrightarrow{AB} = m\,\overrightarrow{DC} \qquad (1)$$

و چون AD با BC موازی است، بنابراین:

$$\overrightarrow{BC} = n\,\overrightarrow{AD} \qquad (2)$$

از جمع تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{DC} + n\,\overrightarrow{AD} \qquad (3)$$

از طرفی با توجه به حاصل جمع بردارها داریم:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \qquad (4)$$

از تساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$m\,\overrightarrow{DC} + n\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

و یا:

$$(m-1)\,\overrightarrow{DC} = (1-n)\,\overrightarrow{AD}$$

اگر فرض کنیم $1 - n \neq 0$ ، در این‌صورت داریم:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{m-1}{1-n}\,\overrightarrow{DC}$$

یعنی، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{DC}$ هم‌راستا می‌باشند، که خلاف فرض است، بنابراین لازم است $1 - n = 0$ ، یعنی، $n = 1$ و چون $\overrightarrow{DC} \neq \vec{O}$ ، پس: $m - 1 = 0$ و در نتیجه $m = 1$ و بنابراین:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

برای اثبات قسمت دوم، اگر O محل تلاقی اقطار باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

و چون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

و یا:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \qquad (5)$$

در تساوی (۵) اگر $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \neq \vec{O}$ ، در این‌صورت طرف دوم تساوی (۵) برداری مخالف صفر در راستای $\overrightarrow{AC}$ و طرف اوّل برداری در راستای $\overrightarrow{BD}$ است و این محال است، زیرا دو راستای AC و $\overrightarrow{BD}$ متقاطعند، پس لازم است داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{O} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$$

و یا:

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DO}$$

که در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

تمرین: به‌طریقهٔ برداری ثابت کنید اضلاع لوزی با هم برابرند و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

راهنمایی: مطابق راه حل مسألهٔ (۱۳) عمل کنید.

۱۴. ثابت کنید، X و Y بر هم منطبق هستند، هرگاه داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XY}$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XY}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{BY}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YB}\\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{XB}
\end{aligned}$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که X و Y بر هم منطبق هستند.

تمرین: ثابت کنید، $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{ZY}$ مساوی‌اند، اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{SP}$$

راهنمایی: از رابطهٔ داده شده نتیجه بگیرید:

$$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{ZY} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ZY}$$

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۱)

ادامهٔ مقالهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، **روش مرزی نیکلسون** [۹]

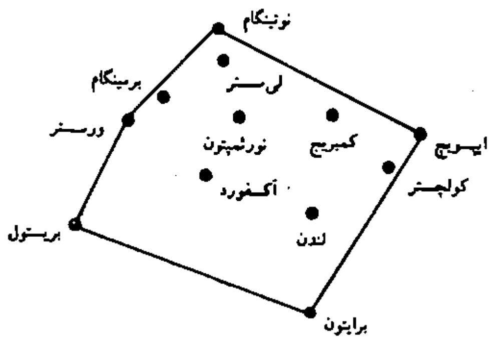
MICROMATH
Summer 1992
David Green
Lought borough University of Technology

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

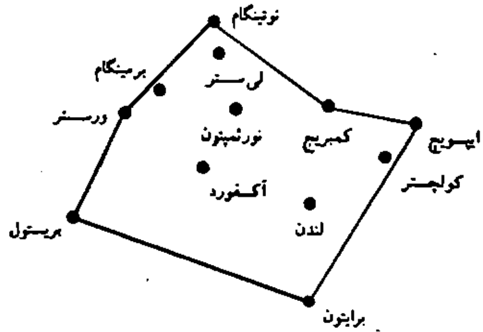
روش ساده اساساً هندسی تی. ای. جی. نیکلسون [۲] به یافتن مسیری داخل شهرهای «مرزی» وابسته است.

دراین‌صورت، هریک از شهرهای «داخلی»، به‌نوبت خود، به مسیر موردبحث چنان افزوده می‌شوند که مسیر مزبور را تاحدامکان کوتاه کنند. بعضی از مرحله‌های حل مسألهٔ ۱۲ شهر را در زیر نشان داده‌ایم:

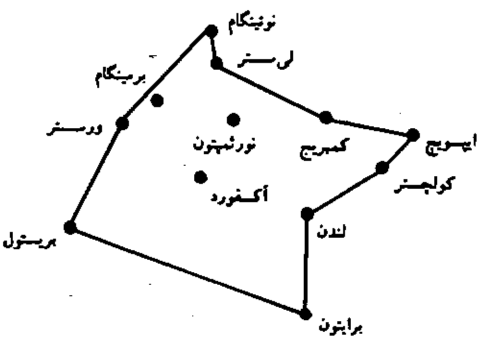
◆ **شهرهای مرزی تشکیل دهندهٔ مسیر اوّلیه**



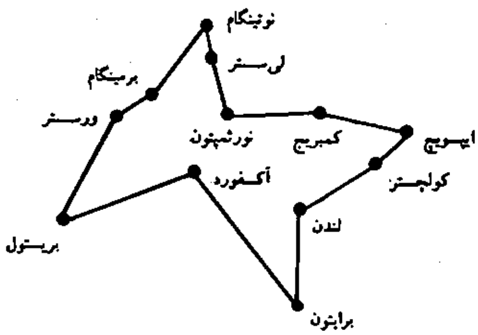
مسیر مرزی برای اضافه کردن اوّلین شهر داخلی (کمبریج) تغییر شکل می‌دهد:



مسیر مرزی برای اضافه کردن شهرهای بیشتر تغییر شکل می‌دهد:



مسیر کامل شده توسط روش مرزی (۵۲۸ مایل)



روش مرزی نیکلسون دریافتن مسیر مرزی (۵۲۸ مایل) این مسأله توفیق یافت، اما این اتفاق غیرمعمول است.

یکی از راه‌های اصلاح روش نیکلسون بررسی به‌نوبت جمیع شهرهای داخلی باقی‌مانده پیش‌از داخل کردن موردی از آنهاست. اما،

این کار، درصورتی که n شهر موجود باشند، روش نیکلسون را از مربع در n بودن (مانند روش اساسی نزدیکترین مکان بعدی) به مکعب در n تغییر می‌دهد، که زحمت محاسبه را برای دستاوردی بسیار اندک افزایش می‌دهد.

◆ **طرح در کلاس درس**

زمانی که نقشه‌ای نشان دهندهٔ (مثلاً) ده شهر ارائه و از کلاس خواسته شود که مسیر بهینه را بیابند می‌توان بحثهای زیادی را مطرح کرد.

می‌توان دانش‌آموزان را به یافتن روشهای مخصوص خودشان تشویق کرد. آنها را می‌توان بادست، بر مجموعه‌های داده‌های کوچک آزمون، و محاسبه و اصلاح کرد. تنها بعد از این کار است که به روشهای پیشنهادی معلم، برای بررسی کردن نیاز است.

در این مورد ممکن است قاعده‌هایی عمومی چون قاعدهٔ زیر ظاهر شوند: «اگر دو مسیر متقاطع شوند آنگاه تبدیل مسافرت با تغییر حلقه‌های مزبور همواره ممکن است». این کار می‌تواند به روش ۲ - بهینهٔ‌لین [۱۰] منجر شود.

روش کار درنظر گرفتن مسیری دلخواه و اصلاح آن با تعویض باهم مکان دو شهر واقع در دنبالهٔ مرتب مسافرتها (یاتعویض دو حلقه) است.

مثالی در دومین شکل این مقاله وجود دارد که، در آن تعویض حلقه‌ها به برسینگام و ورسستر اصلاحی آشکار است.

این روش را می‌توان به روش ۳- بهینه [۱۱] توسیع داد که طبق گزارش دارای نتیجه‌هایی عالی است.

می‌توان نرم‌افزاری راکه بتواند جوابهایی مناسب (اما نه لزوماً بهینه) بیابد در مورد بعضی‌از درسهای زنده تدارک دید. شاید کلاس بتواند کاراتر از کامپیوتر باشد؟ شاید کامپیوتر بتواند راه‌حل مناسبی ارائه دهد که کلاس بتواند آن را اصلاح کند؟ یا برعکس؟ راه‌حل مناسب چیست؟ یا روش مناسب؟ آیا روشی که زیر - بهینه [۱۲] است اصلاً دارای فایده است؟

تبادل بین کامپیوتر و استفاده‌کننده از آن یکی از ویژگیهای طبیعی این مسأله است. به کامپیوتر با روش زیر - بهینه نمی‌توان اعتماد کرد و در این مورد به رهیافتی انتقادی نیاز است که قطعی باشد.

قاعده این است که در مورد تغییرات جزئی در داده‌ها حساسیت داشته‌باشیم. چه گاهی تغییری کوچک (در مکان مختصاتی یا عددهای گرد شده) می‌تواند به‌طور شگفت‌آوری دارای تأثیری مهم باشد.

تبدیل جدول مختصات به جدول فاصله‌ها می‌تواند به پیداشدن مسیری متفاوت منجر شود - و بنابراین به‌ظاهر یک مسأله می‌تواند دو راه حل متفاوت را به دست دهد، و این درس سودمند دیگری است.

◆ **مسألهٔ ۴۲ - شهر**

در این‌جا مکان کافی برای به‌دست دادن جزئیات کامل ۴۲ شهر آمریکایی به‌کار رفته در این مسألهٔ مشهور موجود نیست. در مورد این مسأله، روش نزدیکترین مکان بعدی مکرر مسیری ۲۳٪ دورتر به دست آورده است درحالی که روش مرزی نیکلسون مسیری تنها ۱٪ دورتر یافته‌است.

◆ **مسأله‌های کلی**

روش نیکلسون به نقشه و دستگاه مختصاتی نیازمنداست. این خواسته در مورد داده‌های مربوط به شهرهای انگلیسی مشکلی ایجاد نمی‌کند. اما، اگر مایل به توسعهٔ بحث و ایجاد اشکالی در زندگی معمولی باشید، از دانش‌آموزان بخواهید تا مختصاتی در مورد جمیع پایتختهای ایالات متحده تهیّه کنند (باشد، می‌توانید آلاسکا را حذف کنید!). در این مورد خمیدگی زمین دارای اهمیت بسیار می‌شود و تنها پرداختن به‌همین مسأله می‌تواند به تحقیقاتی بسیار ثمربخش (یا بی‌ثمر) منجر شود.

◆ **چه کسی به کامپیوتر نیازمند است؟**

با در دست داشتن نقشه‌ای ساده با مجموعه‌ای از شهرهای واقع برآن، می‌توان بااستفاده از دستها و بدون محاسبه‌های پرزحمت، کارهای اکتشافی مفید بسیاری را انجام داد. (این‌کار درصورتی که از کلاس بخواهیم که مسأله را ابتدا با چشم حل کند انگیزهٔ بیشتری به‌دست می‌دهد).

روش نزدیکترین مکان‌بعدی را می‌توان بسرعت، بااستفاده از یک پرگار، یک خط‌کش و یک ماشین حساب، انجام داد.

به‌طریق دیگر، می‌توان جدولی از فاصله‌ها را تهیّه کرد. نقطه‌های آغازی مختلف را می‌توان به‌آسانی به دانش‌آموزان مختلف تخصیص داد و نتیجه‌ها را تقسیم کرد. در این صورت بنا به تجربهٔ من، باید توسط کلاس به‌آزمون بعضی از بهترین مسیرهای یافت شده پرداخت!

انجام روش مرزی نیکلسون حتی از این نیز ساده‌تر است و کار

مربوطه را می‌توان، با تخصیص شهرهای داخلی متفاوت، برای اضافه شدن در ابتدای کار، تقسیم کرد.

در مورد مسأله‌های مبتنی برجدول، برنامه‌ای کامپیوتری برای جمیع مجموعه‌های داده‌ها، به‌استثنای مجموعه‌های داده‌های بسیار کوچک، اساسی است. مؤلف برای علاقه‌مندان دیسکی را تهیّه کرده‌است.

* * *

◆ نتیجه

مسألهٔ فروشندهٔ دوره گرد آسان درک و مناسب بررسی در راه‌های وسیع گوناگون، برای برد وسیعی از سنها و قابلیتهاست.

مسألهٔ مزبور را می‌توان بدون کامپیوتر معرفی کرد. استفاده از کامپیوتر در این مورد می‌تواند مفید باشد و می‌توان مطالب بسیاری در مورد این مسألهٔ ریاضی مهم، نیز قوت و ضعف کامپیوترها آموخت.

یادداشتها

9. Nicholson's Boundary Method
10. Lin's 2 - optimal method
11. 3 - optimal method
12. sub - optimal

مرجعها:

References

[1] Williams, H.P. (1990) *Optimisation and Operational Research.* Bulletin I.M.A. 26, 76-85.

[2] Nicholson, T.A.J. (1968) *A Boundary Method for Planar Travelling Salesman Problems.* Operational Research Quarterly, 19, 4, 445-452.

ادب ریاضی

قضایای ریاضی عامند اما عامه‌پسند نیستند و به تعبیری دیگر «در هندسه راه شاهانه وجود ندارد» با این همه قضایای ریاضی از آنِ همهٔ مردمند و اختصاص به شخص خاص یا مملکت خاص ندارند. در تاریخ ریاضیات چنین می‌خوانیم که انجمنی که فیثاغورس بنایش را نهاده بود، نه تنها مردان که زنان را هم به عضویت خویش می‌پذیرفت و نه تنها عیالمندان را که مجردان را نیز؛ و تنها مقررهٔ صعب آن، ذیحق نبودن اعضا به آنچه که کشف می‌کرده‌اند بوده است، یعنی کشف هریک از اعْضا از آنِ همهٔ اعضا بود و کسی را به گونهٔ خاص حق مالکیت بر آن نبود. از آن مهمتر از پرده برون افتادن راز را مصلحت نمی‌دانستند و هر خبر که در مجلسشان به گوش می‌رسید، در همان‌مجلس می‌ماند و چون راه‌گنج برهمه کس آشکاره نمی‌شد.

از مقاله سامان ریاضی:

از مجلهٔ مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱. شش: ۱۱۹۹، ۱۹۱۹، ۱۹۹۱، ۹۹۱۱، ۹۱۹۱، ۹۱۱۹.

جواب ۲. ۳۰. $a . b = a^b + b$

$(۱.۲) = ۱^۲ + ۲ = ۳ \qquad (۳.۳) = ۳^۳ + ۳$

جواب ۳. ۰. میانگین و میانهٔ یک مجموعه از اعداد طبیعی متوالی برابرند.

جواب ۴. هشت. اگر O = وصل و F = قطع باشد، ترتیبهای زیر امکان‌پذیرند:

OOOO OOOF OOFO OFOO FOOO

FOFO FOOF OFOF

جواب ۵. نه. عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد. ملاحظه می‌کنیم که z بر این مسأله تأثیری ندارد، زیرا تنها ۰ های اضافی به‌دست می‌دهد. برای مثال:

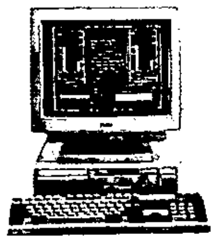
$(۱۰^۱)۳ + ۵ = ۳۵$

$(۱۰^۲)۳ + ۵ = ۳۰۵ \qquad (۱۰^۳)۳ + ۵ = ۳۰۰۵$

به این ترتیب x + y باید برابر ۹ یا ۱۸ باشد:

$(x , y) = \{(۱ , ۸)$ و $(۸ , ۱)$ و $(۲ , ۷)$ و $(۷ , ۲)$ و $(۳ , ۶)$ و $(۶ , ۳)$ و $(۴ , ۵)$ و $(۵ , ۴)$ و $(۹ , ۹)\}$

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۲)



● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

○ کامپیوترهای خانوادهٔ MARK

هـوارد آیکـن (۱۹۷۳ ـ ۱۹۰۰) اسـتاد ریـاضیات دانشگـاه هاروارد اولین ماشین الکترونیکی همه منظورهٔ[1] رقمی[2] را در سـال ۱۹۳۷ اخـتراع کـرد. وی در سـال ۱۹۴۴ کـامپیوتر رقـمی الکترونیکی‌اش را کامل کرد و آن‌را MARK I نامید. این کـامپیوتر ۱۵/۳ متر طول، ۲/۴ متر ارتفاع و ۳۱۵۰۰ کیلوگرم وزن داشت و در آن بیش از ۸۰۰ کیلومتر سیم بکار رفته بود. این کامپیوتر را باید اولین کامپیوتری دانست که بر اساس ماشین تحلیلی[3] بابیج ساخته شد. ورودی[4] کـامپیوتر MARK I، نـوار مـنگنهٔ[5] کـاغذی بـود. دستگاههای رله، کلیدها و چرخ و دیگر عناصرالکتریکی‌بکار رفته در MARK I بالغ بر ۷٦۰۰۰۰ قطعه مـی‌شد. کـامپیوتر MARK I براساس سیستم دهدهی[6] اعداد کار می‌کرد و محاسبات ریاضی آن تا ۲۳ رقم دقت داشت. سرعت آن، سه عمل جمع در ثانیه بـود. ایـن ماشین قادر بـود عـملیات جمع، ضـرب، تـقسیم، تـفریق، مـحاسبهٔ لگاریتم، توان[7]های مختلف، ریشه‌گیری[8] و محاسبهٔ توابع مثلثاتی[9] را انجام دهد. ساخت این ماشین ۵ سال طول کشید و در سال ۱۹۹۴ تکمیل گردید. مدل MARK II این کامپیوتر در سال ۱۹۴۷ کامل شد و شروع به‌کار کرد و مدلهای MARK III و MARK IV، در مدت کوتاهی بعد از آن ساخته شدند. حافظهٔ کامپیوتر MARK IV به‌صورت طبلهٔ مغناطیسی[10] بود. همزمان باکار آیکن و همکارانش بر روی کامپیوتر MARK I، جان آتاناسوف، جان ماچلی و پـراسـپر اِکرت و جان فون نـویمان (۱۹۵۷ ـ ۱۹۰۳) روی کـامپیوترهای الکترونیکی کار می‌کردند که در آن از لامپهای خلأ[11] استفاده شد و قدرتی به‌مراتب بیشتر نسبت به کامپیوترهای الکترومکانیکی داشت.

○ کامپیوتر ABC

دکتر آتاناسوف استاد فیزیک و ریاضی که در دانشگاه آیووا بـا یک دانشجوی فوق لیسانس بنام Berry کار می‌کرد در سال ۱۹۴۲ کـــامپیوتری ســاخت کـه در آن بـه‌جای اسـتفاده از رله‌هـای الکترومکانیکی، که در کامپیوتر MARK I بکار رفته بود، از لامپهای خلأ استفاده کرد و از این‌رو سرعت آن صدها بار بیشتر از کـامپیوتر MARK I گردید. این کامپیوتر که توسط آتاناسوف و بری ساخته شد کامپیوتر ABC یا Atanasoff- Berry Computer نامیدند. از کامپیوتر ABC فقط در حل معادلات[12] استفاده می‌شد.



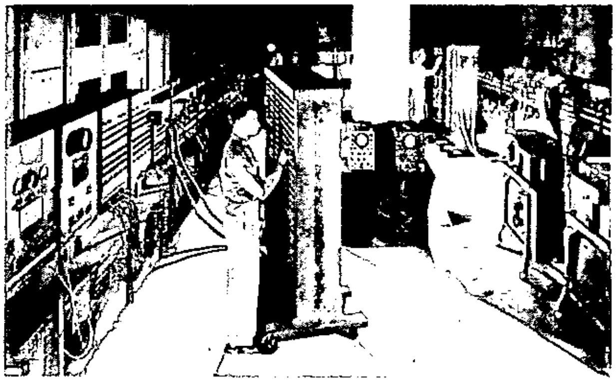
دکتر جان وینست آتاناسوف

○ کامپیوتر ENIAC

در سال (۴٦-) ۱۹۴۴ توسط ماچلی و اِکرت اولین کـامپیوترِ تمام الکترونیکیِ همه منظوره در دانشگاه پنسیلوانیا ساخته شد. بودجهٔ طراحی و ساخت آن از سوی ارتش امریکا تأمین شده بود و به‌منظور

محاسبهٔ جداول پرتاب گلوله، پیش‌بینی وضع هوا و محاسبات انرژی اتمی بکار گرفته شد. این کامپیوتر ENIAC نامیده شد که بزرگترین ماشین محاسب زمان خودش نیز بود. این ماشین از ۴۷ بخش الکترونیکی تشکیل می‌شد، دارای ۹ فوت بلندی، ۲ فوت عرض و ۱ فوت طول بود و فضایی به وسعت ۱۵ × ۹ متر را اشغال می‌کرد. کامپیوتر ENIAC بیش از ۳۰ تُن وزن داشت و در ساختمان آن ۱۸۰۰۰ لامپ خلأ، ۷۰۰۰۰ مقاومت[۱۳]، ۱۰۰۰۰ خازن[۱۴] و ۵۰۰۰۰۰ اتصال[۱۵] بکار رفته بود. این کامپیوتر قادر بود ۵۰۰۰ عمل جمع را در مدت یک ثانیه انجام دهد. ENIAC نخستین کامپیوتری بود که تمام کارهای درونی[۱۶]اش به‌صورت الکترونیکی انجام می‌شد. این کامپیوتر دارای حافظهٔ[۱۷] داخلی و فوق‌العاده سریع‌تر از کامپیوتر MARK بود و از آن فقط در حل مسائل ریاضی استفاده می‌شد. این کامپیوتر از نوعِ کامپیوتر تک منظوره[۱۸] بود و از آن، همانگونه که گفته شد در حل مسائل ریاضی مربوط به امور موشکی و فضایی در ارتش استفاده می‌شد. ابعاد این کامپیوتر ۲ × ۱۲ × ۶ متر و وزن آن ۳۰ تُن بود.

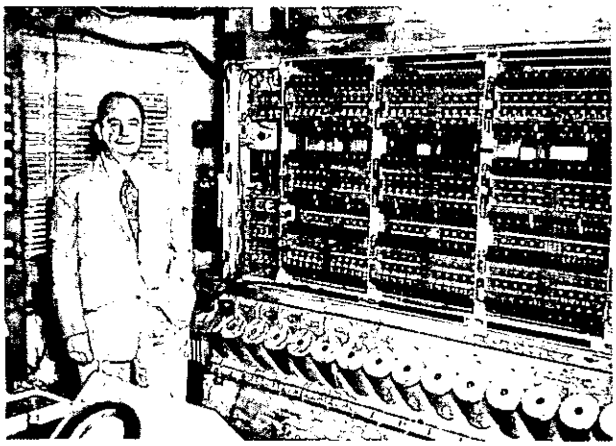
کامپیوترها اساساً دستگاههایی جهت انجام محاسبات با سرعتهای بالا و دقت بسیار زیاد هستند. ولی قبل از استفاده، کامپیوتر باید برنامه‌نویسی شود یا مجموعه‌ای از دستورات[۱۹] صریح یا برنامه[۲۰] به آن داده شود تا بتواند وظیفه[۲۱]اش را انجام دهد. برای برنامه‌نویسی ENIAC لازم بود صدها سیم را وصل نموده و هزاران کلید را بطریق مناسبی قرار دهند. در سال ۱۹۴۶ میلادی دکتر جان فون نویمان از دانشگاه پرینستون مفهوم کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده[۲۲] را ارائه داد که دستورالعملهای یک برنامه، به‌جای جابه‌جا کردن سیمها و کلیدها[۲۳]، در حافظهٔ آن ذخیره می‌شود. ایدهٔ فون نویمان در طراحی کامپیوتر، اساس ساخت کامپیوترهای رقمی امروزی قرار گرفت.



نمای کلی کامپیوتر ENIAC

کامپیوتر EDVAC

در اواخر دههٔ ۱۹۴۰، تحقیقات دامنه‌داری در جهت یافتن پدیدهٔ فیزیکی‌ای صورت گرفته بود تا بتوانند با استفاده از آن، اطلاعات را در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره کنند. دکتر جان فون نویمان در مقاله‌ای که آن‌را در سال ۱۹۴۷ منتشر کرد مفهوم کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده را به‌همراه ذخیرهٔ داده‌ها به صورت سیستم دو دویی[۲۴] (باینری) ارائه داد. وی در این مقاله اظهار داشت جهت افزایش کار کامپیوتر لازم است تا برنامهٔ کار کامپیوتر در حافظهٔ داخلی آن ذخیره شود. از این‌رو کامپیوتر EDVAC با بهره‌گیری از این ایده در خلال سالهای ۱۹۴۶-۱۹۵۲ توسط گروهی موسوم به EDVAC ساخته شد. علاوه بر این، طرح بابیج در مورد کامپیوترها نیز در این کامپیوتر به‌طور کامل پیاده‌سازی شد. این کامپیوتر از اجزای مجزایی بنام واحد حافظه[۲۵]، واحد محاسبهٔ مرکزی[۲۶]، واحد کنترل مرکزی[۲۷] تشکیل می‌شد و دارای واحد ورودی[۲۸] و خروجی[۲۹] بود. کامپیوتر EDVAC را باید اولین کامپیوتری دانست که براساس برنامهٔ ذخیره شده طراحی[۳۰] شد و از این‌رو به آن، کامپیوتر با برنامهٔ ذخیره شده - Stored - Program Computer می‌گویند. این کامپیوتر در دانشگاه پنسیلوانیا برای استفاده در نیروی زمینی امریکا ساخته شد. کلیهٔ عملیات محاسباتی در این کامپیوتر در مبنای دو (باینری) انجام می‌شد.



دکتر جان فون نویمان

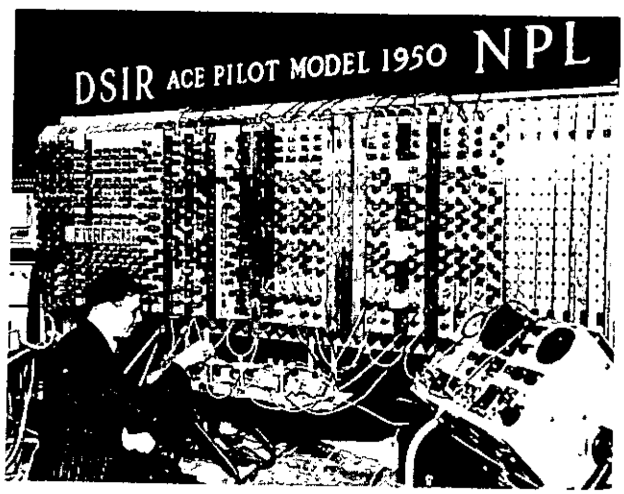
○ کامپیوتر EDSAC

این کامپیوتر در سال ۱۹۴۹ توسط M.V.WILKS ساخته شد که دارای خط تعویق جیوه‌ای[۳۱] بود. با طراحی خطوط تعویق جیوه‌ای در EDSAC قابلیت انتقال ضربان الکتریکی[۳۲] به ۵۰۰۰۰۰ ضربه در ثانیه رسید و نسبت به کامپیوتر EDVAC مشکل کمبود حافظه

نداشت. عیب آن، این بود که هر خط تعویق در آن فقط قادر بود تنها نصف اطلاعات[۳۳] را نگهداری کند. اساس کار کامپیوتر EDSAC بر نظریهٔ نویمان یعنی ذخیرهٔ داده‌ها به‌صورت سیستم دودویی و ذخیرهٔ برنامهٔ کار کامپیوتر و بطور کلی ذخیرهٔ برنامه‌ها در حافظهٔ کامپیوتر استوار بود.

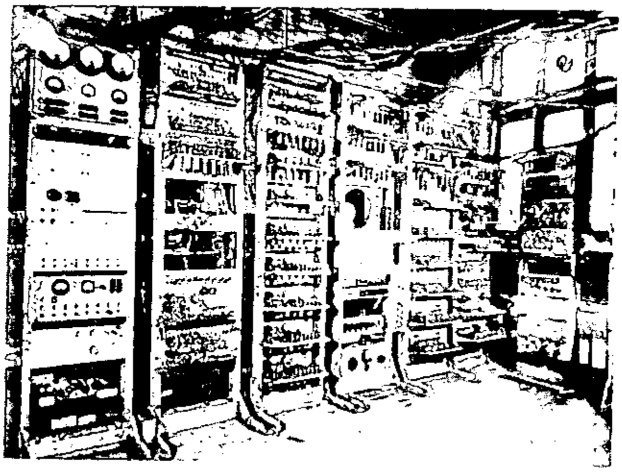
○ کامپیوتر ACE

در انگلستان گروهی تحت سرپرستی آلن تیورینگ، در سال ۱۹۴۷، در آزمایشگاه تحقیقات فیزیکی کار می‌کردند، این گروه توانستند طرح منحصر به‌فردی[۳۴] را ارائه دهند که در آن برای حافظهٔ کامپیوتر از خط تعویق جیوه‌ای استفاده شود. این کامپیوتر پس از ماشین محاسب تحلیلی بابیج، ACE یا Analytic Computing Engine نامیده شد. کار ساخت نمونهٔ اولیهٔ ACE در سال ۱۹۴۷ شروع شد و تا سال ۱۹۵۱ ادامه یافت. نمونه تجاری[۳۵] ACE، توسط یک شرکت انگلیسی بنام DEUCE به بازار عرضه شد.



○ کامپیوتر منچستر

در سال ۱۹۴۷، F.C. Williams، روشی را برای ذخیرهٔ اطلاعات بر اساس ایجاد تغییرات نقطه‌ای در لامپ اشعهٔ کاتدیِ[۳۶] استاندارد ابداع نمود. وی این روش را در کامپیوتر خود بنام کامپیوتر ویلیامز که در دانشگاه منچستر انگلستان ساخته شد پیاده کرد. این کامپیوتر نخستین کامپیوتری بود که در ساختمانش از ثبات شاخص[۳۷] بنام ثبات B و از انباره[۳۸] بنام ثبات A استفاده شد. بر روی این کامپیوتر بود که در سال ۱۹۴۸ مسئله تعیین اعداد اول اجرا شد و ۵۲ دقیقه طول کشید تا خروجی برنامه ارائه شد. نمونهٔ تجاری این کامپیوتر در سال ۱۹۵۱ به دانشگاه منچستر اهدا شد.



کامپیوتر منچستر

○ کامپیوتر IAS

گروهی تحت سرپرستی جان فون نویمان، در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ (IAS یا Institute of Advanced Study) در دانشگاه پرینستون امریکا، ساخت کامپیوتری را طراحی کردند که برای حافظهٔ کامپیوتر قرار بود از لامپهای خاصی بنام SELECTRON استفاده کنند. در هنگام تولید این لامپ، با مشکل عملی زیادی روبه رو شدند و از این‌رو به‌جای آن در ساختمان کامپیوتر از لامپ ویلیامز استفاده کردند. با استفاده از طرح IAS در دانشگاه ایلی نویز کامپیوتر ORDVAC و بعدها کامپیوتر ILLIAC ساخته‌شد. نمونهٔ دیگری از این کامپیوتر بین‌سالهای ۱۹۵۲ - ۱۹۴۰ بنام MANIAC در لوس‌آلاموس[۳۹] ساخته شد و شرکت RAND کامپیوتر JOHNIAC و آزمایشگاه[۴۰] آرگون، کامپیوتر ORACLE را ساخت.

○ کامپیوتر SEAC و SWAC

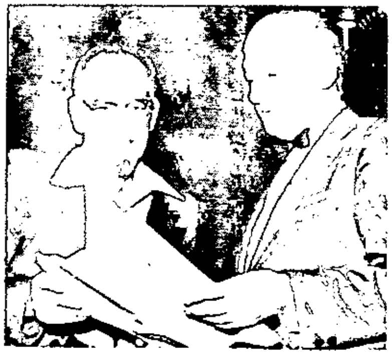
پروژهٔ کامپیوتر SEAC یا NBS EASTER[۴۱] AUTOMATIC COMPUTER در سال ۱۹۴۷ بر اساس طرح EDVAC برای دفتر استانداردهای ملی NBS، ساخته شد و در آن برای حافظهٔ کامپیوتر از خطوط تعویق استفاده شد. این دفتر در سال ۱۹۵۰ کامپیوتر دیگری ساخت که حافظهٔ آن‌را لامپ ویلیامز تشکیل می‌داد و آن‌را SWAC یا NBS WESTERN AUTOMATIC COMPUTER نامیدند. این کامپیوتر از سریع‌ترین‌کامپیوتر در زمان خودش به‌شمار می‌رفت و قادر بود عمل جمع دوتایی مانند $C = A + B$ را در ۶۴ مایکرو ثانیه و عمل ضرب را در مدت ۳۸۴ مایکرو ثانیه انجام دهد.

○ کامپیوترهای طبلهٔ مغناطیسی

طرح مطالعاتی ساخت کامپیوترهایی با طبلهٔ مغناطیسی در سال ۱۹۴۸، تقدیم انجمن تحقیقات مهندسی امریکا شد. نمونهٔ تجاری این کامپیوتر اندکی بعد بنام ۱۱۰۱ به بازار عرضه شد. پُل‌نورتن Paul Norton در دانشگاه برکلی کالیفرنیا، کامپیوتر طبله‌ای را طراحی کرد و آن را CARDIC نامید. نمونه‌های مختلف دیگری از این کامپیوتر با نامهای IBM ۶۵۰، LGP ۳۰، BENDIX G ۱۵ نیز به بازار عرضه شد.

○ کامپیوتر UNIVAC

به‌منظور تشکیل شرکتی بنام شرکت کامپیوتری اِکِرت و ماچلی، این دو در سال ۱۹۴۶ دانشگاه پنسیلوانیا را ترک کردند و بعدها پس از تأسیس شرکت، شرکت خود را به Remington - Rand فروختند. Remington - Rand اولین کامپیوتر تجاری را که برای کاربردهای علمی[42] و تجاری[43] طراحی شده بود ساختند و نام این کامپیوتر را UNIVAC گذاشتند. UNIVAC قادر بود داده‌های عددی و حرفی را بطور همزمان پردازش[44] کند. سرعت این کامپیوتر ۴۰۰۰ عملِ جمعِ اعداد چهار رقمی[45] در مدت یک ثانیه بود. اولین نمونه از کامپیوتر UNIVAC در سال ۱۹۵۱ به ادارهٔ سرشماری[46] امریکا فروخته شد. کامپیوتر UNIVAC I را بایستی نخستین کامپیوتر الکترونیکی دانست که برای فروش به بازار عرضه گردید. از این کامپیوتر در امور غیر علمی نیز استفاده می‌شد. این کامپیوتر برای ورودی و خروجی از نوار مغناطیسی[47] استفاده می‌کرد.



دکتر ماچلی (سمت چپ) و دکتر اکرت

نسلهای مختلف کامپیوترهای الکترونیکی

کامپیوترهای نسل اول (۱۹۵۸ - ۱۹۴۴)

مشخصهٔ اصلی این نسل[48] از کامپیوترهای الکترونیکی، در استفادهٔ زیاد از لامپهای خلأ در آن است که به همین دلیل، به این نسل از کامپیوتر، کامپیوترهای الکترونیکیِ دارای لامپ خلأ نیز می‌گویند. این نسل از کامپیوتر در بین سالهای ۱۹۵۸ - ۱۹۴۰ توسعه و تکامل یافت. کامپیوتر الکترونیکی ENIAC که در سال ۱۹۴۴ در دانشگاه پنسیلوانیا ساخته شد جزء کامپیوترهای نسل اول به‌شمار می‌رود. کامپیوترهای این نسل، حجم بسیار بزرگی داشتند و نیازمند برق بسیار قوی بودند، حرارت زیاد تولید می‌کردند و از این‌رو چند ساعت بیشتر در روز کارایی نداشتند. علاوه بر این سرعت و دقت کمی داشتند. برخی از این کامپیوترها، توانایی ذخیرهٔ برنامه را در حافظهٔ خود داشتند. داده‌های ورودی[49] را از طریق نوار کاغذی[50] یا کارت منگنه‌شده[51] دریافت می‌کردند. در کامپیوتر ENIAC از این نسل، ۱۸۰۰۰ لامپ خلأ بکار رفته بود و به بیش از ۱۲۰۰۰۰ وات برق احتیاج داشت، ۱۵۰ متر مربع فضا را اشغال می‌کرد و سرعت آن ۳۵۰ عمل ضرب و بین ۳۰۰۰ تا ۵۰۰۰ عمل جمع در ثانیه بود و این توانایی را داشت تا ۱۰۰ دستورالعمل را در ثانیه محاسبه کند. برنامهٔ این کامپیوتر به زبان ماشین[52] یا به‌صورت دو دویی (باینری) نوشته می‌شد، و ظرفیت حافظهٔ آن به ۴۰۰۰ کلمه محدود می‌شد و در آن از لامپ خلأ و دستگاههای رلهٔ زیادی استفاده شده بود. از کامپیوترهای این نسل در کارهای علمی و محاسبات ریاضی استفاده می‌کردند. کامپیوتر UNIVAC نیز متعلق به این نسل از کامپیوترها است. از کامپیوتر ENIAC و UNIVAC بیشتر در ارتش، بخصوص در نیروی زمینی استفاده می‌کردند.

○ کامپیوترهای نسل دوم (۱۹۶۴ - ۱۹۵۸)

اولین کامپیوتر نسل دوم در سال ۱۹۵۸ بنام IBM ۷۰۹۰ معرفی شد. ترانزیستور که در سال ۱۹۴۸ توسط آزمایشگاه بل اختراع شده بود در کامپیوترهای نسل دوم جایگزین لامپهای خلأ گردید. از این‌رو به کامپیوترهای نسل دوم، کامپیوترهای ترانزیستوری[53] نیز می‌گویند. ترانزیستور توانایی انجام بسیاری از کارهای لامپ خلأ را داشت، برق بسیار کمی مصرف می‌کرد و حرارت کمی تولید می‌نمود. قابلیت اطمینان بالایی داشت و در ساختمان آن برای حافظه از حلقه‌های مغناطیسی[54] استفاده شد. به‌وسایل خنک کنندهٔ قوی احتیاج نداشت و فضای کمتری را نسبت به کامپیوترهای نسل اول اشغال می‌کرد. سرعت آن با مایکروثانیه یا 10^{-6} ثانیه سنجیده می‌شد. برنامه‌های آن به زبان سطح بالا[55] مانند فرترن بود. کامپیوتر IBM ۱۶۲۰ از جمله کامپیوترهای نسل دوم است و در سال ۱۳۴۱ شمسی در شرکت نفت ایران نیز بکار گرفته

شد. سرشماری سال ۱۳۴۵ ایران نیز با استفاده از کامپیوتر نسل دوم IBM ۱۴۰۱ انجام شد. در بین سالهای ۱۹۶۴ ـ ۱۹۵۸ تعداد بسیار زیادی از این کامپیوترها ساخته شد و به بازار عرضه گردید. سرعت واحدهای ورودی و خروجی این کامپیوترها بسیار زیاد بود. کامپیوترهای نسل دوم توانایی آن را داشتند تا دادهها و برنامهها را در فاصله بسیار دور از کامپیوتر از طریق خطوط تلفن دریافت کنند. سرعت این کامپیوترها به محاسبهٔ ۲۰۰۰ تا ۵۰۰۰۰ عمل جمع در ثانیه میرسید و قادر بود ۱۰۰۰۰۰ دستورالعمل را در یک ثانیه پردازش کند.

○ کامپیوترهای نسل سوم (۱۹۷۰ ـ ۱۹۶۴)

در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ دانشمندان به این نتیجه رسیدند که اندازهٔ فیزیکی یک ترانزیستور هیچگونه تأثیری در توانایی آن ندارد و یک قطعه سیلیکان Silicon که میتواند دارای اندازهای بسیار بسیار کوچکتر از یک ترانزیستور باشد قادر خواهد بود همان کار ترانزیستور را انجام دهد. در سال ۱۹۵۷ اولین مدار یکپارچه[۵۶] یا IC معرفی شد که ترکیبی از مدارها، هادیها، مقاومتها، دیودها و ترانزیستورها بود. این مجموعه در یک تراشهٔ[۵۷] بسیار کوچکی از سیلیکان بهصورت یکپارچه بنام IC جمع شده بودند. اندازهٔ یک تراشه $\frac{۱}{۱۶}$ اینچ مربع و با وزن کسر کوچکی از یک اونس بود. در ساختمان کامپیوترهای نسل سوم از IC و حلقههای مغناطیسی استفاده شد. به کامپیوترهایی که در ساختمان آنها از IC یا مدارهای یکپارچه استفاده گردید کامپیوترهای نسل سوم یا کامپیوترهای دارای مدار یکپارچه میگویند. این کامپیوترها ابعاد به مراتب کوچکتری از کامپیوترهای دو نسل قبلی داشتند و فضای کمی را اشغال میکرد، مصرف برق بسیار کمی داشت و هزینهٔ تولید آن نیز بسیار پایین بود. سرعت[۵۸] عملیات در این نوع کامپیوترها با نانو ثانیه یا $۱۰^{-۹}$ ثانیه سنجیده میشد. ظرفیت حافظه در این نوع کامپیوترها بسیار افزایش یافت، سرعت عملیات در این نسل از کامپیوتر به بیش از ۱۰ میلیون عمل جمع در ثانیه رسید. کامپیوتر IBM ۳۶۰ که در سال ۱۹۶۴ توسط شرکت IBM ساخته شد و به بازار عرضه گردید اولین کامپیوتر از نسل سوم بود. عدد ۳ در ۳۶۰ معرف نسل سوم بودن این نوع کامپیوترها و عدد ۶۰ معرف ساخته شدن آن در دههٔ ۱۹۶۰ است. کامپیوترهای نسل سوم دارای جستجوگرهای نوری[۵۹]، کاراکترخوانهای جوهر مغناطیس[۶۰] بودند. در این کامپیوترهای امکان پردازش دادهها از راه دور توسط دستگاهی شبیه ماشینتحریر بنام ترمینال با بهکارگیری مادِم Madem وجود داشت. با این کامپیوترها چند نفر بطور همزمان میتوانستند بهصورت اشتراک زمانی Time Sharing کار کنند. کامپیوتر PDP ، DATA GENERAL ، MICRO DATA ، CRAY و CYBER نیز به این نسل از کامپیوترها تعلق دارند.

○ کامپیوترهای نسل چهارم (... ـ ۱۹۷۰)

دههٔ ۱۹۷۰ شاهد عرضهٔ ریز پردازندهها Microprocessors بود که خود واحد پردازندهٔ مرکزی[۶۱] کامپیوتر را تشکیل میداد. این ریزپردازندهها توانایی آن را داشتند تا برنامهها را در حافظهٔ خود ذخیره کنند. و از هزاران قطعهٔ الکترونیکی نظیر ترانزیستور تشکیل میشدند. بهعنوان مثال در ریز پردازنده هیولت پاکارو HP، که در سال ۱۹۸۱ به بازار عرضه شد ۴۵۰۰۰۰ تراشهٔ ترانزیستور وجود داشت، یکپارچگی مدارهای الکترونیکی در چنین مقیاس وسیعی، مشخصهٔ اصلی کامپیوترهای نسل چهارم یا کامپیوترهای دارای مدار یکپارچه در مقیاس وسیع را تشکیل میدهد. این ریزتراشهها در دههٔ ۱۹۸۰ باعث انقلابی بزرگ در دنیای کامپیوتر گردیدند. در این نسل از کامپیوترها، شبکههای کامپیوتری عرضه شد و با تراکم بیشتر مدارهای یکپارچه یا IC ابعاد این نسل از کامپیوترها بسیار کوچک گردیدند و بدینترتیب بود که کامپیوترهایشخصینظیر IBM PC ، APPLE ، COMMODORE به بازار عرضه شدند، کاربردهای همگانی پیدا کردند و به خانهها راه یافتند.

در مقام مقایسهٔ نسلهای مختلف کامپیوتر، باید متذکر شویم که در کامپیوترهای نسل اول در هر متر مربع ۶۰۰۰ عنصر الکترونیکی[۶۲] وجود داشت که در نسل دوم این تعداد به ۱۰۰۰۰۰ عنصر الکترونیکی و در نسل سوم به بیش از یک میلیون و در نسل چهارم به ۱۰ میلیون عنصر الکترونیکی افزایش یافت. در نتیجه ضربانهای الکترونیکی بهعلت کوتاهتر شدن فاصله، در مدت کمتری فاصله را طی میکردند و در نتیجه سرعت کامپیوتر به چند میلیون برابر کامپیوترهای نسل اول رسید. هزینهٔ تهیهٔ حافظهٔ داخلی[۶۳] برای یک عدد در سیستم دودویی یا یک بیت در سال ۱۹۵۰ ، ۲/۶۱ دلار، در سال ۱۹۶۰ ، ۸۵ سنت و در سال ۱۹۶۵ ، ۲۰ سنت بود. در سال ۱۹۷۰ این هزینه بین ۵ تا ۱۰ سنت و در سال ۱۹۷۵ این عدد به ۰/۵ سنت رسید و امروزه با استفاده از تراشهها، هزینهها بسیار کمتر شده است.



○ کامپیوترهای نسل پنجم

در آوریل ۱۹۸۲ یک مؤسسه تحقیقاتی در ژاپن با شروع به‌کار، وظیفهٔ ساخت کامپیوترهای نسل پنجم را به‌عهده گرفت. با ایجاد اصلاحات زیاد بر روی کامپیوترهای نسل چهارم، کامپیوترهای نسل پنجم ساخته می‌شوند که ساختمان آن بر اساس طرح فون نویمان استوار است. این کامپیوترها دارای ساختمانی جدیدتر و سازمان حافظه‌ای نوین خواهند بود و با زبان برنامه‌نویسی جدیدی کار خواهند کرد. در این نسل از کامپیوترها، مفاهیمی از قبیل هوش مصنوعی[۶۴] مورد توجه بسیار است و توانایی آن را دارند تا با زبانهای انسانی با انسان گفتگو کنند، صحبتها و تصاویر[۶۵] را به آسانی درک می‌کنند، قدرت یادگیری دارند، قادر به تصمیم‌گیری هستند و صداهای مختلف را از هم تمیز می‌دهند و قادر به شناسایی کلام می‌باشند. به کامپیوترهای نسل پنجم، سیستمهای پردازندهٔ اطلاعات علوم بشری نیز می‌گویند. این نسل از کامپیوتر، چه از نظر مفاهیم و چه از نظر نوع کار با کامپیوترهای چهار نسل قبل تفاوت خواهند داشت.

تصحیح: برنامهٔ مثال آخر صفحهٔ ۶۴ از برهان ۱۰ براین اصل متکی است که در یک همسایگی بسیار کوچک نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم نسبی، مشتق تغییر علامت می‌دهد. شعاع همسایگی تابع برنامه را $r = 0.01$ گرفتیم. در نقطهٔ ماکزیمم نسبی تغییر علامت مشتق از مثبت به منفی است و در نقطهٔ مینیمم نسبی تغییر علامت مشتق از منفی است به مثبت. با این توضیحات، برنامهٔ مثال آخر صفحهٔ ۶۴ از برهان ۱۰ و خروجی آن را به صورت زیر اصلاح کنید:

به جای خط 60 بنویسید: `60 LET Y1 = X1^2-X1-2`

به جای خط 70 بنویسید: `70 LET Y2 = X2^2-X2-2`

با اعمال تغییرات ذکر شده در مثال، خروجی برنامه را پس از اجرا، به صورت زیر ملاحظه خواهید کرد:

خروجی برنامه:

```
AT X= -1 Y=  14 IS MAXIMUM
AT X=  2 Y= -13 IS MINIMUM
```

★ واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1- All - Purpose
2- Digital
3- Analytic Engine
4- Input
5- Punched tape
6- Decimal System
7- Power
8- Extracting Root
9- Trigonometric Function
10- Magnetic Drum
11- Vacuum Tube
12- Solving Equations
13- Resistor
14- Capacitor
15- Joint
16- Internal
17- Memory
18- Single - Purpose
19- Statement
20- Program
21- Task
22- Stored Program
23- Switch
24- Binary
25- Memory Unit
26- Central Arithmetic Unit
27- Central control Unit
28- Input Unit
29- Output Unit
30- Design
31- Mercury Delay Line
32- Pulse
33- Information
34- Unique Design
35- Commercial
36- Cathode Ray Tube (CRT)
37- Index Register
38- Accumulator
39- Los Alamos
40- Laboratory
41- National Bureau of Standards
42- Scientific
43- Business
44- Process
45- Four - Digit numbers
46- Census
47- Magnetic Tape
48- Generation
49- Input Data
50- Paper Tape
51- Punched Card
52- Machine Language
53- Transistorized Computer
54- Magnetic Core
55- High Level
56- Integrated Circuit
57- Chip
58- Speed
59- Optical Scanner
60- Magentic Ink
61- Central Processing Unit
62- Element
63- Internal Memory
64- Artificial Inteligence
65- Image

مکان هندسی

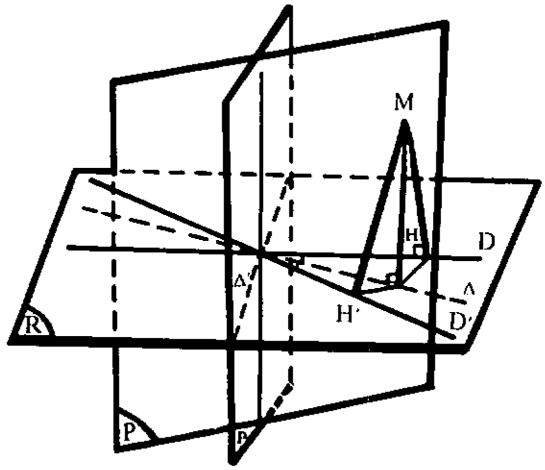
(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط راست متقاطع D و D′ به یک فاصله است، دو صفحه است که برخطهای Δ و Δ′ نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D′ می‌گذرند و برصفحهٔ حاصل از دو خط D و D′ عمودند.

اثبات: خطهای متقاطع D و D′ را درنظر می‌گیریم و خطهای Δ و Δ′ نیمسازهای زوایای بین این دوخط را رسم می‌کنیم و دو صفحهٔ P و P′ را برخطهای Δ و Δ′ چنان می‌گذرانیم که برصفحهٔ دوخط D و D′ (صفحهٔ R) عمود باشد.



اوّلاً: اگر M نقطه‌ای دلخواه از یکی از این دو صفحه مثلاً نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد و از M عمودهای MH و MH′ را بر دو خط D و D′ فرود آوریم $MH = MH'$ است. زیرا اگر از M عمود MK را بر صفحه R فرود آوریم (K روی Δ است)، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MHK و MH′K به حالت تساوی دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه متساوی‌اند ($KH=KH'$ و $MK= MK$ و $\hat{K}_1= \hat{K}_2= 90°$) پس $MH = MH'$ است.

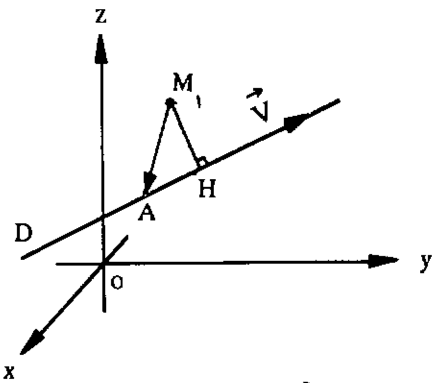
ثانیاً: ثابت می‌شود هرنقطه‌ای از فضا که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد روی یکی از دو صفحه، P یا P′ قرار دارد. زیرا اگر از M عمودهای MH و MH′ را به ترتیب بر D و D′ و عمود MK را برصفحهٔ R فرود آوریم و از K به H و H′ وصل کنیم، دو مثلث MHK و MH′K باهم برابرند ($MH = MH'$ و $MK = MK$ و $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$)

پس: $KH = KH'$ یعنی $K \in \Delta$ یا $K \in \Delta'$ و چون MK برصفحهٔ R عمود است، پس نقطهٔ M روی یکی از دو صفحهٔ P یا P′ واقع است.

اثبات به روش تحلیلی: می‌دانیم که اگر $\vec{V}(p, q, r)$ بردارهادی و

$A(x_0 , y_0 , z_0)$ یک نقطه از خط $D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ باشند، فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ از خط $D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$M_1H = \frac{|\vec{V} \wedge \vec{AM_1}|}{|\vec{V}|}$$



باتوجه‌به‌این‌که $\vec{V}(p, q, r)$ و $\vec{AM_1}(x_1 - x_0 , y_1 - y_0 , z_1 - z_0)$ است داریم:

$$\vec{V} \wedge \vec{AM_1} \left| \begin{array}{l} q(z_1 - z_0) - r(y_1 - y_0) \\ r(x_1 - x_0) - p(z_1 - z_0) \\ p(y_1 - y_0) - q(x_1 - x_0) \end{array} \right.$$

در نتیجه:

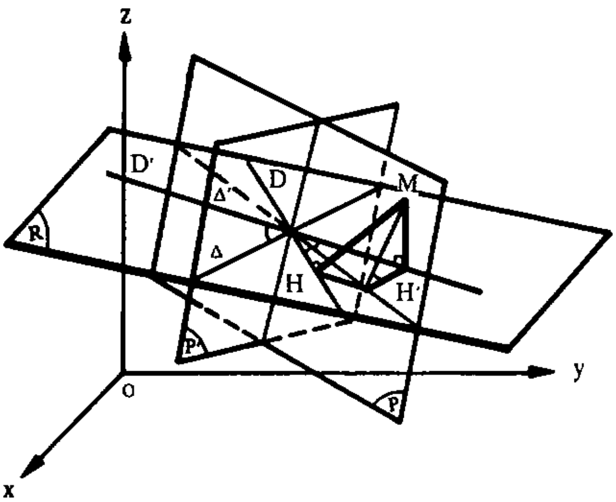
$$M_1H = \frac{\sqrt{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2+[r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)]^2+[p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

با توجه به دستور فوق، فرض می‌کنیم $M(x , y , z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد. یعنی نقطه‌ای که از دو خط

$$D': \frac{x-x_0}{p'} = \frac{y-y_0}{q'} = \frac{z-z_0}{r'} \text{ و } D: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

به یک فاصله است، در این صورت اگر نقطهٔ $A(x_0 , y_0 , z_0)$ نقطهٔ تقاطع دو خط D و D' اختیار شود (برای سهولت محاسبه)، داریم:

$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. , A \left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{AM} \left| \begin{array}{l} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{array} \right. , \vec{V} \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right. , \vec{V'} \left| \begin{array}{l} p' \\ q' \\ r' \end{array} \right. \Rightarrow$$



$$MH = \frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$MH' = \frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

$$MH = MH' \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

و یا:

$$\frac{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2}{p^2+q^2+r^2} + \frac{[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}{p^2+q^2+r^2} = \frac{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2} + \frac{[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2}$$

معادلهٔ بالا، پس‌از انجام اعمال لازم و محاسبهٔ یک مجهول برحسب دو مجهول دیگر و یا تبدیل آن به‌صورت $(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0$، معادلهٔ دو صفحه است که برنیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' (خطوط Δ و Δ') می‌گذرند و شامل نقطهٔ $A(x_0 , y_0 , z_0)$ می‌باشند و برصفحه R عمودند، و هر نقطه آنها، از دو خط D و D' به یک فاصله می‌باشد. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ

بالا صدق کند از دو خط D و 'D به یک فاصله است، بنابراین معادلهٔ فوق، معادلهٔ مکان‌هندسی نقاطی از فضا است که از دو خط D و 'D به یک فاصله‌اند.

مثال ۱: معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط $D: \frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{-۲} = z$ و $D': \frac{x-۱}{-۲} = y+۲ = \frac{z}{۲}$ به یک فاصله است.

حل: باتوجه به معادلهٔ دوخط D و 'D نقطهٔ $A(۱, -۲, ۰)$ نقطهٔ تقاطع این دوخط، $\vec{V}(۲,-۲,۱)$ بردارهادی خط D و $\vec{V'}(-۲,۱,۲)$ بردارهادی خط 'D است. بنابراین باتوجه به معادلهٔ مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط داریم:

$$\frac{|۱(z-۰)-۲(y+۲)|^۲+|۲(x-۱)+۲z|^۲+|-۲(y+۲)-۱(x-۱)|^۲}{۴+۱+۴} = \frac{|-۲(z-۰)-۱(y+۲)|^۲+|۱(x-۱)-۲z)|^۲+|۲(y+۲)+۲(x-۱)|^۲}{۴+۴+۱} \Rightarrow (z-۲y-۴)^۲+$$

$$(۲x+۲z-۲)^۲+(-x-۲y-۳)^۲=(-۲z-y-۲)^۲$$

$$+(x-۲z-۱)^۲+(۲y+۲x+۲)^۲ \Rightarrow (z-۲y-۴)^۲$$

$$+(۲x+۲z-۲)^۲+(x+۲y+۳)^۲-(۲z+y+۲)^۲$$

$$-(x-۲z-۱)^۲-(۲y+۲x+۲)^۲=۰ \Rightarrow -۳y^۲+۳z^۲$$

$$+۴xy+۸yz-۱۲xz+۸x-۱۶y+۲۸z-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow -۳y^۲+۴(x+۲z-۴)y+۳z^۲-۱۲xz+۸x+۲۸z-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm \sqrt{۴(x+۲z-۴)^۲+۳(۳z^۲-۱۲xz+۸x+۲۸z-۲۰)}}{-۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm \sqrt{۴x^۲+۲۵z^۲-۲۰xz-۸x+۲۰z+۴ = (۲x-۵z-۲)^۲}}{-۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm (۲x-۵z-۲)}{-۳} \Rightarrow y = \frac{-۹z+۶}{-۳}$$

$$= +۳z-۲ \quad ،$$

$$y = \frac{-۴x+z+۱۰}{-۳} \Rightarrow$$

$$\boxed{y-۳z+۲=۰} \quad و \quad \boxed{۴x-۳y-z-۱۰=۰}$$

معادله‌های صفحات مکان‌هندسی مطلوب.

نکته: به‌روش دیگری نیز می‌توان معادلهٔ صفحات بالا را به‌دست آورد. بدین ترتیب که ابتدا معادلهٔ دوصفحه‌ای را که برخطهای D و 'D گذشته و بر صفحهٔ R (صفحهٔ گذرنده بردو خط D و 'D) عمودند، پیدا می‌کنیم، آنگاه معادلات صفحات منصف فرجه‌های حاصل بین این دو صفحه را به‌دست می‌آوریم. درمورد همین مسأله داریم:

بردارهادی خط D $\qquad \vec{V}(۲,-۲,۱)$

بردارهادی خط 'D $\qquad \vec{V'}(-۲,۱,۲)$

بردارنرمال صفحهٔ R $\qquad \Rightarrow \vec{V} \wedge \vec{V'}(-۵,-۶,-۲) \Rightarrow \vec{W}(۵,۶,۲)$

بردارنرمال صفحهٔ $P_۱$ $\qquad \Rightarrow \vec{V} \wedge \vec{W}(۱۰,-۱,-۲۲)$

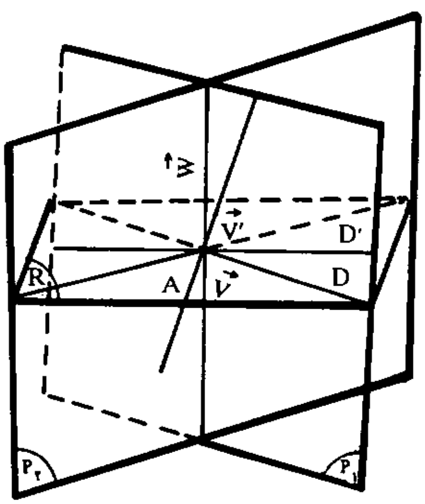
بردارنرمال صفحهٔ $P_۲$ $\qquad \Rightarrow \vec{V'} \wedge \vec{W}(۱۰,-۱۴,۱۷)$

$$۱۰(x-۱)-۱(y+۲)-۲۲(z-۰)=۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۱$ $\qquad \boxed{۱۰x-y-۲۲z-۱۲=۰}$

$$۱۰(x-۱)-۱۴(y+۲)+۱۷z=۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۲$ $\qquad \boxed{۱۰x-۱۴y+۱۷z-۳۸=۰}$



$$\Rightarrow \frac{|۱۰x-y-۲۲z-۱۲|}{\sqrt{۱۰۰+۱+۴۸۴} = \sqrt{۵۸۵}}$$

$$= \frac{|۱۰x-۱۴y+۱۷z-۳۸|}{\sqrt{۱۰۰+۱۹۶+۲۸۹} = \sqrt{۵۸۵}}$$

معادلات صفحات منصف فرجه‌های بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$.

$$\Rightarrow |۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲| = |۱۰x - ۱۴y + ۱۷z - ۳۸|$$

$$\Rightarrow ۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲ = ۱۰x - ۱۴y + ۱۷z - ۳۸$$

$$\Rightarrow ۱۳y - ۳۹z + ۲۶ = ۰$$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان : P $\quad \boxed{\Rightarrow y - ۳z + ۲ = ۰}$

$$۱۰x - y - ۲۲z - ۱۲ = -۱۰x + ۱۴y - ۱۷z + ۳۸$$

$$\Rightarrow ۲۰x - ۱۵y - ۵z - ۵۰ = ۰$$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان: P' $\quad \boxed{\Rightarrow ۴x - ۳y - z - ۱۰ = ۰}$

مثال ۲: نقطه‌ای از خط $\Delta: \frac{x}{۳} = \frac{y-۳}{۲} = z$ را تعیین کنید که از دو خط $D: \begin{cases} x - ۲ = \frac{y+۱}{-۲} \\ z = ۰ \end{cases}$ و $D': \begin{cases} x = ۱ \\ y = t + ۱ \\ z = ۲t \end{cases}$ به یک فاصله باشد.

حل: ابتدا معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را که از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند به دست می‌آوریم و سپس نقطهٔ تقاطع این مکان هندسی با خط Δ را تعیین می‌کنیم.

دو خط D و D' در نقطهٔ $A(۱, ۱, ۰)$ متقاطعند. صفحهٔ گذرند بر D و D' را R و صفحهٔ گذرنده بر D و عمود بر R را $P_۱$ و صفحهٔ گذرنده بر D' و عمود بر R را $P_۲$ می‌نامیم. داریم:

$$D: \begin{cases} x - ۲ = \frac{y+۱}{-۲} \\ z = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱ - ۲ = \frac{t+۱+۱}{-۲} \Rightarrow t = ۰ \\ ۲t = ۰ \qquad \Rightarrow t = ۰ \end{cases}$$

نقطهٔ تقاطع D و D' $\quad \Rightarrow t = ۰ \Rightarrow A(۱, ۱, ۰)$

بردارهادی خط D' $\vec{V'}(۰, ۱, ۲)$، بردارهادی خط D $\vec{V}(۱, -۲, ۰)$

بردار قائم صفحهٔ R $\quad \vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V'} \ (-۴, -۲, ۱)$

بردار قائم صفحهٔ $P_۱$ $\quad \vec{V} \wedge \vec{W} \ (۲, ۱, ۱۰)$

بردار قائم صفحهٔ $P_۲$ $\quad \vec{V'} \wedge \vec{W} \ (-۵, ۸, -۴)$

$\Rightarrow$ معادلهٔ کلی صفحه $\quad a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$

$$۲(x - ۱) + ۱(y - ۱) + ۱۰(z - ۰) = ۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۱$: $\quad \boxed{\Rightarrow ۲x + y + ۱۰z - ۳ = ۰}$

$$-۵(x - ۱) + ۸(y - ۱) - ۴(z - ۰) = ۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۲$: $\quad \boxed{-۵x + ۸y - ۴z - ۳ = ۰}$

$$\frac{|۲x + y + ۱۰z - ۳|}{\sqrt{۴ + ۱ + ۱۰۰} = \sqrt{۱۰۵}} = \frac{|-۵x + ۸y - ۴z - ۳|}{\sqrt{۲۵ + ۶۴ + ۱۶} = \sqrt{۱۰۵}}$$

معادلهٔ صفحات نیمساز فرجه‌های بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ (صفحات مکان هندسی مورد نظر).

$$\Rightarrow (۲x + y + ۱۰z - ۳) = \pm(-۵x + ۸y - ۴z - ۳) \Rightarrow$$

$$۲x + y + ۱۰z - ۳ = -۵x + ۸y - ۴z - ۳$$

$$\Rightarrow ۷x - ۷y + ۱۴z = ۰ \Rightarrow \boxed{x - y + ۲z = ۰}$$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان هندسی: P

$$۲x + y + ۱۰z - ۳ = ۵x - ۸y + ۴z + ۳ \Rightarrow$$

$$-۳x + ۹y + ۶z - ۶ = ۰$$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان‌هندسی: P' $\quad \boxed{\Rightarrow x - ۳y - ۲z + ۲ = ۰}$

$$\begin{aligned} P: &\begin{cases} x - y + ۲z = ۰ \\ \frac{x}{۳} = \frac{y-۳}{۲} = z = t \end{cases} \Rightarrow ۳t - (۲t + ۳) + ۲t \\ \Delta: & \end{aligned}$$

$$= ۰ \Rightarrow t = ۱ \Rightarrow$$

یک نقطهٔ جواب مسأله $M_۱$(۳ و ۵ و ۱)

$$\begin{aligned} P': &\begin{cases} x - ۳y - ۲z + ۲ = ۰ \\ \frac{x}{۳} = \frac{y-۳}{۲} = z = t \end{cases} \Rightarrow ۳t - ۳(۲t + ۳) - ۲t + ۲ = ۰ \\ \Delta: & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-۷}{۵} \Rightarrow M_۲\left(\frac{-۲۱}{۵}, \frac{۱}{۵}, \frac{-۷}{۵}\right)$$

نقطهٔ دیگر جواب مسأله

پیش‌گویی و عدد جادویی هفت*

● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

در اینجا گروهی از بازیهای جالب توجه بر اساس حقه‌های عددی را ارائه می‌کنیم که اگر با یک ماشین حساب کوچک انجام دهید، متحیر می‌شوید. پیش از این‌که دنبالهٔ مطلب را بخوانید یک ماشین حساب جیبی یا رومیزی فراهم کنید و بازیها را به‌ترتیبی که می‌آیند، انجام دهید. توجه داشته باشید که همهٔ آنها به عدد ۷ مربوط می‌شوند و ۷ عددی است که عرفای دوران باستان و قرون وسطی معمولاً آن‌را سرشار از خواص جادویی می‌پنداشتند. اگرچه در انجام این بازیها از شما خواسته می‌شود که برخی اعداد را به‌طور اتفاقی برگزینید ولی من خواهم کوشید با استفاده از نیروی خارق‌العادهٔ خود، نتیجهٔ دقیق محاسبات شما را در هر مورد پیشگویی کنم.

برای آغاز بازی، عدد اسرار آمیز ۱۵۸۷۳ را بر قسمت بازخوانی ماشین حساب قرار دهید سپس یکی از ارقام ۱ تا ۹ را انتخاب و ۱۵۸۷۳ را در آن ضرب کنید. حال حاصل‌ضرب را ۷ برابر کنید. قسمت بازخوانی نشان می‌دهد که عدد به دست آمده (که عدد ۶ رقمی است) متشکل از شش بار تکرار رقم انتخابی شماست.

اما چرا حاصل محاسبات چنین می‌شود؟ سبب آن است که ۷ برابر ۱۵۸۷۳، عدد ۱۱۱ , ۱۱۱ می‌شود و این عدد اگر در هر عدد یک رقمی یکی از ارقام مذکور ضرب شود، طبیعتاً عددی شش رقمی، به‌دست می‌آید که شامل شش بار تکرار همان عدد یک رقمی موردنظر است. برای به‌دست آوردن یک رشتهٔ طولانیتر از ارقام، عدد ۶۷۹ , ۳۴۵ , ۱۲ (توجه کنید که ۸ در این عدد حذف شده است) را در یک عدد یک رقمی مثبت دلخواه ضرب کنید و سپس حاصل را ۹ برابر کنید. علت مؤثر واقع شدن آن است که ۹ برابر عدد ۶۷۹ , ۳۴۵ , ۱۲ عدد ۱۱۱ , ۱۱۱ , ۱۱۱ می‌شود.

حال به‌موردی دیگر از این بازیهای عددی می‌پردازیم که توجیه آن چندان آسان نخواهد بود. به‌فرض این‌که شما بیشتر از ۹ و کمتر از ۱۰۰ سال داشته باشید، عدد معرف سن خود را در قسمت بازخوانی ماشین حساب قرار دهید و آن‌را در عدد جادویی ۱۴۴۳ ضرب کنید. بعد اگر حاصل‌ضرب را ۷ برابر کنید، به این نتیجهٔ شگفت‌آور می‌رسید که عدد به‌دست آمده شامل سه بار تکرار عدد معرف سن شماست! این امر همواره مصداق دارد، چه ۱۴۴۳ برابر عدد ۷، عدد ۱۰۱۰۱ می‌شود. به آسانی می‌توان دریافت که اگر عدد اخیر را در هر عدد دو رقمی ضرب کنیم، حاصل عددی شش رقمی می‌شود که از سه بار تکرار آن عدد دو رقمی تشکیل شده‌است.

حال به حقه‌ای دیگر در مورد اخیر می‌پردازیم و کار را با قرار دادن یک عدد سه رقمی دلخواه در قسمت بازخوانی ماشین حساب آغاز می‌کنیم. سه تا از دگمه‌های ماشین حساب متناظر با ۳ رقم عدد انتخابی را فشار دهید و این عمل را تکرار کنید تا عددی شش رقمی به شکل ABCABC درست شود، که متفاوت بودن ارقام A و B و C ضرورتی ندارد. چنانچه این عدد را بر ۱۳ تقسیم کنید، باقی‌مانده‌ای نخواهد داشت. بار دیگر خارج‌قسمت را بر ۱۱ بخش کنید، تقسیم بدون باقی‌مانده خواهد بود! سرانجام اگر خارج قسمت را بر ۷ تقسیم کنید، خواهید دید که همان عدد سه رقمی نخست در قسمت بازخوانی ماشین حساب ظاهر می‌شود.

برای پی بردن به علت امر، ۷ را در ۱۱ و سپس در ۱۳ ضرب کنید، حاصل ۱۰۰۱ می‌شود و آشکار است که اگر ۱۰۰۱ در هر یک از شکلهای عدد ABC ضرب شود، حاصل ABCABC خواهد شد. چنانچه این عملیات را برعکس انجام دهیم، حقهٔ کار آشکار می‌شود؛ به این ترتیب که اگر ABCABC بر اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ (یا در واقع بر ۱۰۰۱) تقسیم شود، عدد ABC به‌دست می‌آید. براحتی می‌توان این عملیات را تعمیم داد و عددهایی بزرگتر از این دست به‌وجود آورد. برای مثال، آیا می‌دانید چرا عدد ABCDABCD را اگر بر ۱۳۷ و سپس بر ۷۳ بخش کنیم، حاصل عدد ABCD خواهد شد؟

برای آگاهی از حقهٔ بعد، عدد ۹۹۹ , ۹۹۹ را در قسمت بازخوانی ماشین حساب بگذارید. یکی از ارقام ۱ تا ۶ را به اختیار انتخاب کنید و ۹۹۹ , ۹۹۹ را در آن ضرب و سپس حاصل را بر ۷ تقسیم کنید. حال اگر به «بخش پاسخها» رجوع کنید، درخواهید یافت که پیش‌بینی من در مورد نتیجهٔ نهایی کار چگونه است.

پاسخها را در شمارهٔ آینده ملاحظه کنید.

*برگرفته شده از کتاب: **معماهای ابوالهول**، نوشتهٔ مارتین گاردنر، ترجمهٔ حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰، ص ۵.

دربارهٔ مسأله‌های ساختمانی در هندسهٔ فضایی

● پرویز شهریاری

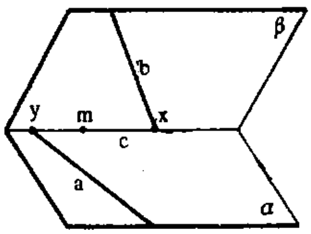
برای حل مسأله‌های هندسهٔ فضایی، باید قبل از هر چیز، از دو مانع عبور کرد: ۱) تجسم فضایی جسم؛ ۲) رسم آن روی صفحه. بدون گذشتن از این دو مانع، حتی نمی‌توان حل مسأله را آغاز کرد. برای رسیدن به این هدف، علاوه بر اطلاع از قانونهای رسم و تمرین مستمر، باید به سرچشمهٔ مسأله مراجعه کرد. بیشتر مسأله‌های هندسهٔ فضایی، دربارهٔ چندوجهیهاست، ولی اگر بتوانیم صورت مسأله را بخوبی تجزیه و تحلیل کنیم، چه بسا به مسألهٔ ساده‌ای برسیم که هم تجسم آن و هم رسم آن روی صفحه (و در نتیجه، حل آن) ساده باشد. البته،که عکس این روش هم گاهی می‌تواند کارساز باشد؛ یعنی نقطه‌ها خطهای راست و صفحه‌هایی راکه در فضا، و به‌ظاهر بی‌ارتباط با هم مطرح کرده‌اند، به یک چندوجهی ساده (مثل چهاروجهی، مکعب مستطیل و غیره) مربوط کنیم تا بستگی آنها با یکدیگر، برایمان روشنتر شود.

در این مقاله، مسأله‌ای ساده را، که در بیشتر کتابهای درسی وجود دارد، حل می‌کنیم و سپس، همین مسأله را، وقتی روی چندوجهیها داده شده است، دنبال می‌کنیم. خواهید دید، هم مسألهٔ اصلی می‌تواند به حلّ مسأله‌های مربوط به چند وجهیها کمک کند و هم مسأله‌های نوع دوم، ماهیت مسألهٔ اصلی را روشنتر می‌کنند.

مسألهٔ اصلی: از نقطهٔ مفروض M، خط راستی بگذرانید که دو خط راست متنافر و مفروض a و b را قطع کند. نقطهٔ M، متعلق به هیچ کدام از خطهای راست a و b نیست.

حل. c را خط راست مجهول می‌گیریم. صفحه‌ای را که از خطهای راست a و c می‌گذرد α، و صفحه‌ای راکه از خطهای راست b و c می‌گذرد β می‌نامیم.

شکل ۱



چون M روی خط راست c $(M\in c)$ و c فصل مشترک دو صفحهٔ α و β $(c=\alpha\cap\beta)$ است، پس نقطهٔ M به هر دو صفحهٔ α و β تعلق دارد ($M\in\alpha$ و $M\in\beta$). بنابراین، اگر مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم: $c=\alpha\cap\beta$ که در آن $\alpha=(M,a)$ و $\beta=(M,b)$. روی شکل ۱، خط راست مجهول c، خطهای راست a و b را، به‌ترتیب، در نقطه‌های Y و X قطع کرده است.

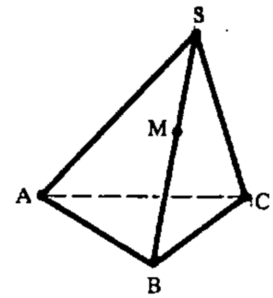
آیا مسأله یک جواب دارد؟ آیا ممکن است، مسأله جواب نداشته باشد؟

خط راست مجهول، روی دو صفحهٔ α و β است (ولی از این‌جا نمی‌توان نتیجه گرفت که، خط راست مجهول، تنها از همین راه و به کمک صفحه‌های α و β به‌دست می‌آید؛ خواهید دید روش دیگری هم برای پیدا کردن خط راست c وجود دارد). این، به‌معنای آن است که هر خط راستی که غیر از فصل مشترک دو صفحهٔ α و β انتخاب شود، نمی‌تواند پاسخ مسأله باشد. α و β نمی‌توانند بر هم منطبق باشند، زیرا خطهای راست a و b متنافرند و نمی‌توانند روی یک صفحه قرار گیرند. بجز این، $M\in\alpha\cap\beta$؛ یعنی $\alpha\cap\beta$ خط راست مورد نظر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مسأله بیش از یک جواب ندارد.

ممکن است، یکی از دو خط راست a یا b، موازی خط راست c درآید که در این‌صورت، مسأله جواب ندارد.

شاید تجسم فضایی این راه حل، برایتان دشوار باشد و نتوانید براحتی بستگی متقابل خطهای راست a، b و c را با صفحه‌های α و β در ذهن خود تصور کنید. در این‌صورت می‌توانید برای خودتان یک مُدل مقوایی بسازید و یا نقطهٔ M و خطهای راست a و b را مثلاً روی یک چهاروجهی (مثل چهاروجهی S ABC، شکل ۲) در نظر بگیرید. باید خط راستی پیدا کنیم که از نقطهٔ M بگذرد و دو خط راست SA و BC را (که نسبت به هم متنافرند) قطع کند.

شکل ۲



به‌سادگی می‌توان متوجه شد که SB همان خط راست مجهول است. ویژگیهای این خط راست را روشن کنیم: خط راست SB فصل مشترک دو صفحهٔ SAB و SBC است؛ یعنی (SB) فصل مشترک دو صفحهٔ α و β است (α از نقطهٔ M و خط راست SA و β از نقطهٔ M و خط راست BC گذشته است).

وقتی راه حل مسأله را بررسی می‌کنید، پاسخ دادن به این پرسشها، اهمیت جدی دارد:

۱) از کجا نتیجه می‌شود: مسأله بیش از یک جواب ندارد؟

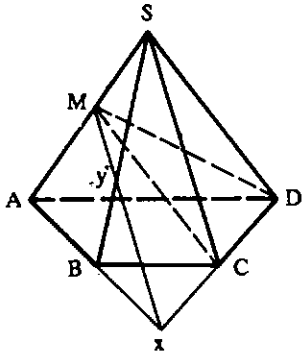
۲) با چه شرطی مسأله جواب دارد؟

۳) با آن که خط راست c به‌عنوان فصل مشترک دو صفحهٔ α و β همیشه وجود دارد، ممکن است مسأله جواب نداشته باشد. چرا؟

۴) آیا ممکن است، بامفروض بودن نقطهٔ M و خطهای راست a و b، مسأله جواب نداشته باشد؟ اکنون، همین مسأله را، به‌صورتهای دیگری و روی چند وجهیها، مطرح و حل می‌کنیم.

مسألهٔ ۱: هرم SABCD و نقطهٔ M روی یال SA داده شده است، از نقطهٔ M خط راستی بگذرانید که خطهای راست متنافر SB و CD را قطع کند.

شکل ۳



حل: همان‌طورکه درحل مسألهٔ اصلی‌دیدیم، خط راست مجهول، تنها می‌تواند فصل مشترک دو صفحهٔ $\alpha = (MSB)$ ، $\beta = (MCD)$ باشد. برای به‌دست آوردن این خط راست کافی است نقطهٔ برخورد خط راست CD را با صفحهٔ α پیدا کنیم (شکل ۳). ساختمان، به این ترتیب انجام می‌شود:

$(AB)\cap(CD) = X \;;\; X = (CD)\cap(MSB);$

در این‌صورت MX خط راست مورد نظر است.

این مسأله، راه حلِ دیگری از مسألهٔ اصلی را به ما تلقین می‌کند.

فرض کنید صفحهٔ α از نقطهٔ M و خط راست a بگذرد و خط راست b صفحهٔ α را در X قطع کند. در این‌صورت (MX) خط راست مجهول است، به‌شرطی که

$(MX) \cap a \neq \phi$

روی شکل ۱: $(MX) \cap a = Y$.

برای این که نقطهٔ X را پیدا کنیم، کافی است صفحهٔ دلخواه γ را از خط راست b بگذرانیم. اگر d فصل مشترک دو صفحهٔ γ و α باشد، آن‌وقت $X = b\cap d$. و در مسألهٔ ۱:

$a=(SB) \;;\; b=(CD) \;;\; \alpha=(MSB) \;;\; \gamma=(ABCD) \;;\; d=(AB)$

به دو نتیجه‌ای که ناشی از دو روش راه حل برای مسألهٔ اصلی است توجه کنیم:

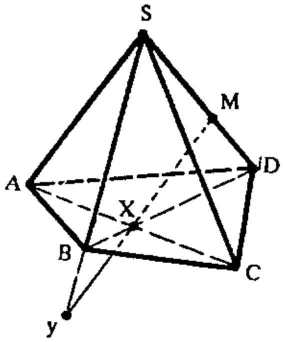
۱) اگر مسألهٔ اصلی جواب داشته باشد، آن وقت $c = \alpha \cap \beta$ خط راست مجهول است.

۲) اگر مسأله جواب داشته باشد، آن وقت $C = (MX)$، جواب مسأله است که در آن $X = b\cap d$.

این دو نتیجه متناقض نیستند، زیرا $\alpha \cap \beta = (MX)$.

مسألهٔ ۲: هرم SABCD مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر یال SD، خط راستی بگذرانید که دو خط راست SB و AC را قطع کند.

شکل ۴



حل: برای پیدا کردن خط راست مجهول، کافی است نقطهٔ برخورد خط راست AC را با صفحهٔ $\alpha = (SBD)$ پیدا کنیم.

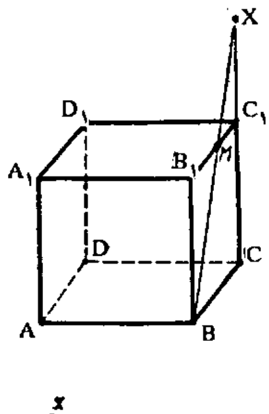
نقطهٔ $X = (AC) \cap (BD)$ را به دست می‌آوریم (شکل ۴). در این صورت $X = (AC) \cap \alpha$ که با شرط $(MX) \cap (SB) \neq \phi$ خط راست MX، خط راست مجهول است.

مسألهٔ ۳: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M روی یال B_1C_1 مفروضند. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و CC_1 را قطع کند.

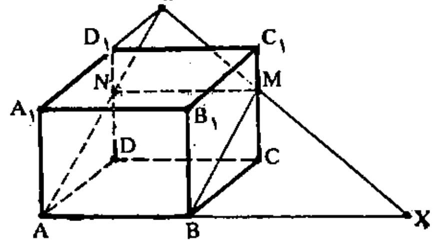
حل: (MB)، خط راست مورد نظر است (شکل ۵). در واقع

$$(MB) \cap (AB) = B \quad ; \quad (MB) \cap (CC_1) = X$$

شکل ۵



شکل ۶



مسألهٔ ۴: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M واقع بر یال C_1C داده شده است. خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و خطهای راست AB و A_1D_1 را قطع کند.

حل: اگر از راه حل دوم مسألهٔ اصلی استفاده کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که خط راست مجهول MX است که در آن $X = (A_1D_1) \cap (MBA)$.

برای رسم، به این ترتیب عمل می‌کنیم (شکل ۶):

$$۱) \ (AN) = (MBA) \cap (AA_1D_1D) \ ; \ N \in [D_1D] \ ;$$

$$۲) \ X = (AN) \cap (A_1D_1) \ ; \ X = (A_1D_1) \cap (MBA) \ ;$$

در این‌صورت، (MX) خط راست مجهول است. روی شکل ۶ داریم:

$$(MX) \cap (A_1D_1) = X \quad ; \quad (MX) \cap (AB) = Y$$

با هر انتخاب M، بین C و C_1، مسأله جواب دارد.

برای تمرین شما، سه مسألهٔ اصلی دیگر و، برای هریک، دو مسألهٔ اضافی آورده‌ایم.

مسألهٔ اصلی ۲: خط راستی رسم کنید که با خط راست مفروض a موازی باشد و دو خط راست متنافر b و c را قطع کند.

مسألهٔ ۱: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. خط راستی رسم کنید که موازی با (A_1D_1) باشد و خطهای راست (BC) و (A_1B_1) را قطع کند.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. خط راستی رسم کنید که با (A_1C_1) موازی باشد و (BB_1) و (AD) را قطع کند.

مسألهٔ اصلی ۳: از نقطهٔ مفروض، خط راستی بگذرانید که با دو صفحهٔ متقاطع مفروض موازی باشد.

مسألهٔ ۱: هرم SABCD و نقطهٔ M واقع بر یال SD مفروضند. از نقطهٔ M خط راستی عبور دهید که با صفحه‌های SAB و SCD موازی باشد.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. از رأس A_1، خط راستی موازی با صفحه‌های AB_1D_1 و BB_1C_1C رسم کنید.

مسألهٔ اصلی ۴: از نقطهٔ مفروض، صفحه‌ای بگذرانید که با دو خط راست متنافر مفروض، موازی باشد.

مسألهٔ ۱: چهاروجهی SABC و نقطهٔ M واقع بر یال SC مفروضند. از

نقطهٔ M ، صفحه‌ای عبور دهید که با خطهای راست SA و BC موازی باشد.

مسألهٔ ۲: مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M واقع بر یال C_1D_1 مفروضند. از نقطهٔ M صفحه‌ای بگذرانید که با خطهای راست و AA_1 موازی باشد.

تجربه نشان داده است که با وجود درک و حلّ مسألهٔ اصلی، ممکن است در حل مسأله‌های فرعی مربوط به آن، دشواریهایی، چه از نظر تجسم فضایی و چه از نظر رسم پدید آید، از طرف دیگر حل این مسأله‌های تکمیلی، نوعی تکرار برای مسألهٔ کلی است.

حلِّ دقیق این مسأله‌ها، بویژه، برای مسأله‌هایی مفید است که، در آنها، باید مقطع یک چندوجهی را (مثل هرم، منشور و غیره) پیدا کرد و می‌دانیم جست و جو و رسم مقطع، یکی از اساسیترین بحثها در هندسهٔ فضایی است.

تفریح اندیشه ۶

هنگامی که مهرداد سن کنونی پدرش را داشته باشد، خواهرش دو برابر سن فعلی خود را خواهد داشت. و وقتی که خواهرش به سن فعلی پدرش برسد، سن پدرش ۲ برابر سن فعلی مهرداد خواهد بود. اگر اکنون مجموع سن این سه نفر ۱۰۰ سال باشد، سن هریک را تعیین کنید.

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



آشنایی با اعدادِ مختلط

(قسمت اوّل)

(قابل استفاده دانش آموزان سال سوّم ریاضی نظام جدید)

● روح الله جهانی‌پور

§۱. پیدایش

نگاهی گذرا به تاریخ ریاضیات تمدنهای مختلف در اعصار گذشته نشان می‌دهد که بسیاری از مسائل ریاضی که با آن مواجه بودند، در قالب حل معادلات درمی‌آمد. طبیعی است که تا مدتهای مدیدی، بشر تنها اعدادی را که برای شمارش به کار می‌روند، می‌شناخت: ۱، ۲، ۳، ... و از این رو عمدهٔ معادلات جبری یاد شده، دارای جوابهای صحیح مثبت بودند. لیکن این وضع دوام چندانی نداشت و با مطرح شدن مسائلی از قبیل تقسیم‌بندی قطعه زمینها، یا جیرهٔ غذایی روزانهٔ کارگران، مثلاً در مصر قدیم، معادلات جبری با جوابهایی مثل : $\frac{1}{2}$، $\frac{4}{5}$، ... پابه عرصهٔ وجود گذاشتند. در همین راستا هر چند اعداد صحیح منفی یا اعدادی مثل $-\frac{1}{2}$ یا $-\frac{4}{5}$ در عمل مفید واقع می‌شوند لیکن بیشتر جنبهٔ نظری دارند. واضح است که در مرحلهٔ اوّل اعداد منفی برای شمارش مفید نیستند و در واقع می‌توان گفت که منفی بیشتر جنبهٔ قرارداد دارد و تعبیر کاهش، نزول و خلاف جهت را دارد، مثلاً شتاب منفی در حرکت یک جسم یعنی؛ کاهش سرعت، یا درجات دمایی منفی نشان دهندهٔ کاهش دما هستند.

اعدادی مثل $\frac{1}{2}$، $-\frac{4}{5}$ یا به صورت کلی $\frac{p}{q}$، که p و q اعداد صحیحند و در ضمن $q \neq 0$ را اعداد گویا می‌نامند. یونانیان باستان نیز همچون دیگر اقوام قدیم درگیر مسائل عملی بودند که منجر به مطرح شدن مسائل ریاضی می‌شد. لیکن آنها عمدهٔ توجهٔ خویش را معطوف جنبهٔ نظری آنها کرده بودند. بیایید با فیثاغورسیان باستان همراه شویم و ببینیم چه‌طور می‌توانیم با دیدی صرفاً نظری، اعداد را کشف کنیم.

معادلهٔ $2x - 2 = 0$ را شاید غارنشینان هم بتوانند حل کنند، زیرا جواب آن $x = 1$ است و یک نخستین عدد از سلسلهٔ اعدادی است که آنها را برای شمارش به کار می‌بردند، مثلاً : شمارش افراد قبیله یا شمارش تعداد شکارهای انجام شده در یک روز. با این حال آنها نمی‌توانستند معادلهٔ $x + 2 = 0$ را حل کنند. چرا؟ زیرا هیچ‌کدام از اعدادی که آنها می‌شناختند یعنی؛ اعداد شمارشی یا طبیعی در این معادله صدق نمی‌کند. آیا یونانیان هم نمی‌توانستند آن را حل کنند؟ شاید آری، شاید نه. امروزه می‌دانیم که جواب این معادله $x = -2$ است و -2 عددی است صحیح که اگر با ۲ جمع شود، حاصل صفر خواهد شد. به این ترتیب توانسته‌ایم اعداد دیگری علاوه بر آنچه غارنشینان هم می‌دانستند به دست آوریم. باز هم جلوتر می‌رویم و معادلهٔ $2x - 1 = 0$ را در نظر می‌گیریم. این بار مجموعهٔ اعداد وسیعتری که به دست آورده‌ایم هم نمی‌تواند جواب این معادله را دربرداشته باشد. لکین جواب این معادله $x = \frac{1}{2}$ است، و به این ترتیب این عدد یا توسط معادلات دیگری از این دست، اعداد جدیدتری بر مجموعهٔ اعداد اوّلیه‌مان افزوده می‌شود و اینها همان اعداد گویا هستند که ذکرشان رفت. فیثاغورسیان این اعداد را می‌شناختند و حتی بیشتر از اینها ادعا کردند و گفتند که تمام اعداد از این نوعند یعنی؛ گویا هستند. اما وقتی متوجه شدند که این‌طور نیست و اعدادی هم وجود دارند که گویا نیستند تصور کردند که به اصطلاح افتضاح بار آمده است و اگر بخواهیم نامی برآن بگذاریم، می‌توانیم بگوییم: رادیکال گیت (به اقتباس از واترگیت) به وجود آمد و این بحران یک قربانی هم داد و شخصی از مکتب فیثاغورسیان که این موضوع را فاش کرده بود، مجازات شد و به دریا انداخته شد تا به سزای عملش برسد!!

آنچه آنها دریافته بودند چه بود؟ بد نیست این مطلب را تحت

عنوان یک قضیّه بیاوریم:

قضیّه: $\sqrt{2}$ گنگ است، یعنی گویا نیست.

برهان: فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد. پس اعداد صحیح p و q موجودند که $q \neq 0$ و

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم p و q هیچ عامل مشترکی نداشته باشند چه در این صورت می‌توان آن را از صورت و مخرج کسر حذف کرد. با این شرط کسر فوق را تحویل‌ناپذیر می‌نامند. حال با این فرضها پیش می‌رویم و به تناقض می‌رسیم. دو طرف (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم. آنگاه

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

یا:

$$p^2 = 2q^2$$

پس p^2 زوج است و در نتیجه p زوج است. بنابراین عدد صحیح k موجود است که

$$p = 2k$$

لیکن در این صورت داریم:

$$4k^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2k^2$$

یعنی؛ q^2 و در نتیجه q زوج است. پس p و q هر دو زوجند یعنی؛ ۲ در هر دو عامل مشترک است و این با فرض تحویل‌ناپذیر بودن $\frac{p}{q}$ در تناقض است. بنابراین $\sqrt{2}$ گویا نیست. ■

به این ترتیب مجموعهٔ باز هم وسیعتری به دست می‌آوریم مرکب از اعداد گویا و گنگ بر روی یکدیگر. این مجموعه را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامند. باز هم جلوتر می‌رویم. می‌دانیم (از جبر دبیرستانی) که مربع هر عدد حقیقی،عدد حقیقی نامنفی است. به زبان دیگر اگر IR نشان دهندهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $x \in IR$ دلخواه باشد، آنگاه

$$x^2 \geq 0$$

بنابراین برای هر $x \in IR$

$$x^2 + 1 \geq 1$$

پس هیچ عدد حقیقی در معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$ صدق نمی‌کند چه در غیر این صورت به نابرابری $1 \leq 0$ می‌رسیم که ممتنع هستند. می‌بینیم که با این‌که مجموعهٔ اعداد بسیار وسیعی به دست آورده‌ایم با این حال هنوز هم معادلاتی می‌توانیم بنویسیم که جوابی در این مجموعه ندارند. منشأ عدم وجود جواب برای این معادله یا معادلاتی از این دست، آن است که ریشهٔ دوم اعداد منفی در IR تعریف نشده است. سؤال این است که اگر ریشهٔ دوم‌گیری از اعداد منفی را نیز مجاز بدانیم چه پیش می‌آید. این‌جاست که مجموعه‌ای باز هم گسترده‌تر، مجموعه‌ای که در آن هر معادلهٔ چند جمله‌ای مثل $x^2 + 1 = 0$ جواب دارد، به وجود می‌آید. در خلق این مجموعه که شبیه سلسله مراتب طی شده تاکنون، شامل IR نیز است، معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$، نقش اساسی را ایفا می‌کند. هرچند رهیافت کاملاً دقیقی در جبر وجود دارد که به خلق این مجموعه از اعداد منتهی می‌گردد، لکن ما همین مسیر نسبتاً نادقیق را پی می‌گیریم. جواب معادلهٔ

$$x^2 + 1 = 0$$

را با حرف i نشان می‌دهیم. در واقع i دارای این ویژگی بنیادی است که

$$i^2 = -1$$

یا با اصطلاحات حقیقی $i = \sqrt{-1}$. این عدد را به مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌افزاییم. خاصیت‌های خوبی که می‌خواهیم یک مجموعه از اعداد داشته باشد، یکی این است که نسبت به عملهای معینی، بویژه جمع و ضرب، بسته باشد. پس می‌خواهیم مجموعهٔ جدیدمان که البته هنوز جمع و ضرب آن را به طور دقیق تعریف نکرده‌ایم، دارای ویژگیهایی‌مثل‌شامل بودن عدد $i + i = 2i$، $-1i$، $\sqrt{2}.i$، ... باشد. به این ترتیب اندک‌اندک به سوی نمایش شکل کلی اعداد یا اعضای این مجموعه جدید رهنمون می‌گردیم. شکل کلی این اعداد به صورت

$$a + bi \qquad (2)$$

است که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند. مجموعهٔ جدید را مجموعهٔ اعداد مختلط می‌نامیم. در نمایش (۲) چیزهای تعیین کنندهٔ عدد فقط a و b هستند. یعنی در دست داشتن a و b عدد فوق را به ما می‌دهد و تمایز بین دو عدد از این نوع در نتیجه تمایز a ها و b های مختلف است. اعداد مختلط را به رسم با حروفی از قبیل t، w، ... یا با اندیس مثل z_1، z_2، ... نمایش می‌دهیم. یک عدد نوعی به صورت $z = a + bi$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب اگر $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی‌اند تنها و تنها وقتی مساوی‌اند که $a = c$ و $b = d$.

تاکنون تنها ویژگی که از i ذکر کردیم این است که $i^2 = -1$.

حال بیایید به عدد مختلط $a + bi$ به چشم یک چندجمله‌ای بر حسب i نگاه کنیم و ویژگی فوق را در نظر داشته باشیم. با این کار چیز خاصی را از دست نداده‌ایم، بلکه حتی می‌توانیم چیزهای نویی هم به دست آوریم. ضرب چندجمله‌ای‌ها را به یاد بیاورید. $z = a + bi$ و $w = c + di$ را دو چندجمله‌ای بر حسب i بگیرید و مطابق ضرب چندجمله‌ای‌ها آنها را در هم ضرب کنید:

$$z \,.\, w = (a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + i^2bd$$

اما $i^2 = -1$ لذا

$$z \,.\, w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

پس عجالتاً توانستیم فرمولی برای ضرب دو عدد مختلط به قیاس با چند جمله‌ایها ارائه کنیم. خواهیم دید که این طرز تعریف ضرب، ویژگیهای معمول ضرب را دارد. حال که برای ضرب می‌توانیم این کار را بکنیم، طبعاً برای جمع نیز باید بتوانیم ویژگی جمع چند جمله‌ایها را به کاربریم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$

حال به همهٔ آنچه تاکنون گفتیم رسمیت می‌بخشیم و تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

تعریف ۱: مجموعهٔ C، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از اعدادی به شکل نوعی

$$a + bi \qquad a, b \in IR$$

که تساوی، جمع و ضرب در آن به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ و } b = d$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

در عدد مختلط $a + bi$، اگر $b = 0$، عدد حقیقی a را به دست می‌آوریم و این مصدق این واقعیت است که اعداد حقیقی زیرمجموعهٔ اعداد مختلطند. عدد مختلط $-z = -a - bi$ را قرینهٔ عدد مختلط $z = a + bi$ و عدد مختلط $0 + 0i$ را صفر مختلط یا به اختصار صفر می‌نامیم. به این ترتیب می‌توانیم تفاضل دو عدد مختلط z و w را به صورت مجموع z و $-w$ تعریف کنیم، یعنی

$$z - w = z + (-w)$$

باز هم دو اصطلاح دیگر داریم: عدد مختلط $\bar{z} = a - bi$ را مزدوج عدد مختلط z می‌نامیم و مقدار $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق عدد مختلط $z = a + bi$. اصطلاح قدر مطلق به این دلیل است که اگر $b = 0$ آنگاه $r = |a|$، که با حالت حقیقی خود توافق دارد. منشأ هندسی این موضوع را نیز بعداً خواهیم گفت.

دیدیم که در مشخص کردن یک عدد مختلط $z = a + bi$ فقط a و b نقش دارند و با معلوم شدن دو عدد حقیقی a و b، z کاملاً معین می‌شود. این مطلب، این اندیشه را در ذهن به وجود می‌آورد که هر عدد مختلط z به صورت فوق را با زوج مرتب

$$(a, b) \qquad a, b \in IR$$

متناظر قرار دهیم. مرتب از آن جهت که دو عدد مختلط $a + bi$ و $b + ai$ با هم فرق دارند. بنابراین می‌توانیم به جای گفتگو دربارهٔ اعدادی به شکل $a + bi$ صرفاً از زوج مرتبهای اعداد حقیقی یعنی (a, b) سخن بگوییم و حتی نام اعداد مختلط را هم نبریم و جمع و ضرب یاده شده در بالا را روی زوج مرتبها تعریف کنیم، یعنی تعریف کنیم:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (۳)$$

$$(a, b) \,.\, (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad (۴)$$

بنابراین به تعریف جدیدی از اعداد مختلط دست می‌یابیم که در آن ذکری از معادله یا چیزی به نام i نیامده است. این رهیافت را روش اصل موضوعی در ابداع اعداد مختلط می‌نامند.

تعریف ۲: مجموعهٔ C، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از زوج مرتبهای به شکل

$$(a, b) \qquad a, b \in IR$$

که از دو قانون جمع و ضرب با علامتهای + و . به صورت ۳ و ۴ تبعیت می‌کنند. ●

در این طریقهٔ نمایش، عدد حقیقی a، همان زوج مرتب $(a, 0)$ است و معمولاً به جای $(a, 0)$، a می‌گذارند. حال می‌بینید که

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

و

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0)$$

و این نشان می‌دهد که اعمال جمع و ضرب ۳ و ۴ روی اعداد مختلط تعمیم جمع و ضرب روی اعداد حقیقی‌اند. حال زوج مرتب $(0, 1)$ را با i نشان می‌دهیم. در این صورت

$$i^2 = i \,.\, i = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) = -1$$

و نیز اگر $z = (a, b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، داریم:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + bi = a + bi$$

و بدینسان از طریق دقیق اصل موضوعی به همان نمایش قبلی می‌رسیم.

در روش نمایش زوج مرتبی، اگر $z = (a, b)$ آنگاه

$$\bar{z} = (a, -b)$$
$$-z = (-a, -b)$$

و برای $w = (c, d)$ داریم: $z - w = (a - c, b - d)$ و $(0, 0) = 0$. حال ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را در قالب یک قضیّه به صورت زیر گردآوری می‌کنیم.

قضیّه: (ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط)

(I) $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ویژگی جابه‌جایی جمع

(II) $\forall z_1, z_2, z_3 \in C : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

ویژگی شرکت‌پذیری جمع

(III) $\forall z \in C : z + 0 = 0 + z = z$ ویژگی عنصر خنثی جمع

(IV) $\forall z \in C : z + (-z) = (-z) + z = 0$

ویژگی عنصر وارون جمعی

(I′) $\forall z_1, z_2 \in C : z_1 z_2 = z_1 . z_2$ ویژگی جابه‌جایی ضرب

(II′) $\forall z_1, z_2, z_3, \in C : (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

ویژگی شرکت‌پذیری ضرب

(III′) عنصری که آن را با ۱ نشان می‌دهیم وجود دارد به طوری که برای هر $z \in C$

$$z . 1 = 1 . z = z$$

(IV′) برای هر $z \in C$، $z \neq 0$، عنصری که آن را با z^{-1} نشان می‌دهیم موجود است که

$z . z^{-1} = z^{-1} . z = 1$ (V′) قانون توزیع‌پذیری از چپ و راست

تبصرهٔ ۱: عنصر ۱ موجود، در ویژگی III′ را عنصر خنثی ضرب یا واحد ضرب می‌نامیم و در قالب نمایش زوج مرتبی همان عدد (۰ و ۱) است. و عنصر z^{-1} در IV′ را وارون ضربی $z \neq 0$ گویند.

تبصرهٔ ۲: مجموعهٔ کلی F همراه با دو عمل + و . که آنها را به ترتیب جمع و ضرب می‌نامیم و از ویژگیهای I تا V′ تبعیت می‌کنند را یک میدان می‌نامند. بنابراین C، اعداد مختلط، همراه با جمع و ضرب تعریف شده در فوق یک میدان تشکیل می‌دهد که آن را میدان اعداد مختلط می‌نامند.

برهان: برهان این قضیّه بسیار ساده است و با توسل به هر کدام از دو نوع نمایش اعداد مختلط می‌توان تمام بندهای آن را ثابت کرد. برای نمونه ما مثلاً بند I′ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید:

$$z_1 = (a, b)$$
$$z_2 = (c, d)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید روش زوج مرتبی را برای نمایش z_1 و z_2 به کار برده‌ایم. آنگاه داریم:

$$z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$$
$$= z_2 z_1$$

در ضمنِ اثبات از ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد حقیقی استفاده شده است. برهان بقیّه بندهای قضیّه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

در قضیّهٔ فوق شیء جدیدی با نام وارون ضربی پا به عرصهٔ وجود گذاشت. سؤال این است که اگر $z = (a, b)$ یا $z = a + bi$، z^{-1} را چگونه می‌توان بر حسب a و b و به صورت شکلِ نوعیِ اعداد مختلط نوشت. خوب! $w = z^{-1}$ چه خاصیتی دارد؟ اگر فرض کنیم:

$$w = (x, y)$$

آنگاه

$$z . w = 1 \quad (z \neq 0)$$

یا:

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

بنابراین برای یافتن x و y باید دستگاه دو معادله ـ دو مجهول

$$ax - by = 1$$
$$ay + bx = 0$$

را حل کنیم. دستگاه اخیر در صورتی جواب دارد که دترمینان ضرایب یعنی؛ $a^2 + b^2$ مخالف صفر باشد. و این فرض محقق است زیرا فرض بر این است که $z \neq 0$ و در نتیجه $|z| \neq 0$. جواب این دستگاه عبارت است از:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

و بنابراین:

$$z^{-1} = w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \text{ و } \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

به کمک وارون ضربی یک عدد مختلط می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را تعریف کرد:

$$\forall z_1, z_2 \in C \quad , \quad z_2 \neq 0 : \frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$$

با این تعریف ملاحظه می‌کنیم که به ازای $z_1 = 1$ و $z_2 = z$، داریم:

$$\frac{1}{z} = z^{-1}$$

در ضرب دو یا چند عدد مختلط، عوامل ضرب می‌توانند مساوی هم باشند. به این ترتیب به تعریف توان صحیح مثبت برای هر عدد مختلط z نایل می‌شویم. این تعریف به صورت استقرایی انجام می‌گیرد. یعنی؛ ابتدا z^1 و آنگاه برای هر $n \geq 2$، z^n را تعریف می‌کنیم:

$$z^1 = z \quad \text{و} \quad z^n = z z^{n-1} \quad n \geq 2$$

تا این‌جا اطلاعات نسبتاً خوبی به دست آوردیم. به کمک این اطلاعات می‌توانیم مسائل متنوعی را در اعداد مختلط حل کنیم. حال برای آشنایی بیشتر با نحوهٔ کاربرد این مفاهیم و نیز کشف ویژگیهای جدید و در عین حال جالب از اعداد مختلط چند مسأله را در قالب مثال می‌آوریم.

مثال ۱: ثابت کنید اگر $z = -z$، آنگاه $z = 0$ و اگر $z = \bar{z}$ آنگاه $z \in IR$.

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$ و $z = -z$. در این صورت

$$(a , b) = (-a , -b)$$

و بنا بر تعریف برابری دو عدد مختلط: $a = -a$ و $b = -b$ که از آن‌جا به دست می‌آید $a = b = 0$، یعنی؛ $z = (a , b) = 0$.

حال اگر $z = \bar{z}$ آنگاه

$$(a , b) = (a , -b)$$

و بنابراین $b = -b$ یعنی $b = 0$ یا $z = (a , 0)$ پس $z \in IR$.

مثال ۲: ثابت کنید برای هر عدد مختلط z، $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ و برای هر $z_1 , z_2 \in C$ و $z_2 \neq 0$،

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$. آنگاه طبق تعریف قدر مطلق داریم: $|z|^2 = a^2 + b^2$. اما دیدیم که

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a , -b)$$

$$= \frac{1}{|z|^2} . \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

و نیز برای $z_1 , z_2 \in C$ با $z_2 \neq 0$ داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1} = z_1 . \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

مثال ۳: ویژگی پخشی اعداد مختلط را ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید برای هر $z_1 , z_2 , z_3 \in C$ داریم: $z_1(z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3$.

حل: قرار می‌دهیم:

$$z_1 = (a_1 , b_1) \quad \text{و} \quad z_2 = (a_2 , b_2) \quad \text{و} \quad z_3 = (a_3 , b_3)$$

آنگاه برای + داریم:

$$z_1 (z_2 + z_3) = (a_1 , b_1)(a_2 + a_3 , b_2 + b_3) =$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3 , a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3)$$
$$=[(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1a_3-b_1b_3),(a_1b_2+b_1a_2)+(a_1b_3+b_1a_3)]$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3 ,a_1b_3+b_1a_3)$$
$$=z_1z_2+z_1z_3$$

برای منفی نیز وضع به همین ترتیب است.

مثال ۴: از قانون پخشی نتیجه بگیرید که برای $z \neq 0$ و $z_1,z_2 \in C$

$$\frac{z_1 \pm z_2}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

حل: طبق قانون پخشی داریم:

$$(z_1 \pm z_2)\frac{1}{z} = z_1 . \frac{1}{z} \pm z_2 . \frac{1}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

مثال ۵: محاسبه کنید:

(الف) $(1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i$

(ب) (بنابر مثال ۲) $\dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{1 + i}{1 - i} . \dfrac{1 + i}{1 + i} = \dfrac{2i}{2} = i$

(ج) $(1+2i) . (3-i) = (3+2) + (-1+6) i = 5 + 5i$

(د) $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i . i^2 = -i \Rightarrow i^4 = i . i^3 = -i^2 = 1$

(ه) برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1 \quad , \quad i^{4k+1} = 1 . i = i$$

$i^{4k+2} = 1 \cdot i^2 = -1 \quad , \quad i^{4k+3} = 1 \cdot i^3 = -i$

مثال ۶: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2، داریم:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

حل: قرار می‌دهیم:

$z_1 = (a , b) \quad , \quad z_2 = (c , d)$

آنگاه داریم:

$$z_1 \mp z_2 = (a \mp c , b \mp d) \Rightarrow \overline{z_1 \mp z_2} = \left(a \mp c \;\; -(b \mp d)\right)$$

$$= (a , -b) \mp (c , -d) = \bar{z}_1 \mp \bar{z}_2$$

به همین نحو برای ضرب داریم:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(ac - bd , ad + bc)} = \left(ac - bd , -(ad + bc)\right)$$

$$= \left(ac - (-b)(-d) , a(-d) + b(-c)\right) = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

و چون برای هر $z \in C$ ، $z \neq 0$، داریم:

$$z = (a,b) \Rightarrow \overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} \; , \; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)}$$

$$= \left(\frac{a}{a^2+b^2} \; , \; \frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{z}{|z|^2}$$

لذا

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{(z_1 z_2^{-1})} = \bar{z}_1 (\overline{z_2^{-1}}) = \bar{z}_1 . \left(\frac{z_2}{|z_2|^2}\right)$$

$$= \frac{\bar{z}_1 . z_2}{\bar{z}_2 . z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

مثال ۷: ثابت کنید برای هر $z \in C$، $z\bar{z} = |z|^2$.

حل: فرض کنیم $z = (a , b)$، آنگاه

$$z\bar{z} = (a,b)(a,-b) = (a^2+b^2, -ab+ba) = (a^2+b^2, 0)$$
$$= a^2 + b^2 = |z|^2$$

مثال ۸: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2

$$|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2| \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

که در مورد تقسیم فرض اضافی $z_2 \neq 0$ را نیز در نظر می‌گیریم.

حل: از مثال ۷ و ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. داریم:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 . \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)$$
$$= |z_1|^2 \, |z_2|^2$$

حال از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و دقت می‌کنیم که قدر مطلق همواره نامنفی است. به همین نحو برای تقسیم داریم:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{z_1}{z_2} . \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 . \bar{z}_1}{z_2 . \bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

و بار دیگر ریشه دوم می‌گیریم و نتیجه را به دست می‌آوریم.

تبصرهٔ ۳: نمایش عدد مختلط z به صورت

$z = a + bi$

را نمایش جبری و در آن a را بخش حقیقی z و b را بخش موهومی آن می‌نامیم و با نمادهای $a = \text{Re}z$ و $b = \text{Im}z$ نشان می‌دهیم.

مثال ۹: ثابت کنید، برای هر عدد مختلط z،

$\text{Re}z \le |\text{Re}z| \le |z|$ و $\text{Im}z \le |\text{Im}z| \le |z|$

حل: داریم:

$z = a + bi = \text{Re}z + i \, \text{Im}z$

و $|z^2| = (\text{Re}z^2 + (\text{Im}z)^2$ بنابراین:

$(\text{Re}z)^2 \le |z|^2 \Rightarrow |\text{Re}z| \le |z| \Rightarrow \text{Re}z \le |\text{Re}z| \le |z|$

$(\text{Im}z)^2 \le |z|^2 \Rightarrow |\text{Im}z| \le |z| \Rightarrow \text{Im}z \le |\text{Im}z| \le |z|$

مثال ۱۰: نابرابری مثلث را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر z_1 و z_2 در C داریم:

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

تعبیر هندسی این نامساوی را بعداً خواهیم گفت.

حل: داریم بنابر مثال ۷ و سپس ۶ و آنگاه مثال ۹ و بعد مثال ۸:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) =$$
$$z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}$$
$$+ |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$$

$$= \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

حال از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و حکم را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۱ : مطلب موجود در میان برهان مثال بالا را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر عدد مختلط z ، داریم:

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{z-\bar{z}}{2}$$

حل : فرض کنیم :

$z = (a , b)$

آنگاه $\bar{z} = (a, -b)$ و داریم :

$$z+\bar{z} = (a,b) + (a,-b) = (2a, 0) = 2a = 2\mathrm{Re}\,z$$

$$z-\bar{z} = (a,b) - (a,-b) = (0, 2b) = 2b = 2\mathrm{Im}\,z$$

با تقسیم این روابط بر ۲ حکم به دست می‌آید. بویژه اگر قرار دهیم $z = z_1\bar{z}_2$ ، آنگاه

$$z+\bar{z} = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

$$= 2\mathrm{Re}\,z_1\bar{z}_2$$

مثال ۱۲ : نابرابری کوشی رابرای $n = 2$ ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید برای هر چهار عدد حقیقی a_1 ، b_1 و a_2 ، b_2 ، داریم :

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\,.\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

حل : بنابر مثال ۸ ، برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 داریم :

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

و همچنین بنابر مثال ۹ :

$$|\mathrm{Re}\,z_1z_2| \leq |z_1z_2|$$

حال دو عدد مختلط z_1 و z_2 را با استفاده از چهار عدد فوق به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$z_1 = (a_1 , a_2) \quad \text{و} \quad z_2 = (b_1 , -b_2)$$

آنگاه

$$\mathrm{Re}\,z_1z_2 = a_1b_1 + a_2b_2$$

بنابراین :

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq |z_1|\,|z_2| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\,.\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

مثال ۱۳ : ثابت کنید، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مختلط

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a \neq 0$$

که در آن a ، b و c اعداد مختلطند، از فرمول مشابه حالت حقیقی به دست می‌آید.

حل : دراین‌جا نیز عیناً همان کاری را که در حالت حقیقی انجام می‌دادیم، عمل می‌کنیم :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

بنابراین :

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$.

مثال ۱۴ : ثابت‌کنیداگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ و t یک‌ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم

$$az^2 + bz_1 + c = 0 \qquad (5)$$

باشد آنگاه ریشهٔ دیگر آن $\bar{z}_1$ یعنی مزدوج z_1 است.

حل : چون z_1 ریشهٔ معادلهٔ (۵) است، بنابراین در آن صدق می‌کند؛ یعنی :

$$az_1^2 + bz_1 + c = 0$$

حال از دو طرف این رابطه مزدوج می‌گیریم و دقت می‌کنیم که هرگاه $z \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $z = \bar{z}$ بنابراین :

$$0 = \bar{0} = \overline{at_1^2 + bt_1 + c} = \overline{at_1^2} + \overline{bt_1} + \bar{c} = a\bar{t}_1^2 + b\bar{t}_1 + c$$

و چون بنابر قضیّهٔ اساسی جبر، معادلهٔ (۵) حداکثر دو ریشه در C دارد، پس تنها ریشه‌های آن z_1 و $\bar{z}_1$ هستند. بدین ترتیب ثابت کردیم ریشه‌های هر معادلهٔ درجهٔ دوم مختلط با ضرایب حقیقی ، مزدوج هم هستند.

در اثبات مطلب فوق از دو تعمیم استفاده کردیم. یکی تعمیم مثال ۶ ـ جمع و دیگری تعمیم مثال ۶ ـ ضرب است. یعنی؛ برای هر تعداد متناهی اعداد مختلط z_1 ، z_2 ، ... ، z_k داریم :

$$\overline{z_1z_2\ldots z_k} = \bar{z}_1\bar{z}_2\ldots\bar{z}_k$$

و

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_k} = \bar{z}_1 + \ldots + \bar{z}_k$$

بویژه اگر $z_1 = z_2 = \ldots = z_k$ ، آنگاه $\overline{(z_1^k)} = (\bar{z}_1)^k$

ادامه دارد

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۱)

یک مسألهٔ معروف هندسه (مسألهٔ مماس آپولونیوس)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

دوایر مزبور می‌توانند شامل دوایر تبهگن[1]، یعنی، نقاط یا خطوط مستقیم نیز باشند.

مسألهٔ معروف فوق توسط بزرگترین ریاضی‌دان دنیای باستان بعداز اقلیدس و ارشمیدس، یعنی؛ آپولونیوس پرگایی[2] (حدود ۱۷۰ - ۲۶۰ ق. م.)، که اثر عظیمش به نام K wvrká[3] معرفت به‌طور طبیعی اندک از مقاطع مخروطی آن دوران را با جامعیت شگفت‌انگیزی وسعت بخشید، مطرح شده است. متأسفانه مقالهٔ آپولونیوس، یعنی، *De Tactionibus*، که حاوی راه‌حل مسألهٔ مماس مورد بحث بوده، از دست رفته است. فرانسوا ویت[4] موسوم به ویتا[5]، بزرگترین ریاضی‌دان فرانسوی قرن شانزدهم (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، در حدود ۱۶۰۰ کوشش در بازسازی مقالهٔ آپولونیوس کرد و مسألهٔ مماس را با استفاده از جداگانه درنظر گرفتن هریک از ده حالت خاص آن، و استخراج هرمورد بعدی از حالت قبلی آن، حل کرد. درمقابل این راه حل، راه‌حلهای گاوس[6] *(Complete Works, vol, IV, P. 399)*، ژرگون[7] *(Annales de Mathématiques vol.IV)*، و پترسون[8] *(Methoden und Theorien)* به حل مسألهٔ عمومی پرداختند.

در این‌جا کار خود را محدود به‌طرح راه حل ظریف ژرگون می‌کنیم، و از آن‌جاکه اثبات مزبور علاوه برقضایای محور اصلی[9]، از خواص نقاط توافقی[10] و قطبیها[11] استفاده می‌کند، موضوع را با بحث مختصری از این دو آغاز می‌کنیم.

● نقاط توافقی

مقصودمان از اشاره به نقاط توافقی برونی[12] یا مثبت و درونی[13] یا منفی (البته به ترتیب) دو دایرهٔ R و R' با مراکز M و M' واشعهٔ r و r'، به‌ترتیب، نقاط A و J ی واقع بر خط MM'، واصل مراکز دو دایره، است که در مورد آنها و به ترتیب:

$$\frac{MA}{M'A} = +\frac{r}{r'} \quad \text{و} \quad \frac{MJ}{M'J} = -\frac{r}{r'}\ ^{*}$$

از قضیهٔ اشعهٔ موازی به‌طور مستقیم نتیجه می‌شود که:

خط واصل نقاط انتهایی دوشعاع موازی (در سوهای مخالف) دو دایره، از نقطهٔ توافقی برونی (درونی) مربوطه می‌گذرد.

بخصوص، مماسهای مشترک[15] برونی (درونی) دو دایره از نقطهٔ توافقی برونی (درونی)شان می‌گذرند. نقطهٔ توافقی برونی دوایر R و R' را به‌صورت $+RR'$، و نقطهٔ توافقی درونی آنها را به‌صورت $-RR'$ مشخص می‌کنیم، و، اگر علامت مربوطه مشخص نشده باشد، نقطهٔ توافقی را به‌صورت $\varepsilon RR'$ درنظر می‌گیریم. نماد $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' \ldots$ را باید هنگامی که تعداد علامتهای منفی ظاهر در میان نمادهای ε، ε'، ε''، ... زوج است به معنی بعلاوه و هنگامی که فرد است به معنی منها بدانیم.

◄ شکل ۱

نقاط تشابه سه دایره را با قضیهٔ زیر توصیف می‌کنیم:

قضیهٔ دالامبر ** [16]: اگر سه دایرهٔ $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ را به صورت جفتهای $(\mathcal{A},\mathcal{B})$، $(\mathcal{B},\mathcal{C})$، و $(C,\mathcal{A})$ درنظر بگیریم؛ نقاط تشابه برونی سه جفت دایرهٔ مزبور برخطی مستقیم واقع می‌شوند؛ و، به

* نسبت پاره‌خطی AX : BX[14] مثبت درنظرگرفته می‌شود اگر X بیرون AB، و منفی اگر درون آن قرار گرفته باشد.

** دالامبر (۱۷۱۷ - ۱۷۸۳)، ریاضی‌دان فرانسوی.

همین ترتیب، نقطهٔ تشابه برونی یک جفت و دو نقطهٔ تشابه درونی دو جفت دیگر برخطی مستقیم، موسوم به محور تشابه[۱۷] سه دایره، قرار می‌گیرند.

به گونهٔ مختصرتر: اگر $\alpha\beta\gamma$ بعلاوه باشد، سه نقطهٔ تشابه $\alpha\mathcal{B}\mathcal{C}$، $\beta\mathcal{C}\mathcal{A}$، $\gamma\mathcal{A}\mathcal{B}$ برخطی مستقیم واقعند.

اثبات مونژ[۱۸]: فرض می‌کنیم مراکز دوایر $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ به ترتیب A، B، C، ونقاط تشابه برونی جفتهای $(\mathcal{B},\mathcal{C})$، $(\mathcal{C}, A)$، $(\mathcal{A}$، B)، به‌ترتیب، P، Q، R باشند. اگر جفت دایره‌ای $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$، با مماسهایی برونی از آن‌که از P می‌گذرند، حول محور PBC دوران کنند، کره‌های[۱۹] $\mathcal{B}_\circ$ و $\mathcal{C}_\circ$ و مخروط مماس[۲۰] با رأس $\mathcal{P}$[۲۱] آنها را به‌دست می‌آوریم. حالت مربوط به دو جفت دایره‌ای دیگر به همین ترتیب است.

صفحات E_1 و E_2 به کره‌های $A_\circ$، $\mathcal{B}_\circ$، $\mathcal{C}_\circ$ به‌چنان طریقی مماسند که کره‌های مزبور همواره بریک طرف صفحهٔ مربوطه قرار دارند، و هر دو صفحه شامل نقطهٔ P اند، زیرا این نقطه برمماس برونی $(\mathcal{A}_\circ$، $\mathcal{B}_\circ)$ در داخل E_1 $[E_2]$ واقع است. صفحات مزبور، به همین ترتیب شامل نقاط Q و R اند.

به این ترتیب سه نقطهٔ P، Q، R بر فصل مشترک[۲۲] صفحه‌های E_1 و E_2 قرار می‌گیرند.

اگر به نقطه‌های تشابه درونی زوجهای $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$، $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ و نقطهٔ تشابه برونی $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ سروکار داشته‌باشیم، باید صفحه‌های مماسی[۲۳] را طوری اختیار کنیم که $\mathcal{A}_\circ$ و $\mathcal{B}_\circ$ دریک طرف چنین صفحه‌ای واقع باشند درحالی که $\mathcal{C}_\circ$ برطرف دیگر آن قرار داشته‌باشد.

فرض می‌کنیم، دایرهٔ دلخواه $\mathcal{D}$ با مرکز X به‌طور همگن (به‌طور ناهمگن) به دو دایرهٔ ثابت R و R′، با مراکز K و K′ و شعاعهای K و K′، در P و Q′ مماس باشد. فرض می‌کنیم، نقاط تقاطع خط مستقیم PQ′ با دوایر R و R′ و خط KK′ واصل مراکز آنها P، Q؛ P′، Q′ و S باشند.

▸ شکل ۲

از آن‌جا که زوایای قاعده‌ای مثلثهای متساوی‌الساقین[۲۴] KPQ، K′P′Q′، و XPQ′ در P و Q′ زوایای متقابل به رأس نیز هستند، هر شش زاویهٔ قاعده‌ای مزبور برابرند. از آن‌جا که دو زاویهٔ قاعده‌ای واقع در P و P′ برابرند، شعاعهای KP و K′P′ موازی‌اند. درنتیجه، S نقطهٔ تشابه برونی (درونی) R و R′ است. از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$\frac{SP}{SP'} = \pm \frac{K}{K'} \qquad \frac{SQ}{SQ'} = \pm \frac{K}{K'}$$

به این ترتیب دو حاصل‌ضرب SP. SQ′ و SQ.SP′ برابرند. اگر مقدار مشترک آنها را w بنامیم، آنگاه:

$$w^2 = SP.\ SQ'.\ SQ.\ SP' = SP.\ SQ.\ SP'.\ SQ'$$

یعنی، w^2 برابر حاصل‌ضرب قوتهای[۲۵] Π و Π' از دوایر R و R′ در S است. در نتیجه،

$$SP.SQ' = w = \sqrt{\Pi\Pi'}$$

یعنی: قوت (SP .SQ′) از دایرهٔ $\mathcal{D}$ در S ثابت $\left(\sqrt{\Pi\Pi'}\right)$ است.

▸ شکل ۳

نتیجهٔ ملاحظاتمان به صورت زیراست:

قضیّهٔ تماس: نقطهٔ تشابه برونی (درونی) دو دایرهٔ ثابت نقطه‌ای است که در آن جمیع دوایر به طور همگن (به‌طور ناهمگن) مماس به دوایر ثابت مزبور دارای قوت یکسان‌اند و در آن جمیع قاطعهای تماس[۲۶] (که با نقاط تماس به دایره‌های ثابت مزبور مشخص شده‌اند) تقاطع می‌کنند.

◆ قطب و قطبی

دو نقطهٔ P و P′ که برشعاعی بیرون آمده از O، مرکز دایرهٔ R ی به شعاع r، چنان قرار داشته‌باشند که

$Op.\ Op' = r^2$

مزدوج[۲۷] یکدیگر نسبت به آن دایره نامیده می‌شوند. از دو نقطهٔ مزدوج یکی داخل دایره و دیگری خارج آن قرار دارد.

مزدوج نقطهٔ برونی A، J، نقطهٔ تقاطع منصف دایرهٔ[۲۸] گذرنده از A با وتر تماس[۲۹] مشخص‌شده با مماسهای AT_1 و AT_2 از A بردایره است.

مزدوج نقطهٔ درونی J، A، نقطهٔ تقاطع مماسهایی است که از نقاط انتهایی T_1 و T_2 از وتر گذرنده از J و عمود بر منصف دایرهٔ گذرنده از J می‌گذرند.

▸ شکل ۴

(از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT_1 به‌طور مستقیم نتیجه می‌گیریم که $r^2 = OAOJ$.)

منظور از قطبی[۳۰] نقطهٔ P خط P ای است که بر منصف دایرهٔ

گذرندهٔ از P عمود است و از مزدوج P می‌گذرد.

برعکس، منظور از قطب[31] خط P نقطهٔ P ای است که مزدوج نقطهٔ پایه‌ای[32] عمود وارد از مرکز دایره به خط مزبور است.

به‌این ترتیب رابطهٔ بین قطب و قطبی دو جانبه است:

اگر p قطبی P باشد، در این صورت P قطب p است، و برعکس.

◄ شکل ۵

اکنون فرض می‌کنیم Q نقطهٔ دلخواهی بر P، قطبی P (که از P'، مزدوج P، می‌گذرد) و Q' مُزدوج Q باشد. در این صورت:

$$OP.\ OP' = OQ.\ OQ'\ (= r^2)$$

و درنتیجه $PP'QQ'$ یک چهار ضلعی محاط در دایره است. از آن‌جا که در این مورد زاویهٔ در P' برابر ۹۰° است زاویهٔ در Q' نیز باید ۹۰° باشد، یعنی؛ PQ' باید بر OQ عمود باشد. بنابراین: PQ' قطبی q از Q است، و قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ قطب و قطبی: اگر Q برقطبی P قرار داشته‌باشد، P نیز برقطبی Q قرار خواهد داشت. یا نیز: اگر P از قطب q بگذرد، q نیز از قطب p می‌گذرد.

اکنون به راه‌حل ژرگان در مورد مسألهٔ تماس می‌پردازیم.

در حالت کلی، تعدادی دایره موجودند که به سه دایرهٔ مفروض $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ مماسند. راه حل ژرگان مبتنی برجست وجوی دوایر مجهول به‌صورت جفت جفت، و نه تک تک، است؛ و در حالت خاص، شخص همواره جفت $(\mathcal{E}, \mathcal{J})$ ای را جست وجو می‌کند که به‌طور همگن یا ناهمگن بر هر یک از دوایر مفروض مماسند.

برای سادگی کار، تماسهای همگن را مثبت (+) و تماسهای ناهمگن را منفی (−) می‌نامیم و ترکیباتی چون $\varepsilon\varepsilon'$ از علامات تماس ε و ε' را مطابق با این قاعده در نظر می‌گیریم که «علامتهای مشابه بعلاوه و علامتهای نامشابه منها به‌دست می‌دهند.»

فرض می‌کنیم؛ دوایر E و $\mathcal{J}$، به‌ترتیب، بردوایر $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$، به‌ترتیب، در نقاط P، Q، R و p، q، r، مماس باشند، و تماسها به‌ترتیب دارای علامات A، B، C و a، b، c باشند. در این صورت:

$$Aa = Bb = Cc = \varepsilon$$

و

$$BC = bc = \alpha \quad , \quad CA = ca = \beta \quad , \quad AB = ab = \gamma$$

و

$$\alpha\beta\gamma = +$$

ابتدا ($\mathcal{J}$ و $\mathcal{E}$) را به‌صورت جفت مماس به دوایر A و B و C درنظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ تماس، $\varepsilon\mathcal{E}\mathcal{J}$، نقطهٔ تشابه $\mathcal{E}$ و $\mathcal{J}$، نقطهٔ O، مرکز قوت سه دایرهٔ $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ و نقطهٔ تقاطع سه وتر تماس Pp، Qq، Rr است.

سپس به طور متوالی $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$، $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$، $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ را به‌عنوان جفت مماس به دوایر E و $\mathcal{J}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بنا به قضیهٔ مماس، دوایر E و F در نقطهٔ تشابه $\alpha\mathcal{B}\mathcal{C} \equiv$ I، نیز در نقطهٔ تشابه $\beta\mathcal{C}\mathcal{A} \equiv$ II، و نقطه تشابه $\gamma\mathcal{A}\mathcal{B} \equiv$ III دارای قوتهای یکسان‌اند. و از آن‌جا که $\alpha\beta\gamma$ برابر + است، سه نقطهٔ I، II، III، بنابه قضیهٔ دالامبر، برمحور تشابه $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ قرار می‌گیرند. به‌این ترتیب محور تشابه $I\ II\ III$، X، وتر دوایر $\mathcal{E}$ و $\mathcal{J}$ است.

گذشته از این، اگر S نقطهٔ تقاطع مماسهای بر $\mathcal{A}$ در P و p را نمایش دهد، در این صورت sP = sp. از آن‌جا که این مماسها به $\mathcal{E}$ و $\mathcal{J}$ نیز مماس می‌شوند، S بر X، وتر $\mathcal{E}$ و $\mathcal{J}$ واقع می‌شود.

ولی s قطب وتر تماس Pp نسبت به دایرهٔ $\mathcal{A}$ نیز هست. بنابراین، از آن‌جا که X از قطب Pp می‌گذرد، از قضیهٔ قطب و قطبی نتیجه می‌شود که Pp از قطب X می‌گذرد. از آن‌جا که همین نتیجه را می‌توان نسبت به وترهای تماس Qq و Rr نیز بیرون کشید، قضیهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

وترهای تماس Pp، Qq، و Rr، به‌ترتیب، از قطبهای خط $X \equiv I\,II\,III$ نسبت به دایره‌های $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$، $\mathcal{C}$ می‌گذرند.

◄ شکل ۶

از سه قضیه‌ای که در سه بند اخیر با حروف ایرانیک مشخص کردیم؛ به‌طور مستقیم به‌دست می‌آوریم:

ترسیم ژرگون: O، مرکز قوت دوایر مفروض و محور تشابه $X \equiv I\ II\ III$ را رسم می‌کنیم، قطبهای ۱، ۲، ۳ ی X نسبت به دوایر مفروض را مشخص و آنها را به O وصل می‌کنیم. خطوط واصل‌حاصل با دوایر مفروض در نقاطی برخورد می‌کنند که در آنها با دوایر مطلوب مماسند.

مرجع:

100 Great Problems of
Elementary Mathematics

یادداشتها:

1. degenerate circles
2. Apollonius of Perga
3. Kwrcká
4. Francois Viéte
5. Viéta
6. Gàuss
7. Gergone
8. Peterson
9. chordal
10. similarity points
11. polars
12. external simIlarity points
13. internal
14. segment ratio
15. common tangents
16. D'Alembert
17. similarity axis
18. Monge
19. sphere
20. tangent cone
21. apex
22. line of intersection
23. tangential planes
24. isosceles triangles
25. powers
26. tangency secants
27. conjugate
28. circle bisector
29. tangency chord
30. polar
31. pole
32. base point

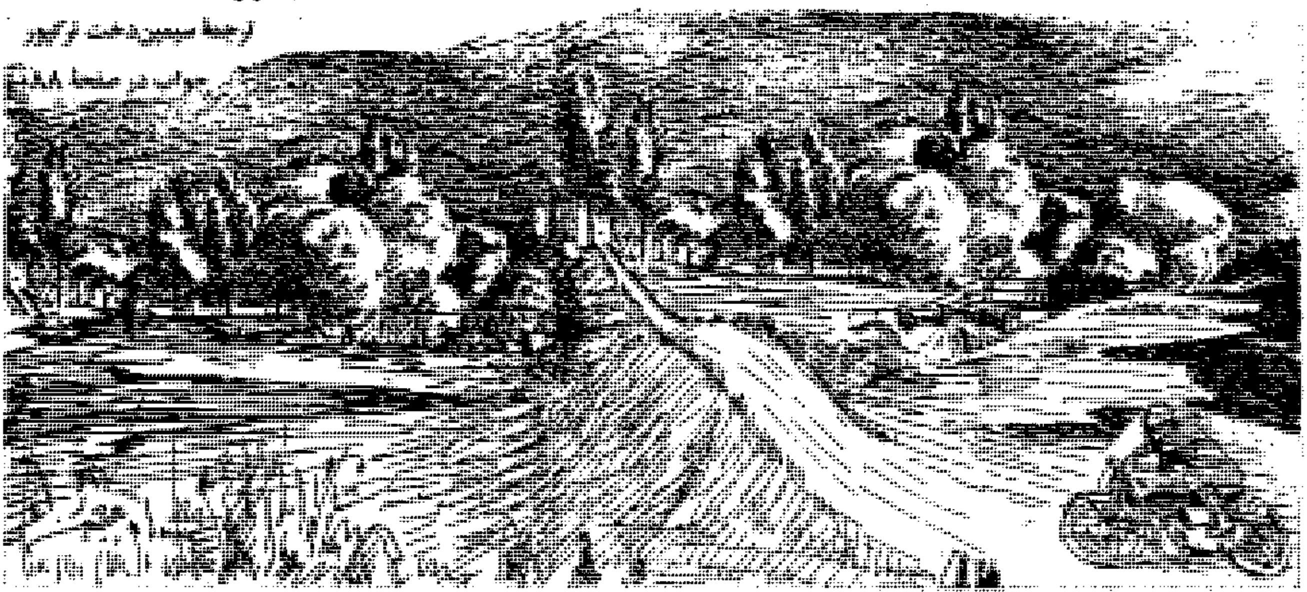
تفریح اندیشه ۷

موتور سواری مسیری را می‌پیماید که از چهارقسمت به طول مساوی تشکیل شده است. در اولین قسمت، جاده صاف و هموار است، و سرعت او ۱۰ کیلومتر در ساعت می‌باشد. در قسمت دوم، تپه‌ای است، که سرعتش در این مسیر به ۵ کیلومتر در ساعت می‌رسد. در قسمت سوم، یک سراشیبی است و سرعتش ۳۰ کیلومتر در ساعت است و در آخرین قسمت جاده صاف و هموار است و باد هم از پشت سر می‌وزد و در نتیجه سرعتش به ۱۴ کیلومتر در ساعت می‌رسد. سرعت متوسط این موتورسوار در این مسیر چقدر است؟

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی

ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکیبور

جواب در صفحهٔ [illegible]



جـــواب نامـــه‌هـــا

آقای اسماعیل مهدوی دانش‌آموز رشته تجربی (آمل)

با تشکراز زحمات بی‌دریغ شما و برای مسائل حل شدهٔ فراوانی که برای مجله ارسال داشتید. موفقیت و پیروزی شما را از خداوند متعال خواستاریم و امیدواریم در همکاری با مجله ثابت قدم باشید.

آقای بهمن اصلاح‌پذیر دبیر ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که هیأت تحریریهٔ مجله از پاسخ دادن به سؤالات خصوصی معذور است. ولی برای راهنمایی، روش تحلیلی را پیشنهاد می‌کنیم که بدین قرار است:

ابتدا معادلات (خطوط) اضلاع مثلث مفروض را با معادلهٔ دایره

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

قطع می‌دهیم که در این صورت سه معادلهٔ درجه دوم حاصل خواهد شد که مبین این سه معادله باید مثبت باشد. بدیهی است که از حل دستگاه توأم حاصله شرایط اساسی برای حل مسئله به دست می‌آید.

آقای جواد یوسف‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی (نقده)

ضمن تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز شما و مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که امید است در شماره‌های بعدی از آنان استفاده شود.

آقای حسن اسماعیلی دانشجوی رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از مقالهٔ تاریخی شما تحت عنوان «نظری گذرا بر زندگی ملامحمد باقر یزدی ریاضیدان بزرگ اسلامی» به اطلاع می‌رسانیم که امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای حسن بای (مازندران)

از مسائل ارسالی شما متشکریم. امید است مسائل را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید و از ارسال مسائل تکراری بپرهیزید.

آقای امید خاتین‌زاده دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

با تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، امید است در شماره‌های بعدی مجله از آنان استفاده شود.

آقای حسین پیروتی نژاد؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (پیرانشهر)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان شاءا... آن‌را در شماره‌های آتی مجله درج می‌کنیم.

آقای محمود رحیمی؛ دانش آموز رشتهٔ تجربی (تهران)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما، به‌عرض می‌رسانیم که به علت بالا رفتن قیمت کاغذ، قیمت مجله‌ها از جمله مجلهٔ برهان افزایش یافته است و مسؤولین محترم تا آن‌جا که ممکن است می‌کوشند تا قیمت مجله را ثابت نگه دارند. در جواب سؤال دیگر شما در مورد مطرح نکردن تست در مجله باید بگوییم که دیگر با وجود ویژه‌نامه‌های کنکور (۱ و ۲) برهان، نیازی به‌طرح تست نیست. از دو مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما نیز متشکریم.

آقای محمد وفایی‌پور؛ دیپلمهٔ ریاضی (کرج)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما، به عرض می‌رسانیم که إن شاءا... از آنها برای شماره‌های آینده استفاده می‌کنیم. در جواب نامهٔ شما مطالعهٔ سلسله مقالات آقای «پرویز شهریاری» با عنوان «شما

هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» را به شما توصیه می‌کنیم.

آقای حسین خدا دوست؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (خراسان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که آخرین حکم‌فرما «معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای هر $n > 2$ در سیستم اعداد صحیح غیر صفر ممتنع است» توسط وایلز حل شد و راه حلّ وی هنوز تحت بررسی است. باید به استحضار برسانیم که در ابتدای اثبات، شما فرض کرده‌اید: $(x , y) = (x ,z) = (y , z) = 1$ که این فرض اشتباه است زیرا x و y و z دچار محدودیت شده‌اند و در واقع از عمومیت مسأله کاسته شده است. برای اطلاع بیشتر در این زمینه می‌توانید به شمارهٔ ۴۰ «رشد آموزش ریاضی» مراجعه کنید.

آقای محمود یلوه‌ای؛ دانش‌آموز سال اوّل دبیرستان (کرمانشاه)

با تشکر از ارسال یک سرگرمی تحت عنوان «تعیین تعداد ارقام صحیح ریشهٔ n ام یک عدد طبیعی» به عرض می‌رسانیم که ان شاءا... در جای مناسب از آن استفاده می‌شود.

آقای شاهرخ شهسواری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (رامسر)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان‌شاءا... برای شماره‌های آینده مجله از آنها استفاده می‌کنیم.

خانم طاهره خواجوند زریری؛ دانش آموز رشته ریاضی (رامسر)

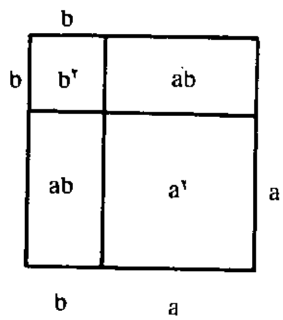
ضمن تشکر از نامهٔ شما در جواب باید بگوییم که شکل هندسی عبارتهای $(a + b)^2$ و $(a + b)^3$ را می‌توان با توجه به اتحادهای زیر رسم کرد:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (2)$$

با توجه به شکل داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$



با الهام از تعبیر هندسی $(a + b)^2$، برای تعبیر هندسی عبارت $(a+b)^3$ نیز می‌توان مکعبی به ضلع a را در نظر گرفت و اضلاع یک گوشه آن‌را به اندازهٔ b امتداد داد. با تکمیل پوشش مکعب اوّلیّه با حجم a^3، سه مکعب مستطیل به حجم a^2b و سه مکعب مستطیل به حجم ab^2 که تیغه‌ها را تشکیل می‌دهند نیز به‌وجود می‌آیند. در گوشهٔ مکعب اوّلیّه نیز مکعبی به حجم b^3 نیز وجود دارد که از مجموع مکعبها داریم:

$$(a+b)^3=a^3+(a^2b+a^2b+a^2b)+(ab^2+ab^2+ab^2)+b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

به‌طریق مشابه احتمال دارد عبارتهای: $(a + b)^4$ و $(a + b)^5$ و ... را نیز بتوان توسط شکلهای فضایی پیچیده‌تری تعبیر کرد.

آقای رضا کهکشانی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (کاشان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «بحثی پیرامون عدد اصلی مجموعه» است، به‌عرض می‌رسانیم که ان‌شاءا... از آن برای شماره‌های بعدی مجله در جای مناسب استفاده می‌کنیم.

آقای سید محمد نوید پور؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (بابلسر)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای مرکب» است، به‌عرض می‌رسانیم که ان‌شاءا... در شماره‌های آتی در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمد مهدی تنباکوزاده؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. ان‌شاءا... از آن برای شماره‌های آینده مجله در قسمت مسائل برای حل استفاده می‌کنیم.

آقای امیر حسین اثنی عشری؛ دانش‌آموز (تهران)

از مسائل حل شدهٔ شما متشکریم. ان شاءا... مسائل را در سطح مطلوبتری ارائه دهید. از خداوند منان موفقیت شما را خواهانیم. سعی کنید قبل از طرح و حل مسأله، شماره‌های قبلی برهان را مطالعه کنید و با توجه به قسمت مسائل برای حل و مسائل مسابقه‌ای، مسائل جدید و غیر تکراری طرح کنید.

معرفی کتاب



❑ **تفریح اندیشه با بازیهای عددی**
مترجم: سیمین‌دخت ترکپور
ناشر: انتشارات محراب قلم

این‌کتاب ترجمه‌ای‌است از کتاب ۱۰۰ بازی عددی (100 Jeux Numériques) تألیف پیربرلوکن نویسندهٔ معاصر فرانسوی در زمینهٔ بازیهای ریاضی، که مارتین گاردنر نویسنده بزرگ سرگرمیها و بازیهای ریاضی و پارادوکسها در مقدمه‌ای بر یکی از کتابهای پیربرلوکن او را به عنوان نویسنده‌ای توانا و بزرگ در این زمینه ستوده است.

ترجمهٔ این کتاب بسیار خوب و روان است و نمونه‌هایی از مسائل آن در مجلهٔ برهان شماره‌های ۸ و ۹ و ۱۰ چاپ شده است.
کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی شامل ۱۰۰ مسأله ریاضی در زمینه‌های مختلف است. حل مسائل آن نیازی به داشتن معلومات وسیع ریاضی ندارد. همچنین لازم نیست که متخصص در حل معماها و اعمال مشکل ریاضی باشید، بلکه کافی است از هوش خود بهره بگیرید و فکر خود را به کار اندازید.
مطالب کتاب طوری تنظیم شده‌اند که شما را به‌تدریج و نامحسوس از حل مسائل آسان به حل مسائل مشکل‌تر رهنمون می‌شوند.
در زمانی که مسابقات و تستها برای تحصیل و تعیین شغل نقش مهم، قاطع و تعیین‌کننده‌ای دارند، کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی، شما را در کسب سرعت، و مهارتهای هوشی لازم برای پاسخ دادن به تستها و حل مسأله‌ها یاری می‌دهد، ضمن آنکه جنبهٔ تفریح و سرگرمی نیز دارد.

این کتاب برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی، دبیرستان و برای داوطلبان کنکور، همچنین دانشجویان و هر فرد علاقمند به ریاضی سودمند است.

❑ **ویژه‌نامه برهان، شماره‌های ۱ و ۲**
ویژهٔ کنکور سراسری مرحله اول و دوم (تجربی و ریاضی)
ناشر: انتشارات مدرسه

این ویژه‌نامه‌ها شامل تستهای متنوع و مناسب در دو شماره چاپ شده که تستها با حل تشریحی بسیار گویا و مفید توأم می‌باشند.

ویژه‌نامهٔ شمارهٔ ۱ کنکور شامل حدوداً ۳۷۰ تست می‌باشد و برای مرحلهٔ دوم کنکور طرح ریزی شده است. در این ویژه‌نامه از سال اول تا چهارم در دروس جبر و آنالیز ـ مثلثات ـ ریاضیات جدید ـ هندسه و ریاضیات تجربی، تستهایی طرح و حل شده‌اند.

ویژه‌نامه شمارهٔ ۲ کنکور شامل ۵۰۰ تست و مخصوص مرحلهٔ اول کنکور می‌باشد. در این ویژه‌نامه فقط از دروس ریاضی سال چهارم ریاضی و تجربی تستهایی طرح و حل شده‌اند.
در حل تشریحی تستها سعی شده است تا همهٔ نکات لازم ذکر شود تا دانش‌آموزان در حل تشریحی بتوانند به‌نوعی آموزش نیز دست یابند.
مطالعه و استفاده از این ویژه‌نامه‌ها را به تمامی دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات و نیز دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

❑ ویژه‌نامه برهان، شمارهٔ ۳
ویژهٔ امتحانات نهایی (ریاضی و تجربی)
ناشر: انتشارات مدرسه

اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان برای آشناشدن دانش‌آموزان عزیز با نحوه و نوع سؤالات امتحانات نهایی در دروس جبر و آنالیز ـ ریاضیات جدید ـ هندسه و ریاضیات تجربی و مهمتر از آن با چگونگی جوابگویی به سؤالات مطرح شده اقدام به تألیف این ویژه‌نامه نموده‌اند.

این ویژه‌نامه که شامل آخرین امتحانات برگزار شده در سال ۱۳۷۳ می‌باشد دربرگیرندهٔ حل تشریحی مناسب برای هر سؤال بوده و مؤلفین سعی کرده‌اند هر مسأله را حتی‌الامکان از ۲ یا حتی ۳ روش حل کرده و در حل آنها نکته‌های لازم را متذکر شده تا علاوه بر دسترسی دانش‌آموزان به حل صحیح و مناسبِ سؤالات به نوعی، آموزش برخی از مفاهیم درسی نیز صورت گرفته باشد.

اعضای هیئت تحریریه مجله ریاضی برهان، مطالعه و استفاده از این ویژه‌نامه را برای دانش‌آموزان سال چهارم و دبیران ریاضی توصیه کرده و در نظر دارد هر ساله با اضافه کردن سؤالات امتحانات نهاییِ همان سال این ویژه‌نامه را تکمیل‌تر نماید.

❑ بخش‌پذیری در جبر
تألیف: پرویز شهریاری
انتشارات مدرسه، چاپ اول

دومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد. در این کتاب به جز متن درسی، ۳۴ مسأله (در داخل متن) و ۷۰ تمرین حل شده است. (حل تمرینها در پایان کتاب آمده است.)

برای این‌که از طولانی‌شدن متن پرهیز شود، بسیاری از نکته‌های لازم، ضمن حل مسأله‌ها یا تمرینها آمده است. هیچ مسأله یا تمرینی بدون دلیل نیامده و تنها با مطالعهٔ **کامل** تمامی این کتاب کوچک، می‌توان به همهٔ نکته‌های لازم پی برد.

در این کتاب تلاش شده از مسأله‌ها و تمرینهایی استفاده شود که در کتابهای دیگر وجود نداشته باشد، مگر مسأله‌ها یا تمرینهایی که صورت کلاسیک پیدا کرده و در هر کتاب درسی یا کمک درسی دیده می‌شوند.

مطالعهٔ این کتاب را به تمامی دانش‌آموزان دبیرستانی (تجربی و ریاضی) و معلمین دلسوز پیشنهاد می‌کنیم.

❑ هندسه تحلیلی چند محوری و چند رساله دیگر
تألیف: احمد شرف‌الدین
انتشارات مدرسه، چاپ اول

این کتاب، پژوهش و تحقیقی است که در قالب هندسهٔ تحلیلیِ چند محوری و چند رسالهٔ دیگر مطرح شده است.

کتاب فوق‌الذکر شاملِ چهار بخش مستقل است. بخش اول آن «هندسه چندضلعیها» نام گرفته و روشهایی جدید برای اثبات قضایای هندسی در این بخش ارائه گردیده است. در این فصل در حدود هشت قضیه از طرف مؤلف ابداع گردیده است.

مؤلف در بخش دوم کتاب تحت عنوان «تقارن nتایی» بعضی از خواص اشکالی را که دارای چند محور تقارنِ غیرمتقارب‌اند بررسی نموده‌اند که قضایایی نیز راجع به اشکال با تقارن nتایی عرضه نموده‌اند.

در بخش سوم کتاب تحت عنوان «تعمیم قضایا» نویسنده چند حکم هندسی را تعمیم داده است، از جمله: تعمیم قضیهٔ آپولونیوس، تعمیم کلّی دربارهٔ پنج ضلعی منتظم، تعمیم قضیهٔ برهماگوپتا.

در بخش چهارم کتاب تحت عنوان «اثبات قضایا» نویسنده چند حکم کلّی را به راههای تازه اثبات نموده‌اند که از آن جمله‌اند:

قضیهٔ قوت نقطه دایره، قضایای مثلث قائم‌الزاویه، قضیهٔ نیمساز مثلث، قضیهٔ بطلمیوس، رابطهٔ بین میانگین حسابی و هندسی چند عدد مثبت.

مطالعه این کتاب را به همهٔ علاقه‌مندان به هندسه و دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنیم.

تفریح اندیشه ۸

چگونه می‌توان با قراردادن علائم مناسب + ، − ، × ، ( ) در هر سطر تساوی برقرار نمود؟

۸ ۸ ۸ ۸ = ۱۰
۸ ۸ ۸ ۸ = ۱۵
۸ ۸ ۸ ۸ = ۵۶
۸ ۸ ۸ ۸ = ۸۰
۸ ۸ ۸ ۸ = ۱۲۰
۸ ۸ ۸ ۸ = ۱۹۲
۸ ۸ ۸ ۸ = ۵۲۰

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی
ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸

حل مسائل مسابقه‌ایِ برهانِ ۱۱

۱ـ فرض کنیم $k > 1$ و $P=k^2(2k^4+3k^3-k^2-3k-1)$، برای اینکه ثابت کنیم $36 \mid P$ چون $(4,9)=1$ و $36=4\times 9$ کافی است ثابت کنیم $4 \mid P$ و $9 \mid P$.

از طرفی: $P = k^2(k^4 - k^2 + 3k^3 - 3k + k^4 - 1)$

$$\Rightarrow P=k^2[k^2(k^2-1)+3k(k^2-1)+(k^2-1)(k^2+1)]$$

$$=k^2(k^2-1)(2k^2+3k+1)=k^2(k-1)(k+1)^2(2k+1)$$

حال اگر k زوج باشد k^2 بر ۴ بخش‌پذیر است و اگر k فرد باشد $(k+1)$ زوج بوده و $(k+1)^2$ بر ۴ بخش‌پذیر است پس P همواره مضرب ۴ است یعنی $4 \mid P$.

از طرفی اگر k مضرب ۳ باشد که k^2 مضرب ۹ است و اگر k مضرب ۳ نباشد لذا ماندهٔ تقسیم آن بر ۳ یا ۱ است و یا ۲ پس باید به یکی از دو صورت $(k-1)$ یا $(k+1)$ باشد که در هر دو صورت یک‌بار $(k+1)^2$ مضرب ۹ است و در حالتی‌که به‌شکل $(k-1)$ باشد چون $(2k+1)$ نیز مضرب ۳ است پس $(k-1)(2k+1)$ مضرب ۹ است پس همواره $9 \mid P$ و حکم ثابت است.

۲ـ می‌خواهیم ثابت کنیم عدد $A = 3^{40} - 1$ بر عدد $B = 396880$ بخش‌پذیر است، برای این‌کار چون، $B = 2^4 \times 5 \times 11^2 \times 41$ پس کافی است ثابت کنیم عدد A بر 2^4 و ۵ و 11^2 و ۴۱، جداگانه بخش‌پذیر است (اعداد فوق دو به دو نسبت به‌هم اولند):

الف) $A = (3^5 - 1)(3^5 + 1)(3^{10} + 1)(3^{20} + 1) \quad (1)$

از طرفی $3^5 = 2\times 121 + 1$ پس، $3^5-1=121\times 2=11^2\times 2$

بنابراین A بر 11^2 بخش‌پذیر است.

ب) $(3,41) = 1 \overset{\text{فرما}}{\Longrightarrow} 3^{40} \overset{41}{\equiv} 1 \Rightarrow 41 \mid (3^{40}-1)=A$

ج) $(3,5)=1 \overset{\text{فرما}}{\Longrightarrow} 3^4 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^8 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{10} \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} -1$

$$\Rightarrow 3^{10} \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow 5 \mid (3^{10}+1) \Rightarrow (3^{10}+1) = 5k$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} A = 5k_1$$

د) چون اعداد $(3^5 - 1)$ و $(3^5 + 1)$ و $(3^{10} + 1)$ و $(3^{10} - 1)$ همگی زوج می‌باشند پس:

$$\left.\begin{aligned} 3^5 - 1 &= 2k_1 \\ 3^5 + 1 &= 2k_2 \\ 3^{10} - 10 &= 2k_3 \\ 3^{10} + 10 &= 2k_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{حاصل‌ضرب سمت چپ} = 2^4(k_1k_2k_3k_4)$$

بنابراین A بر 2^4 نیز بخش‌پذیر است و حکم ثابت می‌شود.

حل: در اکثر زبانهای برنامه‌نویسی اعداد صحیح به دو دستهٔ ۱ـ اعداد صحیحِ علامت‌دار، ۲ـ اعداد صحیح بدون علامت تقسیم می‌شوند که اعداد صحیح نوع اول را Integer و اعداد صحیح نوع دوم را unsigned integer می‌نامند.

۱ـ فرض می‌کنیم اعداد صحیح علامت‌دار به صورت علامت و قدر مطلق عدد (sign + magnitude) ذخیره می‌شود.

ابتدا یک حافظهٔ n بیتی رسم کرده و بیتها را از راست به چپ به صورت زیر شماره گذاری می‌کنیم:

n−۱	n−۲	n−۳		۴	۳	۲	۱	۰

بیت علامت — n بیت

بزرگترین عدد صحیح قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی، عددی است که تمام بیتهای خانهٔ حافظهٔ آن با ۱ پر شود و بیت علامت آن، علامتِ عدد مثبت یعنی ۰ باشد.

نمایش بیتی آن به صورت زیر است:

n−۱	n−۲	n−۳		۳	۲	۱	۰
۰	۱	۱	---	۱	۱	۱	۱

اکنون معادل عـدد $(\underbrace{۱۱...۱۱۱۱}_{n-۱\text{ تا}})_۲$ را در مبنای ۱۰ به دست می‌آوریم. داریم:

$$(\underbrace{۱۱...۱۱۱۱}_{n-۱\text{ تا}})_۲ = ۱\times ۲^{n-۲}+۱\times ۲^{n-۳}+ ... +۱\times ۲^۳+۱\times ۲^۲+۱\times ۲^۱+۱\times ۲^۰$$
$$=۲^{n-۲}+۲^{n-۳}+...+۲^۳+۲^۲+۲^۱+۱$$

مجموع طرف راست بالا، جمع $n-۱$ جملهٔ یک تصاعد هندسی نزولی است که در آن

$t_۱ = ۲^{n-۲}$ جملهٔ اول، $n' = n-۱$ تعداد جملات

$q=\frac{۱}{۲}$ قدر نسبت

$$s_n=\frac{t_۱(q^{n'}-۱)}{q-۱}=\frac{۲^{n-۲}((\frac{۱}{۲})^{n-۱}-۱)}{\frac{۱}{۲}-۱}$$ مجموع جملات
$$=۲^{n-۱}-۱$$

بدین ترتیب بزرگترین عدد صحیحِ قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی عدد $۲^{n-۱}-۱$ است. کوچکترین عدد صحیح قابل ذخیره در یک حافظهٔ n بیتی، عددی‌بامشخصات‌بالا است‌با‌این تفاوت که در بیت علامت آن، علامت عدد منفی یعنی ۱ ذخیره شود که در محاسبهٔ تبدیل مبنا شرکت نمی‌کند. بدین ترتیب عدد $-(۲^{n-۱}-۱)$ به‌دست می‌آید. با عملیات و استدلال مشابه، بزرگترین عدد صحیح علامت‌دارِ قابل ذخیره در یک خانهٔ حافظهٔ 2n بیتی، عـدد $\pm(۲^{۲n-۱}-۱)$ خواهد بود.

۲ـ در اعداد صحیح بدون علامت، تمام n خانهٔ حافظه به عدد اختصاص می‌یابد و بیت علامتی وجود ندارد. بنابراین نمایش بزرگترین عدد صحیح بدون علامتِ قابل ذخیره در خانهٔ حافظهٔ n بیتی به‌صورت زیر است:

n−۱	n−۲	n−۳		۳	۲	۱	۰
۱	۱	۱	---	۱	۱	۱	۱

حال لازم است عدد $(\underbrace{۱۱۱...۱۱۱۱}_{n\text{ تا}})_۲$ را به معادل آن در مبنای ۱۰ تبدیل کنیم.

با روش تصاعدی داریم:

$$(۱۱۱...۱۱۱۱)_۲ = ۲^{n-۱}+۲^{n-۲}+...+۲^۳+۲^۲+۲^۱+۱$$

با فرض ۲= x داریم: $=x^{n-۱}+x^{n-۲}+...+x^۳+x^۲+x+۱$

$$=\frac{x^n-۱}{x-۱}=\frac{۲^n-۱}{۲-۱}=۲^n-۱$$

کوچکترین عدد صحیح بدون علامت قابل ذخیره در خانهٔ حافظهٔ n بیتی عدد صفر است چون همهٔ خانهٔ حافظه را با صفر پر می‌کنیم.

با عملیات مشابه بزرگترین عدد صحیح بدون علامتِ قابل ذخیره در یک خانهٔ حافظهٔ 2n بیتی عدد $۲^{۲n}-۱$ است و کوچکترینِ آن عدد صفر است.

بطور خلاصه اگر N یک عدد صحیح (علامت‌دار) باشد، در خانهٔ حافظهٔ n بیتی: $-(۲^{n-۱}-۱)\le N\le ۲^{n-۱}-۱$

و درخانهٔ حافظهٔ 2n بیتی: $-(۲^{۲n-۱}-۱)\le N\le ۲^{۲n-۱}-۱$

است.

اگر N یک عدد صحیح بدون علامت باشد:

در خانهٔ حافظهٔ n بیتی: $۰\le N\le ۲^n-۱$

و در خانهٔ حافظهٔ 2n بیتی: $۰\le N\le ۲^{۲n}-۱$ است.

اسامی افرادی که مسائل مسابقه‌ای شمارهٔ ۱ و ۲ مربوط به برهان ۱۱ را صحیح حل کرده‌اند:

الف) افرادی‌که هر دو مساله را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ مهرزاد نیکخواهان و حمید مهرانی فرجاد (سال چهارم ریاضی) ـ تهران

۲ـ نادر مطیع (سال چهارم ریاضی) ـ تهران

۳ـ حسین سبزرو (دانشجو) ـ تهران

۴ـ سروش عباسپور (دوم دبیرستان) ـ ساری

۵ـ سبحان نظری (چهارم ریاضی) ـ نورآباد ممسنی

۶ـ محمدعلی مهتدی (سوم ریاضی) ـ بناب

۷ـ اکبر ترابی (چهارم‌ریاضی) ـ زنجان

۸ـ علیرضا خان تیموری (سوم‌ریاضی) ـ زنجان

۹ـ حامدمحمدپور (دوم ریاضی) ـ لنگرود

۱۰ـ علی بهرامی شریف (دوم ریاضی) ـ همدان

۱۱ـ رحمان آزادیخواه (سوم ریاضی) ـ سقز

۱۲ـ سمیّه هرچپور (سال دوم نظام‌جدید) ـ چالوس

ب) افرادی‌که یک مسأله را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ عبدا.. شعبانی (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ مراغه

۲ـ مجیدشهروی (سوم ریاضی) ـ تهران

۳ـ الههٔ شهپری (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ اسفراین

۴ـ حمیدمیرباقری (چهارم ریاضی) ـ لاهیجان

۵ـ بیژن صادقی (سوم ریاضی) ـ تهران

٦ـ علی انرجی (دوم ریاضی) ـ کرج

۷ـ زهرا یامی (سوم ریاضی نظام جدید) ـ مرند

۸ـ رضا رضازاده (دانش‌آموز رشته ریاضی) ـ ارومیه

۹ـ سیدجواد رسولی (چهارم ریاضی) ـ مشهد

اسامی افرادی که مسأله مسابقه‌ای کامپیوتری را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ محمدعلی مهتدی (سوم ریاضی) ـ بناب

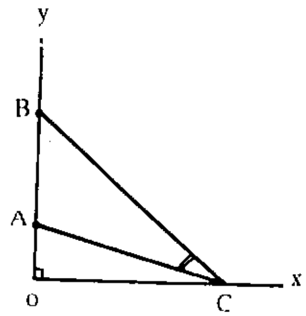
۲ـ حسین سبزرو (دانشجو) ـ تهران

۳ـ مانا سپهوند (چهارم ریاضی) ـ خرم‌آباد

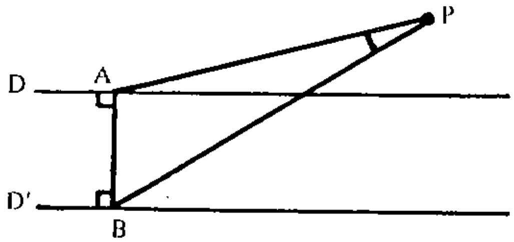
۴ـ سبحان نظری (چهارم ریاضی) ـ نورآباد ممسنی

مسائل مسابقه‌ای

۱ ـ زاویهٔ قائمه xoy و پاره‌خط ثابت AB واقع بر ضلع oy مفروض است. نقطهٔ c را روی ضلع ox چنان بیابید که از این نقطه پاره‌خط AB تحت بزرگترین زاویهٔ ممکن رؤیت شود.



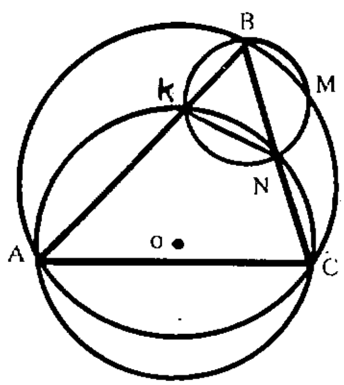
۲ ـ دو خط متوازی D و D′ و نقطهٔ P خارج این دو خط مفروض‌اند. پاره‌خط AB را محصور بین دو خط D و D′ و عمود بر این دو خط، چنان رسم کنید که زاویه APB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



مسأله‌ای از المپیادهای بین‌المللی ریاضی

دایره‌ای به مرکز o از رئوس A و C از مثلث ABC می‌گذرد و قطعات AB و BC را باردیگر به ترتیب در نقاط متمایز K و N قطع می‌کند. دوایر محیطی مثلثهای ABC و KBN دقیقاً در دو نقطهٔ متمایز B و M متقاطعند. ثابت کنید که زاویهٔ OMB زاویه‌ای قائمه است.

بیست و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۵



اولاً: اندازهٔ قطر $D'B$ را محاسبه کنید.

ثانیاً: مساحت صفحهٔ $ABC'D'$ را به‌دست آورید و تعیین کنید که این صفحه حجم منشورمنتظم را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کند.

ثالثاً: حجم هرم D' ـ $ABCD$ را محاسبه کنید.

۴ـ ضریب زاویهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = F(x) = 3x^2 - x^3$ را در نقطهٔ عطفش به‌دست آورید.

۵ـ تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3ax^2 + 3x$ به ازای چه مقادیری از a همواره صعودی یا صفر است؟

۶ـ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $F(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ را به‌دست آورید.

۷ـ اگر $F(x) = \frac{2}{x}$ و $(fog)(x) = \sqrt{x^2+1}$ باشد، $g(3)$ را تعیین کنید.

۸ـ اگر تابع با قانون زیر در نقطهٔ $A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ پیوسته باشد، مقدار عبارت $F(1)\ F''(\frac{-\pi}{2})$ را حساب کنید:

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + k - 1 & x < 0 \\ kx^3 + s & x \geq 0 \end{cases}$$

۹ـ فاصلهٔ مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ از خط به معادله $y = x + k$ برابر $\sqrt{2}$ است، مقادیر K را تعیین کنید.

۱۰ـ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x - 2\cos^2 x}{x\, tg\, x} = ?$$

(فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج)

۱۱ـ مقدار x را از رابطهٔ زیر به‌دست آورید:

$$tg\, x = \frac{\cos^2 10^\circ}{\cos 20^\circ \cos 30^\circ}$$

فرستنده: آقای اسماعیل مهدوی دانش آموز رشته تجربی آمل

۱۲ـ مجموعهٔ جواب معادلهٔ زیر را حساب کنید:

$$(4x\cos^{73}x + 4x)(\sin^{74}x + |\sin x| + \sqrt{\sin x}) = 0$$

۱۳ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$48\, Arcsin \sqrt[3]{x} - 8\, Arccos(-x) = 8\, Arccos(x)$$

۱۴ـ عبارات زیر را محاسبه کنید:

$$A = tg\, 70^\circ\, cotg\, 40^\circ\, cotg\, 80^\circ$$
$$B = \sin 42^\circ - \cos 12^\circ + \sin 18^\circ$$

۱۵ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$tg\, 7n^4x\, cotg\, 5x = -1$$

۱۶ـ هرگاه در مثلثی رابطهٔ $\frac{2a^3 + 2b^3 + 2c^3}{3a + 3b + 3c} = \frac{2a^2}{3}$ برقرار باشد، زاویه $\hat{A}$ را حساب کنید.

مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ اگر $x^3 + y^3 = 3xy + x + y + 4$ باشد، مشتق y نسبت x را به‌دست آورید.

۲ـ اگر $y = 7u^3 + 7u^4 + 1$ و $u = \cos^2 2x$، مقدار مشتق y برحسب x در نقطه‌ای به‌طول $x = \frac{\pi}{8}$ را به‌دست آورید.

۳ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $F(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$ در نقطهٔ تقاطع خط $y + x + 2 = 0$ با محور طولها را به دست آورید.

۴ـ اگر تابع با ضابطهٔ مفروض $y = x^4 - 2x^3 + mx^2 - 1$ دارای سه اکسترمم (ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی) باشد، حدود m را تعیین کنید.

۵ـ اندازهٔ مساحت دایرهٔ $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y = 8$ را حساب کنید.

۶ـ معادلهٔ بیضی را که قطرهای آن روی خطهای $\circ = ۶ - ۲x$ و $\circ = ۱۲ + ۳y$ واقع و بر محورهای مختصات مماس است بنویسید.

۷ـ خروج از مرکز هذلولی به معادلهٔ $۱۸x^۲ - ۳۲y^۲ - ۳۶x + ۶۴y - ۳۰۲ = \circ$ را حساب کنید.

۸ـ حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی به‌معادلهٔ $y = x^۲$ و خط $y = ax$ حول محور xها برابر $\frac{۲\pi}{۱۵}$ است، مقدار a را حساب کنید.

فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج

۹ـ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید:

$$tg\frac{\pi}{۱۶} + ۲tg\frac{\pi}{۸} + ۴tg\frac{\pi}{۴} = cotg\frac{\pi}{۱۶}$$

فرستنده: آقای یوسف خمسه دانش آموز رشته ریاضی کرج

۱۰ـ معادلهٔ $۴(\sin x\cos x + m\cos^۲ x) = ۱ + \sin^۲ x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد.

۱۱ـ حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر دارای جواب حقیقی باشد:

$$m\sin(x-\alpha) + \sin\alpha - \sin x = \circ$$

فرستنده: آقای محمد معینی دانش‌آموز رشته ریاضی زنجان

۱۲ـ مقدار عبارت $A = ۱+\cos ۲x+\cos ۴x+\cos ۶x+\cos ۸x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۹}$ حساب کنید.

۱۳ـ تابع با ضابطهٔ $y = \frac{\sin x + \cos^۲ x\sin x}{۲\cos^۲ x + ۲}$ را در یک دورهٔ تناوب رسم کنید.

ادب ریاضی

اولین مرحلهٔ نزدیک شدنمان به طبیعت وصف است. اما زمانی‌که در مورد آن بیشتر دانستیم و روابط بین اجزاء آن را درک کردیم، شروع به‌ساختن‌مدل‌ریاضی «mathematical model» طبیعت می‌کنیم. و این مرحلهٔ خلاقی است که به بصیرت و الهام بسیار احتیاج دارد. در انجام این عمل به معانی کلماتی که آنها را به کار می‌بریم تکیه می‌کنیم و آکسیومهایی را که اساس تئوری ریاضیمان را تشکیل می‌دهند گسترش می‌دهیم. شاید با این طرز عمل توسط معلومات هندسیتان، که در آن آکسیومها توضیحی مجرد از آنچه انسان زمانی‌که شروع به‌اندازه‌گیری زمین‌کردمشاهده‌نمود، می‌دهند، آشنا باشید.

اصول ریاضی:
غلامرضا یاسی‌پور

ساختهای بسیاری موجودند که ریاضی نیستند. ریاضیات تنها مسأله ساختها نیست. فی‌المثل، چون به فیزیک می‌پردازید نیز، با عملیات ساختهای خاصی سروکار دارید. در واقع، کلمهٔ «ریاضیات» در زمینه‌های متفاوت بسیاری به‌کار رفته است. ریاضیاتی، چنان‌که در مدارس ابتدایی یا متوسطه به‌کار رفته دارید. ریاضیاتی کامپیوتری، که در مورد مسائل تبدیلات به‌کار می‌روند، دارید. اگر در کار شیمی یا فیزیکید، از ریاضیات برای توصیف جهان تجربی استفاده می‌کنید.

هنر ریاضی ورزیدن:
ترجمه غلامرضا یاسی‌پور

حل مسائلِ برهانِ شمارهٔ ۱۲

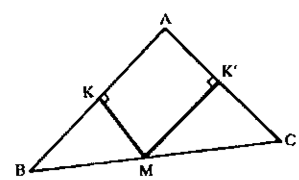
حل مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ـ (حل از آقای بهادر طالبی از تبریز). می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع اندازه‌های اضلاع زاویهٔ قائمه برابر است با مجموع اندازه‌های قطرهای دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث. یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) داریم: $AB + AC = 2R + 2r$ (۱) (مسألهٔ ۲ هندسه سال اول مندرج در برهان ۱۱). از طرفی پاره‌خطهای MK و MK' که از نقطهٔ M وسط وتر BC عمود بر اضلاع AB و AC رسم شده‌اند به‌ترتیب با AC و AB موازی‌اند. پس نصف این اضلاع‌اند. یعنی:

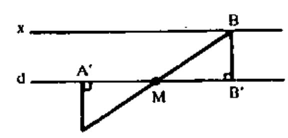
$$MK=\frac{AC}{2} \Longrightarrow AC=2MK,\quad MK'=\frac{AB}{2}\Longrightarrow AB=2MK'$$

با جایگزینی در رابطهٔ (۱) داریم:

$$2MK' + 2MK = 2R + 2r$$
$$\Longrightarrow MK + MK' = R + r$$



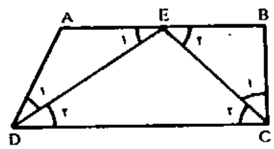
۲ ـ از نقطهٔ A خطی چنان رسم می‌کنیم که خط xy را در نقطهٔ B قطع کند. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم و از این نقطه خط d را به‌موازات خط xy رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است، زیرا اگر از نقاط A و B عمودهای AA' و BB' را بر خط d فرود آوریم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAA' و MBB' به‌حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند. پس $AA' = BB'$ است.



۳ ـ اگر نقطهٔ تقاطع نیمساز زاویهٔ درونی D با قاعدهٔ AB را E بنامیم و از E به C وصل کنیم داریم: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{E}_1$ پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است و $AD = AE$ خواهد بود. امّا بنا به فرض:

$$AB = AE + EB = AD + BC$$

در نتیجه $EB = BC$ و مثلث EBC نیز متساوی‌الساقین است. از آن‌جا $\hat{E}_2 = \hat{C}_1$ و چون $\hat{E}_2 = \hat{C}_2$ است پس: $C_1 = C_2$ یعنی: CE نیمساز زاویهٔ C از ذوزنقه $ABCD$ است. بنابراین نقطهٔ E محل برخورد نیمساز زاویهٔ درونی C با قاعدهٔ AB نیز هست.



۴ ـ چون طبق فرض گزارهٔ $q \Leftrightarrow (q \Longrightarrow p)$ ارزش درست دارد بنابراین می‌بایست $(q\Longrightarrow p) \equiv q$. حال اگر $q \equiv T$ در این‌صورت برای آن‌که $(q \Longrightarrow p)$ درست باشد باید $p \equiv T$ که نتیجه می‌شود $(p\wedge q) \equiv T$ و اگر $q \equiv F$ در این‌صورت $(q\wedge p) \equiv T$ و این حالت ممکن نیست.

۵ ـ الف) یک ترکیب دو شرطی است که گزارهٔ سوریِ سمت چپ نادرست و گزارهٔ سوریِ سمت راست نیز نادرست است بنابراین ترکیب دو شرطی دارای ارزش درست می‌باشد.
ب) یک ترکیب شرطی است که گزارهٔ سوریِ سمت چپ (مقدم) به ازای $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ درست بوده و تالی آن به ازای $n = 1$ نادرست است و در نتیجه ترکیب شرطی دارای ارزش نادرست است.

۶ ـ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $2K$ عضوی 2^{2k} است و تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $3K$ عضوی 2^{3k} بوده و طبق فرض داریم:

$$2^{2k} + 48 = 2^{3k} \Longrightarrow (2^2)^k + 48 = (2^3)^k$$
$$\Longrightarrow 4^k+48=8^k \Longrightarrow 8^k-4^k=48 \Longrightarrow 4^k(2^k-1)=48$$
$$\Longrightarrow 4^k = \frac{48}{2^k-1} \qquad (1)$$

از طرفی $2^k - 1$ فرد است و باید ۴۸ بر آن بخش‌پذیر باشد و تنها اعداد فردی که ۴۸ بر آنها بخش‌پذیر است ۱ و ۳ می‌باشند پس:

$2^k - 1 = 1$ یا $2^k - 1 = 3$

اگر $2^k - 1 = 1 \Longrightarrow 2^k = 2 \Longrightarrow k = 1$ که $K = 1$ با توجه به رابطهٔ (۱) قابل قبول نیست پس:

$$2^k - 1 = 3 \Longrightarrow 2^k = 4 \Longrightarrow k = 2$$

۷ ـ ابتدا فرض کنیم $(B\cap C) = C$ و $(A\cap B) = B$ پس:

$$\left.\begin{aligned}(A\cap B) = B &\overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} B\subset A\\ (B\cap C) = C &\overset{\text{قضیهٔ اصلی}}{\Longrightarrow} C\subset B\end{aligned}\right\} \Longrightarrow C\subset B\subset A$$

حال فرض کنیم $C\subset B\subset A$ بنابراین طبق قضیهٔ اصلی اجتماع داریم:

$$C\subset B \Longrightarrow (B\cap C) = C$$
$$B\subset A \Longrightarrow (A\cap B) = B$$

۸ ـ

$$A-(B\cap C) = A\cap (B\cap C)' = A\cap (B'\cup C')$$
$$= (A\cap B')\cup(A\cap C') = (A-B)\cup(A-C)$$

حال اگر $(B\cap C) = \varnothing$ داریم:

$$(A-B)\cup(A-C)\cup(A-D) = [A-(B\cap C)]\cup(A-D)$$
$$= (A-\varnothing)\cup(A-D) = A\cup(A-D') \overset{\text{جذب}}{=\!=} A$$

۹ ـ

$$xy = 1 \quad , \quad x+y=\sqrt{5}$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2$$
$$=[x^2+y^2]^2-2$$
$$=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2=\left[(\sqrt{5})^2-2\right]^2-2$$
$$=[5-2]^2-2$$
$$=9-2=7$$

۱۰ ـ

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$\frac{A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\equiv\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$\Rightarrow A(x^2+3x+2)+B(x^2+2x)+C(x^2+x)\equiv 1$$
$$\Rightarrow Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx^2+Cx\equiv 1$$
$$(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A\equiv 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A+B+C=0\\ 3A+2B+C=0\\ 2A=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A+B+C=0\\ 3A+2B+C=0\end{cases} \Rightarrow -\begin{cases}\frac{1}{2}+B+C=0\\ \frac{3}{2}+2B+C=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}-B-C=0\\ \frac{3}{2}+2B+C=0\end{cases} \Rightarrow 1+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$\frac{1}{2}+B+C=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-1+C=0 \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$$

-۱۱

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای رضاشاه اکبری از نیشابور).
در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMD و BMC داریم:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 \quad \text{و} \quad MD^2 = MA^2 + AD^2$$

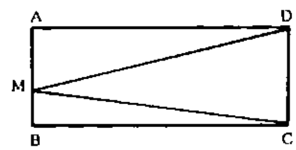
$$\Longrightarrow MD^2-MC^2=MA^2+AD^2-MB^2-BC^2 \quad \text{و} \quad AD=BC$$

$$\Longrightarrow MD^2 - MC^2 = MA^2 - MB^2$$

امّا بنا به فرض $MA^2 = AB \,.\, MB$ است پس:

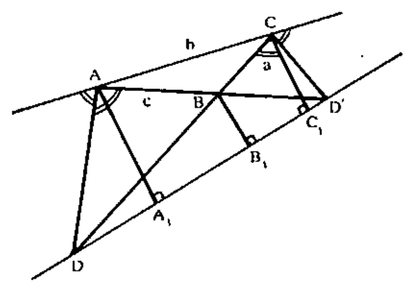
$$MD^2 - MC^2 = AB \,.\, MB - MB^2 = MB\,(AB - MB)$$

$$= MB \,.\, MA$$



۲ ـ نیمسازهای زوایای خارجی A و C از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا اضلاع مقابل خود را در نقاط D و D' قطع کنند. خط DD' را رسم می‌کنیم و از نقاط A و B و C عمودهای AA_1 و BB_1 و CC_1 را بر خط DD' فرود می‌آوریم. با توجه به موازی بودن خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 داریم:

$$\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{DB}{DC} \quad , \quad \frac{AA_1}{BB_1}=\frac{D'A}{D'B}$$



از طرفی بنا به‌خاصیت نیمساز می‌توان نوشت:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \quad \text{و} \quad \frac{D'A}{D'B}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$$

پس: $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{c}{b}$ و $\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{b}{a}$ است. از آن‌جا:

$$AA_1\times a= BB_1\times b=CC_1\times c \text{ یا } \frac{AA_1}{\frac{1}{a}}=\frac{BB_1}{\frac{1}{b}}=\frac{CC_1}{\frac{1}{c}}$$

۳ ـ چون $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ و داریم $A \times B = B \times A$ پس باید $A = B$ بنابراین با توجه به مجموعه‌های A و B داریم:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2 \,,\, y = 1$$

۴ ـ رابطهٔ R روی $\mathbb{R}^2$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow (a - c)\,(b - d) = 0$$

$$1)\ \forall (a\,,b) \in \mathbb{R}^2 \,;\, (a-a)(b-b) = 0 \Longrightarrow (a,b)\ R\ (a,b)$$

پس رابطه انعکاسی است.

۲) فرض کنیم $(a\,,b)\ R\ (c\,,d) \Longrightarrow (a - c)(b - d) = 0$

$$\Longrightarrow (c - a)\,(d - b) = 0 \Longrightarrow (c\,,d)\ R\ (a\,,b)$$

بنابراین خاصیت تقارنی نیز دارد.
۳) خاصیت تعدی یا تراگذاری ندارد زیرا مثلاً

$(2\,,4)\,R\,(2\,,5)$ و $(2\,,5)\,R\,(6\,,5)$

ولی $(6\,,5)\ \not{R}\ (2\,,4)$ زیرا $(2 - 6)(4 - 5) \neq 0$.

۴) خاصیت پادتقارنی نیز ندارد زیرا مثلاً:

$(2\,,1)\,R\,(2,2) \wedge (2\,,2)\,R\,(2\,,1)$ ولی $(2\,,1) \neq (2\,,2)$

۵ ـ این مسأله به‌طور کامل در مقالهٔ رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی که در همین شماره چاپ شده، حل شده است.

۶ ـ تابع مفروض از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ بوده و ضابطهٔ آن به شکل $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ است، بنابراین داریم:

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^2 - 4} = \sqrt[3]{x_2^2 - 4}$ به‌توان ۳

$$x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4$$

$$x_1 , x_2 \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$ تابع یک به یک است.

ب) فرض کنیم $y \in \mathbb{N},\ y = \sqrt[3]{x^2 - 4} \Rightarrow y^3 = x^2 - 4$

$$\Rightarrow x^2 = y^3 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y^3 + 4}$$

برای هر $y \in \mathbb{N}$ زیر رادیکال همواره مثبت است ولی ممکن است عدد حاصل یعنی x در N نباشد. مثلاً برای $y = 1$ داریم $x = \sqrt{5}$ که $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$ پس تابع پوشا نیست.

۷ ـ می‌دانیم اگر نقطه‌ای دلخواه در صفحه ابتدا به اندازهٔ α و مجدداً به اندازهٔ α دوران کند در کلّ به اندازهٔ 2α دوران کرده است. حال یک‌بار نقطهٔ دلخواهی را دوبار و هر بار به اندازهٔ α دوران می‌دهیم و بار دیگر آن نقطه را به اندازهٔ 2α دوران می‌دهیم و نتایج حاصل را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. در این جا برای راحتی کار نقطهٔ دلخواه را نقطهٔ $P \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ در نظر می‌گیریم:

دو دوران و هر بار به اندازهٔ α

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

-۸

$\frac{a - x}{x - b} = y$ فرض $\Rightarrow y^2 = 8y - 15 \Rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$

$\Rightarrow (y - 3)(y - 5) = 0 \Rightarrow y = 3$ یا $y = 5$

الف) $\frac{a - x}{x - b} = 3 \Rightarrow 3x - 3b = a - x \Rightarrow 3x + x = a + 3b$

$$\Rightarrow 4x = a + 3b \Rightarrow \boxed{x = \frac{a + 3b}{4}}$$

ب) $\frac{a - x}{x - b} = 5 \Rightarrow 5x - 5b = a - x \Rightarrow 5x + x = a + 5b$

$$\Rightarrow 6x = a + 5b \Rightarrow \boxed{x = \frac{a + 5b}{6}}$$

-۹

$m =$ ضریب‌زاویه‌خط $\Rightarrow y - y_A = m\,(x - x_A)$

$$y - 10 = m\,(x - 5) \Rightarrow mx - y + 10 - 5m$$

$$= 0 \begin{cases} a = m \\ b = 1 \\ c = 10 - 5m \end{cases}$$

$$OH = \frac{|\,c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow \quad 10 = \frac{|\,10 - 5m\,|}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad \Rightarrow$$

$$10\sqrt{m^2 + 1} = |\,10 - 5m\,|$$

طرفین را به‌توان ۲ می‌رسانیم $\Rightarrow 100(m^2 + 1) = 100 + 25m^2 - 100m$

$$\Rightarrow 100m^2 + 100 = 100 + 25m^2 - 100m$$

$$\Rightarrow 75m^2 + 100m = 0$$

$5m\,(15m + 20) = 0 \Rightarrow m = 0$ یا $m = -\frac{20}{15}$

۱۰ ـ مساحت مثلث $= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$ و داریم: $b^2 = ac$
اگر اضلاع مثلث را a و b و c و سه ارتفاع را h_a و h_b و h_c بنامیم داریم:

$$2S = a \,.\, h_a = b \,.\, h_b = c \,.\, h_c$$

می‌توان نوشت:

$$4S^2 = 2S \times 2S$$

$$\Longrightarrow (b \,.\, h_b)^2 = a \,.\, h_a \times c \,.\, h_c$$

داریم: $b^2 = ac$

$$\Longrightarrow b^2 \,.\, h_b^2 = a \,.\, c \times h_a \,.\, h_c$$

$$\Longrightarrow h_b^2 = h_a \,.\, h_c$$

۱۱ ـ با توجه به اتحاد شرطی زیر:

$\forall a, b, c \in R : a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

داریم:

(فرض) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0 \Rightarrow$

$\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

طرفین رابطهٔ اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$2\cos^3\alpha+2\cos^3\beta+2\cos^3\gamma = 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha\cos\alpha+2\cos^2\beta\cos\beta+2\cos^2\gamma\cos\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

با توجه به اتحاد: $1+\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha$

داریم:

$(1+\cos2\alpha)\cos\alpha+(1+\cos2\beta)\cos\beta+(1+\cos2\gamma)\cos\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\underline{\cos\alpha}+\cos\alpha\cos2\alpha+\underline{\cos\beta}+\cos\beta\cos2\beta$

$+\underline{\cos\gamma}+\cos\gamma\cos2\gamma = 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\underbrace{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}_{\text{(طبق فرض برابر صفر است)}}+\cos\alpha\cos2\alpha+\cos\beta\cos2\beta+\cos\gamma\cos2\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

بنابراین داریم:

$\cos\alpha\cos2\alpha+\cos\beta+\cos2\beta+\cos\gamma\cos2\gamma$

$= 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

۱۲ ـ داریم:

$tg\frac{1}{2}(\mathrm{Arccos}(\frac{-2}{3})-\mathrm{Arcsin}(\frac{2}{3}))$

$=tg\frac{1}{2}(\pi-\mathrm{Arccos}(\frac{2}{3})-\mathrm{Arcsin}(\frac{2}{3}))$

$=tg\frac{1}{2}(\pi-(\mathrm{Arccos}(\frac{2}{3})+\mathrm{Arcsin}(\frac{2}{3})))$

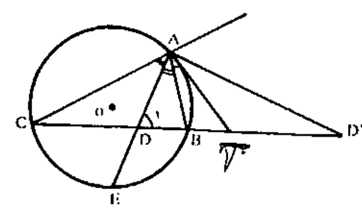
$=tg\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{2})=tg\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=tg\frac{\pi}{4}=1$

توجه: از تساویهای مسلم $\mathrm{Arccos}(-\alpha)=\pi-\mathrm{Arccos}\,\alpha$ و $\mathrm{Arccos}\,\alpha+\mathrm{Arcsin}\,\alpha=\frac{\pi}{2}$ استفاده شد.

حل مسائل ریاضیات سال سوّم ریاضی

۱ ـ مثلث ADD' در رأس A قائم‌الزاویه است. و نقطهٔ T وسط وتر DD' است زیرا اگر امتداد نیمساز AD دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع کند، داریم: $\widehat{CE}=\widehat{EB}$ و

$\hat{D}_1=\frac{\widehat{CE}+\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{EB}+\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{EBA}}{2}=E\hat{A}T \Rightarrow TD=TA$



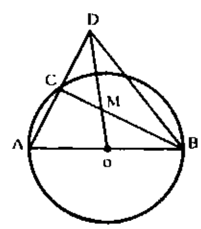
و $TA=TD'$. در نتیجه $TA=TD=TD'$ یعنی نقطهٔ T وسط وتر DD' است. حال اگر قوت نقطهٔ B را نسبت به دایره به قطر DD' (دایرهٔ محیطی مثلث ADD') بنویسیم، داریم:

$BD.BD'=R^2-d^2$

و یا

$\boxed{BD.BD'=TA^2-TB^2}$

۲ ـ از نقطهٔ B به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. نقطهٔ M محل تلاقی میانه‌های مثلث ABD است. پس $\frac{BM}{BC}=\frac{2}{3}$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M مجانس دایرهٔ O نسبت به مرکز تجانس B و با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ است.



۳ ـ این مجموعه نسبت به ضرب اسکالر (روی IR) بسته نیست زیرا، اگر فرض کنیم $(a_1, a_2, ..., a_n)\in Q^n$ و $\sqrt{2}\in IR$ در این صورت

$\sqrt{2}(a_1,a_2,...,a_n)=(\sqrt{2}a_1,\sqrt{2}a_2,...,\sqrt{2}a_n)\notin Q^n$

۴ ـ طبق فرض بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی هستند پس هر ترکیب خطی از این بردارها که مساوی با بردار صفر باشد، می‌بایست همگی ضرایب آن صفر باشند. حال اگر فرض کنیم:

$x(V_1-V_2-V_3)+y(2V_1+V_2-V_3)+z(3V_1-2V_3)=\vec{0}$

$\Rightarrow(x+2y+3z)V_1+(-x+y)V_2+(-x-y-2z)V_3=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2y+3z=0 & (1)\\ -x+y=0 & (2)\\ -x-y-2z=0 & (3)\end{cases}$$

$$(1),(3)\Rightarrow\begin{cases}2x+4y+6z=0\\ -3x-3y-6z=0\end{cases}\Rightarrow -x+y=0$$

که معادلهٔ حاصل از معادلات (۱) و (۳) همان معادلهٔ (۲) است که برای آن بی‌نهایت جواب غیر صفر وجود دارد مثلاً اگر قرار دهیم $x=-1$ و $y=-1$ در این‌صورت داریم $z=1$ که جوابی غیر‌صفر برای دستگاه می‌باشد. بنابراین بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

$A=(a+b'+c')(a'+b)(a+bc)$

$=(\underbrace{aa'}_{0}+ab+b'a'+\underbrace{b'b}_{0}+c'a+c'b)(a+bc)$

$=(ab+a'b'+ac'+bc')(a+bc)$

$=(aba+abbc+\underbrace{a'b'a}_{0}+\underbrace{a'b'bc}_{0}+ac'a+\underbrace{ac'bc}_{0}$

$+bc'a+\underbrace{bc'bc}_{0})$

$=(ab+abc+ac'+abc')=ab(c+c')+ab+ac'$

$=ab+ab+ac'=ab+ac'=a(b+c')$

$B=(ab+c)'+a'c+\overbrace{cb'}^{b'c}+b=[(a'+b').c']$

$+(a'+b').c+b$

$=(a'+b').(c'+c)+b=(a'+b')+b=a'+(b'+b)$

$=a'+1=1$

۶ ـ در بین اعداد ۱ تا ۲۰، ده عدد فرد و ده عدد زوج موجود است و می‌دانیم حاصل جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و دیگری فرد باشد. پس جواب قسمت، اولاً ـ عبارت است از

$\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}=100$ حال اگر بخواهیم مجموع سه عدد طبیعی فرد باشد، یا باید هر سه عدد فرد باشند و یا باید دو عدد زوج و سوّمی فرد باشد بنابراین جواب قسمت

ثانیاً ـ عبارت است از:

$\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}+\binom{10}{3}=450+120=570$

۷ ـ به‌طور کلّی اگر $k\geq n$، تعداد اعداد k رقمی که با n رقم (هیچ‌کدام صفر نباشد) می‌توان ساخت عبارت است از n^k پس در این مسأله اعداد کوچکتر از یک میلیون می‌توانند دو یا سه یا ... یا شش رقمی باشند بنابراین:

تعداداعدادکوچکتراز یک‌میلیون $=2^1+2^2+2^3+...+2^6=126$

۸ ـ طبق فرضیات مسأله داریم:

$P(A_1)=\frac{1}{4}$ و $P(B_1)=\frac{2}{5}$

چون A_1 و B_1 دو پیشامد مستقل از هم هستند پس:

$P(A_1\cap B_1)=P(A_1)\times P(B_1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1\cap B_1)$

$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}-\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$

۹ ـ فرض می‌کنیم $x=64=2^6$

$2^{12n}-1=(2^6)^{2n}-1$

$\Rightarrow(2^6)^{2n}-1=x^{2n}-1$

می‌توان گفت $(x^{2n}-1)$ بر $(x\pm1)$ بخش‌پذیر است.

زیرا: $(\pm1)^{2n}-1=1-1=0$

بنابراین عدد فوق بر (1 ± 64) یا بر (۶۳ و ۶۵) بخش‌پذیر است. بنابراین عدد فوق بر عوامل تجزیه ۶۳ و ۶۵ هم بخش‌پذیر است.

$63=3^2\times7$ و $65=5\times13$

بنابراین عدد فوق بر عضوهای مجموعه {۵، ۱۳، ۶۵، ۷، ۳، ۹، ۲۱، ۶۳} بخش‌پذیر است.

۱۰ ـ

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+(n-1)!+(n+1)!}{(n-2)!+(n+2)!+n!}=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!\,[n+1+n(n+1)]}{(n-2)!\,[1+n(n-1)(n+1)(n+2)\,n+(n-1)]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)[n+1+n^2+n]}{1+n(n^2-1)(n+2)+n(n-1)]}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

۱۱ ـ فرض می‌کنیم: $P\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ یک نقطه از مکان باشد.

ضریب زاویهٔ مماس را هم m فرض می‌کنیم:

$$y-y_P=m(x-x_P)$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y=mx+y_1-mx_1$$

$$\begin{cases}y=mx+y_1-mx_1\\ y=\dfrac{x^2+1}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{mx+y_1+mx_1}{1}=\frac{x^2+1}{x}$$

$$\Rightarrow mx^2+y_1x-mx_1x=x^2+1$$

$$\Rightarrow(m-1)x^2+(y_1-mx_1)x-1=0$$

شرط مماس بودن:

$$\Delta=0\quad\Rightarrow\quad(y_1-mx_1)^2+4(m-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad y_1^2+m^2x_1^2-2x_1y_1m+4m-4=0$$

$$x_1^2m^2+(4-2x_1y_1)m+(y_1^2-4)=0$$

ریشه‌های این معادله m' و m'' ضریب زاویه‌های مماسند.

چون دو مماس بر هم عمودند پس: $m'.m''=-1$ یا $\frac{c}{a}=-1$

$$\Rightarrow\frac{c}{a}=-1\quad\Rightarrow\quad\frac{y_1^2-4}{x_1^2}=-1\quad\Rightarrow\quad y_1^2-4=x_1^2$$

$$\Rightarrow\boxed{x_1^2+y_1^2=4}$$

۱۲ ـ $6\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8})+\cos\frac{x}{2}=2$

با توجه به اتحاد:

$$2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$$

می‌توان نوشت:

$$3+3\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})+\cos\frac{x}{2}=2$$

$$3\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})+1+\cos\frac{x}{2}=0$$

$$3\sin\frac{x}{4}+2\cos^2\frac{x}{4}=0$$

$$3\sin\frac{x}{4}+2-2\sin^2\frac{x}{4}=0\Longrightarrow2\sin^2\frac{x}{4}-3\sin\frac{x}{4}-2=0$$

$$(\Delta=9+16=25)\Rightarrow\sin\frac{x}{4}=\frac{3\pm5}{4}\rightarrow$$

$\sin\frac{x}{4}=2>1$ (قابل قبول نیست)

$$\sin\frac{x}{4}=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\left|\begin{array}{l}\frac{x'}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Longrightarrow x'=8k\pi-\frac{2\pi}{3}\\ \frac{x''}{4}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\Longrightarrow x''=8k\pi+\frac{14\pi}{3}\end{array}\right.$$

۱۳ ـ داریم:

$$b^3+c^3=a^2(b+c)$$

$$b^3+c^3=(b+c)(b^2+c^2-bc)=a^2(b+c)\Longrightarrow b^2+c^2-bc=a^2$$

از طرفی داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow b^2+c^2-bc=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\Longrightarrow\cos A=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow\cos\hat{A}=\cos60^\circ\Longrightarrow\hat{A}=60^\circ$$

حل مسائل کامپیوتر سال سوم ریاضی

۱ـ

```
10  LET  SUM  = 0
20  LET  PROD = 1
30  FOR  I = 1  TO  20
40    LET SUM  = SQR( 2 + SUM )
50    LET PROD = PROD *  SUM / 2
60  NEXT
70  PI = 2 / PROD
80  PRINT "VALUE OF PI = "; PI
90  END
```

اجرای برنامه:

```
VALUE OF PI =  3.141593
```

۲ـ

```
10  INPUT "ENTER NO.
OF TERMS OF SERIES";N
20  LET PI = 1 : LET A = -1
30  FOR  I = 2 TO N
40     LET  B = 2*I-1
50     LET  PI = PI+A/B
60     LET  A  = -A
70  NEXT I
80  LET PI=4*PI
90  PRINT"VALUE OF PI EQUALS ";PI
100 END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NO. OF TERMS OF SERIES?5000
VALUE OF PI EQUALS  3.141313
```

۳ـ

```
10   LET  EULER = 1
20   LET  I = 1 : LET FACT = 1
30   LET  K = 1 / FACT
40   WHILE K >= .000001
50     LET  EULER = EULER + K
60     LET  I = I+1 : LET FACT
            = I*FACT
70     LET  K=1/FACT
80   WEND
90   PRINT"EULER'S NUMBER
     =";EULER
100  PRINT"EXP(1) ="; EXP(1)
110  PRINT"DIFFERENCE
     =";EXP(1)-EULER
120  END
```

اجرای برنامه:

```
EULER'S NUMBER = 2.718282
EXP(1) = 2.718282
DIFFERENCE = 0
```

۴ـ

```
10   LET  EULER = 1
20   LET  I = 1 : LET FACT = 1
30   LET  K = 1 / FACT
40   WHILE K >= .000001
50          LET  EULER
     = EULER + (-1)^I *K
60      LET  I = I+1 : LET FACT
     = I*FACT
70      LET  K=1/FACT
80   WEND
90   PRINT"EULER'S INVERSE NUMBER
     =";EULER
100  PRINT"EXP(-1) ="; EXP(-1)
110  PRINT"DIFFERENCE
     =";EXP(-1)-EULER
120  END
```

اجرای برنامه:

```
EULER'S INVERSE NUMBER =.3678791
EXP(-1) = .3678795
DIFFERENCE = 3.576279E-07
```

۵ـ بدون حلقهٔ FOR

```
10  INPUT " ENTER NO.
    OF TERMS " ; N
20  LET  SUM = 0
30  LET  I   = 0
40  LET  SUM = SUM + 2 ^ I
50  LET  I   = I + 1
60  IF I <> N  THEN  40
70  PRINT"1+2^1+2^2+...+2^";N-1"
    =";SUM
80  END
```

با استفاده از حلقهٔ FOR

```
10  INPUT " ENTER NO.
    OF TERMS " ; N
20  LET  SUM = 0
30  FOR  I = 0  TO  N-1
40     LET  SUM = SUM + 2 ^ I
50  NEXT I
60  PRINT"1+2^1+2^2+...+2^";N-1"
    =";SUM
70  END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NO. OF TERMS ? 10
1+2^1+2^2+...+2^ 9 = 1023
```

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ حل الف:

$$\vec{V}_1=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\quad\Rightarrow\quad\vec{V}_1(3,1,-2)$$

$$\vec{V}_2=-\vec{i}+\vec{k}\quad\Rightarrow\quad\vec{V}_2(-1,0,1)$$

$$(3\vec{V}_1).(-2\vec{V}_2)=-6(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$$

$$=-6(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

$$=-6(-3+0-2)=+30$$

حل ب:

$$(-\frac{2}{3}\vec{V}_2,\frac{3}{5}\vec{V}_1)=180-(\vec{V}_2,\vec{V}_1)$$

$$\cos(\vec{V}_2,\vec{V}_1)=\frac{\vec{V}_2.\vec{V}_1}{|\vec{V}_2|.|\vec{V}_1|}=$$

$$\frac{-3+0-2}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{-5}{2\sqrt{7}}$$

$$(\vec{V}_2,\vec{V}_1)=\operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)\Rightarrow$$

$$\left(-\frac{2}{3}\vec{V}_2,\frac{3}{5}\vec{V}_1\right)=\operatorname{Arccos}\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

حل ج :

$$\vec{V}=2\vec{V}_1+3\vec{V}_2(6-3,2+0,-4+3)\Rightarrow$$

$$\vec{V}(3,2,-1)$$

$$\vec{V}'=3\vec{V}_1-4\vec{V}_2(9+4,3-0,-6-4)\Rightarrow$$

$$\vec{V}'(13,3,-10)$$

$$\Pr\vec{V}/_{\vec{V}'}=\frac{\vec{V}\cdot\vec{V}'}{|\vec{V}'|}=\frac{39+6+10}{\sqrt{169+9+100}}=\frac{55}{\sqrt{278}}$$

حل د :

$$\vec{V}_1-2\vec{V}_2\left|\begin{array}{l}3+2=5\\1-0=1\\-2-2=-4\end{array}\right.$$

$$-\vec{V}_1+\vec{V}_2\left|\begin{array}{l}-3-1=-4\\-1+0=-1\\+2+1=3\end{array}\right.$$

$$(\vec{V}_1-2\vec{V}_2)\wedge(-\vec{V}_1+\vec{V}_2)\left|\begin{array}{l}3-4=-1\\16-15=1\\-5+4=-1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left|(\vec{V}_1-2\vec{V}_2)\wedge(-\vec{V}_1+\vec{V}_2)\right|$$

$$=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

۲ـ (حل از آقای م ـ ا ـ گیتی‌زاده دبیر ریاضی).

اوّلا: اگر بردارهای هادی دو خط d و d′ را به ترتیب $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ بنامیم، آنگاه:

$$\vec{v}(2,2b,1),\ \vec{v'}\left(\frac{b}{2},\ 2ab+a+2b,\ b\right)$$

$$d\perp d'\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{v'}=0\Rightarrow 2\times\frac{b}{2}+2b(2ab+a+2b)+b=0$$

$$b\neq0\Rightarrow 2b(a+1)+a+1=0$$

تساوی بالا نسبت به b باید اتحاد باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}a+1=0\\a+1=0\end{cases}\Longrightarrow\boxed{a=-1}$$

و به ازای $a=-1$ داریم:

$$d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+2b-1}{2b}=z=t$$

$$d':\frac{2x-b}{b}=-y=\frac{z-b-1}{b}=t'$$

$$d:\begin{cases}x=2t-2\\y=2bt-2b+1\\z=t\end{cases}\quad\text{و}\quad d':\begin{cases}x=\frac{1}{2}(bt'+b)\\y=-t'\\z=bt'+b+1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2t-2=\frac{1}{2}(bt'+b)\\2bt-2b+1=-t'\\t=bt'+b+1\end{cases}$$

از حل دستگاه بالا به ازای جمیع مقادیر b جواب متوافق $t=1$ و $t'=-1$ و از آن‌جا $A(0,1,1)$ به دست می‌آید.

ثانیا:

$$\vec{v}(2,2b,1),\ \vec{v'}\left(\frac{b}{2},-1,b\right),\ \vec{v''}(1,0,1)$$

طریقهٔ اوّل:

$$\widehat{(\vec{v''},\vec{v})}=\widehat{(\vec{v''},\vec{v'})}\Longrightarrow\cos\widehat{(\vec{v''},\vec{v})}=\cos\widehat{(\vec{v''},\vec{v'})}\Longrightarrow$$

$$\frac{3}{\sqrt{4b^2+5}\times\sqrt{2}}=\frac{3b}{\sqrt{5b^2+4}\times\sqrt{2}}\Longrightarrow\boxed{b=\pm1}$$

طریقهٔ دوم: چون دو خط d و d′ برهم عمودند کافی است خط d″ با یکی از دو خط، مثلاً با خط d، زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد.

$$\cos(\vec{v''},\vec{v})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{4b^2+5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow\boxed{b=\pm1}$$

ثالثا:

الف) $\vec{v}(2,2,1),\ \vec{v'}\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$

بردار نرمال صفحهٔ (d,d') عبارت است از:

$$\vec{v}\wedge\vec{v'}\left(3,-\frac{3}{2},-3\right)\Longrightarrow\vec{w}(2,-1,-2)$$

$$\vec{w}(2,-1,-2),\ A(0,1,1)\Longrightarrow\boxed{2x-y-2z+3=0}$$

چون خط d″ با بردار هادی $\vec{v''}(1,0,1)$ با صفحهٔ (d,d') با بردار نرمال $\vec{w}(2,-1,-2)$ موازی است، شرط انطباق آن بر این صفحه این است که یک نقطه‌اش در صفحه واقع باشد.

$$d'':\begin{cases}x=t''\\y=-1\\z=t''+c\end{cases}\quad\text{و}\quad(d,d'):2x-y-2z+3=0\Longrightarrow$$

$$2t''+1-2(t''+c)+3=0\Longrightarrow\boxed{c=2}$$

ب) محل تلاقی خط d″ با خط d نقطهٔ $B(-2,-1,0)$ و محل تلاقی خط d″ با خط d′ نقطهٔ $C(1,-1,3)$ است و به آسانی معلوم می‌شود که در مثلث ABC، $\hat{A}=90^\circ$ و $AB=AC=3$. مکان هندسی مطلوب خطی است که از نقطه همرسی عمودمنصفهای مثلث ABC بر صفحهٔ آن عمود می‌شود. چون مثلث ABC قائم‌الزاویه است این نقطه بر وسط وتر BC قرار دارد، یعنی $M\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$ است و چون بردار نرمال صفحه مثلث $\vec{w}(2,-1,-2)$ است معادله مکان هندسی عبارت است از:

$$\delta:\frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{-2}$$

ج) چون نقطهٔ S از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است بر خط δ قرار دارد. ضمناً، اگر h ارتفاع هرم باشد:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$$

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\times3}{2}=\frac{9}{2}\Longrightarrow9=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}h\Longrightarrow h=6$$

یعنی، فاصلهٔ S از صفحهٔ مثلث که معادله‌اش $2x-y-2z+3=0$ است، برابر ۶ است، بنابراین:

$$\delta:\begin{cases}x=2k-\frac{1}{2}\\y=-k-1\\z=-2k+\frac{3}{2}\end{cases},\quad(d,d'):2x-y-2z+3=0$$

$$6=\frac{\left|2(2k-\frac{1}{2})-(-k-1)-2(-2k+\frac{3}{2})+3\right|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Rightarrow k=\pm2$$

چون ارتفاع رأس S منفی فرض شده، جواب قابل قبول به ازای $k=2$ به‌دست می‌آید:

$$S\left(\frac{7}{2},-3,-\frac{5}{2}\right)$$

د) مقطع یک صفحه در یک چند وجهی محدب، که اقلاً سه یال آن را قطع کند، یک چند ضلعی محدب است که رأسهای آن از برخورد صفحه قاطع با یالهای چند وجهی به دست می‌آیند. به طور کلی، صفحه معلوم P در صورتی پاره‌خط معلوم AB را قطع می‌کند که دو نقطهٔ A و B در دوطرف آن واقع‌باشند. اگر $P:ax+by+cz+d=0$، $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ باشد، برای این منظور لازم و کافی است که داشته‌باشیم:

$$(ax_1+by_1+cz_1+d)(ax_2+by_2+cz_2+d)\leq0$$

در حالت خاصی که صفحه قاطع صفحه xoy است، این شرط تبدیل می‌شود به این که ارتفاعهای دو سر پاره‌خط مختلف‌العلامت باشند یا اقلاً یکی از آنها صفر باشد.

بدین ترتیب، در این مسأله، صفحهٔ xoy فقط سه یال SA و SB و SC را قطع می‌کند. نقطهٔ تلاقی با یال SB همان نقطهٔ $B(-2,-1,0)$ است. برای تعیین دو نقطهٔ تلاقی دیگر، باید معادلات دو خط SA و SC را نوشته، در هر یک $z=0$ قرار دهیم:

$$SA:\frac{x}{-7}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{7},\quad P:z=0\Longrightarrow E\left(1,-\frac{1}{7},0\right)$$

$$SC:\frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{11},\quad P:z=0\Longrightarrow F\left(\frac{26}{11},-\frac{23}{11},0\right)$$

و مقطع مثلث BEF می‌شود.

۳ـ

الف) $(p\vee q)\Rightarrow r\equiv\sim(p\vee q)\vee r\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee r$

$\equiv(\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

ب) $p\vee(q\Leftrightarrow r)\equiv p\vee[(q\Rightarrow r)\wedge(r\Rightarrow q)]$

$\equiv[p\vee(q\Rightarrow r)]\wedge[p\vee(r\Rightarrow q)]$

$\equiv[(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r)]\wedge[(p\vee r)\Rightarrow(p\vee q)]$

$\equiv(p\vee q)\Leftrightarrow(p\vee r)$

۴ـ

۱) $p\wedge q\Rightarrow r$

۲) $(p\wedge\sim r)$

---

۳) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ از ۱ و قانون عطف مقدمات

۴) p از ۲ و قانون حذف عاطف

۵) $(q\Rightarrow r)$ از ۳ و ۴ و قانون انتزاع

۶) $\sim r$ از ۲ و قانون حذف عاطف

۷) $\sim q$ از ۵ و ۶ و قانون نقیض انتزاع

۸) $\therefore\ \sim q\vee s\equiv q\Rightarrow s$ از ۷ و ادخال فاصل

۵ـ طبق قضیه می‌دانیم که اگر در حلقهٔ R مقسوم‌علیه صفر وجود نداشته باشد، در آن حلقه قانون حذف برقرار است. حال، فرض کنیم معادلهٔ $ax = b$ در حلقهٔ R دارای جوابهای $x_۱$ و $x_۲$ باشد، ثابت می‌کنیم $x_۱ = x_۲$،

$$\begin{cases} ax_۱ = b \\ ax_۲ = b \end{cases} \Longrightarrow \cancel{a}x_۱ = \cancel{a}x_۲ \overset{\text{قانون حذف}}{\Longrightarrow} x_۱ = x_۲$$

۶ـ ابتدا تذکر می‌دهیم که اگر $I_۱$ و $I_۲$ دو ایده‌آلِ حلقهٔ R باشند، جمع این دو ایده‌آل یعنی: $I_۱ + I_۲$ که در صورت مسأله توضیح داده شده، نیز یک ایده‌آلِ حلقهٔ R است و نیز می‌دانیم کلّیهٔ ایده‌آلهای حلقهٔ Z به صورت kZ هستند.

حال فرض کنیم $(m , n) = d$ پس: $d \mid m$ و $d \mid n$ یا $m = dq_۱$ و $n = dq_۲$ اگر فرض کنیم: $x \in mZ + nZ$ پس $x = mt_۱ + nt_۲$ که با توجه به روابط فوق خواهیم داشت:

$$x = (dq_۱)\,t_۱ + (dq_۲)\,t_۲ \Longrightarrow x = d\,(q_۱t_۱ + q_۲t_۲)$$
$$\Longrightarrow x \in dZ \Longrightarrow (mZ + nZ) \subseteq dZ \quad (۱)$$

حال نشان می‌دهیم $dZ \subseteq (mZ + nZ)$:

چون $(m , n) = d$ پس طبق قضیهٔ بزو، d را می‌توان برحسب ترکیبی خطی از m و n نوشت یعنی:

$$d = rm + sn$$

حال اگر $x \in dZ$ پس:

$$x = dt \Longrightarrow x = (rm + sn)t \Longrightarrow x = m(rt) + n(st)$$
$$\Longrightarrow x \in mZ + nZ \Longrightarrow dZ \subseteq (mZ + nZ) \quad (۲)$$
$$(۱), (۲) \Longrightarrow mZ + nZ = dZ$$

۷ـ هرگاه عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq ۰$ تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت:

$$a = bq + r \qquad ۰ \leq r < |b|$$

الف) اگر مقسوم‌علیه را به مقسوم بیفزاییم (یا کم کنیم) خواهیم‌داشت:

$$a + b = bq + b + r \Longrightarrow a + b = b\,(q + ۱) + r$$
$$a - b = bq - b + r \Longrightarrow a + b = b\,(q - ۱) + r$$

پس با کم کردن مقسوم علیه از مقسوم ۱ واحد از خارج‌قسمت کم می‌شود و با اضافه‌کردن آن ۱ واحد به خارج‌قسمت اضافه می‌شود و در هر دو حالت باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

ب) $a+۳b = bq+۳b+r \Longrightarrow a+۳b = b\,(q+۳)+r$

با افزودن ۳ برابر مقسوم‌علیه به مقسوم، خارج‌قسمت ۳ واحد اضافه شده و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

۸ـ چون ۷ عددی اوّل و $a \neq ۷k$ پس $(a , ۷) = ۱$ بنابراین طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$a^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Longrightarrow ۷ \mid (a^۶ - ۱) \Longrightarrow ۷ \mid (a^۳ - ۱)\,(a^۳ + ۱)$$
$$\overset{\text{۷ اول است}}{\Longrightarrow} ۷ \mid a^۳ - ۱ \quad \text{یا} \quad ۷ \mid a^۳ + ۱$$
$$\Longrightarrow a^۳ - ۱ = ۷k \quad \text{یا} \quad a^۳ + ۱ = ۷k$$
$$\Longrightarrow a^۳ = ۷k + ۱ \quad \text{یا} \quad a^۳ = ۷k - ۱ \Longrightarrow a^۳ = ۷k \pm ۱$$

۹ـ اگر فرض کنیم $(a , b) = d$ و $[a , b] = c$ در این صورت می‌دانیم:

$a = a'd$ و $b = b'd$ و $c = a'b'd$ که $(a' , b') = ۱$

$$a + b = ۱۸۷ \Longrightarrow (a' + b')\,d = ۱۸۷$$
$$c = ۳۰d \Longrightarrow a'b'd = ۳۰d \Longrightarrow a'b' = ۳۰$$

$$\overset{(a',b')=۱}{\Longrightarrow} \begin{cases} a'=۶ \\ b'=۵ \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=۱۱ \Longrightarrow d=\frac{۱۸۷}{۱۱}=۱۷$$
$$\Longrightarrow a=۶\times۱۷=۱۰۲\ ,\ b=۵\times۱۷=۸۵$$

یا
$$\begin{cases} a'=۱ \\ b'=۳۰ \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=۳۱ \Longrightarrow d=\frac{۱۸۷}{۳۱} \notin Z$$

یا
$$\begin{cases} a'=۲ \\ b'=۱۵ \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=۱۷ \Longrightarrow d=۱۱$$
$$\Longrightarrow a=۲\times۱۱=۲۲,\ b=۱۵\times۱۱=۱۶۵$$

یا
$$\begin{cases} a'=۳ \\ b'=۱۰ \end{cases} \Longrightarrow a'+b'=۱۳ \Longrightarrow d=\frac{۱۸۷}{۱۳} \notin Z$$

۱۰ـ

$$f(x)=\sqrt{x+۴+۳\sqrt{x+۴}}$$
$$x+۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۴ \Rightarrow D_f=[-۴\ ,\ +\infty)$$
$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f :\ \text{اگر}\ f(x_۱)=f(x_۲)$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_۱+۴+۳\sqrt{x_۱+۴}}=\sqrt{x_۲+۴+۳\sqrt{x_۲+۴}}$$

فرض می‌کنیم:
$$\left.\begin{matrix} x_۱+۴=a \\ x_۲+۴=b \end{matrix}\right\}$$

طرفین را به توان (۲) می‌رسانیم:
$$\Rightarrow \sqrt{a+۳\sqrt{a}}=\sqrt{b+۳\sqrt{b}}$$
$$a+۳\sqrt{a}=b+۳\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow (a-b)+۳\sqrt{a}-۳\sqrt{b}=۰$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})+۳(\sqrt{a}-\sqrt{b})=۰$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+۳)}_{\text{مثبت}}=۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=۰ \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b} \Rightarrow a=b$$
$$\Rightarrow x_۱+۴=x_۲+۴ \Rightarrow x_۱=x_۲ \Rightarrow \text{تابع در دامنه‌اش یک‌به‌یک است}$$

۱۱ـ

$$y=\frac{x^۲-۴x+m}{x-۱} \Longrightarrow y'=\frac{x^۲-۲x+(۴-m)}{(x-۱)^۲}$$
$$y'=۰ \Longrightarrow x^۲-۲x+(۴-m)=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ $y' = ۰$ ، x' و x'' طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع است.

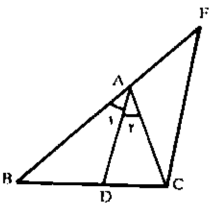
$$۴x'x''+۳(x'+x'')=۶$$
$$۴\left(\frac{c}{a}\right)+۳\left(-\frac{b}{a}\right)=۶ \Longrightarrow ۴(۴-m)+۳(۲)=۶$$
$$۴(۴-m)+۶=۶ \Longrightarrow ۴(۴-m)=۰ \Longrightarrow \boxed{m=۴}$$

۱۲ـ

$$I=\int\frac{۴\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{۲\sin^۲x+\cos^۲x}}=\int\frac{۲\sin ۲x\,dx}{\sqrt{۲\sin^۲x+۱-\sin^۲x}}$$
$$=\int\frac{۲\sin ۲x\,dx}{\sqrt{\sin^۲x+۱}}$$
$$u=\sqrt{\sin^۲x+۱} \Rightarrow du=\frac{۲\cos x\sin x\,dx}{۲\sqrt{\sin^۲x+۱}}$$
$$=\frac{\sin ۲x\,dx}{۲\sqrt{\sin^۲x+۱}}$$
$$\Rightarrow I=۴\int\frac{\sin ۲x\,dx}{۲\sqrt{\sin^۲x+۱}}=۴\int du=۴u+c$$
$$=۴\sqrt{\sin^۲x+۱}+c$$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث FBC ، $AD \parallel FC$ است.



پس داریم:
$$\frac{AD}{FC}=\frac{DB}{BC}$$

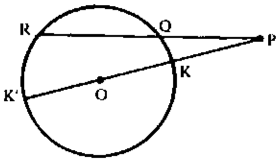
و از آنجا:
$$FC=\frac{AD\cdot BC}{DB}$$

اما $DB=\frac{a\cdot c}{b+c}$ و $AD=\frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$ ، پس:

$$FC=\frac{۲}{c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

۲ـ (حل از آقای رضا نصیری از زنجان). دو سر قطر دایره گذرنده از نقطهٔ P را K و 'K می‌نامیم. با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$PR = PQ + QR = ۹ + ۷ = ۱۶$$



از طرفی بنا به روابط طولی در دایره، می‌توان نوشت:

$$PQ\cdot PR = PK\cdot PK'$$

و یا:
$$PQ\cdot PR = (PO - R)\,(PO + R) \Longrightarrow$$
$$۹\times ۱۶ = (۱۳ - R)\,(۱۳ + R) \Longrightarrow$$
$$۱۴۴ = ۱۶۹ - R^۲ \Longrightarrow R^۲ = ۲۵ \Longrightarrow R = ۵\ \text{شعاع دایره}$$

۳ـ داریم: $\log_B^A=\frac{\log A}{\log B}$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\log_۵^x > \log_{۱۲۵}^{(۳x-۲)} \Rightarrow \frac{\log x}{\log ۵} > \frac{\log(۳x-۲)}{\log ۵^۳}$$
$$\Rightarrow \frac{\log x}{\log ۵} > \frac{\log(۳x-۲)}{۳\log ۵} \Rightarrow ۳\log x > \log(۳x-۲)$$
$$\Rightarrow \log x^۳ > \log(۳x-۲) \Rightarrow \log x^۳ - \log(۳x-۲) > ۰$$
$$\Rightarrow ۳x-۲>۰\ ,\ \log\left(\frac{x^۳}{۳x-۲}\right)>۰ \Rightarrow \left|\begin{matrix} x>\frac{۲}{۳} \\ \frac{x^۳}{۳x-۲}>۱ \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ \frac{x^2}{3x-2} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{3x-2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ (x-1)^2 (x+2) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = \{x \mid x > \frac{2}{3}\}$$

۴ـ

$$x^4 + (-4y^2 + 4) x^2 + (16y^2 + 32y + 16)$$
$$= [x^4 + (16y^2 + 32y + 16)] + (-4y^2 + 4) x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (8x^2y + 8x^2) + (-4y^2 + 4) x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (8y + 8) x^2 + (-4y^2 + 4) x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 + (-4y^2 - 8y - 4) x^2$$
$$= (x^2 + 4y + 4)^2 - (2y + 2)^2 x^2$$
$$= [x^2 + 4y + 4 - (2y+2)x][x^2 + 4x + 4 + (2y+2)x]$$

۵ـ داریم:

$$\div \ldots, a, b, c, \ldots \Longrightarrow ac = b^2$$
$$\Longrightarrow a^3c^3 = b^6$$

$$\text{طرف دوم تساوی} = a^3b^3c^3 (\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3})$$

$$= a^3b^3c^3(\frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^3b^3c^3}) = \frac{b^3c^3 + b^6 + a^3b^3}{acb}$$

$$= \frac{b^3(c^3 + b^3 + a^3)}{b^2.b} = \frac{b^3(a^3 + b^3 + c^3)}{b^3} = a^3 + b^3 + c^3$$

۶ـ (بر طبق واسطهٔ هندسی)

$$(\log_c^b)^2 = \log_a^c . \log_b^a$$

$$\Rightarrow (\log_c^b)^2 = \frac{\log c}{\log a} \times \frac{\log a}{\log b} \xlongequal{(\log a \neq 0)} \frac{1}{\frac{\log b}{\log c}}$$

$$\Rightarrow (\log_c^b)^2 = \frac{1}{\log_c^b} \Rightarrow (\log_c^b)^3 = 1 \Rightarrow \log_c^b = 1$$

$$\Rightarrow b = c, \begin{cases} \log_2^a + \log_2^b + \log_2^c = \log_2^{abc} = 10 \\ a = b + c = c + c = 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc = 2^{10} \\ a = 2c \\ b = c \end{cases} \Rightarrow (2c)c^2 = 2^{10} \Rightarrow 2c^3 = 2^{10}$$

$$\Rightarrow c^3 = 2^9 = (2^3)^3 \Rightarrow c = 2^3 = 8$$
$$b = c = 8 \quad , \quad a = 2c = 2 \times 8 = 16$$

۷ـ

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xz + z^2 = 4 \\ y^2 + yz + z^2 = 7 \end{cases}$$

برای حل دستگاه، ابتدا معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم و معادلهٔ اوّل را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + z(y-x) = 3 \\ z^2 - y^2 + x(z-y) = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (y-x)(x+y+z) = 3 \\ (z-y)(x+y+z) = 3 \end{cases}$$

از معادلات اخیر نتیجه می‌شود: $y - x = z - y \quad (1)$

همچنین معادلات دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 - 3xy \\ (z-x)^2 = 4 - 3xz \\ (y-z)^2 = 7 - 3yz \end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$1 - 3xy = 7 - 3yz \Longrightarrow z - x = \frac{2}{y} \quad (2)$$

رابطهٔ (۱) را چنین می‌توان نوشت: $z + x = 2y \quad (3)$

از معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $x = y - \frac{1}{y}\ ,\ z = y + \frac{1}{y}$

مقادیر x و z را بر حسب y در معادلهٔ اوّل دستگاه قرار می‌دهیم:

$$3y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (3y^2 - 1)(y-1)(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \text{یا}\ y = \frac{-\sqrt{3}}{3} \ \text{یا}\ y = 1 \ \text{یا}\ y = -1$$

و دستگاه دارای چهار دسته جواب است:

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ (x, y, z) \mid (0, \pm 1, \pm 2), \left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \mp\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \right\}$$

۸ـ داریم:

روش اوّل:

$$S = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}} . a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{36}} . a^{\frac{1}{72}}b^{\frac{1}{216}} \ldots$$
$$= (a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{12}} . a^{\frac{1}{72}} \ldots)(b^{\frac{1}{6}} . b^{\frac{1}{36}} . b^{\frac{1}{216}} \ldots)$$
$$= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \cdots} . b^{\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \cdots} = a^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}}} . b^{\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}}}$$
$$S = a^{\frac{3}{5}} . b^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^3 b}$$

روش دوم: طرفین عبارت را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$S^6 = a^3 b \underbrace{\sqrt{a \sqrt[3]{b \sqrt{a \sqrt[3]{b \sqrt{\ldots}}}}}}_{S} = a^3 b S$$

$$S^6 = a^3bS \Rightarrow S^6 - a^3bs = 0 \Rightarrow S(S^5 - a^3b) = 0$$
$$S \neq 0 \Rightarrow S^5 = a^3b \Rightarrow S = \sqrt[5]{a^3b}$$

۹ـ

$$S = \text{Arc} \sin \frac{23}{26} - \text{Arc} \cos \frac{11}{13}$$

با فرض $\beta = \text{Arc} \cos \frac{11}{13}$ و $\alpha = \text{Arc} \sin \frac{23}{26}$ داریم:

$$\sin\alpha = \frac{23}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{1 - (\frac{23}{26})^2} = \frac{7\sqrt{3}}{26}$$
$$\cos\beta = \frac{11}{13} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$$
$$= \sqrt{1 - (\frac{11}{13})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$
$$\sin S = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$
$$= \frac{23}{26} \times \frac{11}{13} - \frac{4\sqrt{3}}{13} \times \frac{7\sqrt{3}}{26}$$
$$= \frac{253 - 84}{13 \times 26} = \frac{169}{13 \times 2 \times 13} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin S = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \Longrightarrow \boxed{S = 30^\circ}$$

۱۰ـ

$$\begin{cases} a \sin^2 x - b \cos^2 x = p \\ a \sin^4 x + b \cos^4 x = q \end{cases}$$

طرفین رابطهٔ اوّل را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$P^2 = a^2\sin^4x + b^2\cos^4x - 2ab \sin^2x \cos^2x$$
$$P^2 = a^2\sin^4x + b^2\cos^4x - 2ab \sin^2x \cos^2x + ab - ab$$
$$= a^2\sin^4x + b^2\cos^4x + ab (1 - 2\sin^2x \cos^2x) - ab$$
$$= a^2\sin^4x + b^2\cos^4x + ab (\sin^4x + \cos^4x) - ab$$
$$= a\sin^4x (a + b) + b \cos^4x (a + b) - ab$$
$$= (a + b) (a\sin^4x + b \cos^4x) - ab$$
$$= (a + b) q - ab \Longrightarrow \boxed{p^2 + ab = q (a + b)}$$

(رابطهٔ مستقل از x)

مسائل ریاضیات سال سوّم تجربی

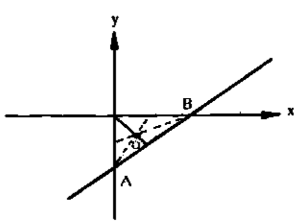
۱ـ ابتدا مختصات رؤوس مثلث و سپس مختصات مرکز ثقل آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta : 2x - 3y - 6 = 0 \Longrightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} ، B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ و } O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow G \begin{vmatrix} x = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} = \frac{0 + 3 + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} = \frac{-2 + 0 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مرکز ثقل مثلث } G(1, \frac{-2}{3}) \Rightarrow OG = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

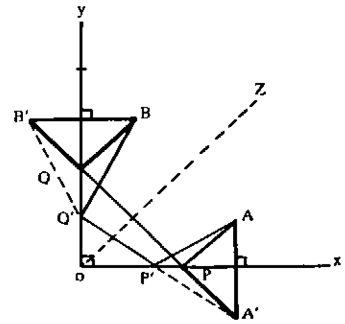
اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث



۲ـ قبلاً مشابه آن حل شده‌است.

۳ـ حالتی را در نظر می‌گیریم که دو نقطهٔ A و B در دو طرف oz نیمساز زاویهٔ xoy قرار دارند. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به ox نقطهٔ 'A، و قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به oy نقطهٔ 'B می‌نامیم. از 'A به 'B وصل می‌کنیم و نقاط برخورد 'A'B با ox و oy را به ترتیب P و Q می‌نامیم. این دو نقطه جواب مسأله‌اند یعنی: AP + PQ + QB کمترین مقدار ممکن را داراست. زیرا اگر دو نقطهٔ دلخواه 'P و 'Q را روی ox و oy در نظر بگیریم 'AP' + P'Q' + Q'B که همان 'A'P' + P'Q' + Q'B است از AP + PQ + QB که همان پاره‌خط 'A'B می‌باشد، بزرگتر است.

حالتی را که دو نقطهٔ A و B در یک‌طرف نیمساز oz قرار داشته باشند حل کنید و به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال کنید.



۴ـ می‌دانیم:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin nx}{nx}\right) = 1$$

پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\sin 2x}{2x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{3\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 1 \times 2\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) \times 3\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= 1 \times 2 \times 3 = 6$$

۵ـ

$$y = a\sin mx + b\cos mx$$
$$\Longrightarrow y' = am\cos mx - bm\sin mx$$
$$\Longrightarrow y'' = -am^2\sin mx - bm^2\cos mx$$
$$= -m^2 \underbrace{(a\sin mx + b\cos mx)}_{y}$$
$$\Longrightarrow y'' = -m^2 y \Longrightarrow y'' + m^2 y = 0$$

۶ـ داریم:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'_x \, . \, dx \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = y'_x \, . \, \frac{dx}{d\alpha}$$

$$\Rightarrow y'_\alpha = y'_x \, . \, x'_\alpha \Rightarrow y'_x = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{6\cos 3\alpha}{6(1 + tg^2 3\alpha)}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\cos 3\alpha}{1 + tg^2 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\frac{1}{\cos^2 3\alpha}} = \cos^3 3\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{y'_x = \cos^3 3\alpha}$$

۷ـ داریم:

$$y = 2mx - 2mx^3 + x^3 \Longrightarrow y = x^3 + 2m(x - x^3)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x - x^3 = 0 \\ y = x^3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = -1 \\ \text{یا} \\ x = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\text{(نقاط ثابت)} \quad \left| \begin{array}{l} A(0, 0) \\ \text{یا} \\ B(-1, -1) \\ \text{یا} \\ C(1, 1) \end{array} \right.$$

بنابراین منحنی از سه نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۸ـ در توابع با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ خط $cx + d = 0 \ (c \neq 0)$ مجانب قائم و خط $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی است، پس داریم:

$$\left(y = \frac{ax + b}{x + a}\right) : \begin{cases} x + a = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Longrightarrow x = -a = -2 \quad \boxed{a = 2}$$

از طرفی چون منحنی محور x ها را در $x = -1$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $A(-1, 0)$ متعلق به منحنی است:

$$x = -1 : \frac{2(-1) + b}{(-1) + 2} = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 2}$$

۹ـ داریم:

$$f(x) = 2x^3 - 3mx^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 6mx = 0$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = m \end{array} \right. \quad \text{(طولهای اکسترمم)} \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(m) = 2m^3 - 3m^3 = 8 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow -m^3 = 8 \Longrightarrow m^3 = -8 \Longrightarrow \boxed{m = -2}$$

۱۰ـ

$$T = \sin^6 15^\circ + \cos^6 15^\circ + \sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ$$

داریم:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$
$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

با توجه به روابط اخیر داریم:

$$\sin^6 15^\circ + \cos^6 15 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 30^\circ = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{16}$$
$$\sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$
$$\Rightarrow S = \frac{13}{16} + \frac{7}{8} = \frac{13 + 14}{16} = \frac{27}{16} \Rightarrow \boxed{S = \frac{27}{16}}$$

۱۱ـ

$$3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$3\sin x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$(3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

می‌دانیم:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

پس داریم:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x' = \frac{4}{7}k\pi + \frac{\pi}{14} \\ x'' = \frac{4}{5}k\pi + \frac{\pi}{10} \end{array} \right.$$

حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ـ

$$y = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 1 \Rightarrow y' = -2x^2 + 4x$$
$$y'' = -4x + 4 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f(1) = \frac{-2}{3} + 2 - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow A\left(1, \frac{1}{3}\right) \text{(مختصات نقطهٔ عطف)}$$
$$y = -x \Rightarrow x + y = 0 \quad \text{(معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم)}$$

$$d = \frac{\left|1 + \frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۲ـ تابع با ضابطهٔ $y = (x-1)^3 + (x-2)^3 + \ldots + (x-101)^3$ را در نظر می‌گیریم:

بدیهی است تعداد محل تلاقی منحنی تابع با محور x ها ریشه‌های معادله است. بنابراین کافی است مشتق را تعیین علامت کنیم:

$$y' = 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2 + \ldots + 3(x-101)^2 > 0$$

علامت مشتق همواره مثبت است، بنابراین تابع همواره صعودی است و محور x ها را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه معادلهٔ موردنظر فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

۳ـ تابع هموگرافیک با ضابطهٔ عمومی $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ وقتی ثابت است که مشتق آن صفر شود:

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} = 0 \Longrightarrow ad = bc$$

بنابراین برای تابع با ضابطهٔ مفروض $y = \frac{k + 2x}{kx + 8}$ داریم:

$$y = \frac{2x + k}{kx + 8} \Longrightarrow 2 \times 8 = k^2 \Longrightarrow k^2 = 16$$
$$\Longrightarrow k = \pm 4$$

۴ـ برای تعیین وضع نقطهٔ $P(x_0, y_0)$ نسبت به دایره به معادلهٔ عمومی $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ کافی است $C(x_0, y_0)$ را محاسبه کنیم. در این صورت سه حالت ممکن پیش می‌آید:

۱) اگر $C(x_0, y_0) > 0$ باشد، نقطهٔ P خارج دایره قرار دارد.
۲) اگر $C(x_0, y_0) = 0$ باشد، نقطهٔ P روی دایره واقع است.
۳) اگر $C(x_0, y_0) < 0$ باشد، نقطهٔ P داخل دایره است.

بنابراین پس از اختصار معادلهٔ دایره داریم:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + my = 9 \\ P(-2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} C(-2, 3) = (-2)^2 + 3^2 + m(3) - 9 < 0 \\ 4 + 3m < 0 \Rightarrow m < -\frac{4}{3} \end{array}$$

۵ـ در صورتی که $d = o'M$ و R شعاع دایرهٔ مفروض باشد، طول مماس مرسوم از نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ بر دایرهٔ مفروض از دستور زیر به دست می‌آید:

$$MT = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2}$$
$$MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6y = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\left| \begin{array}{l} x^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0 \\ M(2, -3) \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow MT = \sqrt{2^2 + (-3 - 1)^2 - 4} = 4$$

۶- داریم:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{m}} \sin\left(\frac{mx}{2}\right)dx = \frac{-2}{m}\cos\frac{mx}{2}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{m}}$$

$$= \frac{-2}{m}\left[\cos\frac{m}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right) - \cos 0\right] = \frac{-2}{m}\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{-2}{m}(-1) = \frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

۷-

$$\cos x\,(3\sin x + 3\cos x) = \frac{3}{2}$$

$$3(\cos x \sin x + \cos^2 x) = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\cos x \sin x + 2\cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x = \sin(-2x)$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}}$$

۸- از رابطهٔ $\cos^2\hat{A} + \cos^2\hat{B} - \cos^2\hat{C} = 1$ نتیجه می‌شود:

$$1 - \sin^2\hat{A} + 1 - \sin^2\hat{B} - (1 - \sin^2\hat{C}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\hat{A} + \sin^2\hat{B} = \sin^2\hat{C}$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{C} = 90^\circ}$$

جوابهای تفریح اندیشه

✱ جواب ۶

حل: سن مهرداد، خواهر و پدرش را به ترتیب M و S و P می‌نامیم، می‌دانیم که:

$$M + S + P = 100 \qquad (1)$$

بنا به فرض اول داریم:

$$S + P - M = 2S \Rightarrow P - S - M = 0 \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) داریم: $2P = 100 \Rightarrow P = 50$

با استفاده از فرض دوم داریم:

$$P + P - M = 2(M + P - S) \Rightarrow 3M - 2S = 0$$

و چون $M + S = 50$ است پس $M = 20$ و $S = 30$ است. یعنی در حال حاضر مهرداد ۲۰ سال، خواهرش ۳۰ سال و پدرش ۵۰ سال دارند.

✱ جواب ۷

حل: طول مسافت پیموده‌شده در هر قسمت را L می‌نامیم. موتورسوار برای پیمودن هر قسمت زمانهای زیر را صرف می‌کند.

اولین قسمت : $\frac{L}{10}$ ساعت   سومین قسمت : $\frac{L}{30}$ ساعت

دومین قسمت : $\frac{L}{5}$ ساعت   چهارمین قسمت : $\frac{L}{15}$ ساعت

مجموع زمان لازم برای پیمودن مسافت موردنظر برابر است با:

$$\frac{L}{10} + \frac{L}{5} + \frac{L}{30} + \frac{L}{15} = \frac{12L}{30} = \frac{2L}{5}$$

چون سرعت برابر است با مسافت پیموده شده ($4L$) تقسیم بر زمان طی شده ($\frac{2}{5}L$) پس داریم:

سرعت متوسط $= 4L : \frac{2}{5}L = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ کیلومتر در ساعت

✱ جواب ۸

حل:

$$(8 \times 8) + (8 + 8) = 80 \qquad ((8 + 8) : 8) + 8 = 10$$

$$((8 + 8) \times 8) - 8 = 120 \qquad (8 + 8) - (8 : 8) = 15$$

$$(8 + 8 + 8) \times 8 = 192 \qquad (8 - (8 : 8)) \times 8 = 56$$

$$(8 \times 8 \times 8) + 8 = 520 \qquad (8 \times 8) + (8 : 8) = 65$$

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 3
Serial numbers ; 13
Spring 1995

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. The first word
2. You, too, can be successful in your mathematics lessons — Parviz Shahriāri
3. Equivalence relations and equivalence classes — Hamid Reza Amiri
4. A brief history of mathematics magazins in Iran
5. Limit: Definition of limit of functions. — Ahmad Ghandehari
6. Instruction of translation of mathematics articles — Hamid Reza Amiri
7. Foundations of computer — H. Ebrahimzadeh Gholzom
8. Proving of invalidity — G. R. Yassipour
9. Vectors — M. R. Hashemi Mosavi
10. Short articles of authentic mathematics journals — G. R. Yassipour
11. Solve a problem .... — Dr. A. Sharafeddin
12. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods — G. R. Yassipour
13. Locus — M. H. Rostami
14. About, problems of space geometry — Parviz Shahriari
15. Complex numbers — Roohollahe- Jahanipoor
16. Introduction to some books
17. Answers to letters
18. Solutions of contest problems (No. 10)
19. Problems
20. Solutions and hints of problems (No. 11)

ابوکامل ملقّب به «حاسِب مصری»

نویسنده‌ای که در نیمهٔ دوم قرنِ سوّم هجری فعّال بوده و اثر جبریِ وی شرحی است بر جبر خوارزمی. این کتاب به دلیل برخورداری از مباحث تازه علمی، در آن عصر رواج کامل یافت.

«کرجی» نویسنده مسلمان در قرن چهارم هجری و نیز نویسنده مشهور لاتین «لئوناردوپیا»، مشهور به «فیبوناتچی» در اواخر سدهٔ دوازدهم میلادی از مثالهای ابوکامل بهره فراوانی گرفتند.

اثرِ ابوکامل در ارائهٔ احکام کلیِ قواعدی که خوارزمی آنها را به‌وسیلهٔ مثال بیان می‌کند، از اثر خوارزمی فراتر می‌رود، مانند: (۱)

$$\left.\begin{array}{l}(a \pm px)(b \pm qx) = ab \pm bpx \pm aqx + pqx^۲ \\ (a \pm px)(b \pm qx) = ab \pm bpx \mp aqx - pqx^۲\end{array}\right\} \quad (۱)$$

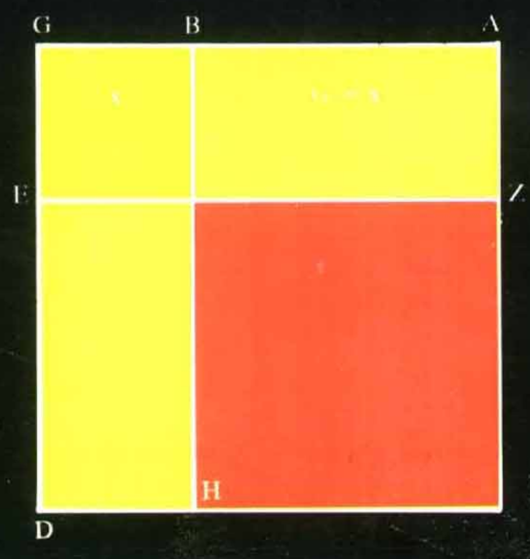
ابوکامل علاوه بر این‌که برای درستی حالتهای خاصِ (۱) براساس قانون توزیع‌پذیری و قواعد علامتها، برهانی جبری ارائه می‌دهد، برهانهایی هندسی نیز می‌آورد. به‌عنوان مثال، برهان هندسی ابوکامل برای حالتِ خاصِّ (۱) یعنی:

$(۱۰ - x)(۱۰ - x) = ۱۰۰ + x^۲ - ۲۰x$ را در زیر می‌آوریم:

فرض‌کنید خط GA معرفِ عدد ۱۰ باشد و GB معرف «شیئی» x، اینک مربع (AD) (منظور مربعی که قطر آن AD است) را مطابق نمودار کامل کنید. در این صورت $AB=ED=۱۰-x$، بنابراین مساحت مربع (ZH) برابراست با $(۱۰ - x)^۲$. همچنین $(GZ)=(GH)=۱۰x$، بنابراین $(EH)=(GH)-(EB)=۱۰x-x^۲$ (منظور از EH، مستطیل به قطر EH است و ...) بنابراین $(EH)+(GZ)$ مساوی است با $۲۰x-x^۲$، و چون مساحت مربعِ بزرگتر ۱۰۰ است نتیجه می‌شود که

$$(۱۰-x)^۲ = (ZH)=۱۰۰-(۲۰x-x^۲)=۱۰۰+x^۲-۲۰x$$

(برگرفته از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی تألیف جی. ال. برگرن ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی و دکتر علیرضا جمالی)



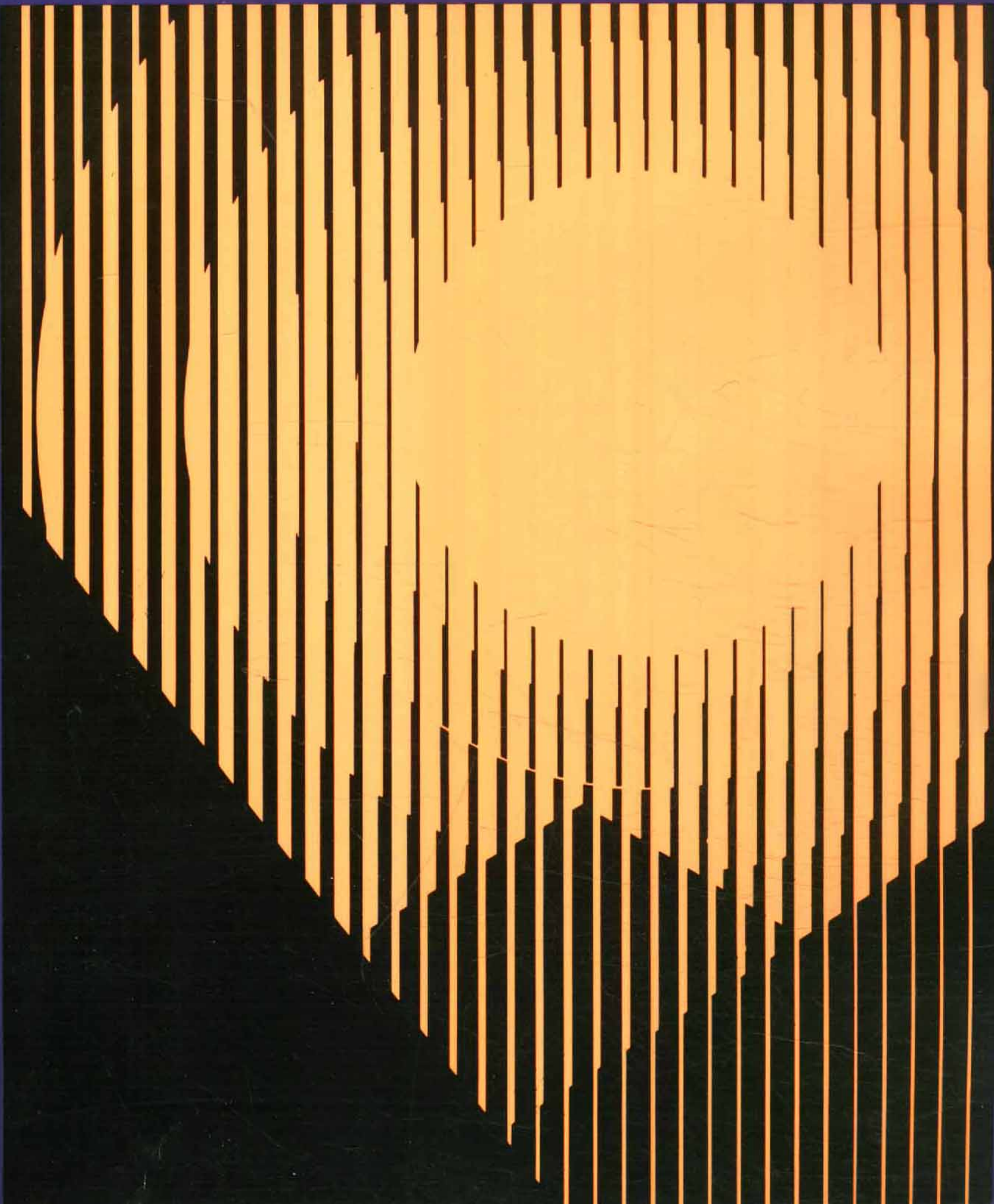
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۴

سال چهارم، تابستان ۱۳۷۴، شمارهٔ چهارم، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه
وابسته به
وزارت آموزش و پرورش

• صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه
• مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
• سردبیر: حمیدرضا امیری

اعضای هیئت تحریریه:
آقایان: • حمیدرضا امیری • احمد قندهاری • غلامرضا یاسی‌پور
• سیدمحمدرضا هاشمی موسوی • محمدهاشم رستمی

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقایان پرویز شهریاری و مهدی قمصری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

• مسئول فنی: هوشنگ آشتیانی • صفحه‌آرا و رسام: احمد پیرحسینلو
• حروفچینی: یگانه • چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

سال چهارم، تابستان ۱۳۷۴، شمارهٔ چهارم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی دبیرستان)
۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آن
۴ـ طرح معماهای ریاضی
۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

• هیئت تحریریه درحکّ واصلاح وحذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
• مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
• مقالات مجله بارسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
• مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

مطالب این شماره

• حرف اوّل ۱
• شماهم می‌توانید در درس ریاضی‌خود موفق‌باشید / پرویزشهریاری ۲
• حد: تعریف حد تابع (قسمت دوم) /احمد قندهاری ۶
• تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۳) / ۱۳
• رابطه هم‌نهشتی ـ خواص و کاربردهای آن در Z/ حمیدرضا امیری ۱۴
• طرح وحل‌مسائل‌اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۲) غلامرضا یاسی‌پور ۲۴
• حل یک مسأله جالب هندسه به‌کمک تابع همنگار / احمد شرف‌الدین ۲۷
• بردارها (قسمت سوم) / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ۳۰
• آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۰) / حمیدرضا امیری ۳۴
• مکان هندسی (قسمت پنجم) / محمدهاشم رستمی ۳۷
• اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر / غلامرضا یاسی‌پور ۴۲
• مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۲) / ۴۵
• مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۳) / حسین ابراهیم‌زاده قلزم ۴۹
• فاصلهٔ نقطه از خط در فضا / محمدهاشم رستمی ۵۴
• پاسخهای‌مربوط به‌مقالهٔ پیش‌گویی‌وعددجادویی هفت / حسن نصیرنیا ۶۰
• شرط عمودبودن‌ومماس‌بودن یک‌خط برمقاطع‌مخروطی / سیامک جعفری ۶۱
• در پیرامون منظومهٔ شمسی / حسن نصیرنیا ۶۵
• معرفی کتاب / ۶۷
• جواب نامه‌ها ۶۹
• حل مسائل مسابقه‌ای / ۷۱
• مسائل برای حل ۷۲
• حل مسائل برهان شماره ۱۳ / ۷۸

■ نشانی: تهران، خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴-۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۵۵/۱۹۴۹ـ۱۴

حرف اوّل

● امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«بر شما باد به طلب علم، زیرا طلب علم واجب است، علم مایهٔ پیوند میان برادران و راهنما به مروّت و جوانمردی است، تحفهٔ مجالس و همنشین در مسافرت و مایهٔ انس و رهایی از تنهایی، در غربت است[1]».

آری عزیزانِ دانش‌آموز، طلب علم و «دانش‌آموزی» وظیفه‌ای است واجب و چه خوب است که شما به این واجب و انجام آن توجه خاص مبذول داشته تا از عواقب خوب آن نیز بهره‌مند شوید. آیا هر علمی و طلب آن علم را می‌توان وظیفه واجب شمرد و چه علمی ره‌گشا و نجات‌دهنده است؟ جواب این سؤال را نیز از زبان امام علی(ع) بشنویم که می‌فرمایند:

«بهترین علم، آن علمی است که به وسیلهٔ آن راه رشد و هدایتت را اصلاح کنی، و بدترین علم، علمی است که توسط آن آخرت خود را تباه گردانی[2]».

حال این سؤال پیش می‌آید که فایدهٔ این علم، همان که مولا علی(ع) آن را بهترین علم نامیدند چیست؟ ایشان می‌فرمایند:

«نتیجه و فایدهٔ علم و دانش، نیکوکاری است[3]».

یعنی میوهٔ درخت علم، عملِ نیک است و این میوه به ثمر نمی‌رسد جز با زحمت و صبر و استقامت در راه کسب علم و رسیدن به بالاترین درجات آن که در این زمینه نیز امیرالمؤمنین علی (ع) می‌فرمایند:

«ای جویندهٔ علم! عالم و دانشمند حقیقی دارای سه علامت است: دانایی، بردباری و سکوتِ به جا و به‌مورد[4]».

آیا شما نیز دارای این ویژگیها می‌باشید؟ آیا هدف از علم‌آموزی را همانگونه که امامان ما علیهم‌السلام تشریح نموده‌اند، در پیش رو دارید؟ آیا با افزونی علم در خودتان احساس قدرت می‌کنید یا ضعف یا هر دو، هر کدام در جهتی؟ حرف اوّل را با سخنی از پیامبراسلام (ص) به نقل از ولیّ و وصیّ بر حقشان علی(ع) به پایان می‌بریم:

ـ «کسی که علم را برای خدا طلب کند، به هیچ بخشی از آن نرسد مگر شکسته نفسی‌اش بیشتر، و فروتنی‌اش در میان مردم زیادتر و خداترسی‌اش افزونتر و جهد و کوشش او در دین بیشتر شود، و این است آن کسی که از علم و دانایی برخوردار است، پس (تا می‌تواند بیشتر) بیاموزد[5]».

والسلام ـ سردبیر

---

(۱) بحارالانوار / ج ۱، صفحه ۱۸۳

(۲) غررالحکم / فصل ۲۹، حدیث ۷۵

(۳) غررالحکم حرف (غ)

(۴) الحیاة / ج ۲، ص ۳۱۰

(۵) کنزالعمال / ج ۱۰، حدیث ۲۹۳۸۴

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۴)



پرویز شهریاری

ژوزف فوریه (۱۷٦۸ ـ ۱۸۳۰ میلادی)، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان فرانسه، در کتاب خود به نام «نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹)، مجموع رشتهٔ نامتناهی

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

را، برابر $\frac{۱}{۲}$ دانسته است. او این‌طور استدلال می‌کرد:

$$S = ۱+۱-۱+۱-۱+ \dots = ۱-(۱-۱+۱-۱+ \dots)$$

چون داخل پرانتز، همان مقدار S است، بنابراین:

$$S = ۱ - S \Longrightarrow S = \frac{۱}{۲}$$

چند سال بعد برنارد بولتانو (۱۷۸۱ ـ ۱۸۴۸ میلادی)، ریاضی‌دان و فیلسوف چک، برای اثبات نادرستی نتیجه‌گیری فوریه، با استدلالی شبیه به استدلال فوریه، دو مقدار دیگر برای S پیدا کرد:

$$S = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots = ۰$$

$$S = ۱ - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - (۱ - ۱) - \dots = ۱$$

برای نتیجه‌گیری فوریه، به نحو دیگری هم می‌توان «استدلال» کرد: اگر در تقسیم ۱ بر $۱ - x$، جمله‌های خارج قسمت را برحسب توان‌های صعودی x بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱ - x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \dots \qquad (۱)$$

سمت راست برابری، به ازای $x = -۱$، برابر همان S و سمت چپ برابری برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. گمان می‌کنم، حدس زده باشید که فوریه اشتباه کرده است. دربارهٔ برابری (۱)، باید گفت که، این برابری تنها وقتی درست است که داشته باشیم $|x| < ۱$ (مثلاً، روشن است که، برای $x > ۱$، سمت چپ برابری، عددی منفی می‌شود، در حالی که در سمت راست برابری، عددی مثبت به‌دست می‌آید). برابری (۱)، در حالت $|x| = ۱$ هم برقرار نیست.

دربارهٔ نادرست بودن نتیجه‌گیری فوریه، حتی می‌توان به این «استدلال عامیانه» متوسل شد که، چطور ممکن است از مجموع جبری عددهای درست، عددی کسری به‌دست آید؟ ولی اساس مطلب، از این جدی‌تر است. وقتی با تعدادی نامتناهی از عددها سروکار داریم که با عمل «جمع» یا «توان» و یا عمل دیگری به‌هم مربوط شده‌اند، تنها وقتی می‌توان دربارهٔ نتیجهٔ این عملها صحبت کرد که، به‌نحوی ثابت کرده‌باشیم چنین‌نتیجه‌ای وجود دارد. ولی رشتهٔ

$$S = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

تن به چنین برآوردی نمی‌دهد و، بنابراین، به سمت عدد معینی میل نمی‌کند. چنین رشته‌هایی را «تباعد» یا «واگرا» می‌گویند. نمونهٔ دیگری از یک عبارت عددی که قابل محاسبه نیست و حد معینی ندارد عبارت عددی به‌صورت

$$A = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}^{\dots}}}$$

است، زیرا اگر آن را برابر x فرض کنیم، به‌شرط وجود x، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}^x = x$$

ولی این معادله، دست‌کم دو جواب دارد: $x = ۲$ و $x = ۴$؛ و این، یک تناقض است، زیرا A نمی‌تواند هم برابر ۲ و هم برابر ۴ باشد. اکنون به مثالهایی از جبر دبیرستانی می‌پردازیم.

مثال ٦. وضع خط راست $۳x + y + ۱ = ۰$ را نسبت به منحنی (c) پیدا کنید، به‌شرطی که منحنی (c) با معادلهٔ زیر داده شده باشد:

$$۲x^۲ - y^۲ + xy + ۲x + ۵y - ۴ = ۰$$

برای پی‌بردن به موقعیت یک خط راست، نسبت به یک منحنی، باید نقطه‌های مشترک آنها را (اگر وجود داشته باشند)، پیدا کنیم. برای این منظور، معادلهٔ خط راست و معادلهٔ منحنی را، مثل یک دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی حل می‌کنیم. از معادلهٔ خط راست به دست می‌آید: $y = -3x - 1$. این مقدار را، به‌جای y، در معادلهٔ (c) قرار می‌دهیم؛ بعد از عملهای ساده، به این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به x) می‌رسیم:

$$-10\,(x+1)^2 = 0$$

که یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ برابر) دارد. اگر این مقدار ریشه ($x = -1$) را در معادلهٔ خط راست، یا معادلهٔ منحنی (c) قرار دهیم، به جواب $y = 2$ می‌رسیم (با قرار دادن $x = -1$ در معادلهٔ منحنی (c)، برای y، ریشهٔ مضاعف ۲ به‌دست می‌آید). تکلیف روشن شد: خط راست و منحنی (c) یک نقطهٔ مشترک دارند و، در این نقطه، برهم مماس‌اند، زیرا از حل معادله‌های آنها با یکدیگر، به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف رسیدیم. مسأله حل شد.

ولی اشتباه می‌کنیم؛ معادله‌ها ما را فریب داده‌اند . . . اندکی بیشتر دقت کنیم. معادلهٔ منحنی (c)، به‌صورت منحنی داده‌شده است. باوجود این، می‌توانیم مشتق y را نسبت به x پیدا کنیم. اگر خط راست مفروض، بر منحنی (c) مماس باشد، باید مقدار y' به ازای مختصات نقطه تماس، یعنی به ازای $x = -1$ و $y = 2$، با ضریب‌زاویه خط مماس، یعنی -3 برابر شود. مشتق y نسبت به x در معادلهٔ منحنی (c) چنین می‌شود:

$$y' = \frac{4x + y + 2}{2y - x - 5}$$

ولی این کسر، به‌ازای $x = -1$ و $y = 2$، به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و معلوم نیست، چگونه باید از آن رفع ابهام کرد. خود این مطلب، ما را، دربارهٔ درستی جواب، به تردید می‌اندازد.

معادلهٔ (c) را به‌صورت «صریح» درمی‌آوریم (یعنی y را برحسب x محاسبه می‌کنیم). اگر معادلهٔ (c) را برحسب توانهای نزولی y منظم کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم، نسبت به y، می‌رسیم:

$$y^2 - (x+5)\,y - (2x^2 + 2x - 4) = 0$$

که از آن‌جا، بسادگی به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{x + 5 \pm (3x + 3)}{2}$$

معلوم می‌شود، (c) یک منحنی نیست، بلکه دو خط راست است:

$$y = 2x + 4 \quad \text{و} \quad y = -x + 1 \qquad (*)$$

که در نقطهٔ $(-1 , 2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. خط راست $3x + y + 1 = 0$ هم از همین نقطه می‌گذرد و چون با هریک از خطهای راست (*) در نقطهٔ $(-1 , 2)$ برخورد دارد، بنابراین روشن است که چرا، در ابتدا، دوبار ریشهٔ $x = -1$ به‌دست آمد. موضوع کاملاً روشن شد. معادلهٔ (c) و وجود ریشهٔ مضاعف، به‌کمک هم، ما را فریب داده بودند.

مفهوم مماس بودن یک خط راست بر منحنی (یا دو منحنی بر هم) را، دقیقتر بررسی کنیم.

اگر ضمن حل دستگاه شامل دو معادلهٔ خط راست و منحنی (یا دو منحنی) به ریشهٔ مضاعف رسیدیم، همیشه به معنای آن نیست که آنها برهم مماس‌اند. **یک خط راست وقتی بریک منحنی مماس است که مشتق تابع معرف منحنی در نقطه مشترک خود با خط راست، برابر با ضریب زاویهٔ خط راست باشد. همچنین، دو منحنی وقتی در نقطه‌ای مثل A برهم مماس‌اند که در این نقطه مماس مشترک داشته باشند.** به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۷. خط راست $4x + y = 2$، **نسبت به منحنی (c) با معادلهٔ زیر چه وضعی دارد:**

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 1$$

از حل معادله‌های خط راست و منحنی درجهٔ سوم، با تبدیل‌های ساده‌ای، به این معادله می‌رسیم:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \implies (x-1)^3 = 0$$

بسیار خوب! چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ خط راست و منحنی (c)، در نقطهٔ به طول ۱، مشترک‌اند. ولی آیا خط راست منحنی را قطع کرده یا بر آن مماس است؟

معیار مطمئن ما، محاسبهٔ ضریب‌زاویهٔ مماس بر منحنی (c) در نقطهٔ به طول واحد است. داریم:

$$y' = 3x^2 - 6x - 1$$

که به ازای $x = 1$، برابر -4 می‌شود؛ و -4 ضریب‌زاویه خط راست ماست: خط راست $4x + y = 2$ نقطهٔ $(1 , -2)$ بر منحنی (c) مماس است. البته، چون:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

نقطهٔ $x = 1$، تغییر علامت می‌دهد، به معنای آن است که خط راست مماس، در نقطهٔ تماس از منحنی عبور می‌کند: نقطهٔ $(1 , -2)$، نقطهٔ عطف منحنی است و به همین دلیل، در این نقطه، منحنی (c) در دو طرف خط راست مماس واقع می‌شود (خط راست مماس بر منحنی

در نقطهٔ عطف آن، در نقطهٔ تماس، از منحنی عبور می‌کند).
به این مثال هم توجه کنید:

مثال ۸. سهمی $y = -x^2 - 2$، نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ چه وضعی دارد؟

اگر بین معادله‌های سهمی و دایره، x را حذف کنیم، به معادلهٔ درجه‌دوم

$$y^2 - y - 6 = 0 \qquad (**)$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: ۳ و ۲ − . نقطهٔ به عرض ۳، در بیرون دایره است و، بنابراین، نمی‌تواند نقطهٔ برخوردی از دایره و سهمی را مشخص کند. $y = -2$، منجر به $x = 0$ می‌شود. $y = -2$، ریشهٔ سادهٔ معادله (**) بود (نه ریشهٔ مضاعف). آیا باید نتیجه گرفت؛ سهمی و دایره، در نقطهٔ $(0, -2)$ یکدیگر را قطع کرده‌اند؟ ولی، این نتیجه‌گیری، با تصوری که از سهمی و دایره داریم، سازگار نیست: دایره و سهمی، اگر برهم مماس نباشند، یا در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، یا در دو نقطه؛ و یا نقطهٔ برخوردی ندارند.

ضریب‌زاویهٔ مماس بر سهمی و بر دایره را در نقطه $(0, -2)$ محاسبه می‌کنیم. برای دایره داریم: $y' = -\frac{x}{y}$ که در نقطه $(0, -2)$ برابر صفر می‌شود. همین‌طور، برای سهمی $y' = -2x$ که باز هم در نقطهٔ به طول صفر، برابر صفر است. سهمی و دایره، در این نقطه مماس مشترک دارند، یعنی برهم مماس‌اند.

می‌بینید، گاهی رسیدن به ریشهٔ ساده (و نه مضاعف)؛ به معنای مماس بودن دو نمودار بریکدیگر است. ولی، در این‌جا، به نکتهٔ دیگری اشاره کنیم. گفتیم سهمی و دایره، در حالت کلی، در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین، برای رسیدن به این چهار نقطه (حقیقی یا موهومی)، باید خودمان را به یک معادلهٔ درجهٔ چهارم برسانیم؛ و این، وقتی حاصل می‌شود که بین معادله‌های سهمی و دایره، y را و (نه x را) حذف کنیم. دراین‌صورت، به‌معادلهٔ‌درجهٔ چهارم

$$x^4 + 6x^2 = x^2(x^2 + 6) = 0$$

می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف $x = 0$ را دارد و دو ریشهٔ دیگر آن، عددهای موهومی‌اند. چون $x = 0$، ریشهٔ مضاعف این معادلهٔ درجهٔ چهارم است، بنابراین سهمی و دایره، در نقطهٔ به طول صفر برهم مماس‌اند و نقطهٔ $(0, -2)$، نقطهٔ تماس آنهاست.

مثال ۹. از نقطهٔ $A(-1, 0)$، مماسهایی بر نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{x+1}$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ مماسها را پیدا کنید.

اگر ضریب زاویهٔ مماس را m بگیریم، معادلهٔ خط راست مماس، به‌صورت

$$y = mx + m$$

درمی‌آید. برای به‌دست آوردن معادله‌ای که، ریشه‌های آن، نقطه‌های برخورد این خط راست با نمودار تابع باشد، باید معادله‌های آنها را، در یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی قرار دهیم و با هم حل کنیم. با حذف y در این دستگاه، به معادلهٔ درجه دوم

$$m^2x^2 + (2m^2 - 2m - 1)x + (m^2 - 2m) = 0 \qquad (1)$$

می‌رسیم، یعنی در حالت کلی، خط راستی که از نقطهٔ A می‌گذرد، نمودار ما را در دو نقطه قطع می‌کند و این، به شرطی است که معادلهٔ اخیر، دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد. اگر این معادله، ریشه‌های موهومی داشته باشد، خط راست، نمودار را قطع نمی‌کند. در ضمن در حالت حقیقی بودن ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ای از آن قابل قبول است که، به ازای آن، مقدار $x + 1$ مثبت باشد، در غیر این‌صورت، تابع $y = 1 - \sqrt{x+1}$ موهومی می‌شود. ولی ما می‌خواهیم خط راست بر منحنی مماس باشد، پس باید معادلهٔ (۱)، ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m + 1 = 0 \implies m = -\frac{1}{4}$$

اگر این نتیجه را بپذیریم، باید بگوییم: از نقطهٔ $A(-1, 0)$، تنها یک مماس برنمودار تابع مفروض می‌توان رسم کرد. معادلهٔ این مماس به صورت:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x + 4y + 1 = 0$$

و مختصات نقطهٔ تماس $(3, -1)$ است.

در این‌جا هم فریب خورده‌ایم. اگر مسأله را به کمک مشتق حل می‌کردیم، دو نقطهٔ تماس و دو خط راست مماس به‌دست می‌آمد. اگر طول نقطهٔ تماس را α بگیریم، عرض آن برابر $(1 - \sqrt{\alpha + 1})$ می‌شود. ضریب زاویهٔ مماس، برابر است با مشتق تابع، به ازای طول نقطهٔ تماس، یعنی $\frac{-1}{2\sqrt{\alpha+1}}$. اگر دیگر خط راست مماس، از دو نقطهٔ

$$A(-1, 0) \quad , \quad T(\alpha, 1 - \sqrt{\alpha+1})$$

می‌گذرد. پس ضریب‌زاویهٔ مماس برابر است با $\frac{1 - \sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1}$

این دو مقداری که برای ضریب‌زاویهٔ مماس به دست آمده است، با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1-\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{-1}{2\sqrt{\alpha+1}}$$

این معادله دو جواب دارد: $\alpha = 3$ و $\alpha = -1$. از نقطهٔ A، دو مماس بر نمودار تابع می‌توان رسم کرد.
نقطه‌های تماس $T_1\ (3, -1)$ و $T_2\ (-1, 1)$ و معادله‌های خطهای مماس چنین است:

$$x + 4y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x = -1$$

چرا با روش اوّل، جواب به دست نیامد؟ معادلهٔ یکی از مماسها به‌صورت $x = -1$ درآمده، یعنی خط راستی است موازی با محور عرض. این مماس، با محور طول، زاویه‌ای برابر ۹۰ درجه می‌سازد و، بنابراین، ضریب‌زاویه‌ای برابر بی‌نهایت دارد. از طرف دیگر، هروقت یکی از ریشه‌های یک معادلهٔ چند جمله‌ای به سمت بی‌نهایت میل کند، ضریب بزرگترین درجهٔ آن، به سمت صفر میل می‌کند. به همین مناسبت، برای به‌دست آوردن m (ضریب‌زاویه)، با صفر شدن ضریب درجه دوم، به معادله‌ای درجه اول رسیدیم و یکی از جوابها، از دست رفت.

مثال ۱۰. مطلوب است $\underset{x\to 0}{\text{حد}} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

به ترتیب می‌نویسیم:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

چون حد $\dfrac{\sin x}{x}$، وقتی x به سمت صفر میل کند، برابر است با واحد، بنابراین: حد عبارت $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ با حد $\dfrac{1}{x^2}$ برابر است.

ولی فریب خورده‌ایم. اگر برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم، داریم:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{\sin x}{6x} =$$

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

حد عبارت، برابر $\frac{1}{6}$ است نه صفر.

در واقع، وقتی x به سمت صفر میل کند، x و $\sin x$، بی‌نهایت کوچکهایی هم‌درجه‌اند، ولی با هم برابر نیستند. اگر بسط $\sin x$ را برحسب توانهای x بدانیم:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

معلوم می‌شود که، وقتی x بی‌نهایت کوچک باشد، x^3 و x^5 و ... نسبت به x قابل صرف نظر کردن هستند و $\sin x$ با x برابر می‌شود. ولی ما با $x - \sin x$ سروکار داریم و

$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 - \ldots$$

و در نتیجه:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \ldots}{x^3} =$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{5040}x^4 - \ldots\right) = \frac{1}{6}$$

گمان می‌کنم همین ۱۰ مثال، شما را به‌درستی این مطلب قانع کرده باشد که: معادله، یک مُدل ریاضی است و نمی‌توان از آن، «چشم بسته» به‌جای استدلال استفاده کرد. در مقالهٔ بعد، مطلب را دربارهٔ شکلهای هندسی دنبال می‌کنیم.

تفریح اندیشه ۱

مجموع سه عدد ۱، ۲، و ۳ مساوی حاصل‌ضربشان است. آیا سه‌تاییهای دیگری از این‌گونه در میان اعداد صحیح موجودند؟

$$1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$$

جواب در صفحهٔ ۸۸

حدّ: تعریف حدّ تابع

(قسمت دوّم)

◆ احمد قندهاری

۱ـ۷. بنا به قرارداد، اعداد مثبت فوق‌العاده بزرگ را با M یا N نشان می‌دهیم. اگر x یا y به سمت $+\infty$ میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن زیاد شدن از هر عدد مثبت فوق‌العاده بزرگ مفروضی بزرگتر است یعنی:

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow x > M \\ y \to +\infty \Rightarrow y > N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت $(-\infty)$ میل کند، می‌گوییم x یا y ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق‌العاده کوچک مفروضی، کوچکتر است، یعنی:

$$\begin{cases} x \to -\infty \Rightarrow x < -M \\ y \to -\infty \Rightarrow y < -N \end{cases}$$

اگر x یا y به سمت (∞) میل کند، می‌گوییم $|x|$ یا $|y|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$x \to \infty \Rightarrow |x| \to +\infty \Rightarrow |x| > M$$

$$y \to \infty \Rightarrow |y| \to +\infty \Rightarrow |y| > N$$

۱ـ۸. حالات حدّ: فرض می‌کنیم، تابع f به معادله $y = f(x)$ را داشته باشیم. در این صورت ممکن است x به سمت عدد (a) میل کند یا به سمت $(+\infty)$ میل کند یا به سمت $(-\infty)$ میل کند یا به سمت ∞ میل کند.

وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند، آنگاه ممکن است $f(x)$ به سمت عدد (b) میل کند یا به سمت $(+\infty)$ میل کند یا به سمت $(-\infty)$ میل کند یا به سمت (∞) میل کند. اگر کمی دقت کنیم مسائل حدّ می‌تواند (۱۶) حالت باشد، که در نمودار زیر نشان داده شده است.

$y = f(x)$

x			
a	$\Rightarrow f(x)$	b	(۱)
		$+\infty$	(۲)
		$-\infty$	(۳)
		∞	(۴)
$+\infty$	$\Rightarrow f(x)$	b	(۵)
		$+\infty$	(۶)
		$-\infty$	(۷)
		∞	(۸)
$-\infty$	$\Rightarrow f(x)$	b	(۹)
		$+\infty$	(۱۰)
		$-\infty$	(۱۱)
		∞	(۱۲)
∞	$\Rightarrow f(x)$	b	(۱۳)
		$+\infty$	(۱۴)
		$-\infty$	(۱۵)
		∞	(۱۶)

مسائلی که قبلاً حل شد از مسأله (۱) تا مسأله (۶) همگی از حالت اوّل می‌باشند.

۱ـ۹. تعریف حدّ تابع، در حالتهای دوم تا شانزدهم

۲: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \to a \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \ :\ 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) > N$$

۳: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \to a \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \ :\ 0 < |x - a| < \sigma \Rightarrow f(x) < -N$$

۴: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \to a \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \ :\ 0<|x-a|<\sigma \Rightarrow |f(x)|>N$$

۵: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ :\ x>M \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

۶: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x>M \Rightarrow f(x)>N$$

۷: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x>M \Rightarrow f(x)<-N$$

۸: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \to +\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x>M \Rightarrow |f(x)|>N$$

۹: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ :\ x<-M \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

۱۰: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x<-M \Rightarrow f(x)>N$$

۱۱: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x<-M \Rightarrow f(x)<-N$$

۱۲: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ x<-M \Rightarrow |f(x)|>N$$

۱۳: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ :\ |x|>M' \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

۱۴: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = +\infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ |x|>M \Rightarrow f(x)>N$$

۱۵: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = -\infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ |x|>M \Rightarrow f(x)<-N$$

۱۶: $\begin{cases} \text{حد } f(x) = \infty \\ x \to \infty \end{cases}$

$$\forall N > 0\ \exists M > 0 \ :\ |x|>M \Rightarrow |f(x)|>N$$

۹ـ۱ . اینک مسائلی از حالت دوم تا شانزدهم مطرح می‌کنیم. برای آن‌که شمارهٔ مسأله با حالتهای تعریف حدّ تابع هماهنگ باشد، شمارهٔ مسأله را شمارهٔ حالت تعریف حدّ تابع می‌گذاریم.

مسألهٔ دوم (از حالت دوم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{4}{(x-1)^2} = +\infty \\ x \to 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \ :\ 0<|x-1|<\sigma \Rightarrow \frac{4}{(x-1)^2}>N$$

$$\frac{4}{(x-1)^2}>N \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}<\frac{1}{N} \Rightarrow (x-1)^2<\frac{4}{N}$$

$$\Rightarrow |x-1|<\frac{2}{\sqrt{N}}$$

با مقایسه با گزاره مقدّم استلزام منطقی می‌توان نوشت: $\sigma \le \dfrac{2}{\sqrt{N}}$

مسألهٔ سوم (از حالت سوم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{-2}{(x-2)^4} = -\infty \\ x \to 2 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N > 0\ \exists \sigma > 0 \ :\ 0<|x-2|<\sigma \Rightarrow \frac{-2}{(x-2)^4}<-N$$

$$\frac{-2}{(x-2)^4}<-N \Rightarrow \frac{2}{(x-2)^4}>N \Rightarrow \frac{(x-2)^4}{2}<\frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow (x-2)^4<\frac{2}{N} \Rightarrow |x-2|<\sqrt[4]{\frac{2}{N}}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم: $\sigma \leq \sqrt[4]{\frac{2}{N}}$

مسألهٔ چهارم (از حالت چهارم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} \dfrac{5}{(x-1)^3}=\infty \\ x\to 1 \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists \sigma>0:\quad 0<|x-1|<\sigma \Rightarrow \left|\frac{5}{(x-1)^3}\right|>N$$

$$\left|\frac{5}{(x-1)^3}\right|>N \Rightarrow \left|\frac{(x-1)^3}{5}\right|<\frac{1}{N} \Rightarrow \frac{|(x-1)^3|}{5}<\frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow |(x-1)^3|<\frac{5}{N} \Rightarrow |x-1|<\sqrt[3]{\frac{5}{N}}$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$\sigma \leq \sqrt[3]{\frac{5}{N}}$$

مسألهٔ پنجم (از حالت پنجم): با استفاده‌از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}=2 \\ x\to +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists M>0: x>M \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1-2x^2+2}{x^2-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x^2-1|}<\varepsilon \Rightarrow |x^2-1|>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow |x^2-1|=x^2-1 \Rightarrow x^2-1>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow |x|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

با مقایسه با رابطه گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$M \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$ یا $M=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$

توجه: برگشت‌پذیری این مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$x>M\geq\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1} \Rightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1} \Rightarrow |x|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+1}$$

$$\Rightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow x^2-1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x^2-1|>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x^2-1|}<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x^2-1-2x^2+1}{x^2-1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2-1}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon$$

مسألهٔ ششم (از حالت ششم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد} (x^2-6x+1)=+\infty \\ x\to+\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \exists M>0:\ x>M \Rightarrow x^2-6x+1>N$$

$$x^2-6x+1>N \Rightarrow x^2-6x+9>N+8$$

$$\Rightarrow (x-3)^2>N+8 \Rightarrow |x-3|>\sqrt{N+8}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow |x-3|=x-3$$

$$\Rightarrow x-3>\sqrt{N+8} \Rightarrow x>\sqrt{N+8}+3$$

با مقایسه با رابطه گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M\geq\sqrt{N+8}+3$$

مسألهٔ هفتم (از حالت هفتم): ثابت کنید (با استفاده از تعریف حدّ تابع)

$$\begin{cases} \text{حد} -\sqrt{x^2-2x+3}=-\infty \\ x\to+\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0\ \ \exists M>0:\ x>M \Rightarrow -\sqrt{x^2-2x+3}<-N$$

$$-\sqrt{x^2-2x+3}<-N \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+3}>N$$

$$\Rightarrow x^2-2x+3>N^2 \Rightarrow x^2-2x+1>N^2+2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2>N^2+2 \Rightarrow |x-1|>\sqrt{N^2+2}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow |x-1|=x-1$$

$$\Rightarrow x-1>\sqrt{N^2+2} \Rightarrow x>\sqrt{N^2+2}+1$$

با مقایسه با گزاره مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+2}+1$$

مسألهٔ هشتم (از حالت هشتم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } (-1)^x (x^2 - 4x + 1) = \infty \\ x \to +\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 : x>M \Rightarrow |(-1)^x(x^2 - 4x + 1)|>N$$

توجه:

$$\begin{cases} (-1)^x = +1 \text{ یا } -1 \text{ و } |\pm 1| = 1 \\ x \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow |(-1)^x (x^2 - 4x + 1)|>N \Rightarrow |x^2 - 4x + 1|>N$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x^2 - 4x + 1| = x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 1>N \Rightarrow x^2 - 4x + 4>N + 3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 > N+3 \Rightarrow |x-2| > \sqrt{N+3}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$\Rightarrow x-2 > \sqrt{N+3} \Rightarrow x > \sqrt{N+3}+2$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم.

$$M \geq \sqrt{N+3}+2$$

مسألهٔ نهم (از حالت نهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{2x^2+4}{x^2+1} = 2 \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad : x<-M \Rightarrow \left|\frac{2x^2+4}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2+4}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x^2+4-2x^2-2}{x^2+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2}{x^2+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{x^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{x^2+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x^2+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow x^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\Rightarrow -x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1} \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام منطقی نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}-1}$$

مسألهٔ دهم (از حالت دهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \sqrt{x^2-3x} = +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \ : x<-M \Rightarrow \sqrt{x^2-3x} > N$$

$$\sqrt{x^2-3x} > N \Rightarrow x^2-3x > N^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} > N^2 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 > N^2 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| > \sqrt{N^2+\frac{9}{4}}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| = -x+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -x+\frac{3}{2} > \sqrt{N^2+\frac{9}{4}} \Rightarrow -x > \left(\sqrt{N^2+\frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x < -\left(\sqrt{N^2+\frac{9}{4}} - \frac{3}{2}\right)$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+\frac{9}{4}} - \frac{3}{2}$$

مسألهٔ یازدهم (از حالت یازدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } -\sqrt{x^2+6x} = -\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 : x<-M \Rightarrow -\sqrt{x^2+6x} < -N$$

$$-\sqrt{x^2+6x} < -N \Rightarrow \sqrt{x^2+6x} > N \Rightarrow x^2+6x > N^2$$

$$\Rightarrow x^2+6x+9 > N^2+9 \Rightarrow (x+3)^2 > N^2+9$$

$$\Rightarrow |x+3| > \sqrt{N^2+9} \qquad x \to -\infty \Rightarrow |x+3| = -x-3$$

$$\Rightarrow -x-3>\sqrt{N^2+9} \Rightarrow -x>\sqrt{N^2+9}+3$$

$$\Rightarrow x<-(\sqrt{N^2+9}+3)$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N^2+9}+3$$

مسألهٔ دوازدهم (از حالت دوازدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to-\infty} (-1)^{[x]}(x^2-2x)=\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0: x<-M \Rightarrow |(-1)^{[x]}(x^2-2x)|>N$$

$$|(-1)^{[x]}(x^2-2x)|>N \quad , \quad (-1)^{[x]}_{x\to+\infty}=+1$$

$$\text{یا} \quad -1 \;, |\pm 1|=1$$

$$\Rightarrow |x^2-2x|>N \quad , \quad x\to-\infty \Rightarrow |x^2-2x|=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x>N \Rightarrow x^2-2x+1>N+1 \Rightarrow (x-1)^2>N+1$$

$$\Rightarrow |x-1|>\sqrt{N+1} \;, \; x\to-\infty \Rightarrow |x-1|=-x+1$$

$$\Rightarrow -x+1>\sqrt{N+1} \Rightarrow -x>\sqrt{N+1}-1$$

$$\Rightarrow x<-(\sqrt{N+1}-1)$$

با مقایسه با رابطه گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \sqrt{N+1}-1$$

مسألهٔ سیزدهم (از حالت سیزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x-1}=2$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \;:\; |x|>M \Rightarrow \left|\frac{2x+5}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2x+5}{x-1}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x+5-2x+2}{x-1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{7}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{7}{|x-1|}<\varepsilon \Rightarrow \frac{|x-1|}{7}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x-1|>\frac{7}{\varepsilon}$$

تذکر مهّم: در سال سوم داشتیم:

$$\boxed{|a|-|b| \leq |a\pm b|}$$

پس می‌توان نوشت: $|x|-|1| \leq |x-1|$

اگر $|x|-|1|>\frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow |x-1|>\frac{7}{\varepsilon}$

اگر عبارت کوچکتر از $\frac{7}{\varepsilon}$ بزرگتر باشد مسلماً عبارت بزرگتر هم از $(\frac{7}{\varepsilon})$ بزرگتر خواهد بود.

$$\Rightarrow |x|>\frac{7}{\varepsilon}+|1| \Rightarrow |x|>\frac{7}{\varepsilon}+1$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \geq \frac{7}{\varepsilon}+1$$

مسألهٔ چهاردهم (از حالت چهاردهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2+4x-1)=+\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \;:\; |x|>M \Rightarrow x^2+4x-1>N$$

$$x^2+4x-1>N \Rightarrow x^2+4x+4>N+5$$

$$\Rightarrow (x+2)^2>N+5 \Rightarrow |x+2|>\sqrt{N+5}$$

داریم:

$$|a|-|b| \leq |a\pm b|$$

اگر $|x|-|2|>\sqrt{N+5} \Rightarrow |x+2|>\sqrt{N+5}$

$$\Rightarrow |x|>\sqrt{N+5}+|2| \Rightarrow |x|>\sqrt{N+5}+2$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌شود:

$$M \geq \sqrt{N+5}+2$$

مسألهٔ پانزدهم (از حالت پانزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty} -(x^2+6x)=-\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \ : \ |x|>M \Rightarrow -(x^2+6x)<-N$$

$$-(x^2+6x)<-N \Rightarrow x^2+6x>N \Rightarrow x^2+6x+9>N+9$$

$$\Rightarrow (x+3)^2>N+9 \Rightarrow |x+3|>\sqrt{N+9}$$

داریم:

$$|a|-|b| \le |a \pm b|$$

اگر $|x|-|3|>\sqrt{N+9} \Rightarrow |x+3|>\sqrt{N+9}$

$$\Rightarrow |x|>\sqrt{N+9}+|3| \Rightarrow |x|>\sqrt{N+9}+3$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌شود:

$$M \ge \sqrt{N+9}+3$$

مسألهٔ شانزدهم (از حالت شانزدهم): با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+4)=\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \ : \ |x|>M \Rightarrow |x^3+4|>N$$

داریم:

$$|a|-|b| \ge |a \pm b|$$

اگر $|x^3|-|4|>N \Rightarrow |x^3+4|>N$

$$\Rightarrow |x^3|>N+|4| \Rightarrow |x^3|>N+4 \Rightarrow |x|>\sqrt[3]{N+4}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدم تعریف حدّ تابع می‌توان نوشت:

$$M \ge \sqrt[3]{N+4}$$

یک مسأله دیگر از حالت ششم: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^8+x^7+x+1)=+\infty$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall N>0 \ \exists M>0 \ : \ x>M \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$$

اگر $x\to+\infty \Rightarrow x^8+x^7+x+1>x^8$

اگر $x^8>N \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$

$$\Rightarrow x^8>N \Rightarrow |x|>\sqrt[8]{N} \quad , \quad x\to+\infty \Rightarrow |x|=x$$

$$\Rightarrow x>\sqrt[8]{N}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدم تعریف حدّ تابع نتیجه می‌گیریم:

$$M \ge \sqrt[8]{N}$$

برگشت‌پذیری:

$$x>M\ge\sqrt[8]{N} \Rightarrow x>\sqrt[8]{N} \Rightarrow x^8>N \Rightarrow x^8+x^7+x+1>N$$

۱۰ ـ ۱. اگر $x\to 2^+$ می‌گوییم x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد۲،آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری‌که $(x-2)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است (ضمناً می‌دانیم $x \ne 2$) یعنی: $0<x-2<\sigma$

در حالت کلّی اگر $x\to a^+$ می‌گوییم، x از طرف اعداد بزرگتر از (a) به عدد (a) آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری که $(x-a)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک‌مفروضی‌کوچکتر است، یعنی: $(x\ne a)$.

$$x\to a^+ \Rightarrow 0<x-a<\sigma$$

مثال: $x\to 5^+ \Rightarrow 0<x-5<\sigma$

$$x\to -1^+ \Rightarrow 0<x+1<\sigma$$

اگر $x\to 2^-$ می‌گوییم x از طرف اعداد کوچکتر از (۲) به عدد (۲) آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری‌که $(x-2)$، از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است یعنی: $(x\ne 2)$.

در حالت کلی اگر $x\to a^-$، می‌گوییم، x از طرف اعداد کوچکتر از a به عدد a آن‌قدر نزدیک می‌شود به‌طوری‌که $(a-x)$ از هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک مفروضی کوچکتر است، یعنی: $(x\ne a)$

$$x\to a^- \Rightarrow 0<a-x<\sigma$$

مثال: $x\to 2^- \Rightarrow 0<2-x<\sigma$

$$x\to 1^- \Rightarrow 0<1-x<\sigma$$

توجه: فاصلهٔ همسایگی مثلاً وقتی $x\to 2^+$ یک طرفه است، یعنی:

اگر $\begin{cases} x\to 2^+ \\ r=1 \end{cases} \Longrightarrow 2<x<3$

در حالت کلّی داریم:

اگر $\begin{cases} x\to a^+ \\ r=\text{شعاع همسایگی} \end{cases} \Longrightarrow a<x<a+r$

همچنین فاصلهٔ همسایگی وقتی $x\to 2^-$ یک طرفه است

اگر $\begin{cases} x \to 2^- \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2$

در حالت کلیّ

اگر $\begin{cases} x \to a^- \\ r = \text{شعاع همسایگی} \end{cases} \Rightarrow a - r<x<a$

۱۱-۱. تعریف حدّ تابع به معادله $y = f(x)$ وقتی $x\to a^+$ یا $x\to a^-$

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \to a^+ \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad : 0<x - a<\sigma \Rightarrow |f(x) - b|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = b \\ x \to a^- \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma > 0 \quad : 0<a - x<\sigma \Rightarrow |f(x) - b|<\varepsilon$$

مسأله: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = 3 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مثبت مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0<x-1<\sigma \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{|x-1|} - 3\right|<\varepsilon$$

$$x\to 1^+ \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|} - 3\right| <\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{+(x-1)} - 3\right| <\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2+x+1-3|<\varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x \to 1^+ \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 < x < 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 3<x+2<4 \end{array} \Rightarrow 3<|x+2|<4$$

کران بالای $|x + 2|$ عدد (۴) است. و عبارت $|x - 1| \times 4$ از عبارت $|x + 2| \times |x - 1|$ بزرگتر است.

اگر $|x - 1| \times 4<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times |x + 2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x - 1| \times 4<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$x \to 1^+ \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$\Rightarrow 0<x - 1< \frac{\varepsilon}{4}$ با مقایسه با گزاره مقدم استلزام $\Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{4}$

یا $\sigma = \text{Min}\,\{1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{4}\}$

مسأله: با استفاده از تعریف حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد } \dfrac{x^3-1}{|x-1|} = -3 \\ x\to 1^- \end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند σ وجود دارد به‌طوری‌که:

اگر $0<1-x<\sigma \Rightarrow \left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right| <\varepsilon$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right| <\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)}+3\right| <\varepsilon$$

$$x\to 1^- \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

$$\Rightarrow |-x^2-x-1+3|<\varepsilon \Rightarrow |x^2+x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

یک همسایگی به مرکز (۱) و شعاع (۱) در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x \to 1^- \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 < x < 1 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 2<x+2<3 \end{array} \Rightarrow 2<|x+2|<3$$

کران بالای $|x + 2|$ عدد (۳) است و عبارت $|x - 1|\times 3$ از عبارت $|x + 2|\times|x - 1|$ بزرگتر است.

اگر $|x - 1| \times 3<\varepsilon \Rightarrow |x - 1| \times |x + 2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x - 1| \times 3<\varepsilon \Rightarrow |x - 1|<\frac{\varepsilon}{3} \quad x \to 1^- \Rightarrow |x - 1| = 1 - x \Rightarrow 0< 1 - x < \frac{\varepsilon}{3}$$

با مقایسه با گزارهٔ مقدّم استلزام $\Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon}{3}$

یا: $\sigma = \text{Min}\,[1 \text{ و } \frac{\varepsilon}{3}]$

تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۳)

به گشت و گذارمان در مجلهٔ **یکان** ادامه می‌دهیم. در شمارهٔ ۷ یکان مقاله‌ای است تحت عنوان **توپولوژی عمومی و پیدایش آن** به قلم **مهدی‌بهزاد**. در این مقاله چنین می‌خوانیم:

یکی از مشخصات ریاضیات جدید این است که نظریات قدیم را چون ماشینی در هم می‌ریزد، هر قسمت را به تنهایی مطالعه می‌کند. این قسمتها را مجدداً به روشهای تازه و ترکیبات جالبی روی هم سوار می‌نماید و به مطالعهٔ این ترکیبات می‌پردازد.

سلسلهٔ اعداد حقیقی مثال خوبی در این باره است. برای این‌که اهمیت این سیستم آشکار گردد نکات زیر را یادآور می‌شویم:

الف) سیستم اعداد حقیقی یک سلسلهٔ متری است: یعنی مجموعه‌ای است که به هر دو نقطهٔ آن عددی به نام فاصلهٔ آن دو نقطه نسبت داده می‌شود. این فاصله دارای خواص معینی می‌باشد، مثلاً شرط لازم و کافی برای این‌که فاصلهٔ دو عدد حقیقی صفر باشد این است که آن دو عدد با هم مساوی باشد.

ب) سلسله اعداد حقیقی یک سیستم جبری است: یعنی مجموعه‌ای است که روی آن اعمال جبری معینی چون جمع و ضرب تعریف شده و این اعمال دارای خواص معینی مانند شرکت‌پذیری (Associativity) می‌باشد.

ج) سیستم اعداد حقیقی یک سیستم مرتب شده (ORDERD) است. یعنی مجموعه‌ای است که در آن یک رابطهٔ ترتیب (مانند $>$) تعریف شده و این رابطه دارای خواصی مانند: خاصیت انتقالی (Transitivity) است.

اهمیت این سلسله تنها وابسته به این جنبه‌های مجزای آن نیست بلکه مربوط به روابط بین آنها نیز می‌باشد. مثلاً اصل این‌که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند و $a<b$ داریم: $a+c<b+c$ یکی از خواص این سلسله است که در آن جنبه‌های «جبری» و «ترتیب» هر دو به کار بسته می‌شوند.

البته مطالعهٔ جنبه‌های مختلف این سلسله به طور مجزا دارای فوایدی نیز می‌باشد. شاید بزرگترین فایدهٔ آن استفاده کامل از دسترنج جمع شده ریاضی‌دانان باشد. مثلاً اگر قضیه‌ای در مورد سلسلهٔ اعداد حقیقی، تنها به خاطر متری بودن آن ثابت شده این قضیّه نه تنها معلومات ما را در بارهٔ سلسلهٔ اعداد حقیقی بالا می‌برد بلکه در مورد سایر سیستمهای ریاضی که از نظر متری بودن شبیه اعداد حقیقی هستند نیز قابل عرضه می‌باشد. بنابراین ممکن است یک چنین قضیّه‌ای بسیاری از سیستمهای ریاضی را شامل شود و ریاضی‌دان را از تکرار اثبات در هر سیستم به‌طور جداگانه رهایی بخشد.

به‌طور کلی، به کمک مجرد کردن یک ایدهٔ آشنا و معمول ریاضی در یک و یا چند جهت ممکن است قضایایی را کشف نمود که از نظرات مختلفی قابل استفاده باشند. مثلاً: ممکن است ما را با طرحهای ساخته و پرداخته‌ای مجهز کنند که به کمک آنها بتوانیم اقلاً جزیی از عقاید آشنای دیگر ریاضی و یا نظریّات کاملاً تازه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار دهیم و یا این‌که این قضایا به خودی خود جالب باشند. اکثریت قریب به اتفاق ریاضی‌دانان در چندین ده سال گذشته وقت خود را به وضع و تحصیل قضایای عمومی از این نوع اختصاص داده‌اند.

در مقالهٔ **دانشنامهٔ علائی** همین شماره از قول **ابوعبیدجوزجانی** شاگرد ابن‌سینا چنین آمده است که:

آنگاه که من به خدمت خواجه رئیس قدس... روحه بودم حریص بودم بر جمع کردن تصانیف او و به دست آوردن آن زیراکه خواجه رئیس را عادت چنان بود که آنچه تصنیف کردی بدان کس دادی که از او خواسته بودی و از بهر خویش نتیجه نگرفتی، و از بزرگ تصانیف او دانشنامهٔ علائی است و آنچه از او در ریاضیات بکرد ضایع شده بود و به دستم نیفتاد و مرا دشخوار آمد ناتمامی این کتاب (یعنی دانشنامه) ولیکن از رساله‌ها که خواجه کرده بود در این باب رسالتی داشتم که در اصلهای هندسه کرده بود و در او چندانی یادکرده بود از این علم که هر که آن بداند راه یابد دانستن مجسطی و این رسالت چون مختصری است از کتاب اقلیدس و جای جای در او راه عمل درست رفته است و بدان (مجسطی) راه پدید کرده است.

رابطه هم‌نهشتی ـ خواص و کاربردهای آن در Z

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال چهارم رشته ریاضی و سال سوّم ریاضیِ نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در این مقاله و به دنبال مقالهٔ قبل در برهان ۱۳ تحت عنوانِ رابطهٔ هم‌ارزی و... می‌خواهیم به بررسی وتجزیه و تحلیل یکی از همین رابطه‌های هم‌ارزی یعنی رابطهٔ هم‌نهشتی پرداخته و کاربردهای آن را در Z مورد بحث قرار دهیم.

در سرتاسر این مقاله از اثبات قضایایی که در کتابهای درسی اثبات شده‌اند خودداری شده و بیشتر روی بُعد کاربردهای قضایا و نتایج حاصل از آنها کار شده است در ضمن در لابه‌لای مقاله از تستهای متنوعی به همراه حل تشریحی آنها استفاده شده است.

در این مقاله هر کجا صحبت از عدد است منظور عدد صحیح می‌باشد حال چه قید کنیم و چه قید نکنیم، برای شروع ناچاریم رابطهٔ بخش‌پذیری یا عاد کردن را تعریف کنیم.

تعریف: طبق قضیهٔ تقسیم در تئوری اعداد هرگاه a و b اعدادی صحیح بوده و $b \neq 0$ در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$، که a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقیماندهٔ تقسیم a بر b می‌نامند.

حال اگر در تقسیم a بر $b \neq 0$، باقیمانده صفر باشد یعنی $a = bq$ در این‌صورت می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم، «b عاد می‌کند a را» یا «b می‌شمارد a را» پس در حالت کلّی:

$$\boxed{b|a \Leftrightarrow a = bq}$$

خواص رابطهٔ عاد کردن

۱) رابطهٔ عاد کردن دارای خاصیت انعکاسی است زیرا:

$\forall a \in Z ; (a \neq 0)\ a = a \times 1 \Rightarrow a | a$

۲) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تقارنی ندارد زیرا:

$4 \nmid 2$ ولی $2 | 4$

۳) رابطهٔ عاد کرد در Z خاصیت پاد تقارنی ندارد زیرا:

$4 \neq -4$ ولی $4 | -4$ و $-4 | 4$

(این رابطه در N خاصیت پاد تقارنی دارد!)

۴) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تعدی دارد زیرا:

فرض کنیم $a|b$ و $b|c \Rightarrow b = aq_1$ و $c = bq_2$

$\Rightarrow c = (aq_1)\, q_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) = aq_3$

$\Rightarrow q|c$

۵) $a|b \Rightarrow a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$

یکی از حالتهای فوق را اثبات می‌کنیم:

$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q_1} \Rightarrow -a|b$

۶) $a|b$ و $a|c \Rightarrow a|b \pm c$ و $a|bc$

۷) $a|b \Rightarrow a|mb$

۸) $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

۹) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۰) $a|b$ و $b|a \Rightarrow a = \pm b$

۱۱) $\forall a \in Z ; a|0 \qquad (a \neq 0)$

۱۲) $\forall a \in Z ; 1|a$

۱۳) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

اثبات خواص فوق تقریباً آسان بوده و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

حال به سراغ بحث اصلی خود یعنی رابطه هم‌نهشتی و خواص و کاربردهای آن برمی‌گردیم. لازم به تذکر است که قضایا و نتایجی که

اثبات آنها در کتاب درسی موجود است، فقط بیان و از آنها استفاده شده است.

تعریف. رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ (هم‌نهشتی به سنج m) روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود: $(m \in \mathbb{N})$

$\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a - b$ یا $a - b = mk$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است، یعنی:

۱) $\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $\to m|\underbrace{a - a}_{\circ}$)

۲) $\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $m|a-b \Leftrightarrow m|b-a$)

۳) $\forall a , b , c \in Z ; (a \overset{m}{\equiv} b \wedge b \overset{m}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

(زیرا $\to m|a - b \wedge m|b - c \to m|(a - b) + (b - c) \Rightarrow m|a - c$)

نکته. چون رابطه $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد پس هر عضو Z مانند a دارای یک دسته هم‌ارزی یا یک کلاس هم‌ارزی است که به شکل [a] نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$[a] = \{x \in Z \mid x \overset{m}{\equiv} a\}$

مثلاً: در هم‌نهشتی به سنج ۴ داریم:

$[۲] = \{x \in Z \mid x \overset{۴}{\equiv} ۲\} = \{x \in Z | x - ۲ = ۴k\}$
$= \{x \in Z | x = ۴k + ۲\}$
$= \{..., -۱۰ , -۶ , -۲ , ۲ , ۶ , ۱۰ , ۱۴ ,...\}$

نکته. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m دارای m دستهٔ هم‌ارزیِ [۰] و [۱] و... و [m − ۱] می‌باشد. که این دسته‌های هم‌ارزی Z را افراز می‌کنند بنابراین خواص زیر برای دسته‌های هم‌ارزی به سنج m برقرار می‌باشد.

الف) $\forall\ ۱ \le k \le m - ۱$ ، $[k] \neq \phi$
ب) $\forall\ k_i$ و k_j ، $[k_i] \cap [k_j] = \phi$
ج) $[۰] \cup [۱] \cup ... \cup [m - ۱] = Z$
د) $b \in [a] \Leftrightarrow [a] = [b]$

قضیه. هرگاه a و $b \neq ۰$ دو عدد صحیح باشند و a را بر b تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a = bq + r$ در این صورت همواره، $a \overset{b}{\equiv} r$

زیرا $\to a = bq + r \Rightarrow a - r = bq \Rightarrow b|a - r \Rightarrow a \overset{b}{\equiv} r$

نتیجه. هرگاه بخواهیم محاسبه کنیم که عدد a به سنج b با چه عددی هم‌نهشت است؛ کافی است a را بر b تقسیم کنیم، در این حالت باقی‌مانده تقسیم یعنی r عددی است که به دنبال آن بودیم.

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $۴۸ \overset{۲۳}{\equiv} x$ برای چه x ای می‌تواند برقرار باشد، پس کافی است ۴۸ را بر ۲۳ تقسیم کنیم که باقی مانده تقسیم ۲ است بنابراین: $۴۸ \overset{۲۳}{\equiv} ۲$.

قضیهٔ اساسی هم‌نهشتیها. شرط لازم و کافی برای آن‌که $a \overset{m}{\equiv} b$ آن است که باقی‌مانده تقسیم a بر m و b بر m ، برابر باشد.

تذکر. هرگاه $a<m$ در این‌صورت باقی مانده تقسیم a بر m با خودِ a برابر است. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴ بر ۹ برابر است با ۴.

مثال. هرگاه $a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۲$ ، باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ را بیابید.

بنابر قضیهٔ اساسی و با توجه به این‌که $a \overset{۱۴}{\equiv} ۳۲$ ، کافی است باقی‌مانده تقسیم ۳۲ را بر ۱۴ بیابیم که $۳۲ = ۲ \times ۱۴ + ۴$ پس باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ حتماً ۴ است.

خواص رابطهٔ هم‌نهشتی

الف) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

ب) $a \overset{m}{\equiv} b \to ac \overset{m}{\equiv} bc$

ج) $a \overset{m}{\equiv} b \wedge c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd\ (I) , a + c \overset{m}{\equiv} b + d\ (II)$

(اثبات ج (I)) $m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc$
$m|c - d \Rightarrow m|b(c - d) \Rightarrow m|bc - bd$

$\Rightarrow m|ac - bd$

د) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

نتیجه. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌توان به یک طرف این رابطه عدد m یا هر مضربی از m را اضافه کرد و رابطه برقرار خواهد ماند، زیرا:

می‌دانیم $m|km \Rightarrow m|km - ۰ \Rightarrow km \overset{m}{\equiv} ۰$ و $a \overset{m}{\equiv} b$

بنابر (ج) $\Longrightarrow a + km \overset{m}{\equiv} b$ یا $a \overset{m}{\equiv} b + km$

(از این نتیجه در حل معادلات هم‌نهشتی استفاده خواهیم کرد.)

قضیه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = d$ در این‌صورت $a \overset{\frac{m}{b}}{\equiv} b$

مثلاً $4 \times 9 \overset{12}{\equiv} 4 \times 3$ پس $9 \overset{\frac{12}{4}}{\equiv} 3$ زیرا، ۴=(۴ و ۱۲)

نتیجه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = 1$ دراین صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

تست. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۲ بر k برابر با یک باشد، باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k کدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k > 19$ باشد.)

۱) ۲ ۲) ۱٦ ۳) ۹ ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$32 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^5 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^5)^{274} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{1370} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$$2^{1370} \times 2^4 \overset{k}{\equiv} 1 \times 2^4 \Rightarrow 2^{1374} \overset{k}{\equiv} 16$$

و چون $k > 19$ پس $k > 16$ بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱٦ بر k برابر با ۱٦ است که همان باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k است.

مثال. باقی‌مانده تقسیم $4 \times (1000)^{451}$ را بر ۷ بیابید.

حل. در حقیقت باید محاسبه کنیم که معادله هم‌نهشتی $x \overset{7}{\equiv} 4 \times (1000)^{451}$ برای چه x مثبت و کوچکتر از ۷ برقرار است.

ابتدا ۱۰۰۰ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم که باقی‌مانده ٦ است پس $1000 \overset{7}{\equiv} 6$ و چون: $6 \overset{7}{\equiv} -1$ پس بنابر تعدی نتیجه می‌گیریم که $1000 \overset{7}{\equiv} -1$ پس $(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1$ بنابراین:

$4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1 \times 4$ یا $4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -4$ و چون $-4 \overset{7}{\equiv} 3$ پس $4 \times (1000)^{451} \overset{7}{\equiv} 3$ پس باقی‌مانده تقسیم ۳ است.

مثال. نشان دهید $3^{113} + 43$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

حل. باید نشان دهیم $3^{113} + 43 \overset{13}{\equiv} 0$

$$3^3 = 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{37} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{111} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{111} \times 3^2 \overset{13}{\equiv} 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{113} \overset{13}{\equiv} 9 \text{ و } 43 \overset{13}{\equiv} 4 \Rightarrow 3^{113} + 43 \overset{13}{\equiv} 9 + 4 \overset{13}{\equiv} 0$$

تست. عدد ۲۰۹ − به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۲ تعلق دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) [۹−] ۲) [۷] ۳) [۷−] ۴) [۹]

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

باید x را چنان بیابیم که $x \overset{12}{\equiv} -209$ لذا کافی است ۲۰۹− را بر ۱۲ تقسیم کرده و باقی‌مانده تقسیم همان x است.

$$-209 = 12 \times (-17) - 5 \Rightarrow -209 \overset{12}{\equiv} -5 \text{ و } -5 \overset{12}{\equiv} 7 \Rightarrow$$

$$-209 \overset{12}{\equiv} 7$$

تست. دستهٔ هم‌نهشتی [۱۳۷۳] در Z_{16} مساوی با کدام دستهٔ هم‌نهشتی است.

۱) [۱] ۲) [۳] ۳) [۱۳−] ۴) [۳−]

حل. باقی‌مانده تقسیم ۱۳۷۳ بر ۱٦ عبارت است از ۱۳، پس:

$$1373 \overset{16}{\equiv} 13 \text{ و } 13 \overset{16}{\equiv} -3 \Rightarrow 1373 \overset{16}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow [1373] = [-3]$$

نکته. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ و $(m , n) = 1$ آنگاه $a \overset{mn}{\equiv} b$.

زیرا: طبق قضیه‌ای در تئوری اعداد اگر $a|c$ و $b|c$ و $(a , b) = 1$ در این‌صورت $ab|c$ یعنی اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند یا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد، در این‌صورت آن عدد بر حاصل‌ضربِ آنها نیز بخش‌پذیر است پس در این نکته داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \\ a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow n|a-b \end{array}\right\} \overset{(m,n)=1}{\Rightarrow} mn|a-b \Rightarrow a \overset{mn}{\equiv} b$$

مثلاً: $8 \overset{3}{\equiv} 2$ و $8 \overset{2}{\equiv} 2$ و چون: ۱ = (۳ و ۲) پس $8 \overset{6}{\equiv} 2$.

نکته. اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ $(n \in IN)$ در این‌صورت $a \overset{n}{\equiv} b$. زیرا:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b , n|m \overset{\text{تعدی}}{\Longrightarrow} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

قواعد مربوط به یافتن باقیماندهٔ تقسیم

۱. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، ۵ و ۱۰ عبارت است از: باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و یا ۱۰. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴۵۳٦ به ترتیب بر ۲ و ۵ و ۱۰ عبارت است از: صفر و ۱ و ٦.

زیرا اگر عدد $A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ یک عدد n رقمی باشد می‌توان A را به شکل زیر در مبنای اعشاری (مبنای ده دهی) بسط داد.

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10 a_1 + a_0$$

از طرفی می‌دانیم $10 \overset{2}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{10}{\equiv} 0$ پس،

$10^k \overset{2}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{5}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{10}{\equiv} 0$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$

مثلاً برای بخش‌پذیری بر ۵ و مشخص کردن باقی‌مانده داریم:

$$10^{n-1} \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10^{n-1} a_{n-1} \overset{5}{\equiv} 0$$

$$10^{n-2} \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10^{n-2} a_{n-2} \overset{5}{\equiv} 0$$

$$10 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 10 a_1 \overset{5}{\equiv} 0$$

$$a_0 \overset{5}{\equiv} a_0 \quad و$$

(با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها)

$$A \overset{5}{\equiv} a_0$$

پس طبق قضیهٔ اساسی هم‌نهشتی‌ها باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۵ برابراست با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن بر ۵ و به همین قیاس برای ۲ و ۱۰ نیز روابط و نتیجه‌گیریِ فوق صادق می‌باشد.

نتیجه. چون رقم‌یکان هر عدد همواه از ۱۰ کوچکتر است، باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۰ همان رقم یکان می‌باشد، بنابراین برای یافتن رقم یکان هر عدد کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد را بر ۱۰ بیابیم یا تحقیق کنیم که آن عدد به سنج ۱۰ با چه عددی هم‌نهشت است و به همین قیاس برای تعیین دو رقم یا سه رقم سمت راستِ یک عدد، هم‌نهشتی به سنج ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

طریقهٔ محاسبهٔ رقم یکان اعداد توانی به شکل a^n

نکتهٔ ۱. هرگاه عدد a به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم شود، هر توان آن نیز به ترتیب به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم می‌شود.

نکتهٔ ۲. (قضیهٔ نیوتن) هر عددکه به توان برسد هر چهار بار یک مرتبه رقم سمت راست توانهای آن تکرار می‌شود.

نکتهٔ ۳. هرگاه بخواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a^n را بر ۱۰ بیابیم، یعنی: رقم سمت راستش راتعیین کنیم؛ کافی است ابتدا باقی‌ماندهٔ توان یعنی n را بر ۴ بیابیم، اگر این باقی‌مانده صفر شود: یعنی $n = 4k$ ، آن را برابر با ۴ در نظرگرفته و رقم یکان a را به‌توان ۴ می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکان a^n خواهد بود و اگر باقی‌مانده r باشد که $4 > r > 0$ در این‌صورت نیز رقم یکان a را به توان r می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکانِ a^n است و...

مثال. رقم یکان $A = (493623)^{4938}$ را بیابید.

$$493623 \overset{10}{\equiv} 3 \Rightarrow (493623)^{4938} \overset{10}{\equiv} 3^{4938}$$

$$4938 = 1234 \times 4 + 2 \Rightarrow r = 2$$

پس A به ۹ ختم می‌شود. $9 = 3^2 \rightarrow$ رقم یکان = رقم یکان A

نکته. هرگاه عددی به ۹ ختم شود در این‌صورت رقم یکانِ توانهای زوج آن به یک ختم شده و رقم یکان توانهای فرد آن به ۹ ختم می‌شوند زیرا:

$$9 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow \begin{cases} 9^k \overset{10}{\equiv} 1 & \text{(K زوج باشد)} \\ 9^k \overset{10}{\equiv} -1 \overset{10}{\equiv} 9 & \text{(K فرد باشد)} \end{cases}$$

نکته. هرگاه عددی به ۴ ختم شود، رقم یکان توانهای زوج آن به ۶ و رقم یکانِ توانهای فرد آن به ۴ ختم می‌شود، زیرا:

$$4^2 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow (4^2)^k \overset{10}{\equiv} 6^k \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow 4^{2k} \overset{10}{\equiv} 6 \text{ و } 4^{2k} \times 4 \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow 4^{2k+1} \overset{10}{\equiv} 4$$

تست. رقم سمت راست عبارت 7×4^{762} کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\text{۷۶۲ زوج است} \rightarrow 4^{762} \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow 7 \times 4^{762} \overset{10}{\equiv} 7 \times 6 = 42 \overset{10}{\equiv} 2$$

تست. مانده تقسیم عدد $379^3 - 387^3$ بر ۵ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 387 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 387^3 \overset{5}{\equiv} 2^3 \overset{5}{\equiv} 3 \\ 379 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 379^3 \overset{5}{\equiv} 4^3 \overset{5}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 387^3 - 379^3 \overset{5}{\equiv} 3 - 4 \overset{5}{\equiv} 4$$

تست. باقی‌مانده تقسیم $2^{3n+1} + 13^{2n+1}$ بر ۷ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$ (کنکور سراسری)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 8 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n+1} \overset{7}{\equiv} 2 \\ 13 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 13^{2n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 13 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2^{3n+1} + 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 15 \overset{7}{\equiv} 1$$

تست. رقم یکان $((19)^2)^{70}$ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۹ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) هیچ‌کدام

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$((۱۹)^۲)^{۷۰} = (۱۹)^{۱۴۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۹^{۱۴۰} \Rightarrow ۹^{۱۴۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \quad (\text{۱۴۰ زوج است})$$

تست. باقی‌مانده تقسیم $۶۵^{۴۰}$ بر عدد ۹ کدام است؟

(کنکور سراسری)

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$۶۵ \overset{۹}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۶۵^۳ \overset{۹}{\equiv} ۲^۳ \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۶۵^۳)^{۱۳} \overset{۹}{\equiv} -۱^{۱۳} = -۱$$

$$\Rightarrow ۶۵^{۳۹} \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۶۵^{۴۰} \overset{۹}{\equiv} -۶۵ \overset{۹}{\equiv} -۲ \overset{۹}{\equiv} ۷$$

تست. رقم یکان عدد حاصل از: $A = ۱^{۱۰۱} + ۲^{۱۰۱} + ۳^{۱۰۱} + ۴^{۱۰۱}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم $۱۰۱ = ۴ \times ۲۵ + ۱ \Rightarrow r = ۱$

$$\Rightarrow ۲^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۱ \text{ و } ۳^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۱ \text{ و } ۴^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۴^۱ \text{ و } ۱^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی باشند، و $m \neq ۱$ باقی‌مانده تقسیم ۱۶۰ بر m کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{matrix} ۶۸ \overset{m}{\equiv} r \\ ۱۴۵ \overset{m}{\equiv} r \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{با توجه به فرض و قضیه اساسی}} ۱۴۵ - ۶۸ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷۷ \overset{m}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۷۷ \overset{m}{\equiv} ۲ \times ۰ \Rightarrow ۱۵۴ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۵۴ + ۶ \overset{m}{\equiv} ۰ + ۶$$

$$\Rightarrow ۱۶۰ \overset{m}{\equiv} ۶$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر ۳۷ به‌ترتیب برابر ۱۵ و ۲۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a - b$ بر ۳۷ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲۸ ۲) ۲۳ ۳) ۱۴ ۴) ۷

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{۳۷}{\equiv} ۱۵ \\ b \overset{۳۷}{\equiv} ۲۹ \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{با توجه به قضیه اساسی}} a - b \overset{۳۷}{\equiv} -۱۴ \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳$$

۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ و ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام آن عدد بر ۳ و یا ۹.

۳. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکانِ آن عدد، بر ۴.

$$۴۹۳۶۶۷ \overset{۴}{\equiv} ۲ \times ۶ + ۷ \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۸ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ برابر رقم صدگان به علاوهٔ ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکان آن عدد، بر ۴ :

$$۵۴۸۳۹۱ \overset{۸}{\equiv} ۴ \times ۳ + ۲ \times ۹ + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۳۱ \overset{۸}{\equiv} ۷$$

۵. برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۷ و ۱۳ از سمت راست سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع می‌کنیم، عددی حاصل می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۷ یا ۱۳ همان باقی‌ماندهٔ مطلوب است.

مثال: $۶۴۸۲۳۴۵۹ \overset{۷}{\equiv} ۴۵۹ - ۸۲۳ + ۶۴$

$$= -۳۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۴۲ \times ۷ - ۶ \Rightarrow -۳۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۶ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

پس باقی‌مانده تقسیم ۱ است.

۶. برای محاسبهٔ باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن را از رقم یکان به‌صورت یک در میان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقی‌ماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۱ بیابیم.

مثال: $۲۳۴۹۶۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ - ۶ + ۹ - ۴ + ۳ - ۲ = ۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸$

اثبات ۵ و ۶: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰^۳$ بر ۷ و ۱۳ به‌ترتیب ۶ و ۱۲ می‌باشد یعنی:

$$۱۰^۳ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۰^۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow \begin{cases} (۱۰^۳)^k \overset{۷}{\equiv} ۱ & (\text{زوج } k) \\ (۱۰^۳)^k \overset{۷}{\equiv} -۱ & (\text{فرد } k) \end{cases}$$

$$۱۰^۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Rightarrow ۱۰^۳ \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

از طرفی عدد $A = \overline{a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1\, a_0}$ را در مبنای اعشاری می‌توان به‌صورت $A = \overline{a_2a_1a_0} + ۱۰^۳\overline{a_5a_4a_3} + ۱۰^۶\overline{a_8a_7a_6} + \dots$ بسط داد بنابراین با توجه به مطالب فوق‌الذکر داریم:

$$A \overset{۷}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \dots$$

و به همین ترتیب برای بخش‌پذیری بر ۱۳ و یافتن باقی‌مانده کافی است سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقیماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۳ بیابیم.

اثبات قسمتهای ۲ و ۳ و ۴ به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

مثال. ثابت کنید هر عدد به صورت $A = \overline{abcabc}$ همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

$$A \overset{7}{\equiv} abc - abc = 0 \text{ و } A \overset{13}{\equiv} abc - abc = 0$$

$$A \overset{11}{\equiv} a - b + c - a + b - c = 0$$

مثلاً عدد (۴۷۲۴۷۲) همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

نکته. هرگاه a و b اعداد صحیح و مثبت باشند، داریم:

الف) $(a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

ب) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n - b^n$ اگر n فرد باشد

ج) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ اگر n زوج باشد

اثبات الف) $(a + b)^n$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر، عامل ab دارند پس:

$$\Rightarrow (a + b)^n = a^n + abQ + b^n$$

$$\Rightarrow (a + b)^n - (a^n + b^n) = abQ \Rightarrow (a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم $2 + (13^n - 7^n - 6^n)$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

با توجه به نکتهٔ قبل اگر قرار دهیم $a = 7$ و $b = 6$ داریم:

$$(7 + 6)^n \overset{42}{\equiv} 7^n + 6^n \Rightarrow 13^n - 7^n - 6^n \overset{42}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow (17^n - 7^n - 6^n) + 2 \overset{42}{\equiv} 2$$

تعریف دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج m

دیدیم که رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی بوده و دارای m دستهٔ هم‌ارزیی $[0]$ و $[1]$ و ... و $[m-1]$ می‌باشد. حال اگر از هر دستهٔ هم‌ارزیِ یک عدد صحیح انتخاب کرده و در یک مجموعه قرار دهیم، مجموعهٔ حاصل که دارای m عضو می‌باشد یک دستهٔ کامل مانده‌ها (د.ک.م.) به سنج m است.

مثلاً: مجموعهٔ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ یک د.ک.م. به سنج ۵ است.

قضیه. هرگاه $A = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ و هیچ دو عضو A به سنج m با یکدیگر هم‌نهشت نباشند، A یک د.ک.م. به سنج m است و برعکس.

قضیه. اگر $A = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m باشد و $(a, m) = 1$ و $b \in Z$، در این‌صورت $B = \{ac_1 + b, ac_2 + b, ..., ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

نتیجه. اگر در قضیه بالا $b = 0$ در این‌صورت $B = \{ac_1, ac_2, ..., ac_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m خواهد بود. ($(a, m) = 1$).

تست. کدام مجموعه یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۴ است؟

۱) $\{0, 2, 6, 5\}$ ۲) $\{1, 2, 3, 5\}$

۳) $\{2, 4, 6, 8\}$ ۴) $\{1, 6, 3, 0\}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

در گزینهٔ (۱) $6 \overset{4}{\equiv} 2$ و در گزینهٔ (۲) $5 \overset{4}{\equiv} 1$ و در گزینهٔ (۳) $8 \overset{4}{\equiv} 4$ ولی در مجموعهٔ مربوط به گزینهٔ (۴) هیچ دو عضوی به سنج ۴ با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.

قضیهٔ فرما. اگر p عددی اوّل بوده و $p \nmid a$ یا $(p, a) = 1$ در این‌صورت:

$$\boxed{a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1}$$

نتیجهٔ قضیهٔ فرما. به ازای هر عدد صحیح مانند a و عدد اوّل p داریم:

$$a^p \overset{p}{\equiv} a$$

اثبات: فرض کنیم p عددی اول بوده و $a \in Z$، در این‌صورت برای p و a دو حالت در نظر می‌گیریم و در هر دو حالت قضیه اثبات می‌شود:

I) اگر $p \nmid a$ پس $(p, a) = 1$ لذا طبق قضیهٔ فرما $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ و اگر طرفین رابطهٔ هم‌نهشتیِ اخیر را در a ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{a^p \overset{p}{\equiv} a}$$

II) اگر $p|a$ پس باید $p|a\underbrace{(a^{p-1} - 1)}_{m}$، بنابراین $p|a^p - a$ و طبق تعریف هم‌نهشتی داریم، $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

قضیهٔ ویلسون. هرگاه p عددی اول باشد در این‌صورت:

$$(p - 1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1^{12} + 2^{12} + ... + 12^{12}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۴

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 1 = (13 \text{ و } 1) \\ 2^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 1 = (13 \text{ و } 2) \\ \vdots \\ 12^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 1 = (13 \text{ و } 12) \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} \overbrace{1+1+\dots+1}^{\text{۱۲ بار}} = 12$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1^{13} + 2^{13} + \dots + 13^{13}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{13} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 2^{13} \overset{13}{\equiv} 2 \\ \vdots \\ 12^{13} \overset{13}{\equiv} 12 \\ 13^{13} \overset{13}{\equiv} 13 \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} 1 + 2 + \dots + 13$$

$$= \frac{13 \times (13+1)}{2} = 13 \times 7 \overset{13}{\equiv} 0$$

تست. باقی‌مانده تقسیم 563^{17} بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا

$563 = 33 \times 17 + 2 \overset{17}{\equiv} 2 \Rightarrow 563^{17} \overset{17}{\equiv} 2$ ← ۱۷ اوّل است.

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{401} بر ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$3^{100} \overset{101}{\equiv} 1 \xLeftarrow{\text{فرما}} 1 = (3,101)$ و ۱۰۱ اوّل است. $\Rightarrow 3^{400} \overset{101}{\equiv} 1$

$$\Rightarrow 3^{401} \overset{101}{\equiv} 3$$

حل معادلات خطی و دو مجهولی در Z ـ حل معادلات هم‌نهشتی

قضیه. شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله $ax + by = c$ در Z دارای جواب باشد، (x_0 و y_0ای در Z یافت شوند به قسمی که $ax_0 + by_0 = c$) آن است که بزرگترین شمارندهٔ مشترک a و b، c را بشمارد یعنی: $(a , b) | c$ (منظور از (a , b) همان ب.م.م. است)

نتیجه. اگر $(a , b) = 1$ در این صورت معادله $ax + by = c$ همواره در Z دارای جواب است.

مثال. معادله $12x - 7y = 8$ را حل کنید. (یکی از دسته جوابها را بیابید.)

معادله دارای جواب است ← $(12 , 7) = 1 \mid 8$

$$12x - 7y = 8 \Rightarrow y = \frac{12x - 8}{7} = \frac{14x - 2x - 7 - 1}{7}$$

$$= 2x - 1 - \frac{(2x + 1)}{7}$$

از طرفی چون $y \in Z \Rightarrow \frac{2x + 1}{7} = t$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 7t \Rightarrow x = \frac{7t - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{6t + t - 1}{2}$$

$$= 3t + \frac{t - 1}{2}$$

چون $x \in Z \Rightarrow \frac{t - 1}{2} = k \Rightarrow t = 2k + 1$

اگر $k = 0 \rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4$

قضیه. هرگاه x_0 و y_0 جوابهایی برای معادله $ax + by = c$ باشند و $(a , b) = d$ در این‌صورت بقیهٔ جوابهای معادلهٔ فوق از رابطه‌های زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} x = x_0 - k\dfrac{b}{d} \\ y = y_0 - k - \dfrac{a}{d} \end{cases}$$

نکته. همواره هر معادلهٔ هم‌نهشتی‌مانند: $ax \overset{m}{\equiv} b$ را می‌توان به شکل یک معادلهٔ خطی و به‌صورت $ax + my = b$ نوشت.

قضیه. (با توجه به نکته قبل و قضیهٔ قبل) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ در Z دارای جواب باشد آن است که $(a.m) | b$.

نتیجه. در صورتی که $(a , m) = 1$ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره در Z جواب خواهد داشت.

تست. به ازای کدام مقدار b معادلهٔ $(15 + b)x + by = 20$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

شرط جواب: $(15 + b , b) | 20 \xRightarrow{b = 5} (5 \text{ و } 20) = 5 | 20$

نکته. دیدیم که اگر $(a , m) = 1$ معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای

جواب است. برای حل این گونه معادلات هرگاه بتوانیم معادلهٔ هم‌نهشتی را به‌صورت: $ax \overset{m}{\equiv} ak$ در آوریم با توجه به این‌که $(a, m) = 1$ به‌راحتی می‌توان a را از طرفین حذف کرده و جوابی برای x به‌صورت $x \overset{m}{\equiv} k$ به‌دست آوریم.

تست. جواب کلی معادلهٔ $5x \overset{6}{\equiv} 2$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $x = 6k + 4$ ۲) $x = 6k - 4$

۳) $x = 6k + 3$ ۴) $x = 4k + 6$

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$5x \overset{6}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{6}{\equiv} 18 + 2 \Rightarrow 5x \overset{6}{\equiv} 5 \times 4 \Rightarrow x \overset{6}{\equiv} 4 \quad (0 \overset{6}{\equiv} 18)$$

$$\Rightarrow x - 4 = 6k \Rightarrow x = 6k + 4$$

تست. معادلهٔ $91x - 65y = 11$ در مجموعهٔ اعداد صحیح: (کنکور سراسری)

۱) فقط یک جواب دارد ۲) جواب ندارد

۳) بی‌شمار جواب دارد ۴) دو جواب دارد

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$(91, 65) = 13 \nmid 11$$

مثال. باقی‌مانده تقسیم $18! \times 5$ را بر ۱۹ بیابید.

حل. طبق قضیهٔ ویلسون داریم:

$$18! = (19-1)! \overset{19}{\equiv} -1 \Rightarrow 5 \times 18! \overset{19}{\equiv} -5 \overset{19}{\equiv} 14 \rightarrow r = 14$$

حل چند مسأله نمونه

۱ـ هرگاه یک‌سال با روز سه‌شنبه آغاز شود در این‌صورت:

الف) اول مهرماه همان سال چه روزی است؟

ب) ۲۲ بهمن همان سال چه روزی است؟

حل. برای حل این‌گونه مسائل همواره ۶ ماه اول سال را ۳۱ روز و ۵ ماهِ بعد را ۳۰ روز و ماهِ اسفند را ۲۹ روز در نظر می‌گیریم و برای شروع به حل ابتدا، روزِ تعیین شده در فرض مسأله را مبدأ گرفته (متناظر با عدد صفر) و بقیهٔ روزهای هفته را به‌ترتیب با اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۶ متناظر می‌گیریم و سپس فاصلهٔ تاریخ داده شده و تاریخ موردِ سؤال را محاسبه کرده و هم‌نهشتی عددِ حاصل را به سنج ۷ به‌دست آورده و در جدول، روز متناظر با آن عدد همان روزِ مطلوب مسأله خواهد بود.

حل الف) چون سال نو با سه‌شنبه آغاز شده پس:

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

از اول فروردین تا اول مهرماه (و خود اول مهرماه) $(1 + 31 \times 5 + 30)$ روز است بنابراین:

$$30 + 5 \times 31 + 1 = 186 \overset{7}{\equiv} 4$$

که عدد ۴ در جدول متناظر با شنبه است یعنی اول مهرماه شنبه خواهد بود.

ب)

فاصلهٔ اول فروردین تا ۲۲ بهمن $= (22 + 30 \times 4 + 31 \times 5 + 30)$

$$= 327$$

و $327 \overset{7}{\equiv} 5$

یعنی ۲۲ بهمن روز یکشنبه خواهد بود.

۲ـ ثابت کنید اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ در این‌صورت برای $c \in Z$ داریم:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc$$

حل: طبق فرض داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b)$$

$$\Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۳ـ باقیمانده تقسیم 4^{1375} را بر ۷ بیابید.

حل:

$$4^3 = 64 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 4^3 \overset{7}{\equiv} 1$$

حال ۱۳۷۵ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$1375 = 458 \times 3 + 1$$

$$\Rightarrow (4^3)^{458} \times 4 \overset{7}{\equiv} 1^{458} \times 4 \Rightarrow 4^{1375} \overset{7}{\equiv} 4$$

پس باقیمانده تقسیم ۴ است.

۴ـ رقمهای سمت راستِ $(13)^{1996}$ و $(27)^{1417}$ را بیابید.

حل: براساس مطالبِ گفته شده کافی است باقیماندهٔ تقسیم توانهایِ اعداد داده شده را بر عدد ۴ بیابیم و رقم یکانِ پایه را به توان باقیمانده برسانیم (اگر $r = 0$ آن را برابر با ۴ فرض می‌کنیم):

$$1996 = 4 \times 499 \Rightarrow r = 0$$

$$13^{1996} \overset{10}{\equiv} 3^4 = 81 \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{1996} \overset{10}{\equiv} 1$$

$$1416 = 354 \times 4 + 1 \Rightarrow r = 1$$

$$27^{1417} \overset{10}{\equiv} 7^1 \Rightarrow (27)^{1417} \overset{10}{\equiv} 7$$

۵ـ نشان دهید باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = ۶^{۳۷} - ۱۲$ بر ۱۳، ۷ است.

حل: چون ۱۳ اوّل بوده و ۱ = (۱۳و۶) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۶^{۱۲})^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۶^{۳۶} \times ۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۶$$

$$\Rightarrow ۶^{۳۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۶^{۳۷} - ۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۶ \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۶^{۳۷} - ۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

۶ـ ثابت کنید $۲^{۶n} - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل: ۷ اول بوده و ۱=(۷ و ۲) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$۲^{۶} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^{۶})^{n} \overset{۷}{\equiv} ۱^{n} \Rightarrow ۲^{۶n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۶n} - ۱ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

۷ـ به روش استقراء ثابت کنید $A = ۲^{۲n} + ۶n - ۱ \overset{۹}{\equiv} ۰$.

حل:

(گام اول) $p(۱): ۲^{۲\times ۱} + ۶ \times ۱ - ۱ = ۹ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow p(۱) \equiv T$

فرض استقراء $p(k) \equiv T \to ۲^{۲k} + ۶k - ۱ \overset{۹}{\equiv} ۰$ (گام دوم)

حکم استقراء $p(k+۱): ۲^{۲k+۲} + ۶k + \underbrace{۶-۱}_{۵} \overset{۹}{\equiv} ۰$ (گام سوّم)

طرفین فرض استقراء را در $۲^{۲}$ ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow ۲^{۲k+۲} + ۲۴k - ۴ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۲^{۲k+۲} + ۶k + ۱۸k + ۵ - ۹ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۲^{۲k+۲} + ۶k + ۵ \overset{۹}{\equiv} ۹ - ۱۸k$$

و چون $۹ - ۱۸k = ۹(۱ - ۲k) \overset{۹}{\equiv} ۰$:

$$\Rightarrow ۲^{۲k+۲} + ۶k + ۵ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

۸ـ ثابت کنید اگر n مضرب ۳ نباشد عدد $A = ۱۷^{۲n} + ۱۷^{n} + ۱$ بر ۳۰۷ بخش‌پذیر است. $(۱۷^{۲n} + ۱۷^{n} + ۱ \overset{۳۰۷}{\equiv} ۰)$

حل: اگر n مضرب ۳ نباشد دو حالت ممکن است:

I) $n = ۳k + ۱$ که در این حالت داریم:

$$A = ۱۷^{۶k+۲} + ۱۷^{۳k+۱} + ۱ = (۱۷^{۳})^{۲k} \times ۱۷^{۲} + (۱۷^{۳})^{k} \times ۱۷ + ۱$$

از طرفی چون $۱۷^{۳} \overset{۳۰۷}{\equiv} ۱$ و $۱۷^{۲} \overset{۳۰۷}{\equiv} -۱۸$ پس،

$$A \overset{۳۰۷}{\equiv} (۱)^{۲k}(-۱۸) + (۱)^{k} \times ۱۷ + ۱ = -۱۸ + ۱۷ + ۱ = ۰$$

II) اگر $n = ۳k + ۲$ در این حالت داریم:

$$A = ۱۷^{۶k+۴} + ۱۷^{۳k+۲} + ۱ = (۱۷^{۳})^{۲k} \times ۱۷^{۳} \times ۱۷ + (۱۷^{۳})^{k} \times ۱۷^{۲} + ۱ \Rightarrow A \overset{۳۰۷}{\equiv} (۱)^{۲k} \times ۱ \times ۱۷ + (۱)^{k} \times (-۱۸) + ۱ = ۱۷ - ۱۸ + ۱ = ۰$$

۹ـ رقم یکان عدد $A = ۴^{۴k+۲} + ۱۷^{۸k+۳}$ را بیابید.

حل: چون توان عدد ۴ زوج است طبق مطالب گفته شده همواره عدد $۴^{۴k+۲}$ به ازای هر $k \in IN$ به ۶ ختم می‌شود و از طرفی چون توان ۱۷ را می‌توان به شکل $۴k + ۳$ نوشت پس رقم یکان $۱۷^{۸k+۳}$ برابر است با رقم یکان $۷^{۳}$ که ۳ است (باقیماندهٔ تقسیم $۸k + ۳$ بر ۴، ۳ است) بنابراین:

$$A = ۴^{۴k+۲} + ۱۷^{۸k+۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۶ + ۳ = ۹$$

یعنی همواره عدد A به ۹ ختم می‌شود.

۱۰ـ ثابت کنید عدد $A = ۵^{۲n+۱} + ۲^{n+۴} + ۲^{n+۱}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$$۵^{۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow (۵^{۲})^{n} \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{n} \Rightarrow ۵^{۲n+۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{n} \times ۵$$

$$\Rightarrow A \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{n} \times ۵ + ۲^{n} \times ۱۶ + ۲^{n} \times ۱ = ۲۳ \times ۲^{n} \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است،

۱) $\forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $\to m|\underbrace{a - a}_{۰}$)

۲) $\forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $m|a-b \Leftrightarrow m|b-a$)

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $x \overset{۲۳}{\equiv} ۴۸$ برای چه xای می‌تواند تقسیم $۲^{۱۳۷۴}$ بر k کدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k > ۱۹$ باشد.)

$$۲^{۱۳۷۰} \times ۲^{۴} \overset{k}{\equiv} ۱ \times ۲^{۴} \Rightarrow ۲^{۱۳۷۴} \overset{k}{\equiv} ۱۶$$

و چون $k > ۱۹$ پس $k > ۱۶$ بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱۶ بر k برابر با ۱۶ است که همان‌باقی‌مانده تقسیم $۲^{۱۳۷۴}$ بر k است.

$$\left.\begin{array}{l} ۳۸۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸۷^{۳} \overset{۵}{\equiv} ۲^{۳} \overset{۵}{\equiv} ۳ \\ ۲۷۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۲۷۹^{۳} \overset{۵}{\equiv} ۴^{۳} \overset{۵}{\equiv} ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳۸۷^{۳} - ۲۷۹^{۳} \overset{۵}{\equiv} ۳ - ۴ \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{۳} = ۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۳n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۳n} + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \\ ۱۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳^{۲n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳^{۲n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲^{۳n+۱} + ۱۳^{۲n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۱۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$((۱۹)^{۲})^{۷۰} = (۱۹)^{۱۴۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۹^{۱۴۰} \Rightarrow ۹^{۱۴۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$ (۱۴۰ زوج است)

تست. باقی‌مانده تقسیم $۶۵^{۴۰}$ بر عدد ۹ کدام است؟
(کنکور سراسری)

$$\left.\begin{array}{l} ۶۸ \overset{m}{\equiv} r \\ ۱۴۵ \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow$$ با توجه به فرض و قضیه اساسی

$$\Rightarrow ۱۴۵ - ۶۸ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷۷ \overset{m}{\equiv} ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۳۷}{\equiv} ۱۵ \\ b \overset{۳۷}{\equiv} ۲۹ \end{array}\right\} \Rightarrow a - b \overset{۳۷}{\equiv} -۱۴ \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳$$ با توجه به قضیه اساسی

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر عامل ab دارند پس:

$B = \{ac_۱ + b, ac_۲ + b, ..., ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

$$\left.\begin{array}{l} (۱ \text{ و } ۱۳) = ۱ \Rightarrow ۱^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \text{ (فرما)} \\ (۲ \text{ و } ۱۳) = ۱ \Rightarrow ۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \text{ (فرما)} \\ \vdots \\ (۱۲ \text{ و } ۱۳) = ۱ \Rightarrow ۱۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \text{ (فرما)} \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۱۲}{\equiv} \overbrace{۱+۱+...+۱}^{\text{۱۲ بار}} = ۱۲$$

شرط جواب: $(۱۵ + b, b) | ۲۰ \overset{b=۵}{\Longrightarrow} (۵ \text{ و } ۲۰) = ۵ | ۲۰$

تست. جواب کلی معادلهٔ $۵x \overset{۶}{\equiv} ۲$ کدام است؟ $(k \in Z)$

$$۲^{۶} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^{۶})^{n} \overset{۷}{\equiv} ۱^{n} \Rightarrow ۲^{۶n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۶n} - ۱ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

حکم استقراء $p(k+۱): ۲^{۲k+۲} + ۶k + \frac{۶-۱}{۵} \equiv ۰$ (گام سوّم)

ادب ریاضی

عملاً، ریشه‌های تمام ریاضیاتی که با آن آشنایید به طریقی به طبیعت مربوط می‌شود. حساب و جبر به‌علت احتیاج بشر به شمارش تکامل یافته‌اند، مدیریت مالی و دیگر عملیات سادهٔ زندگی روزمره، هندسه و مثلثات از مسائل اندازه‌گیری زمین پیشرفت کرده‌اند، و مساحی، و نجوم، و حساب جامع و فاضل برای کمک به حل مسائل معینی در فیزیک اختراع شده‌اند. در سالهای اخیر اشکال جدیدی از ریاضیات برای کمک به: «از عهدهٔ مسائلی در علوم اجتماعی، تجاری، زیست‌شناسی، و جنگی برآمدن» ، اختراع شدند و مطمئناً از سایر مطالب ناشی از کوششهای بشر، موضوعات ریاضی جدیدی به‌وجود خواهند آمد. در این صورت تمام این سرچشمه‌های مفاهیم ریاضی را روی هم می‌ریزیم و آنها را طبیعت می‌خوانیم.

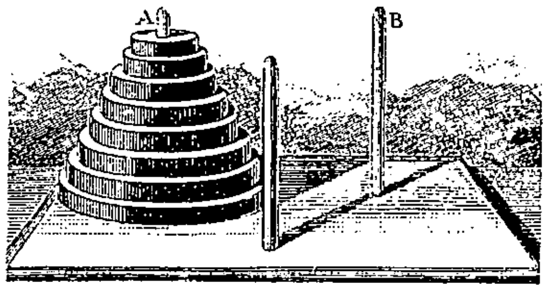
اصول ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۲)

مسائل بازگشتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور — از: Concrete Mathematics

در این مقاله به بررسی مسألهٔ برج هانوی[1] که توسط ریاضی‌دان فرانسوی ادوارد لوکاس[2] درسال ۱۸۸۳، ابداع شده‌است، می‌پردازیم. در مسألهٔ مورد بحث برجی با هشت قرص[3] نامساوی داریم که آغاز کار به‌ترتیبی نزولی بر یکی از سه میلهٔ قائم واقع برصفحه‌ای، مطابق شکل زیر، برهم قرار گرفته‌اند:



هدفمان انتقال کل برج به یکی از دو میلهٔ دیگر است، و چنان که هربار تنها یک قرص را حرکت دهیم و هیچ‌گاه قرص بزرگتری را روی قرص کوچکتری (البته بااستفاده از هر دومیلهٔ باقی‌مانده) نگذاریم.

لوکاس سرگرمیش را با افسانه‌ای تخیلی درمورد برج بس مرتفع‌تر براهما[4]، که بنابه‌فرض، ۶۴ صفحهٔ مدور طلای خالص متکی برسه میلهٔ الماسین داشت، بیاراست. و چنین گفت که خدای متعال، در ازل، صفحه‌های طلایی مزبور را بر میلهٔ اوّل مکان داد و سپس امر فرمود که طبقه‌ای از کاهنان، آنها را، طبق قواعد فوق، به‌میله سوم منتقل کنند. کاهنان شب و روز به کارشان مشتغلند و چون آن را پایان دهند، برج فرو می‌ریزد و دنیا به آخر می‌رسد.

در وهلهٔ اوّل به نظر نمی‌رسد که معمای موردبحث دارای جواب باشد. اما اندکی تفکر (یا درصورتی که مسأله را قبلاً ملاحظه کرده‌باشیم) متقاعدمان می‌کند که پاسخ دارد. و اکنون این سؤال مطرح می‌شود که: بهترین کاری که در این مورد می‌توان کرد کدام است؟ و به‌عبارت دیگر، برای انجام این کار، چند حرکت لازم و کافی است؟

بهترین طریق پرداختن به مسأله‌ای از این سنخ، اندکی تعمیم‌دادن به آن است. برج براهما ۶۴ قرص دارد و برج هانوی ۸؛ دراین‌صورت اگر n قرص برجا باشد چه رخ می‌دهد؟

یکی از مزایای تعمیم مذکور این است که در این صورت می‌توانیم مقیاس مسأله را حتی نازلتر کنیم. در واقع، در این کتاب مکرراً ملاحظه خواهیم کرد که نافعتر آن است که ابتدا **به‌حالات مختصرتر بپردازیم.** در این صورت ملاحظهٔ چگونگی انتقال برجی که تنها شامل یک یا دوقرص باشد آسان است، و مبلغ قلیلی تجربه چگونگی نقل برجی با سه قرص را نیز نشان می‌دهد.

در وهله دوم در حل مسألهٔ مورد بحث، معرفی نمادی مناسب است، چه گفته‌اند که: **نامش نه و دامش نه**[5]. در این صورت فرض می‌کنیم که T_n کمترین تعداد حرکاتی باشد که تحت قواعد لوکاس n قرص از یک میله را به میلهٔ دیگر انتقال می‌دهد. به این ترتیب T_1 واضحاً است، و T_2 برابر ۳.

می‌توان پاره معلوم دیگری را نیز، با بررسی کوچکترین جمیع حالات، بدون صرف کمترین هزینه‌ای به‌دست آورد: واضح است که $T_0 = 0$. زیرا در انتقال برجی از $n = 0$ قرص، به‌هیچ حرکتی نیاز نیست!

ریاضی‌دانهای زیرک از زیرک‌اندیشی شرم ندارند، زیرا درک نمونه‌های عمومی چون ابتداییترین حالات (حتی زمانی که جزیی‌اند) دانسته شوند، آسانتر است.

اکنون منظرمان را تغییر داده جهد در درشت اندیشی می‌کنیم؛ دراین‌صورت چگونه می‌توان برج عظیمی را انتقال داد؟ آزمون با سه قرص نشان‌می‌دهد که طرح برنده، انتقال دوقرص رویین به‌میلهٔ وسط، حرکت سومین، و بعد آوردن آن دو دیگر برآن است. این طرح سررشتهٔ انتقال n قرص درحالت کلی‌را به دست می‌دهد: ابتدا $n - 1$ قرص کوچکتر را به‌میله‌ای دیگر نقل می‌کنیم (که به T_{n-1} حرکت محتاج است.)، سپس بزرگترین آنها را حرکت می‌دهیم (که یک حرکت لازم دارد)، و سرانجام $n - 1$ قرص کوچکتر را بر این بزرگترین برمی‌گردانیم (که به T_{n-1} حرکت نیازمند است). به‌این ترتیب، می‌توانیم n قرص را (به‌ازای $n > 0$)* با حداکثر $2T_{n-1} + 1$ حرکت انتقال دهیم:

$$T_n \le 2T_{n-1} + 1 \text{، به‌ازای } n > 0$$

فرمول فوق علامت «$\le$» را به‌این علت به‌جای «$=$» به‌کار می‌برد که طرز ساخت‌مان تنهاکفایت $2T_{n-1} + 1$ حرکت را ثابت می‌کند؛ این‌که $2T_{n-1} + 1$ حرکت هم لازم است، را هنوز نشان نداده‌ایم. در این مرحله ممکن است که شخص شاطری توان اندیشیدن به راهی سیان بر را داشته باشد.

اما طریق سریعتری هست؟ عملاً خیر. چه بالاخره در مرحله‌ای باید قرص بزرگترین را حرکت دهیم، و چون چنین کنیم، باید $n - 1$ قرص کوچکتر برمیلهٔ واحدی باشند، و قرار دادن آنها در آن، حداقل T_{n-1} حرکت گرفته است. ممکن است، اگر خیلی زیرک نباشیم، بزرگترین قرص را بیش از یکبار حرکت دهیم. اما پس از آن‌که بزرگترین قرص را برای آخرین بار حرکت دادیم، باید $n - 1$ قرص را (که باید باردیگر برمیلهٔ واحدی باشند) به‌جای اوّلینشان برقرص بزرگترین منتقل کنیم؛ و این کار نیز به T_{n-1} حرکت نیاز دارد. درنتیجه،

$$T_n \ge 2T_{n-1} + 1 \text{، به‌ازای } n > 0$$

این دو نامساوی، همراه باجواب کم مایهٔ به‌ازای $n = 0$،

$$T_0 = 0 \qquad (1.1)$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \qquad \text{به‌ازای } n > 0$$

را به دست می‌دهند. (توجه‌داشته باشید که فرمولهای فوق با مقادیر معلوم $T_1 = 1$ و $T_2 = 3$ سرسازگاری دارند. به‌این ترتیب، تجربه‌مان با حالات خرد نه تنها به کشف فرمولی عام مددمان رساند، بلکه طریقی آسان، در بررسی این‌که مبادا خطای ابلهانه‌ای انجام داده‌باشیم، فراهم می‌کند. بررسیهای چنین، بخصوص هنگامی که در فصول بعد به طرحهای پیچیده‌تر می‌رسیم، ارجمند خواهند بود.)

مجموعه‌ای از نامساویهایی چون (۱.۱) را مجموعه‌ای بازگشتی[۶] می‌نامیم. (به نسبت بازگشتی نیز معروف است). نسبت مذکور مقداری مرزی و معادله‌ای در مورد مقدار عمومی برحسب مقادیر قبلی به دست می‌دهد. گه‌گاه تنها به.معادلهٔ عمومی مذکور به‌عنوان نسبت بازگشتی اشاره می‌کنیم، گرچه این موضوع از لحاظ فنی برای کامل شدن نیازمند مرزی است.

بازگشتی مزبور دستمان را باز می‌گذارد که T_n را به‌ازای هرمقدار n ی که مایل باشیم حساب کنیم. اما هیچ کس در واقع میل ندارد که هنگامی که n بزرگ است، از فرمولی بازگشتی محاسبه کند. چرا که وقت زیادی می‌گیرد. بازگشتی مذکور تنها اطلاعات «موضعی» غیرمستقیم به‌دست می‌دهد. پاسخی به بازگشتی موصوف دلخوشترمان می‌کند. به‌عبارت دیگر «صورت محدود» و ظریف و شسته رفته‌ای برای T_n می‌طلبیم که بگذارد آن را، حتی در مورد n های بزرگ، بسرعت محاسبه کنیم. باصورت محدود می‌توان دریافت که T_n واقعاً چیست.

اما چگونه یک فرمول بازگشتی را حل کنیم؟ یک طریق، حدس جواب صحیح و سپس اثبات صحت حدس است. و برای حدس جواب، (بازهم) بیشترین امیدمان به ملاحظهٔ حالات خرد است. بنابراین، به‌طور متوالی به محاسبهٔ موارد زیر می‌پردازیم:

$T_3 = 2.3+1$؛ $T_4 = 2.7+1 = 15$؛ $T_5 = 2.15+1 = 31$؛
$T_6 = 2.31 + 1 = 63$

ها! به‌نظر می‌رسد که جواب مطلوب

$$T_n = 2^n - 1 \qquad \text{به ازای } n \ge 0 \qquad (1.2)$$

باشد، این جواب، حداقل، به ازای $n \le 6$ به‌کار آید.

استقرای ریاضی[۷] طریق عمومی اثبات این است که گزاره‌ای در مورد عدد صحیح n ی، به‌ازای جمیع n های $n_0 \le n$ راست است.

دراین مورد، ابتدا گزارهٔ موردنظر را، هنگامی که n کوچکترین مقدار خود، n_0، را داراست، اثبات می‌کنیم؛ این به مرحلهٔ مبنائی[۸] موسوم است.

استقرای ریاضی روشی عمومی برای اثبات این مطلب است که گزاره‌ای دربارهٔ عدد صحیح n، به‌ازای جمیع مقادیر $n \ge n_0$، راست است. در این‌مورد، ابتدا گزارهٔ مورد نظر را، هنگامی که n کوچکترین مقدار خود، یعنی n_0، را داراست. اثبات می‌کنیم؛ این مرحله مبنا[۹] نامیده می‌شود. بعد، گزاره را به‌ازای $n > n_0$، بافرض این‌که به‌ازای جمیع مقادیر بین n_0 و $n - 1$، از جمله خود $n - 1$، ثابت شده، اثبات می‌کنیم؛ این مرحله به استقرا[۱۰] موسوم است. چنین

اثباتی بی‌شمار نتیجه را در ازای مقدار محدودی کار به‌دست می‌دهد.

بازگشتها مطلوب استقرای ریاضی درنظر گرفته شده‌اند. فی‌المثل، درحالت موردبحث، (۲ . ۱) به آسانی از (۱ . ۱) نتیجه می‌شود: مرحلهٔ مبنایی ساده است، زیرا $0 = 2^0 - 1$. و مرحله استقرایی به‌ازای $n > 0$، درصورتی‌که فرض‌کنیم‌که (۲ . ۱)، چون به‌جای n، $n - 1$ قرار داده شود، برقرار است، به‌دست می‌آید:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$$

در نتیجه (۲ . ۱) به‌ازای n نیز برقرار است.

البته کار راهبان داستانمان به پایان نرسیده؛ و آنها همچنان وظیفه مدارانه به‌کار حرکت دادن قرصها مشغول‌اند، و تا آن‌جاکه آشکار است برای زمانی دراز نیز چنین خواهند کرد، زیرا به‌ازای $n = 64$، $2^{64} - 1$ حرکت (درحدود ۱۸ کوئین تی‌لیون[11]) موجود است. و حتی با نرخ غیرممکن یک حرکت در میکرو ثانیه، برای برج براهما به بیش از ۵۰۰۰ قرن نیاز خواهند داشت. معمای اوّل لوکاس اندکی عملیتر است. چه به $2^8 - 1 = 255$ حرکت، که با دستی چابک در حدود چهار دقیقه وقت می‌گیرد، نیاز دارد.

مسألهٔ بازگشتی برج هانوی، نمونه‌ای از موارد بسیاری است که با هر نوع کاربردی رخ می‌نماید. در پیداکردن عبارتی بسته ـ صورت[12] در مورد کمیت مورد توجهی چون T_n از سه مرحله می‌گذریم:

۱ ـ به حالات ساده می‌نگریم. این عمل بینشی در مورد مسأله می‌دهد و در مراحل ۲ و ۳ به کمکمان می‌آید.

۲ ـ برای کمیت موردنظر عبارتی ریاضی پیدا و اثبات می‌کنیم. در مورد مسألهٔ برج‌هانوی، این بازگشتی (۱ . ۱) است که، با مفروض بودن زمینهٔ کار، محاسبهٔ T_n را به ازای هر n روا می‌دارد.

۳ ـ برای عبارت ریاضیمان، صورتی بسته پیدا و اثبات می‌کنیم. این صورت در مورد مسألهٔ برج هانوی، جواب بازگشتی (۲ . ۱) است.

مرحلهٔ سوم همان است که در سراسر کتاب برآن متمرکز می‌شویم. در واقع، اغلب مراحل ۱ و ۲ را حذف می‌کنیم، زیرا عبارت ریاضی را در آغاز کار می‌دهند. اما با این حال به مسائلی فرعی برمی‌خوریم که راه حلشان از هر سه مرحلهٔ مذکور می‌گذرد.

تحلیلمان از مسألهٔ برج هانوی گرچه به پاسخ درست منجر شد، به «پروازی استقرایی[13]» نیاز داشت؛ چه در مورد پاسخ آن به حدسی سعد اعتماد کردیم. یکی از اهداف اصلی مقالهٔ حاضر توضیح این مطلب است که چه‌گونه شخص می‌تواند بی‌آن‌که بصیر باشد بازگشتیهارا حل‌کند. به‌عنوان‌مثال، ملاحظه‌می‌کنیم که‌بازگشتی (۱ . ۱) را می‌توان با افزودن ۱ به‌طرفین معادلات آن ساده کرد:

$T_0 + 1 = 1$

$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2$ به‌ازای $n > 0$

اکنون اگر فرض می‌کنیم $U_n = T_n + 1$، داریم:

$U_0 = 1$؛

$U_n = 2U_{n-1}$ به‌ازای $n > 0$ (۱ . ۳)

دراین صورت کشف این مطلب که جواب این بازگشتی، درست $U_n = 2^n$ است، و درنتیجه: $T_n = 2^n - 1$، قریحهٔ بسیار نمی‌خواهد. حتی یک کامپیوتر هم می‌تواند چنین کند.

یادداشتها:

1. tower of Hanoi
2. Edouard lucas
3. disk

۳. تعبیر را از سعدی گرفته‌ایم: قرص خورشید در سیاهی شد ـ یونس‌اندر دهان ماهی شد.

4. Brahma
5. name and conquer

* سیاق کلام نشان می‌دهد که n متعلق به مجموعهٔ اعداد طبیعی است، بنابراین آوردن این شرط لازم نیست، اما اگر بخواهیم محکم کاری کنیم و این شرط را بیاوریم دیگر تنها آوردن آن کافی نیست و برای کفایت باید شرط $n \in N$ را نیز به آن بیافزاییم.

6. recurrence
7. mathematical induction
8. basis
9. basis step
10. induction
11. quintillon
12. closed - form expression
13. inductive leap

حل یک مسئله جالب هندسه به کمک تابع همنگار (هموگرافیک)

● دکتراحمد شرف‌الدین

خلاصه. در این مقاله دربارهٔ تابع همنگار (هموگرافیک) توضیحاتی بیان می‌کنیم. سپس به کمک تابع همنگار یک مسئله بسیار جالب هندسه را حل می‌کنیم. در پایان مقاله حالتهای خاص از مسئله را مطرح می‌کنیم.

۱. تابع همنگار

۱.۱ تابع

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (۱)$$

که در آن a، b، c، d اعداد حقیقی‌اند تابع همنگار نامیده می‌شود. دامنه تغییرات x عبارت است از $R - \{\frac{-d}{c}\}$ و دامنه تغییرات y عبارت است از $R - \{\frac{a}{c}\}$.

۱.۲. اگر یک رابطه جبری بین دو متغیر حقیقی x و y برقرار باشد بطوری که به‌ازای هر مقدار x یک و فقط یک مقدار برای y حاصل شود و به‌ازای هر مقدار y یک و فقط یک مقدار برای x حاصل شود در این‌صورت آن رابطه به‌صورت زیر است (دقت به این نکته ضروری است که x و y نباید هیچ مقدار مختلطی اختیار کنند یا به عبارت دیگر رابطهٔ جبری بین x و y نباید به ازای مقادیر غیرحقیقی برقرار باشد):

$$Axy + Bx + Cy + D = 0 \qquad (۲)$$

رابطه (۲) یک رابطه همنگار به صورت (۱) می‌باشد.
باید توجه داشت که در رابطه (۲)، دو متغیر x و y از درجه اول‌اند.
برای توضیح بیشتر مثالهایی ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $y = \sqrt{x}$ یک تابع جبری یک‌به‌یک است. اما در این تابع متغیر x نمی‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند (x فقط اعداد نامنفی اختیار می‌کند) و همین‌طور y نمی‌تواند مقدار منفی اختیار کند.

مثال ۲. تابع $y = x^3$ یک تابع جبری یک‌به‌یک است. اما به‌ازای هر مقدار y (بجز صفر) برای x سه مقدار متمایز حاصل می‌شود که یکی حقیقی و دو دیگر مختلط است. مثلاً اگر $y = 1$ باشد برای x سه مقدار

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{و} \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

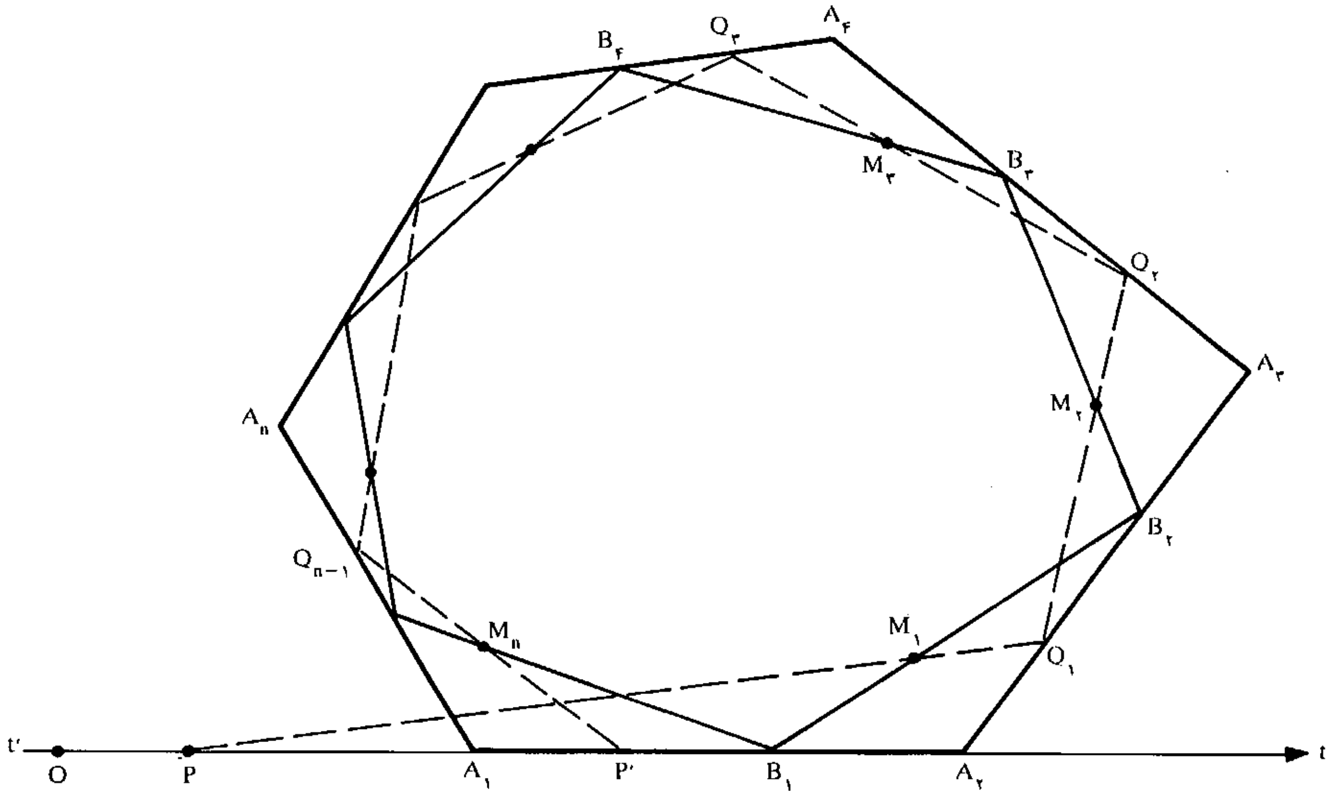
حاصل می‌شود. (این سه مقدار جوابهای معادله $x^3 - 1 = 0$ اند.)

تبصره. توجه داشته باشید که در شماره (۲.۱) گفته‌ایم دو متغیر x و y **حقیقی‌اند بطوری که به‌ازای هر مقدار x . . . و به‌ازای هر مقدار y . . .**

۲. یک مسئله جالب هندسه

در صفحهٔ π، n ضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ و n نقطه M_1، M_2، ...، و M_n را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1B_2 \ldots B_n$ در n ضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ محاط کنیم بطوری که رأسهای B_1، B_2، . . . و B_n به ترتیب بر خطهای A_1A_2، A_2A_3، . . . و A_nA_1 قرار گیرند.

حل. محور $t't$ را منطبق بر خط A_1A_2 اختیار می‌کنیم و مبدأ آن را Q می‌نامیم. نقطهٔ دلخواه P را روی محور $t't$ در نظر می‌گیریم. خط راست Pm_1 را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط A_2A_3 نقطهٔ Q_1 می‌نامیم. سپس خط راست Q_1M_2 را رسم می‌کنیم و نقطه



برخورد آن را با خط $A_۳A_۴$ نقطه $Q_۲$ می‌نامیم. بعد خط راست $Q_۲M_۳$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_۴A_۵$ نقطه $Q_۳$ می‌نامیم و این عمل ترسیمات متوالی را ادامه می‌دهیم تا به نقطه $Q_{n-۱}$ واقع بر خط $A_nA_۱$ برسیم. اکنون خط راست $Q_{n-۱}M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_۱A_۲$ نقطه P' می‌نامیم. اکنون توجه خود را به دو نکته مذکور در زیر متمرکز می‌کنیم.

الف. اگر روی محور $t't$، نقطه P را در جایی انتخاب کنیم تا نقطه P' حاصل از ترسیمات متوالی بر نقطهٔ P منطبق شود آنگاه خط شکسته بسته $PQ_۱Q_۲ \ldots Q_{n-۱}P'$ همان چند ضلعی محاطی مطلوب $B_۱B_۲ \ldots B_m$ می‌باشد.

ب. با اجرای ترسیمات متوالی مذکور، به‌ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از محور $t't$ حاصل می‌شود و برعکس به‌ازای هر نقطه P' از محور $t't$ با اجرای ترسیمات متوالی مذکور در جهت عکس، یک و فقط یک نقطه P از محور $t't$ حاصل می‌شود. (منظور از اجرای ترسیمات در جهت عکس آن است که یک نقطهٔ دلخواه P' روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و سپس خط $P'M_n$ را رسم می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با خط $A_۱A_n$ تعیین می‌کنیم و آن نقطه را $Q_{n-۱}$ می‌نامیم. سپس خط $Q_{n-۱}M_{n-۱}$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با خط $A_nA_{n-۱}$ نقطه $Q_{n-۲}$ می‌نامیم و ...)

حال قرار می‌دهیم:

$\overline{oP} = x$ و $\overline{oP'} = y$

چون به‌ازای هر نقطه P از محور $t't$ یک و فقط یک نقطه P' از همان محور حاصل می‌شود و برعکس پس یک رابطه

$$f(x, y) = ۰ \quad (۳)$$

بین x و y وجود دارد که یک به یک است.

حال ثابت می‌کنیم که معادله (۳) یک معادله جبری است. برای این منظور یک دستگاه مختصات $xo'y$ در نظر می‌گیریم و ابتدا با معلوم بودن مختصات نقطه‌های P، $M_۱$، $A_۲$، $A_۳$ معادله‌های دو خط $PM_۱$ و $A_۲A_۳$ را می‌نویسیم. دستگاه حاصل از معادله‌های این دو خط مختصات نقطه $Q_۱$ را به‌دست می‌دهد. چون معادلات خطهای راست جبری‌اند و اعمالی که روی آنها انجام می‌گیرد تا مختصات نقطه برخورد آن دو خط به‌دست آید جبری‌اند پس $Y_{Q_۱}$ برحسب $X_{Q_۱}$ با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

حال با معلوم بودن مختصات نقاط $Q_۱$، $M_۲$، $A_۳$، $A_۴$ معادله‌های دو خط $Q_۱M_۲$ و $A_۳A_۴$ را می‌نویسیم و به کمک معادلات این دو خط مختصات نقطه برخورد آنها یعنی نقطه $Q_۲$ را حساب می‌کنیم. با بکارگیری همان استدلال قبل می‌گوییم که $Y_{Q_۲}$

برحسب X_{Q_2} با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

به همین ترتیب معادلات زوجهای خطوط مناسب را می‌نویسیم و معادلات حاصل را حل می‌کنیم تا سرانجام مختصات نقطه P' بدست آید. چون معادلات خطوط جبری‌اند و اعمالی که برای بدست آوردن مختصات نقاط برخورد آنها انجام می‌گیرد جبری‌اند پس y (یعنی اندازه جبری $\overline{oP}$ روی محور $t't$) برحسب x (یعنی اندازه جبری $\overline{oP'}$ روی محور $t't$) با یک عبارت جبری بیان می‌شود.

از مطالب اخیرالذکر نتیجه می‌شود که:

یک رابطه جبری بین x و y وجود دارد. (I)

از نکتهٔ مذکور در (ب) نتیجه می‌شود که:

رابطه بین x و y یک‌به‌یک است. (II)

اکنون توجه کنیم که نقطه P می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط $M_n Q_{n-1}$ موازی محور $t't$ می‌شود. این نقطه را K و اندازه جبری $\overline{OK}$ را k می‌نامیم. همین‌طور نقطه P' می‌تواند هر نقطه از محور $t't$ باشد بجز نقطه‌ای که برای آن نقطه، خط Q_1M_1 موازی محور $t't$ می‌شود. این نقطه را L و اندازهٔ جبری $\overline{OL}$ را l می‌نامیم. از مطالب اخیرالذکر که نتیجه می‌شود که:

x و y می‌توانند به ترتیب هر عدد از دو مجموعه $R-\{k\}$ و $R-\{l\}$ را اختیار کنند و هیچ مقدار مختلطی اختیار نمی‌کند. (III)

از سه نکته، (I)، (II)، (III) نتیجه می‌شود که رابطه بین x و y به‌صورت زیر است:

$$(۴)\quad Axy + Bx + Cy + D = 0$$

به عبارت دیگر y برحسب x یک تابع همنگار به‌صورت زیر است:

$$(۵)\quad y = \frac{px + q}{rx + s}$$

صورت و مخرج کسر (۵) را به یکی از چهار پارامتر p، q، r، یا s بخش می‌کنیم مثلاً بر s و قرارمی‌دهیم $\frac{p}{s} = P$ و $\frac{q}{s} = Q$ و $\frac{r}{s} = R$ و معادله (۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۶)\quad y = \frac{Px + Q}{Rx + 1}$$

اکنون به تعیین مقادیر P، Q و R می‌پردازیم. برای این منظور سه نقطهٔ دلخواه p، p_1، و p_2 را بطور دلخواه روی محور $t't$ اختیار می‌کنیم و نظیرهای این سه نقطه را که پس از اجرای ترسیمات یاد شده، روی محور $t't$ حاصل می‌شوند به‌ترتیب P'، P'_1، و P'_2 می‌نامیم. اندازه‌های جبری $\overline{oP}$، $\overline{oP'}$، $\overline{oP_1}$، $\overline{oP'_1}$، $\overline{oP_2}$، $\overline{oP'_2}$ را اندازه می‌گیریم. زوجهای مرتب $(\overline{oP}, \overline{oP'})$، $(\overline{oP_1}, \overline{oP'_1})$ و $(\overline{oP_2}, \overline{oP'_2})$ باید در معادله (۵) صدق کنند. در معادله (۵) به جای x و y به‌ترتیب مختص اول و مختص دوم هریک از سه زوج مرتب اخیرالذکر را می‌گذاریم. سه معادله حاصل می‌شود. از حل دستگاه حاصل از سه معادله مورد نظر مقایر P، Q، و R حاصل می‌شود. مقادیر حاصل را به ترتیب P_1، Q_1، و R_1 می‌نامیم. معادله (۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۷)\quad y = \frac{P_1x + Q_1}{R_1x + 1}$$

اکنون یادآور می‌شویم که هدف، آن بود که نقطه P را روی محور $t't$ جایی انتخاب کنیم تا نقطهٔ P' بر آن منطبق شود. با توجه به نکته اخیرالذکر هنگامی که دو نقطه P و P' برهم قرار گیرند مقدار $\overline{oP}=u$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(۸)\quad u = \frac{P_1u + Q_1}{R_1u + 1}$$

جوابهای این معادله مواضع نقطه مطلوب P را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند. جوابهای این معادله مواضع نقطهٔ B_1 را روی محور $t't$ مشخص می‌کنند.

تبصره. می‌توان با معلوم بودن سه نقطه P، P_1، و P_2 و سه نقطه نظیر آنها یعنی P'، P'_1، و P'_2 موضع نقطهٔ B_1 را با ترسیم هندسی مشخص کرد (یعنی بدون نوشتن سه معادله برای تعیین P_1، Q_1، و R_1).

تبصره. مسئله‌مذکور در شماره (۲) را می‌توان به‌صورت کلیتر زیر مطرح کرد.

در صفحهٔ π، n خط راست d_1، d_2، ...، و d_n و n نقطه M_1، M_2، ... و M_n را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم یک n ضلعی $B_1B_2 \dots B_n$ رسم کنیم. بطوری که رأسهای B_1، B_2، ...، و B_n به ترتیب بر خطهای d_1، d_2، ...، و d_n قرار گیرند.

چون در مسئله اخیرالذکر بخشی از مجموعه خطوط $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ می‌توانند موازی و یا متقارب باشند مسئله کلیتر می‌شود.

بــردارهــا

(قسمت سوم)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

◄ این قسمت را با حل چند مسأله آغاز می‌کنیم:

۱ ـ ثابت کنید که اندازهٔ زاویه محاطی مقابل به قطر هر دایره برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.

حل: نقطهٔ دلخواه M را روی پیرامون دایره به مرکز o و به قطر AB در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oB} \qquad (2)$$

از ضرب روابط (۱) و (۲)، نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA})(\overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oB})$$

$$= \overrightarrow{Mo}^2 + (\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB})\overrightarrow{Mo} + \overrightarrow{oA} . \overrightarrow{oB}$$

تساویهای $|\overrightarrow{oM}| = |\overrightarrow{oA}| = |\overrightarrow{oB}|$ و $\overrightarrow{oA} = -\overrightarrow{oB}$ بدیهی است. بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{Mo}^2 + (-\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oB})\overrightarrow{Mo} - \overrightarrow{oB} . \overrightarrow{oB}$$

$$= \overrightarrow{Mo}^2 - \overrightarrow{oB}^2 = \overrightarrow{Mo}^2 - \overrightarrow{Mo}^2 = 0$$

در نتیجه:

$$\hat{AMB} = \frac{\pi}{2}$$

۲ ـ در متوازی الاضلاع ABCD از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر قطر BD و ضلع AB وارد می‌کنیم، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{BE} . \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF} . \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}^2$$

حل: داریم:

$$\overrightarrow{BE} . \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} . (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$$

$$= \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{CE}$$

با توجه به فرض $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}$، داریم:

$$\overrightarrow{BD} . \overrightarrow{CE} = 0$$

همچنین $\overrightarrow{BD}$ قطر متوازی‌الاضلاع است، پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$

پس:

$$\overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) . \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}$$

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC})$$

$$= \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{FC}$$

با توجه به فرض $CF \perp AB$، داریم:

$$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CF} = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{BD} . \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BF}$$

و یا:

$$\overrightarrow{BE} . \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BF} . \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}^2$$

۳ـ اگر نقطهٔ o در صفحهٔ سه بر ABC واقع باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \qquad (1)$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که در هر سه‌بر، سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.

حل: داریم:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{oA}\cdot\vec{o}+\overrightarrow{AB}\cdot\vec{o}=0+0=0$$

در این‌جا اگر نقطه o را بر نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعات AA' و BB' منطبق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{oA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{oB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$$

و با توجه به تساوی (۱) داریم:

$$\overrightarrow{oC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

یعنی: oC بر AB عمود است و در نتیجه ارتفاع CC' نیز از نقطهٔ H می‌گذرد.

۴ـ ثابت کنید که در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2$$

حل: داریم:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$$

و یا:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2-2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}$$

چون:

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$$

پس:

$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$$

در نتیجه:

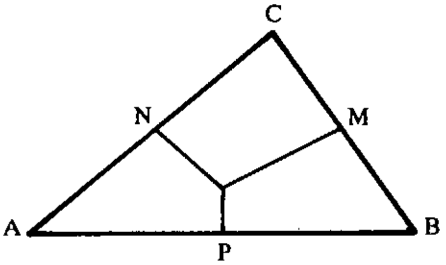
$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2$$

۵ـ ثابت کنید که عمود میانه‌های اضلاع یک سه‌بر از یک نقطه می‌گذرند.

حل: فرض می‌کنیم عمود میانه‌های دو ضلع AB و AC در نقطهٔ o برخورد کنند.

اگر این عمود میانه‌ها را oP و oN بنامیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{oP}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$



همچنین:

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

در این‌جا اگر نقطهٔ میانهٔ ضلع BC را M بنامیم، کافی است ثابت کنیم که oM بر BC عمود است یعنی:

$$\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

اما داریم:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$

و همچنین با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}$$

یا

$$\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=$$

$$\overrightarrow{oN}+\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}{2}=\overrightarrow{oN}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

پس:

$$\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

و چون $\overrightarrow{oN}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ است، پس:

$$\overrightarrow{oM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{oN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$$

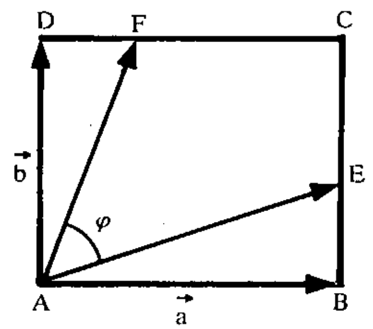
$$= \overrightarrow{BA} . (\overrightarrow{oN} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NA})$$

$$= \overrightarrow{BA} . (\overrightarrow{oN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP})$$

$$= \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{oP} = 0 \implies \boxed{\overrightarrow{oM} . \overrightarrow{BC} = 0}$$

یعنی oM بر $\overrightarrow{BC}$ عمود است. و در نتیجه oM عمود میانهٔ BC است.

۶ـ در مربع ABCD دو نقطهٔ E و F به ترتیب روی اضلاع BC و CD داده شده‌اند به طوری که $BE = \frac{1}{2} BC$ و $DF = \frac{1}{3} DC$. زاویهٔ $E\hat{A}F$ را حساب کنید.



حل: برای محاسبهٔ زاویهٔ $E\hat{A}F = \varphi$، کافی است حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF}$ را حساب کنیم که از آن $\cos\varphi$ و در نتیجه φ به دست خواهد آمد. و با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \text{ و } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$$

و از آن‌جا داریم:

$$\overrightarrow{AE} . \overrightarrow{AF} = (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) . (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \vec{a} . \vec{b} + \frac{1}{6}\vec{a} . \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2$$

و چون: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ و $\vec{a} . \vec{b} = 0$

پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AE} . \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}^2 = \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = \frac{5}{6}\vec{a}^2$$

از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{AE} . \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AE}| . |\overrightarrow{AF}| \cos\varphi$$

و همچنین:

$$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AE}^2 = (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2$$

$$\implies \overrightarrow{AE}^2 = \vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}^2 = \frac{5}{4}\vec{a}^2$$

$$\implies |\overrightarrow{AE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|\vec{a}|$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AF}^2 = (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b})^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{2}{3}\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\implies \overrightarrow{AF}^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \vec{a}^2 = \frac{10}{9}\vec{a}^2$$

$$\implies |\overrightarrow{AF}| = \frac{\sqrt{10}}{3}|\vec{a}|$$

پس:

$$\overrightarrow{AE} . \overrightarrow{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2}|\vec{a}| \times \frac{\sqrt{10}}{3}|\vec{a}| \cos\varphi = \frac{5}{6}\vec{a}^2$$

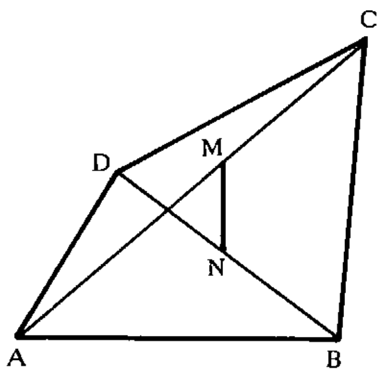
که از آن نتیجه می‌شود: $\sqrt{50}\cos\varphi = 5$

و یا: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و بنابراین خواهیم داشت: $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$

۷ـ اگر M و N نقاط میانهٔ قطرهای چهاربر (چپ یا راست) ABCD باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 4\overrightarrow{MN}^2$$



حل: چون M و N نقاط میانهٔ قطرهای AC و BD هستند، داریم:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

پس: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

با توجه به تساویهای: $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

داریم:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\left[\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD})^2\right]$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{AD}$$

$$= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2+\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2$$

$$+ 2\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$$

$$+ 2\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{DA}$$

$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2+2\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$

و چون داریم: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2$$

تمرین:

۱ ـ اگر P و Q و R نقاط میانهٔ اضلاع سه‌بر ABC باشند، ثابت کنید که برای هر نقطهٔ دلخواه o برابری زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{oP} + \overrightarrow{oQ} + \overrightarrow{oR}$$

(راهنمایی: از روابط زیر استفاده کنید:)

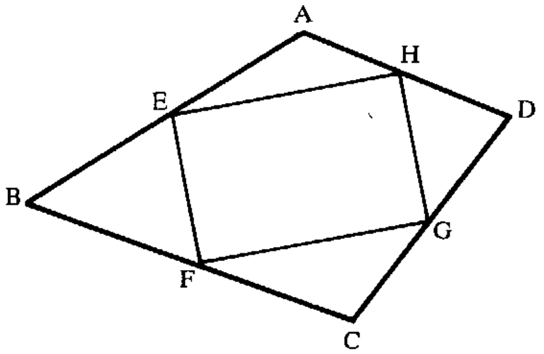
$\overrightarrow{oC} + \overrightarrow{oA} = 2\overrightarrow{oR}$ و $\overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = 2\overrightarrow{oQ}$ و $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} = 2\overrightarrow{oP}$)

۲ ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD قرار می‌دهیم، $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$، بردارهای AB و BC را برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

(راهنمایی: از روابط $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ و

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ استفاده کنید.)

۳ ـ ثابت کنید که اگر در چهار ضلعی (چپ یا راست) نقاط میانهٔ اضلاع پی‌درپی را به هم وصل کنیم، شکل به‌دست آمده یک متوازی‌الاضلاع است.



(راهنمایی: با فرض $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ و $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ و $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$، و در صورتی که نقاط میانی اضلاع را E و F و G و H بنامیم. بااستفاده از روابط زیر:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ یا $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{d} - \vec{c}$

$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$ و $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$ و

$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ و $\overrightarrow{HD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{d}$ نتیجه بگیرید: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.)

ادامه دارد...

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۰)

● حمید رضاامیری

Definition 2.31. Order of an element :
Let G be a group and let $a \in G$. Then a is said to be of *finite order n*, if n is the least positive integer such that $a^n=e$, the identity of G.

If for no positive integer k, $a^k=e$, then a is said to be of *infinite order*.

The symbol $o(a)$ shall denote the order of a.

تعریف ۲.۳۱. مرتبهٔ یک عضو

فرض کنیم G یک گروه و $a \in G$ باشد. دراین‌صورت a از مرتبهٔ متناهیِ n خوانده می‌شود، اگر n کوچکترین عدد صحیح و مثبتی باشد که $a^n = e$، و e عضو همانیِ G است.

اگر برای هیچ عدد صحیح و مثبت مانند k، $a^k = e$ برقرار نباشد، در این صورت a را از مرتبهٔ نامتناهی می‌گوییم.

نماد $o(a)$ برای نمایش مرتبهٔ a به کار می‌رود.

Definition 2.32. Cyclic Subgroup : A group G is said to be a cyclic group if there exists an element $b \in G$, such that every element of G is a power of b. Then b is called a *generator* of G and we denote G by $< b >$.

If the composition in G were denoted additively then we could say that G is a cyclic group if there exists an element a of G such that every element of G is of the form na where n is an integer.

تعریف ۲.۳۲. زیرگروه دوری

گروه G را یک گروه دوری می‌گوییم اگر عضوی چون $b \in G$ وجود داشته باشد، به قسمی که هر عضوِ G توانی از b باشد. دراین‌صورت b را مولد گروه G نامیده و G را به‌صورت $< b >$ نشان می‌دهیم.

هرگاه عمل تعریف شده در G یک عمل جمعی باشد، دراین‌صورت اگر عضوی از G مانند a وجود داشته‌باشد به قسمی که هر عضوِ G به شکل na که n یک عدد صحیح است، نوشته شود، می‌توانیم G را یک گروه دوری بنامیم.

EXAMPLE 22. Let $G_n=\left\{ e^{\frac{2\pi ri}{n}} \mid r=0, 1, 2,\dots, n-1\right\}$ be the group of nth roots of unity. Let $a=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, then $a \in G$. Since for any integer r, $e^{\frac{2\pi ri}{n}}=\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^r=a^r$, every element of G is a power of a. Hence G_n is a cyclic group generated by a.

مثال ۲۲. فرض‌کنیم $G_n = \{e^{\frac{2\pi ri}{n}} \mid r= 0 , 1 , 2, \dots , n-1 \}$ گروهی‌حاصل‌از n امین‌ریشه‌های واحد باشد. فرض‌کنیم $a=e^{\frac{2\pi i}{n}}$، در این صورت $a \in G$. چون برای هر عدد صحیح r، $e^{\frac{2\pi ri}{n}} = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^r = a^r$، هر عضو از G توانی از a است. بنابراین G_n یک گروه دوری تولید شده توسط a است.

EXAMPLE 23. The additive group **Z** is a cyclic group generated by 1, since $1 \in \mathbf{Z}$ and for every integer n, we have $n=n\,1$.

مثال ۲۳. گروه‌جمعی Z یک‌گروه دوریِ تولید شده توسط ۱ است، زیرا $1 \in Z$ و برای هرعدد صحیح‌مانند n، داریم: $n = n \times 1$.

Theorem 2.33. Order of a cyclic group is equal to the order of its generator.

قضیهٔ[1] ۲.۳۳. مرتبهٔ یک گروه دوری با مرتبهٔ مولّدش برابر است.

---

(۱) به‌دلیل طولانی بودنِ اثبات و ناجدودی قابل استفاده نبودن آن برای دانش‌آموزان از آوردن اثبات خودداری شده‌است.

Now let G be any group and $a \in G$. Let $H=\{a^n \mid n$ is any positive integer$\}$. Consider any two elements $x=a^n$, $y=a^m$ in H. We find that $xy^{-1}=a^n a^{-m}=a^{n-m} \in H$. This implies that H is subgroup of G. Clearly H is a cyclic group generated by a. This subgroup is called a *cyclic subgroup* of G generated by a and we write $H= < a >$.

حال فرض کنیم G گروهی دلخواه بوده و $a \in G$. فرض کنیم $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ دو عضو دلخواه مانند $x = a^n$ و $y = a^m$ در H در نظر می‌گیریم. در می‌یابیم که $xy^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m} \in H$ این ثابت می‌کندکه H یک زیر گروه G است. واضح است که H یک گروه دوری تولید شده توسط a می‌باشد. این زیر گروه یک زیر گروه دوری از G نامیده می‌شود که توسط a تولید شده، می‌نویسیم $H = < a >$.

Theorem 2.34. If G is a finite group then order of any element of G divides the order of G.

Proof: Let G be a finite group and $a \in G$. Let $H= < a >$ be the cyclic subgroup of G generated by a

Then $o(H)=o(a)$ (Theorem 2.33).

By Lagrange's theorem $o(H) \mid o(G)$. Hence $o(a) \mid o(G)$. ■

قضیهٔ ۲.۳۴ . اگر G یک گروه متناهی باشد در این صورت مرتبهٔ هر عضو از G مرتبهٔ G را عاد می‌کند (می‌شمارد).

اثبات : فرض کنیم G یک گروه متناهی و $a \in G$. فرض کنیم $H = < a >$ یک زیر گروه دوری G و تولید شده توسط a باشد.

در این صورت $o(H) = o(a)$ (قضیهٔ ۲.۳۳).

از طرفی طبق قضیهٔ لاگرانژ[۲] $o(G) \mid o(H)$. بنابراین $o(a) \mid o(G)$. ■

Corollary 2.35. If G is a finite group then for any $a \in G$

$$a^{o(G)} = e.$$

Proof: Let $o(a)=n$ and $o(G)=N$.

Because of Theorem 2.3 , $N=nm$ for some positive integer m. Then $a^N=(a^n)^m=e^m=e$.

Hence the corollary. ■

نتیجهٔ ۲.۳۵ . اگر G یک گروه متناهی باشد در این صورت برای هر $a \in G$، $a^{o(G)} = e$.

(۲) طبق قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ زیر گروه هر گروه، مرتبهٔ آن گروه راعاد می‌کند.

اثبات : فرض کنیم $o(G) = N$ ، $o(a) = n$.

طبق قضیهٔ ۲.۳۴ ، $N = nm$ ($o(a) \mid o(G) \Rightarrow n \mid N \Rightarrow N=nm$)

به‌ازای عددی صحیح ومثبت مانند m. پس $a^N=(a^n)^m = e^m = e$

بنابراین نتیجه حاصل شد. ■

Theorem 2.36. In a group G, following hold :

(1) For any two elements $a, x \in G$, $o(a)=o(x^{-1}ax)$.

(2) If for any $a \in G$, $o(a)$ is finite; then for any integer m, $a^m=e$ implies $o(a) \mid m$.

(3) For any two elements $a, b \in G$, $o(ab)=o(ba)$.

(4) If $o(a)=n$ and a positive integer $k \mid n$, then

$$o(a^k)=\frac{n}{k}.$$

قضیهٔ ۲.۳۶ . در یک گروه مانند G گزاره‌های زیر صدق می‌کنند.

(۱) برای هر دو عضو از G مانند x و a، $o(a) = o(x^{-1}ax)$.

(۲) اگر برای هر $a \in G$ ، $o(a)$ متناهی باشد، در این صورت برای هر عدد صحیح m ، که $a^m = e$ ، ایجاب می‌کند اینکه $o(a) \mid m$.

(۳) برای هر دو عضو از G مانند a و b ، $o(ab) = o(ba)$.

(۴) اگر $o(a) = n$ و عددی صحیح و مثبت مانند k ، n راعاد کند $(k \mid n)$ ، در این صورت $o(a^k) = \dfrac{n}{k}$.

Proof: (1) Let n be any positive integer

$a^n=e \Leftrightarrow x^{-1}a^n x=x^{-1}ex=e \Leftrightarrow (x^{-1}ax)^n=e,$

since $(x^{-1}ax)^n=x^{-1}a^n x.$

Consequently $o(a)=o(x^{-1}ax)$.

(2) Let $o(a)=n$ and let m be any integer such that $a^m=e$.

اثبات : (۱) فرض کنیم n عددِ صحیحِ مثبت و دلخواهی باشد ($a^n = e$ و) .

$$a^n = e \Leftrightarrow x^{-1}a^n x = x^{-1}ex = e \Leftrightarrow (x^{-1}ax)^n = e$$

زیرا $(x^{-1}ax)^n = x^{-1}a^n x$ (به‌استقراء می‌توان ثابت کرد).

بدین ترتیب $o(a) = o(x^{-1}ax)$ (ثابت شد).

(۲) فرض کنیم، $o(a) = n$ و فرض کنیم m عددی صحیح و دلخواه باشد به قسمی که $a^m = e$.

Now by Euclid's algorithm $m=nq+r$ for some integers q and r with $0 \leqslant r < n$.

Then $e=a^m=(a^n)^q a^r=e^q a^r=ea^r=a^r$.

But n is the least positive integer such that $a^n=e$ and $r<n$.

Hence $r=0$ and so $m=nq$ i.e., $o(a)=n \mid m$. This proves (2).

(3) Since $ab=b^{-1}(ba)b$, $o(ab)=o(ba)$ by part (1).

(4) follows from (2).■

حال باتوجه به الگوریتم اقلیدسی داریم، $m = nq + r$ که r و q اعدادی صحیح و $0 \leq r < n$.

بنابراین: $e = a^m = (a^n)^q \cdot a^r = e^q a^r = ea^r = a^r$. (ثابت شد $a^r = e$) اما از طرفی n کوچکترین عدد صحیح و مثبتی است (طبق تعریف مرتبه برای a) که $a^n = e$ و $r < n$.

بنابراین باید $r = 0$ پس $m = nq$ یعنی؛ $o(a) = n \mid m$. این مطلب (۲) را اثبات می‌کند.

(۳) چون $ab = b^{-1}(ba)b$، باتوجه به (۱) $o(ab) = o(ba)$.

(۴) از (۲) نتیجه می‌شود. ■

EXAMPEE 24. Consider the group $G=\{1, -1, i, -i\}$ where $i=\sqrt{-1}$. Now $o(G)=4$.

مثال ۲۴. گروه $G = \{1, -1, i, -i\}$ را که درآن $i = \sqrt{-1}$، درنظر می‌گیریم. حال می‌دانیم $o(G) = 4$.

(*i*) $i^4=1$ but for no positive integer $m<4$ $i^m=1$. This means $o(i)=4$. Trivially $4 \mid o(G)$.

(*ii*) Now $(-1)^2=1$ and $(-1)^1 \neq 1$. This implies $o(-1)=2$. Clearly $o(-1) \mid o(G)$.

(*iii*) Since $1=i^4$, $-1=i^2$, $-i=i^3$, $i=i$ we see that G is a cyclic group generated by i. Notice that G is also generated by $-i$ But -1 or 1 do not generate G.

I) $i^4 = 1$، اما برای اعدادی مثبت چون $m < 4$، $i^m = 1$ برقرار نیست. این به معنی آن است که $o(i) = 4$. بدیهی است که $4 \mid o(G)$.

II) حال داریم، $(-1)^2 = 1$ و $(-1)^1 \neq 1$. این ایجاب می‌کند که $o(-1) = 2$. واضح است که $o(-1) \mid o(G)$.

III) از آن‌جایی که $i^4 = 1$ و $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$ و $i = i$، مشاهده می‌کنیم که G گروهی است دوری، تولید شده توسط i. توجه داریم که همچنین G توسط $-i$ می‌تواند تولید شود امّا -1 یا 1 نمی‌توانند G را تولید کنند.

مسائل مسابقه‌ای

با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

(می‌دانیم: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

تفریح اندیشه ۲

عدد 606 را بر تکه کاغذی نوشته‌ایم. برای این که عدد مزبور $\frac{3}{2}$ مرتبه بزرگتر شود چه عملی باید انجام گیرد؟

606

جواب در صفحهٔ ۸۸

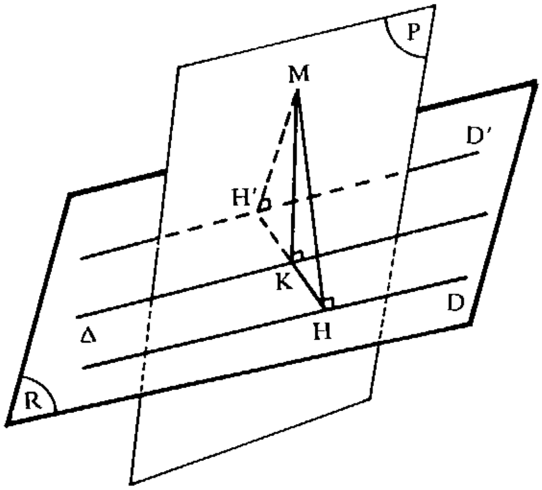
مکان هندسی

(قسمت پنجم)

محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۶ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط متوازی D و D′ به یک فاصله است، صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ دو خط D و D′، که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط واقع در صفحهٔ آنها (خط Δ) می‌گذرد.



اثبات به روش هندسی ـ بر دو خط متوازی D و D′ صفحهٔ R را می‌گذرانیم و خط Δ را به یک فاصله از D و D′ در این صفحه رسم می‌کنیم. آنگاه صفحه P را چنان بر خط Δ مرور می‌دهیم که بر صفحهٔ R عمود باشد. این صفحه مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از دو خط متوازی D و D′ به یک فاصله می‌باشد،زیرا:

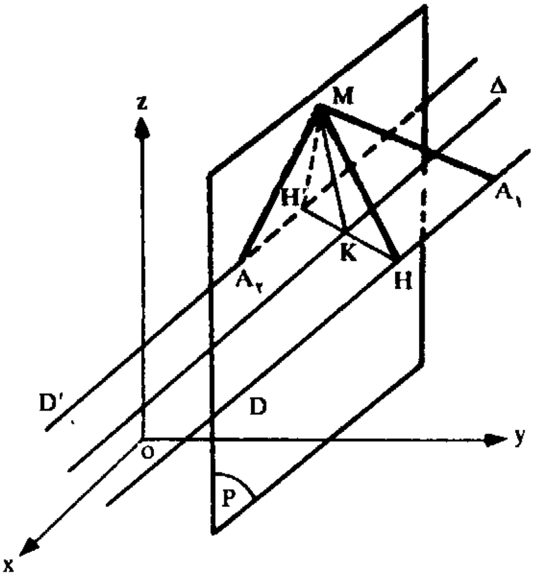
اوّلاً: هر نقطه دلخواه مانند M از این صفحه، از دو خط D و D′ به یک فاصله است چون اگر از M عمودهای MH و MH′ را به ترتیب بر خطهای D و D′ فرود آوریم، صفحهٔ HMH′ بر خط Δ نیز عمود است و این خط را در نقطهٔ K وسط پاره‌خط HH′ قطع می‌کند. در مثلث MHH′ خط MK عمودمنصف HH′ می‌باشد، بنابراین این مثلث متساوی‌الساقین است یعنی؛ MH = MH′ است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، روی صفحهٔ P واقع است. زیرا از متساوی‌الساقین بودن مثلث HMH′ و میانه بودن MK نتیجه می‌شود که MK عمود منصف HH′ است و چون MK عمود بر Δ نیز می‌باشد (Δ بر دو خط متقاطع MH و MH′ از صفحه HMH′ عمود است، پس بر این صفحه و در نتیجه بر MK عمود می‌باشد)، بنابراین نقطهٔ M روی صفحه‌ای قرار دارد که بر خط Δ می‌گذرد و بر صفحه R عمود است، یعنی نقطهٔ M روی صفحه P واقع است.

اثبات به روش تحلیلی ـ دو خط متوازی D و D′ به معادله‌های:

$$D: \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

$$D': \frac{x-x_2}{p} = \frac{y-y_2}{q} = \frac{z-z_2}{r}$$



را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M\ (x\ ،\ y\ ،\ z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد. در این صورت اگـر $A_1\ (x_1$ و y_1 ، $z_1)$ نقطه‌ای از خط D و $A_2\ (x_2$ و y_2 و $z_2)$ نقطه‌ای واقع بر خط D' باشد و از نقطهٔ M عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر خطهای D و D' فرود آوریم، داریم:

$$\vec{V}\begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix},\quad M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix},\quad A_1\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix},\quad A_2\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A_1M}\begin{vmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{vmatrix},\quad \overrightarrow{A_2M}\begin{vmatrix} x-x_2 \\ y-y_2 \\ z-z_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V}\wedge\overrightarrow{A_1M}\begin{vmatrix} -q(z-z_1)+r(y-y_1) \\ -r(x-x_1)+p(z-z_1) \\ -p(y-y_1)+q(x-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}\wedge\overrightarrow{A_2M}\begin{vmatrix} -q(z-z_2)+r(y-y_2) \\ -r(x-x_2)+p(z-z_2) \\ -p(y-y_2)+q(x-x_2) \end{vmatrix}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{A_1M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{|\overrightarrow{A_2M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{A_1M}\wedge\vec{V}|^2 = |\overrightarrow{A_2M}\wedge\vec{V}|^2 \Rightarrow$$

$$[q(z-z_1)-r(y-y_1)]^2+[r(x-x_1)-p(z-z_1)]^2$$
$$+[p(y-y_1)-q(x-x_1)]^2$$
$$=[q(z-z_2)-r(y-y_2)]^2+[r(x-x_2)-p(z-z_2)]^2$$
$$+[p(y-y_2)-q(x-x_2)]^2$$

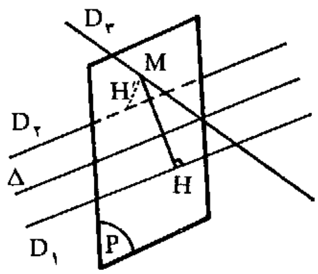
پس از انجام محاسبات لازم و ساده کردن، معادلهٔ صفحه‌ای به‌صورت $Ax+By+Cz+D=0$ به‌دست می‌آیدکه در آن A و B و C و D برابرندبا: $A=2\left[pr(z_1-z_2)+pq(y_1-y_2)-(p^2+q^2)(x_1-x_2)\right]$

و . . .

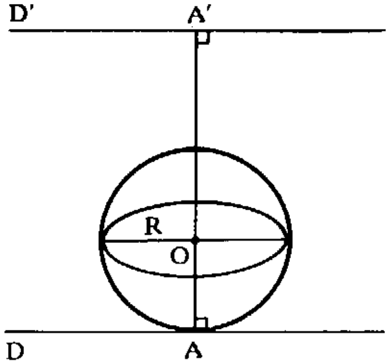
ثابت می‌شود که این صفحه بر صفحهٔ R عمود و شامل خط Δ است. و بالعکس می‌توان ثابت کرد هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ این صفحه صدق کند، از دو خط D و D' به یک فاصله است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی در فضا صفحه‌ای است عمود بر صفحهٔ آن دو خط موازی،که بر خط متساوی‌الفاصله از این دو خط در آن صفحه می‌گذرد.

مثال ۱: دو خط متوازی D_1 و D_2 و خط D_3 غیرموازی با آنها مفروض است. نقطه‌ای روی خط D_3 بیابید که از دو خط D_1 و D_2 به یک فاصله باشد. (به جای خط D_3 می‌تواند یک شکل دیگر مانند یک صفحه یا . . . باشد.)

حل: صفحهٔ P مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط D_1 و D_2 را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D_3 جواب مسأله است، و به تعداد نقاط تلاقی، مسأله جواب دارد. (یک، هیچ یا بی‌شمار نقطه جواب مسأله است بنابرآنکه خط D_3 به ترتیب، متقاطع یا موازی با صفحهٔ P و یا روی صفحهٔ P باشد.)



مثال ۲: کرهٔ (R و O) S و خط D مماس بر آن و خط 'D موازی خط D و به فاصلهٔ ۳R از آن واقع در صفحه (O و D) مفروض‌اند.



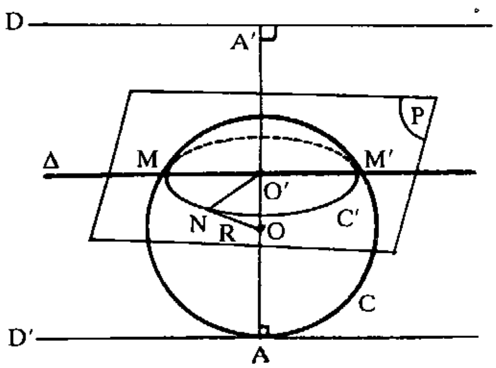
اوّلاً ـ مکان هندسی نقطه‌ای از این کره را بیابید که از دو خط متوازی D و 'D به یک فاصله است.

ثانیاً ـ چند نقطه روی کرهٔ فوق وجود دارد که در صفحهٔ دو خط D و 'D واقع‌اند و از دو خط D و 'D نیز به یک فاصله‌اند؟

ثالثاً ـ اگر خط 'D در صفحهٔ (O و D) قرار نداشته باشد، مسأله به چه صورت درمی‌آید.

حل: نقطهٔ تماس خط D با کره را A می‌نامیم و بر دو خط متوازی D و 'D صفحهٔ Q را می‌گذرانیم. این صفحه، کره (R و O) S را در دایرهٔ عظیمه‌ای که از نقطهٔ A می‌گذرد قطع می‌کند که آن را دایرهٔ (R و O) C می‌نامیم. می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی D و 'D صفحه‌ای مانند P است که بر صفحه Q عمود است و بر خط Δ که به فاصلهٔ $\frac{3R}{2}$ از هر یک از خطوط D و 'D و در صفحهٔ Q قرار دارد، می‌گذرد. این صفحه کره را در دایره‌ای به مرکز 'O قطع می‌کند به قسمی که $OO' = \frac{R}{2}$ ('O نقطه تقاطع AO با صفحه P است) و شعاع آن برابر است با:

$$R' = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کره است که از دو خط متوازی D و 'D به یک فاصله است.

ثانیاً ـ نقطهٔ تقاطع دو دایره (R و O)C و $C'(O'$ و $\frac{R\sqrt{3}}{2})$ جواب است (دو نقطه) یعنی تنها دو نقطه روی کره وجود دارد که هم در صفحهٔ Q واقع‌اند و هم از دو خط D و 'D **به یک فاصله‌اند** (باید توجه داشت که این دو نقطه همان نقاط تقاطع خط Δ با کرهٔ مفروض می‌باشند).

ثالثاً ـ در صورتی که خط 'D در صفحهٔ (O و D) قرار نداشته باشد وجود جواب بستگی به آن دارد که کرهٔ (R و O) S صفحهٔ P را قطع کند و یا مماس برآن باشد و یا آن‌را قطع نکند، و این مطلب نیز با مقایسهٔ شعاع کره با فاصلهٔ مرکز کره از صفحهٔ P مشخص می‌شود.

مثال ۳: دو خط متوازی $D : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ و

$$D': \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \\ z = -t + 4 \end{cases}$$

مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از این دو خط را به‌دست آورید.

حل: معادلهٔ کانونیک خط 'D را مشخص می‌سازیم داریم:

$$D' : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

بردار هادی این دو خط (۱- و ۳ و ۲) $\vec{V}$ است. برای پیدا کردن **معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله** از دو خط D و 'D، فرض می‌کنیم (z و y و x) M یک نقطه از این مکان باشد، در این صورت با اختیار کردن نقطهٔ A_1 روی خط D و نقطهٔ A_2 روی خط 'D داریم:

$$A_1 \in D \ (x_1 = 0 , y_1 = 0 , z_1 = 2) \quad و$$

$$A_2 \in D' \ (x_2 = -1 , y_2 = 0 , z_2 = 4)$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{A_1M} \, (x , y , z-2) \ و \ \overrightarrow{A_2M} \, (x+1 , y , z-4) \quad و$$

$$\vec{V} \, (2 , 3 , -1)$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{A_1M} \wedge \vec{V} \, (-3z-y+6 \ و \ x+2z-4 \ و \ -2y+3x)$$

$\overrightarrow{A_۲M} \wedge \vec{V}\,(-۳z-y+۱۲$ و $+x+۲z-۷$ و $-۲y+۳x+۳)$

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{A_۱M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{|\overrightarrow{A_۲M}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{A_۱M}\wedge\vec{V}|^۲ = |\overrightarrow{A_۲M}\wedge\vec{V}|^۲ \Rightarrow$$

$$(۳z + y - ۶)^۲ + (-x - ۲z + ۴)^۲ + (۲y - ۳x)^۲$$

$$= (۳z+y-۱۲)^۲ + (-x-۲z+۷)^۲ + (۲y-۳x-۳)^۲$$

$$\Longrightarrow \boxed{-۲x+۴y+۸z-۲۵=۰}$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط D و D′

تبصره: با قرار دادن مقادیر $(p = ۲$ و $q = ۳$ و $r = -۱)$ و $(z_۱=۲$ و $y_۱=۰$ و $x_۱=۰)$ و $(x_۲=-۱$ و $y_۲=۰$ و $z_۲=۴)$ در معادلهٔ کلی مکان‌هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو خط در فضا یعنی:

$$[q\,(z-z_۱) - r\,(y-y_۱)]^۲ + [r\,(x-x_۱) - p(z-z_۱)]^۲$$

$$+ [p\,(y - y_۱) - q\,(x - x_۱)]^۲$$

$$= [q\,(z-z_۲) - r\,(y-y_۲)]^۲ + [r\,(x-x_۲) - p(z-z_۲)]^۲$$

$$+ [p\,(y - y_۲) - q\,(x - x_۲)]^۲$$

نیز می‌توان معادلهٔ مکان‌هندسی مورد نظر را به‌دست آورد.

$$[۳\,(z-۲) + ۱\,(y-۰)]^۲ + [-۱\,(x-۰) - ۲(z-۲)]^۲$$

$$+ [۲\,(y-۰) - ۳\,(x-۰)]^۲ = [۳\,(z-۴) + ۱\,(y-۰)]^۲$$

$$+ [-۱\,(x+۱) - ۲(z-۴)]^۲ + [۲\,(y-۰) - ۳\,(x+۱)]^۲$$

$$\Longrightarrow \boxed{-۲x + ۴y + ۸z - ۲۵ = ۰}$$

مثال ۴: معادله مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ $Q: ۳x-۱۲y+z+۳=۰$ را تعیین کنید که از دو خط متوازی $D: \begin{cases} \frac{x-۲}{-۱} = \frac{y+۱}{۲} \\ z=۱ \end{cases}$ و $D': \begin{cases} x=-۲t \\ y=۴t-۳ \\ z=۲ \end{cases}$ به یک فاصله باشد.

حل: معادلهٔ صفحهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ متساوی الفاصله از دو خط D و D′ را پیدا می‌کنیم و فصل مشترک آن را با صفحهٔ Q به‌دست می‌آوریم.

$$D: \begin{cases} \frac{x-۲}{-۱} = \frac{y+۱}{۲} \\ z=۱ \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_۱ \left| \begin{array}{l} p=-۱ \\ q=۲ \\ r=۰ \end{array} \right.$$

$$D': \begin{cases} x=-۲t \\ y=۴t-۳ \\ z=۲ \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_۲ \left| \begin{array}{l} p'=-۲ \\ q'=۴ \\ r'=۰ \end{array} \right.$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{-۱}{-۲} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_۱ \parallel \vec{V}_۲ \Rightarrow \vec{V}(p=-۱\,,\ q=۲\,,\ r=۰)\,,$$

$$A_۱ \in D(۲\,,-۱\,,۱)\,,\ A_۲ \in D'(۰\,,-۳\,,۲)$$

$$[q\,(z-z_۱) - r\,(y-y_۱)]^۲ + [r\,(x-x_۱) - p(z-z_۱)]^۲$$

$$+ [p\,(y - y_۱) - q\,(x - x_۱)]^۲$$

$$= [q\,(z-z_۲) - r\,(y-y_۲)]^۲ + [r\,(x-x_۲) - p(z-z_۲)]^۲$$

$$+ [p\,(y - y_۲) - q\,(x - x_۲)]^۲$$

$$\Longrightarrow [۲\,(z-۱) - ۰(y+۱)]^۲ + [۰(x-۲) + ۱(z-۱)]^۲$$

$$+ [-۱\,(y+۱) - ۲\,(x-۲)]^۲ = [۲\,(z-۲) - ۰(y+۳)]^۲$$

$$+\left[۰(x-۰)+۱(z-۲)\right]^{۲}+\left[-۱\,(y+۳)-۲\,(x-۰)\right]^{۲}$$

$$\Longrightarrow\ ۴(z-۱)^{۲}+(z-۱)^{۲}+(-۲x-y+۳)^{۲}$$

$$=۴(z-۲)^{۲}+(z-۲)^{۲}+(-۲x-y-۳)^{۲}$$

$$\Longrightarrow\ ۲۴x+۱۲y-۱۰z+۱۵=۰$$

معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از D و D′

$$\begin{cases}۲۴x+۱۲y-۱۰z+۱۵=۰\\ ۳x-۱۲y+z+۳=۰\end{cases}\Rightarrow ۲۷x-۹z+۱۸=۰$$

$$\Rightarrow ۲۷x=۹(z-۲)\Rightarrow \frac{x}{۹}=\frac{z-۲}{۲۷}\Rightarrow \boxed{x=\frac{z-۲}{۳}}\quad (۱)$$

$$۱۰\begin{cases}۲۴x+۱۲y-۱۰z+۱۵=۰\\ ۳x-۱۲y+z+۳=۰\end{cases}\Rightarrow ۵۴x-۱۰۸y+۴۵=۰$$

$$\Rightarrow ۵۴x=۱۰۸y-۴۵\Rightarrow ۵۴x=۱۰۸\left(y-\frac{۵}{۱۲}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{x}{۱۰۸}=\frac{y-\frac{۵}{۱۲}}{۵۴}\Rightarrow \boxed{x=\frac{y-\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}}\quad (۲)$$

$$(۲)و(۱)\Rightarrow \frac{x}{۱}=\frac{y-\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{z}{۳}\Rightarrow \boxed{\frac{x}{۲}=\frac{y-\frac{۵}{۱۲}}{۱}=\frac{z}{۶}}$$

معادلهٔ کانونیک خط جواب مسأله

تمرین: برای هر مکان‌هندسی که تاکنون ارائه شده‌است، مسأله‌هایی مطرح شده است (به ترتیب ارائه مکانها). در صورتی که شما مسأله‌های دیگری دربارهٔ این مکانهای هندسی سراغ دارید، به نشانی مجله ریاضی برهان ارسال فرمایید تا برای تکمیل مسأله‌ها مورد استفاده قرار گیرد. از لطف شما قبلاً سپاسگزاری می‌شود.

۱ـ صفحهٔ P و دو خط متوازی $D_۱$ و $D_۲$ غیرواقع برآن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P را بیابید که از دو خط $D_۱$ و $D_۲$ به یک فاصله باشند (بحث کنید).

۲ـ خطهای متوازی D و D′ و نقاط A و B غیر واقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای مانند C متساوی‌الفاصله از D و D′ چنان بیابید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳ـ دو خط متوازی D و D′ و دو نقطهٔ A و B واقع بر خط D مفروضند. نقطه‌ای مانند C در فضا متساوی‌الفاصله از D و D′ چنان تعیین کنید که مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد.

۴ـ منشور مثلث‌القاعدهٔ ABCA′B′C′ مفروض است. ۱) مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از یالهای این منشور (AA′ و BB′ و CC′) را تعیین کنید. ۲) نقطه‌ای روی مقطع قائم A″B″C″ از این منشور را تعیین کنید که از سه یال آن به یک فاصله باشد.

۵ـ معادلهٔ مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط متوازی $D:\frac{x}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z}{-۱}$ و $D':\frac{x+۲}{-۲}=\frac{y}{-۳}=\frac{z+۱}{۱}$ را تعیین کنید.

۶ـ خطهای $D_۱:\begin{cases}x=t+۱\\ y=-۲t+۳\\ z=۲t-۱\end{cases}$ و $D_۲:\begin{cases}۲x+y=۰\\ y+z=-۱\end{cases}$ و $D_۳:\frac{x+۲}{۳}=\frac{y}{-۲}=\frac{z+۱}{۴}$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط $D_۳$ بیابید که از دو خط $D_۱$ و $D_۲$ به یک فاصله باشد.

۷ـ دو نقطهٔ A(۱ , ۲ , −۱) و B(۰ , ۱ , ۱) و خطهای موازی D : x = y = z و D′ : x − ۱ = y + ۱ = z − ۳ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط متوازی D و D′ به یک فاصله باشد.

اثبات درستی قوانین مقدماتی تسویر

■ غلامرضا یاسی‌پور

قضیهٔ «Fa ∧ Gb» را می‌توان به صورت مثال جانشینی از «Fx ∧ Gy» ، که خود تابعی گزاره‌ای و شامل دو متغیر مختلف[1] است درنظر گرفت. تا این مرحله تنها یک متغیر فردی، یعنی حرف «x» را به‌طور صریح پذیرفته‌ایم. اما، درکاربرد قبلی‌مان از حرف «y» برای نمایش دادن هر متغیر به‌دلخواه انتخاب شده، به کار استفاده از آن به‌عنوان متغیر، بدون پذیرفتن این حقیقت بودیم. و در معرفی حرفی توسط EI ، برای نمایش فرد خاص دارای صفتی معین، بدون این‌که واقعاً بدانیم کدام فرد توسط آن نمایش داده‌شده‌است، نیز در کار استفاده از آن حرف به عنوان متغیر بودیم. اکنون اقدام به شناخت صریح آنچه به‌طور ضمنی در کاربرد گذشته‌مان بود می‌پردازیم. بعضی از توابع گزاره‌ای ممکن است شامل دو یا بیشتر از دو متغیر فردی متفاوت باشند. در این‌صورت در دسترس داشتن مخزن وسیعی از متغیرات فردی به سهولت کار کمک می‌کند، و بنابراین قراردادهای علامتیمان را تکمیل کرده، شامل حروف « u »، « v »، « w »، « x »، « y »، و « z » به‌عنوان متغیرهای فردی می‌کنیم. دراین‌حالت توابع گزاره‌ای شامل عباراتی چون «Fu»، «Fu ∨ Gw»، «(Fx ∧ Gy) ⇒ Hz»، «Fx ∨ (Gy ∧ Hx)» و نظایر آن هستند.

در جانشین کردن ثوابت به‌جای متغیرات برای به‌دست آوردن قضیّه از تابع گزاره‌ای، به‌جای هر ظهور آزاد یک متغیر یکسان یک ثابت یکسان باید قرار داده شود. بنابراین در میان مثالهای جانشین تابع گزاره‌ای Fx ∨ (Gy ∧ Hx) داریم:

Fa ∨ (Gb ∧ Ha)، Fa∨ (Gc∧ Ha)، Fa∨ (Gd ∧ Ha)، ...

Fb ∨ (Ga ∧ Hb)، Fb∨ (Gc∧ Hb)، Fb∨ (Gd∧ Hb)، ...

Fc ∨ (Ga ∧ Hc)، Fc∨ (Gb∧ Hc)، Fc∨ (Gd∧ Hc)، ...

. . . .

در حالی که قضایایی چون Fa ∨ (Gb ∧ Hc) را نداریم. از طرف دیگر، یک ثابت می‌تواند به‌جای ظهورات آزاد متغیرات مختلف بنشیند، البته به شرطی که اگر به‌جای هر ظهور آزاد از متغیری قرارمی‌گیرد به جای جمیع ظهورات آزاد آن متغیر قرارگیرد. به‌این‌ترتیب مثالهای جانشین اضافی تابع گزاره‌ای «Fx ∨ (Gy ∧ Hx)» عبارت‌از «Fa ∨ (Ga ∧ Ha)»، «Fb ∨ (Gb ∧ Hb)»، «Fc ∨ (Gc ∧ Hc)»، ... می‌باشند.

اکنون با پذیرفتن حروف « u »، « v »، « w »، « y »، و « z » و به عنوان متغیرهای فردی علاوه‌بر « x » ، علامت‌گذاریمان را درموردتسویرعمومی و وجودی‌برای تطبیق‌کردن‌بامخزن وسعت یافتهٔ متغیراتمان تعدیل می‌کنیم. قضیهٔ «جمیع F ها G هستند» را می‌توان متناوباً به صورت « (u) [Fu ⇒ Gu] »، « (v) [Fv ⇒ Gv] »، «(w) [Fw⇒ Gw]»، «(x) [Fx⇒ Gx]»، « (y) [Fy⇒ Gy] »، یا «(z) [Fz ⇒ Gz] » علامتی‌کرد. به‌همین‌ترتیب قضیهٔ «بعضی H ها موجودند» رامی‌توان متناوباًبه‌صورت «(∃ u) Hu»، «(∃ v) Hv»، «(∃ w) Hw»، «(∃ x) Hx»، «(∃ y) Hy»، یا «(∃ z) Hz» علامتی کرد. تفاوت بین «(x) Fx» و «(y) Fy» (چون تفاوت بین «∃ x Gx» و «∃y Gy») تفاوتی صرفاً علامتی است و هریک را می‌توان به‌جای دیگری هرجاکه روی دهد نوشت. البته جایی که تابعی گزاره‌ای شامل ظهور آزاد دو یا بیشتر از دو متغیر متفاوت، چون «Fx ∧ Gy» باشد، دو تابع گزاره‌ای‌یی که از تسویر به طور متفاوت آن به صورت (x) [Fx ∧ Gy] و (y) [Fx ∧ Gy] حاصل می‌شوند در واقع بسیار متفاوتند، و تفاوتشان بیش از تفاوتی صرفاً علامتی است.

مثالهای جانشین اوّلی عبارت‌اند از:

$(x)\ [Fx \wedge Ga]\ ,\ (x)\ [Fx \wedge Gb]\ ,\ (x)\ [Fx \wedge Gc]\ , \ldots$

درحالی که مثالهای جانشین دومی عبارت‌اند از:

$(y)\ [Fa \wedge Gy]\ ,\ (y)\ [Fb \wedge Gy]\ ,\ (y)\ [Fc \wedge Gy]\ , \ldots$

دراین صورت اگر هرفردی دارای صفت F باشد، و بعضی اما نه همهٔ افراد صفت G داشته‌باشند، بعضی مثالهای جانشین اوّلی قضایایی راست هستند، درحالی که جمیع مثالهای جانشین دومی دروغ می‌شوند که تفاوتی قابل ملاحظه است. این مثال برای اشاره به لزوم نه تنها گفتگو از «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای» بلکه گفتگو از «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای نسبت به‌متغیر « x »» یا «تسویر عمومی (یا وجودی) یک تابع گزاره‌ای نسبت به‌متغیر « y »» و غیره به‌کار می‌رود.

باید واضح باشد که از آن‌جا که « $(x)\ [Fx \Rightarrow Gx]$ » و « $(y)\ [Fy \Rightarrow Gy]$ » ترجمه‌های متناوب قضیّهٔ «هرچیز که F باشد G نیز هست» می‌باشند، تسویر عمومی « $Fx \Rightarrow Gx$ » نسبت به « x » دارای همان معنی است و منطقاً معادل تسویر عمومی نسبت به « y » تابع‌گزاره‌ای حاصل از جانشینی جمیع ظهورات آزاد « x » در « $Fx \Rightarrow Gx$ » توسط y است ـ زیرا نتیجهٔ این جانشینی « $Fy \Rightarrow Gy$ » است. در مراحل اوّلیهٔ کارمان مطلوب آن است که حداکثر یک تسویر نسبت به‌متغیری معلوم در قضیّه‌ای منفرد، داشته باشیم. این مطلب اکیداً لازم نیست. اما در جلوگیری از سردرگمی مفید است. بنابراین اوّلین قضیّهٔ عمومی چندگانهٔ مورد بررسی قرار گرفتهٔ «اگر جمیع سگها گوشتخوارند دراین صورت بعضی حیوانات گوشتخوارند» مناسبتر است که به‌صورت

$$(x)\ [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists y)\ [Ay \wedge Cy]$$

علامتی شود تا این‌که به‌صورت

$$(x)\ [Dx \Rightarrow Cx] \Rightarrow (\exists x)\ [Ax \wedge Cx]$$

علامتی گردد، گرچه هیچ یک از این دو صورت ناصحیح[۲] نیست.

خاطر نشان کردیم که هیچ قضیّه‌ای نمی‌تواند شامل ظهور آزادی از متغیری باشد. در نتیجه در علامتی کردن هرگونه قضیّه‌ای باید دقت کنیم که هر ظهور هر متغیر به‌کار رفته در برد یک سور نسبت به آن متغیر قرار گیرد. چند مثال زیر به وضوح این موضوع کمک می‌کنند.

اگر چیزی در خانه غلط رفته‌است. دراین صورت هرکس که در خانه هست شکایت می‌کند.

به درستی به‌صورت شرطی‌ای که مقدّم و تالیش شامل سورهای متفاوتند علامتی می‌شود:

(∃ x) [x در خانه غلط رفته است] ⇒ (y)
[(y کسی است که در خانه هست) ⇒ (y شکایت می‌کند)] .

دراین‌جا برد سور اولی از علامت استلزام اصلی نمی‌گذرد. اما اگر به قضیّهٔ دیگری که شباهتی ظاهری به قضیّهٔ اوّل دارد توجه کنیم:

اگر چیزی غلط باشد در این صورت باید اصلاح شود.

علامتی کردن آن به‌صورت:

(∃ x) [x غلط است] ⇒ (x باید اصلاح شود)

ناصحیح است. زیرا از آن‌جا که برد سور اوّل در علامت استلزام پایان می‌پذیرد، ظهور « x » در تالی نمی‌تواند رجوع به‌این سور داشته باشد زیرا در برد آن قرار نمی‌گیرد. دراین حال ظهور آزاد متغیری داریم، که بدین معنی است که علامتی شده موردبحث، قضیّه، و بنابراین ترجمهٔ مناسب گزارهٔ داده شده نیست. این خطا را نمی‌توان به‌طور ساده باسط برد سور اول تا آخر پرانتز دوم اصلاح کرد، زیرا عبارت علامتی:

(∃ x) [(x غلط است) ⇒ (x باید اصلاح شود)]

گرچه قضیّه‌است، به‌همان معنی قضیّهٔ اوّل در فارسی نیست، و به‌جای آن صرفاً چنین می‌گوید که حداقل یک چیز موجود است که درصورتی که غلط است باید اصلاح شود، درحالی که مفهوم جملهٔ فارسی به‌طور واضح این است که هرچیز که غلط است باید اصلاح شود. در نتیجه علامتی شدهٔ صحیح، هیچ یک از دو علامتی شدهٔ قبل نیست، بلکه

(x) [(x غلط است) ⇒ (x باید اصلاح شود)]

است.

وضعیت هنگامی پیچیده‌تر، اما نه متفاوت در اصل، می‌شود که سوری در برد سوری دیگر رخ دهد. در این مورد باید همان زنگ خطر علیه متغیرهای سرگردان یا بی تسویر[۳] به‌صدا درآید. قضیّهٔ

اگر چیزی گم شده است در این صورت اگر کسی به پلیس اطلاع ندهد کسی ناراحت خواهدشد.

به‌طور صحیح به صورت:

(∃ x) [x گم شده است.] ⇒
{(y) [(y شخصی است) ⇒ ~ (y به پلیس اطلاع می‌دهد)] ⇒
(∃ z) [(z شخصی است) ∧ (z ناراحت خواهد شد)]}

علامتی می‌شود. درحالی که قضیّهٔ بعد، که شباهت ظاهری با آن دارد.

اگر چیزی گم شده‌است در این‌صورت اگر کسی به پلیس اطلاع ندهد پیدا نخواهدشد.

نباید به‌صورت:

~ ⊃ (y شخصی است)] (y) } ⇒ [xگم شده است] (x E)

} (x پیدا خواهدشد) ~ ⇒ [(y به پلیس اطلاع می‌دهد)

علامتی شود زیرا ظهور اخیر متغیر « x » خارج از برد سور اوّل، و سرگردان مانده‌است. این صورت را نمی‌توان تنها با دوباره پرانتز قراردادن به‌صورت زیر تصحیح کرد:

~ ⇒ (y شخصی است)] (y)} ⇒ (x گم شده‌است)} (x E)

} (x پیدا خواهدشد) ~ ⇒ [(y به‌پلیس اطلاع می‌دهد)

زیرا این عبارت، به‌همان طریق مثال قبل و به‌طور مساوی باآن از حفظ مفهوم جملهٔ فارسی قاصر است. این مفهوم بافرمول:

~ ⇒ (y شخصی است)] (y)} ⇒ (xگم شده‌است)} (x)

} (x پیدا خواهدشد) ~ ⇒ [(y به پلیس اطلاع می‌دهد)

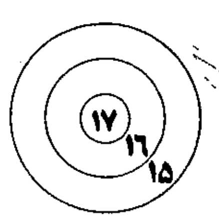
که علامتی شدهٔ صحیحی از قضیّهٔ مفروض است بیان می‌شود.

مرجع:

Symbolic Logic . Irving M. Copi

یادداشتها:

1. Two different variables
2. Incorrect
3. Unquantified





تفریح اندیشه ۳

چند مرتبه باید به هدف واقع در شکل تیراندازی شود و به کدام دوایر باید اصابت کند، تا دقیقاً ۱۰۰ امتیاز به‌دست آید؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۲)

اصول جدید هندسه با نظریهٔ کامل موازیها

(اقتباس)

از مجلهٔ: QUANTOM

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

عموماً چنین در نظر گرفته می‌شود که نظریّه موازیها در هندسه تاکنون ناقص باقی مانده است. کوششهای بی‌فایده‌ای که از زمان اقلیدس به بعد، در دوره‌ای دو هزار ساله، انجام گرفته‌اند به این گمانم انداخت که مفاهیم مفروض، شامل حقیقتی، که اشخاص سعی در اثبات آن داشته‌اند، نیست و این مطلب را می‌توان مانند قوانین فیزیکی دیگر، تنها با استفاده از تجربه ـ فی‌المثل، با رصدهای نجومی ـ محقق کرد. سرانجام از درستی حدسم متقاعد شدم، و در حالی‌که این مسألهٔ مشکل را به‌طور کامل حل شده در نظر گرفته بودم، در سال ۱۸۲۶ مقاله‌ای راجع به این موضوع نوشتم[1]. کاربرد این نظریّه جدید در هندسهٔ تحلیلی را می‌توان در مقالاتی تحت عنوان «راجع به اصول هندسه» «On the Elements of Geometry» چاپ شده در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان مربوط به سالهای ۱۸۲۹ و ۱۸۳۰، نیز یافت. نتیجهٔ اصلی‌ای که من، با فرض اینکه خطوط وابسته به زوایایند، به آن رسیدم، موجودیت هندسه‌ای در مفهومی وسیعتر از آنچه که ابتدا توسط اقلیدس ارائه شده، را مجاز می‌کند. دانش مضمون در این صورت توسیع یافته را هندسهٔ انگاری نامیدم. این هندسه، شامل هندسهٔ عملی با محدودیت واقع در مفروضات معمول مورد نیاز در اندازه‌گیری واقعیش، به‌صورت حالت خاصی از آن، است. اثبات کفایت اصول جدید[2] را در اثری، که اندکی پیش از این، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان به چاپ رسیده، به عهده گرفتم. در آن ایام، در حالی‌که مایل به رسیدن به این هدف، اگر نه از طریقی مستقیم، حداقل از کوتاه‌ترین مسیر قهقرایی، بودم، ترجیح می‌دادم که از طریق بنیادهای فرضی به معادلات مربوط به جمیع روابط و عبارات مربوط به هر کمیتی هندسی، اقدام کنم. و در صورتی که کشف من، فایده‌ای جز ترسیم نقصی در تز اصلی نمی‌داشته، دست کم، توجهی که به‌طور دائم به این موضوع مبذول می‌شده، وادارم می‌کند که شرحی مستوفا ارائه دهم. در این‌صورت کار را با بررسی نظریّه‌های قبلی آغاز می‌کنم.

به‌سادگی اثبات می‌شود که دو خط مستقیم، متمایل با زاویه‌ای یکسان نسبت به خط سوم، از آن‌جا که بدین‌ترتیب، بر یک خط عمودند، هیچ‌گاه تلاقی نمی‌کنند. در مقابل، اقلیدس بر این فرض بود، دو خط به‌طور نامساوی متمایل نسبت به خط سوم، باید همواره متقاطع شوند. اشخاص به‌خاطر متقاعد شدن در مورد درستی گزارهٔ اخیر، از وسایل متفاوتی، از قبیل کوشش پیشاپیش در یافتن مجموع زوایای مثلث، یا مقایسهٔ صفحات نامتناهی در دهانه‌های زوایای مورد بحث و بین عمودها[3]، یا مجاز شمردن وابستگی زوایا تنها به مقدار اضلاع[4]، یا، سرانجام، دادن ویژگیهای جدیدی، علاوه بر تعریف خط راست، به آن، استفاده به عمل آوردند. گرچه بعضی از براهین مزبور را می‌توان زیرکانه نامید، اما جمیع آنها نادرستند ـ ناکافی در اساس و فاقد دقت مطلوب ـ؛ برهانی در میان آنها وجود ندارد که، با ترکیب کردن سادگی و قاطعیت؛ بتواند به مبتدیان معرفی شود.

لژاندر، در سال ۱۸۰۰، سومین پرداختهٔ هندسه‌اش را، که در آن این قضیّه را که مجموع زوایای واقع در هر مثلث نمی‌تواند بیشتر از π ـ یعنی، دو زاویهٔ قائمه ـ باشد نتیجه گرفته بود، به چاپ رساند. در آن‌جا این را نیز به اثبات رسانده بود که مجموع زوایای مذکور نمی‌توانند کمتر از π باشند، اما او از این واقعیت غفلت کرده بود که خطوط مزبور می‌توانند از یکدیگر، بدون تشکیل مثلثی، بگذرند و در این‌صورت اندازهٔ مجموع زوایای مورد بحث، مستخرج از روش دیگر، نوعی یاوه می‌شود. بنا به همین علت است که لازم نمی‌دانم وارد تفصیلات خطایی شوم که خود لژاندر آن را با گفتن اینکه، در

حالی که مبناهای انتخاب شده جای اعتراض ندارند پذیرفته است، با بعضی از موانعی که نتوانسته بر آنها غالب آید مواجه شده است. لژاندر در *Compte rendus* آکادمی فرانسه در ۱۸۳۳ این قضیّه را اضافه کرده که مجموع زوایای مزبور، در صورتی که در مثلثی π باشد، باید در جمیع مثلثها π باشد. برایم لازم بوده که همین مطلب را در نظریه‌ای، که در حدود ۱۸۲۶ نوشتم، ثابت کنم. حتی تصور می‌کنم که لژاندر چندین بار خود را بر همان مسیری که من با چنان توفیق اختیار کرده‌ام یافته است؛ اما شک نیست که طرفداری تعصب‌آمیز از مفروضات عموماً پذیرفته شده، به‌طور مداوم او را وادار به گرفتن نتیجه‌ای یا پر کردن رخنه‌های حاصل به طریقی که حتی با فرض جدید ناپذیرفتنی بوده، ساخته است...

اندیشهٔ قبول این مفهوم که زوایای مثلث باید به مقدار اضلاع بستگی داشته باشند، به عنوان اساس نظریّه موازیها پدیدار شد. در نظر اوّل چنین فرضی به اندازهٔ لازم بودنش ساده می‌نماید؛ اما چون در مفاهیممان غور کنیم و دریابیم که بر مبنای چه بنا شده‌اند، آنگاه وادار خواهیم شد که آنها را به همان اندازهٔ جمیع موارد دیگری که قبلاً در اختیار داشته‌ایم، دلخواه بنامیم. در طبیعت، به‌طور مستقیم، تنها حرکت را، که بدون آن نمی‌توان هیچ چیز را از طریق حواس درک کرد، درمی‌یابیم. بنابراین جمیع مفاهیم دیگر ـ و فی‌المثل، مفاهیم هندسی ـ توسط ذهنمان و به گونه‌ای مصنوعی ایجاد و به‌صورت جنبه‌هایی از حرکت در نظر گرفته شده‌اند؛ بنابراین، فضا به خودی خود، و به‌طور جداگانه، برایمان وجود ندارد. بنابراین، هنگامی که فرض می‌کنیم، بعضی از نیروهای واقع در طبیعت از یک هندسه و نیروهای دیگر از هندسهٔ خاص خودشان پیروی می‌کنند، تناقضی در ذهنمان پدید نمی‌آید.[5] برای واضحتر کردن ایدهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم که، چنان که غالب مردم عقیده دارند، نیروهای جاذبه چون در امتداد کره‌ای انتشار یابند، ضعیف شوند. در هندسه عملی مساحت کره، به ازای نیم‌قطر r، به‌صورت $4\pi r^2$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نیروی مورد بحث باید در مقدار، به‌صورت معکوس مربع فاصله کاهش یابد. در هندسهٔ انگاری‌ای که بنا می‌نهم رویهٔ کره

$$\pi(e^r - e^{-r})^2$$

است، و ممکن است چنین باشد که نیروهای مولکولی‌ای که اختلافشان وابسته به عدد e (همواره بی‌نهایت بزرگ) است، از هندسه‌ای چنین تبعیت کنند[6]. ...

اگر قرار باشد که مسألهٔ مشکل توازی از لحاظ تجربی حل شود، در این صورت، باید بدون هیچ شکی روش طرح شده توسط لژاندر ـ شش بار قرار دادن یک نیم‌قطر حول یک دایره ـ ناکافی در نظر گرفته شود. در اصول هندسه «*Elements of Geometry*» ام، با استفاده از رصدهای نجومی، ثابت کرده‌ام که در مثلثی، با اضلاع به بزرگی فاصلهٔ زمین از خورشید، مجموع زوایای داخلی نمی‌تواند از دو زاویهٔ قائمه به اندازه‌ای بیش از ۰/۰۰۰۰۰۳ ثانیه از یک درجه اختلاف داشته باشد. اختلاف مزبور از لحاظ هندسی با اضلاع مثلث مورد بحث تغییر می‌کند، و بنابراین هندسهٔ عملی قبلاً به کار رفته، همان گونه که پیش از این هم متذکر شدم، چیزی بیش از کافی برای اندازه‌گیریهای واقعی است. شخص می‌تواند به چنین نتیجه‌ای، با استفاده از قضایایی که به قدر کفایت ساده و با اساس این دانش سازگارند، برسد، گرچه نظریّه‌ای کامل بر این خواست است که توالی مسیر تعلیم تغییر یابد و مثلثات به آن افزوده شود.

از کم‌آمدهای نظریّهٔ موازیها تعریف خود توازی است. اما کم‌آمد مزبور، برخلاف گمان نابه‌جای لژاندر، به هیچ وجه، نه به هر گونه نقصی در تعریف خط، نه بر نقصهایی که ـ خود افزوده‌ام و ـ در مفاهیم اوّلیّه پنهان‌اند و من در صدد خاطرنشان کردن و در حد توانایی، تصحیح‌شان هستم، وابسته‌اند.

معمولاً شخص هندسه را با دادن سه کشیدگی به اجسام، دو کشیدگی به رویه‌ها، یک کشیدگی به خطوط، و هیچ کشیدگی به نقطه آغاز می‌کند. اشخاص، با طول، عرض، و ارتفاع نامیدن سه کشیدگی مزبور، و به معنی سه مختص در نظر گرفتن این اسامی، در انتقال این مفهوم نابهنگام با کلماتی که زبان روزمره به آنها معنی معینی می‌دهد که برای علوم دقیقه غیرقطعی است، تعجیل روا می‌دارند. در واقع، چگونه شخص می‌تواند بدون دانستن اینکه خط مستقیم چیست، اندازه‌گیری طول را تصور کند[7]؟ وچگونه شخص می‌تواند بدون اینکه پیشاپیش سخنی در مورد عمودها، یا صفحات، یا در مورد عمودهای در یک صفحه و در صفحات مختلف، گفته باشد، چیزی در مورد عرض یا ارتفاع بیان کند؟ سرانجام، در صورتی که در نقطه به هیچ وجه کشیدگی‌ای موجود نیست، آن وقت چه چیزی در آن باقی می‌ماند تا نقطه را موضوع بررسی قرار دهد؟ بگذارید چنین تقریر کنیم که هر آدمی به گونه‌ای آشکار خط مستقیم را به تصور در می‌آورد، بدون اینکه توضیحی در مورد چگونگی آن دهد؛ اما اکنون، شخص با به کار بردن خط مستقیم، چگونه به کار تخصیص دادن یک کشیدگی به خط خمیده و دو کشیدگی به رویهٔ خمیده می‌پردازد؟

سخنی درست است که لزومی ندارد بخواهیم تا طول، عرض، و

ارتفاع دو به دو متعامد باشند: کافی است که آنها را به صورت خطوطی در سوهای مختلف در نظر بگیریم. اما این حالت، مشکلات خاص خود را به همراه می‌آورد. با حفظ این قاعده که از مفاهیمی که باید بعداً مطرح شوند استفادهٔ پیشاپیش نکنیم، این سؤال پیش می‌آید: چگونه باید این خواسته را که سه بعد اجسام به سه خط راست واقع در صفحات مختلف متعلق باشند، بیان کنیم؟ به علاوه، سوهای متفاوت دو پاره‌خط، از نقطه‌ای که خط در آن می‌شکند، نباید با کشیدگی دوگانهٔ واقع در صفحه اشتباه شود. و سرانجام، چگونه باید به گونه‌ای کفایت‌آمیز، آنچه را که از «سو» یا «زاویه» مقصود داریم، تعریف کنیم؟ در مجموع: فضا، کشیدگی، مکان، جسم، رویه، خط، نقطه، سو، و زاویه کلماتی‌اند که هندسه با آنها آغاز می‌شود، اما هیچ‌گاه درکی واضح با آنها همراه نبوده است.

اما، ممکن است که جمیع این اشیا از جهتی دیگر نظر بیفکنیم. در این‌جا شخص باید به خاطر داشته باشد که ابهام موجود در این مفاهیم به علت تجریدی است که، چون آنها را در اندازه‌گیریهای واقعی به کار بریم، زائد می‌شود. و، بنابراین، به دلایلی که مناسبت نداشته‌اند داخل نظریه شده‌اند. رویه‌ها، خطوط، و نقاط، چنان که در هندسه تعریف شده‌اند، تنها در تصورمان موجودند، اما هنگامی که اندازه‌گیریهای واقعی رویه‌ها و خطوط را انجام می‌دهیم، از اجسام استفاده می‌کنیم. به این علت است که باید دربارهٔ رویه‌ها، خطوط، و نقاط تنها آن‌گونه که در اندازه‌گیریهای واقعی دانسته می‌شود، سخن گوییم، و در این صورت می‌توانیم مفاهیمی را نگه داریم که در ذهنمان به‌طور مستقیم با مفهوم اجسام در ارتباطند، و تصورمان با آنها خو کرده است، و می‌توانیم در طبیعت به‌طور مستقیم و بدون در بر گرفتن سایر مفاهیمی که مصنوعی و بیگانه‌اند، محققشان کنیم. اما علم مورد بحث، با مفاهیم جدید مزبور، از همان ابتدا مسیر تازه‌ای به دست می‌آورد که از آن تا زمانی که به هندسهٔ تحلیلی حرکت کند، پیروی می‌کند. بنابراین روش آموزش جنبه‌ای کاملاً متفاوت به خود می‌گیرد. و من بر این جهدم که توضیح دهم که این تبدیل چه نوع تبدیلی است.

دو رهیافت در ریاضیات موجودند: تحلیل و ترکیب. جنبهٔ متمایزکنندهٔ تحلیل عبارت است از معادلاتی است که به عنوان اوّلین اساس هر اظهار به کار می‌رود و به جمیع نتایج منجر می‌شود. ترکیب، یا روش ترسیم، آن نمایشی را می‌خواهد که در ذهنمان به‌طور مستقیم با اوّلین مفاهیم (یعنی، مفاهیم اساسی) مرتبط است. فایدهٔ اصلی تحلیل این است که، با شروع از معادلات، شخص همواره به‌طور مستقیم به‌سوی هدف در نظر گرفته شده حرکت می‌کند. ترکیب تابع هیچ قاعدهٔ کلی‌ای نیست، اما شخص لزوماً باید از ترکیب، در حالی که معادله‌ای به دست آورده، برای رسیدن به خط مرزی آغاز کند که پس از آن همه چیز به‌سوی دانش اعداد رو می‌آورد. به عنوان مثال، شخص در هندسه اثبات می‌کند که دو خط عمود تقاطع نمی‌کنند؛ یا اگر بعضی از اجزای مثلثها مساوی باشند، آنگاه آن مثلثها مساوی می‌شوند. اما سعی در بررسی تحلیلی حالاتی چنین، یا کل نظریهٔ موازیها بی‌فایده است. رهیافتی چنین، هیچ‌گاه موفقیت‌آمیز نخواهد بود، درست همان‌گونه که شخص نمی‌تواند در اندازه‌گیری صفحات با خطوط راست مشخص شده، یا در اندازه‌گیری اجسام با صفحات مشخص شده، از ترکیب اجتناب کند. این موضوع اثبات می‌کند که در ترکیب شخص باید برای کمک به تحلیل رو آورد؛ با وجود این، مسلم است که تحلیل هیچ‌گاه نمی‌تواند تنها وسیله در اساسیات هندسه و مکانیک باشد. هندسه تا اندازه‌ای، همواره شامل چیزی مطلقاً هندسی است که نمی‌تواند از آن جدا شود. شخص می‌تواند برد ترکیب را تحدید کند، اما حذف کامل آن غیرممکن است. اما حتی در کوشش برای قرار دادن تحلیل به جای ترکیب، شخص نبایستی تا آن اندازه عجول باشد که هر دفعه، زمانی که تنها امکان داشته باشد که یک وابستگی را بی‌دانستن آن‌که شامل چیست، و به کنار از چگونگی بیان کردنش، پیش‌بینی کند، به معرفی توابع بپردازد. باتحدید بر تحلیل فوق، هدف درست و مکان صحیح را برای روش دیگری مشخص می‌کنیم که دانش مورد بحث را صرفاً بر چنان مفاهیمی بنیاد می‌نهد، که عمل برهان با استفاده از آن، جمیع موارد دیگر را، با استنتاج داده‌های جدید از داده‌های اصلی و با وسیع کردن حدود معرفت به گونه‌ای نامتناهی و در تمام جهات، استخراج می‌کند. داده‌های اصلی مورد بحث، بدون شک مفاهیمی هستند که در طبیعت از طریق حواسمان به دست می‌آوریم، و ذهنمان می‌تواند و باید آنها را به کمترین تعداد، چنان که بتوانند به عنوان بنیانی استوار به خدمت دانش درآیند، تحویل کند. اما معمولاً کسی رهیافت ترکیبی از این دست را، با تبعیت از جمیع قواعد مذکور در این‌جا، پیروی نمی‌کند؛ مردم ترجیح می‌دهند که تحلیل را حتی اگر نابه‌هنگام باشد، بپذیرند، و توسعهٔ البته ناکامل، مفاهیمی را پذیرا شوند که ذهن طبیعیمان را می‌سازند و نیاز به داشتن نامهایی دارند، و این کار را بدون وارد شدن به توضیحات بسیار و دردسر کشیدن از دقیق شدن تعریف آنها انجام می‌دهند. اما اگر سهولت و سادگی وادارمان می‌کند که چنان روش تعلیمی را اختیار کنیم، حقیقت متین و استوار همواره مزیت خود را که

گه‌گاه به کار بردنش ضروری است، دارد.

یادداشتها:

۱. اوّلین صورت هندسهٔ لُباچِوْسکی در سال ۱۸۲۳ تکمیل شد، اما اولیای دانشگاه قازان اجازهٔ نشر آن را ندادند. در بیست و سوم فوریهٔ ۱۸۲۶، لباچوسکی گزارشی تحت عنوان «بیانیهٔ مختصری راجع به اصول هندسه همراه با اثبات دقیق قضیّهٔ مربوط موازیها» «A Brief Statement of the Elements of Geometry with a Rigorous Proof of the Theorem on Parallels» در جلسهٔ دپارتمان فیزیک و ریاضی ارائه داد، اما این گزارش نیز به چاپ نرسید. تنها در سال ۱۸۲۹ بود که اثری که اقتباس این مقاله از آن است، در خلاصهٔ مذاکرات دانشگاه قازان «*Proceedings of Kazan University*» چاپ شد.

۲. در این‌جا «ابتداها»، همان‌گونه که از یونانی اقلیدس به انگلیسی ترجمه شد، به‌صورت «اصول» به ترجمه آمده است؛ در جاهای دیگر، هر جا که زمینهٔ بحث اقتضا کند، آن را به صورت «بنیادها» ترجمه کرده‌ایم.

۳. «perpendicule» که صورت قدیمیتر عبارت «perpendiculr» است.

۴. مقدار ضلع «content of a side» در این‌جا به معنی طول ضلع به کار رفته است.

* نشریه‌ای که در آن شرح و معرفی کتابهاست.

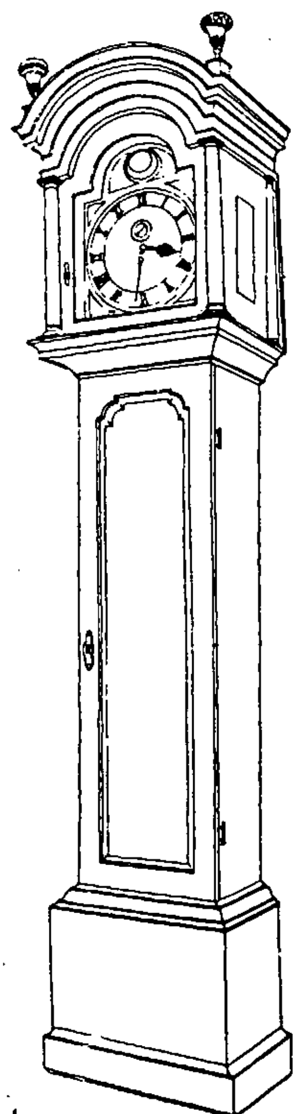
۵. این کلمات را می‌توان به‌عنوان پیشگویی در نظر گرفت: چنان‌که اکنون بخوبی آشکار شده، فضای ذرات نسبیتی ـ یعنی، ذرات متحرک با سرعتی نزدیک بسرعت نور ـ از احکام هندسهٔ لُباچِوْسکی تبعیت می‌کنند.

۶. در این‌جا لُباچِوْسکی حرف e را برای نمایش مبنای دستگاه لگاریتمهای طبیعی به کار نمی‌برد، بلکه، e عددی است که، توسط فرمول r= ۱ lne ، با دایره‌ای به شعاع r مربوط است.

۷. نواقص تعریف «ساده‌لوحانهٔ» اقلیدسی («خط طولی است بدون پهنا»، و غیره) از مدتها پیش مشخص شده بودند. انتقادهای سازندهٔ آغاز قرن بیستم در میان مطالب بسیار دیگر، موضوعات غیرمتعارفی چون خم پئانو را، که از جمیع نقاط یک مربع می‌گذرد، و خمهایی راکه در هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند، مطرح کرد.

تفریح اندیشه ۴

برای این که یک ساعت دیواری سه ضربه بزند چهار ثانیه لازم دارد. برای این‌که ساعت مزبور ۹ ضربه بزند به چه مدت نیاز دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۳)



● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱٦

همان‌گونه که می‌دانید برای نمایش[۱] اعداد در مبنای ۱۰ از رقمهای[۲] صفر تا ۹ استفاده می‌کنیم و هر عدد در مبنای[۳] ۱۰ با ترکیبی از این ده رقم ساخته می‌شود. در مبنای ۲ تنها از دو رقم ۰ و ۱ استفاده می‌شود. در سیستم دهدهی[۴] ارزش مکانیِ[۵] رقم ستون اوّل از سمت راست برابر یک و ارزش مکانی رقم ستون بعدی به اندازهٔ ده برابر ستون قبلی‌اش است. بطور کلی در این مبنای ، ارزش مکانی هر ستون از سمت راست دو برابر ستون قبلی‌اش است. ستونهای مبنای دو از سمت راست به چپ به صورت یکان، دوگان، چهارگان، هشت‌گان، شانزده‌گان و ... نامگذاری می‌شوند.

نمایش اعداد ۵ و ۱۳ و ۳۱ در مبنای ۲ و ۱۰؛به‌ترتیب زیراست:

یکان	دوگان	چهارگان	هشت‌گان	شانزدگان	مبنای ۱۰
مبنای ۲					
۱	۰	۱			۵
۱	۰	۱	۱		۱۳
۱	۱	۱	۱	۱	۳۱

تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲

برای تبدیل[٦] اعدادِ مبنای ۱۰ به مبنای ۲ می‌توان از دو روش مختلف موسوم به روشِ استفاده از تقسیمهای متوالی[۷] و روشِ استفاده از تفریقهای متوالی استفاده کرد.

الف ـ روشِ استفاده از تقسیمهای متوالی. در این روش بااستفاده از تقسیمهای متوالی عدد بر ۲ ، تا زمانی که باقی‌مانده[۸] و خارج قسمت[۹] تقسیمها کوچکتر از ۲ نشده‌است می‌توان معادل یک عدد در مبنای ۱۰ را در مبنای ۲ به دست آورد. بعداز به پایان رسیدن عملیات تقسیم، باقی‌مانده‌ها و خارج قسمت را به‌ترتیب از پائین به بالا و از چپ به راست در کنار هم قرار می‌دهیم. عدد حاصل معادل دودویی عددِ مبنای ۱۰ است. توجه دارید که در این روش باقی‌ماندهٔ اوّلین تقسیم بر ۲، همیشه سمت راست‌ترین[۱۰] رقم آن عدد مبنای ۲ و خارج قسمت آخرین تقسیم، سمت چپ‌ترین[۱۱] رقم آن عدد در مبنای ۲ را تشکیل می‌دهد.

مثال ۱ : معادل[۱۲] عدد $(۳٦۷)_{۱۰}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل :

اولین رقم از سمت راست ۱ = باقی‌مانده	۳٦۷ : ۲ = ۱۸۳
۱ = باقی‌مانده	۱۸۳ : ۲ = ۹۱
۱ = باقی‌مانده	۹۱ : ۲ = ۴۵
۱ = باقی‌مانده	۴۵ : ۲ = ۲۲
۰ = باقی‌مانده	۲۲ : ۲ = ۱۱
۱ = باقی‌مانده	۱۱ : ۲ = ۵
۱ = باقی‌مانده	۵ : ۲ = ۲
اولین رقم از سمت چپ ۰ = باقی‌مانده	۲ : ۲ = ۱

در نتیجه: $(۳٦۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$

ب ـ روش استفاده از تفریقهای متوالی : بایک مثال روش تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ را بااستفاده از تفریقهای متوالی[۱۳] توضیح می‌دهیم.

مثال ۲ : معادل عدد $(۳٦۷)_{۱۰}$ را بااستفاده از روش تفریقهای متوالی به مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا توانهای مختلف عدد ۲ را می‌نویسیم:

$۲^{۶} = ۶۴$	$۲^{۰} = ۱$
$۲^{۷} = ۱۲۸$	$۲^{۱} = ۲$
$۲^{۸} = ۲۵۶$	$۲^{۲} = ۴$
$۲^{۹} = ۵۱۲$	$۲^{۳} = ۸$
$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$	$۲^{۴} = ۱۶$
$۲^{۱۱} = ۲۰۴۸$	$۲^{۵} = ۳۲$

حال باتوجه به این‌که عدد ۳۶۷ بین دو عدد ۲۵۶ و ۵۱۲ است عمل تفریق را از کوچکترین عدد این فاصله یعنی عدد $۲۵۶ = ۲^{۸}$ شروع می‌کنیم. در روش تفریقهای متوالی برای تبدیل عدد داده شده عدد ۳۶۷ را به‌ترتیب از $۲۵۶ = ۲^{۸}$ و توانهای پایینتر از هشتِ عدد ۲ کم می‌کنیم و در هر قسمت که مفروق[۱۴] از مفروق منه[۱۵] بیشتر شد عمل تفریق را انجام می‌دهیم و برای آن مرحله، عدد ۱ را ثبت می‌کنیم. درغیر این‌صورت عمل تفریق را انجام نمی‌دهیم و برای آن قسمت عدد ۰ را ثبت می‌کنیم. این‌کار را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم تا به پایین‌ترین توان غیر منفیِ عدد ۲ یعنی به توان صفر برسیم. آنگاه اعداد ثبت شده در مراحل بالایی را به‌ترتیب از سمت چپ به راست کنار هم قرار می‌دهیم. عدد حاصل، معادلِ عدد داده شده در مبنای ۲ است.

حال باتوجه به مطالب گفته شدهٔ بالا داریم:

سمت چپ‌ترین رقم

۱ = عدد ثبت شده	$۳۶۷ - ۲^{۸} = ۳۶۷ - ۲۵۶ = ۱۱۱$
۰ = عدد ثبت شده	$۱۱۱ - ۲^{۷} = ۱۱۱ - ۱۲۸ =$
۱ = عدد ثبت شده	$۱۱۱ - ۲^{۶} = ۱۱۱ - ۶۴ = ۴۷$
۱ = عدد ثبت شده	$۴۷ - ۲^{۵} = ۴۷ - ۳۲ = ۱۵$
۰ = عدد ثبت شده	$۱۵ - ۲^{۴} = ۱۵ - ۱۶ =$
۱ = عدد ثبت شده	$۱۵ - ۲^{۳} = ۱۵ - ۸ = ۷$
۱ = عدد ثبت شده	$۷ - ۲^{۲} = ۷ - ۴ = ۳$
۱ = عدد ثبت شده	$۳ - ۲^{۱} = ۳ - ۲ = ۱$
۱ = عدد ثبت شده	$۱ - ۲^{۰} = ۱ - ۱ = ۰$

سمت راست‌ترین رقم

در نتیجه:

$$(۳۶۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$$

تبدیل اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰

برای تبدیل اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰ کافی است تک تک ارقام عدد داده شده در مبنای ۲ را در ارزش مکانی آن رقم ضرب کرده، سپس حاصل ضربها را باهم جمع کنیم. یعنی اگر: $d_{m-} \dots d_{۱}d_{۰}$ $N_{۱}$ = یک عدد در مبنای ۲ باشد معادل این عدد در مبنای ۱۰ عبارت است از:

$$M = \sum_{i=۰}^{m-۱} d_i \times ۲^{i} \quad , \quad d_i \in \{۰ , ۱\}$$

مثال ۳: معادل عدد $(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} &= ۱ \times ۲^{۰} + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۲} + ۱ \times ۲^{۳} + ۰ \times ۲^{۴} + ۱ \times ۲^{۵} + ۱ \times ۲^{۶} + ۵ \times ۲^{۷} + ۱ \times ۲^{۸} \\ &= ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۰ + ۳۲ + ۶۴ + ۰ + ۲۵۶ \\ &= ۳۶۷ = (۳۶۷)_{۱۰}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$(۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = (۳۶۷)_{۱۰}$$

تبدیل اعداد ازمبنای ۲ به‌مبنای ۸ بدون استفاده ازمبنای ۱۰

در این روش تبدیل از رابطهٔ برابری $۸^{۱} = ۲^{۳}$ استفاده می‌کنیم. به‌این معنی که در این تبدیلِ مبنا، هر سه رقم مبنای ۲ از سمت راست معادل یک رقم در مبنای ۸ است.

روش کار به این صورت است که برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۸، عدد دو دویی[۱۶] داده‌شده را از سمت راست به چپ، به‌دسته‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و هر دستهٔ سه‌تایی را به‌طور مستقل به یک عدد در مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم. به‌این ترتیب عدد داده شده از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌شود.

مثال ۴: معادل عدد $(۱۱۰۱۰۱۱۱۱)_{۲}$ را در مبنای ۸ به‌دست آورید.

حل: ابتدا عدد ۱۱۰۱۰۱۱۱۱ را از سمت راست به چپ به دسته‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$(۱۱۰/۱۰۱/۱۱۱)_{۲} \equiv (\boxed{۱۱۰}\ \boxed{۱۰۱}\ \boxed{۱۱۱})_{۲}$$

حال هر دسته را به‌طور مستقل به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم:

$$(۱۱۱)_{۲} = ۱ \times ۲^{۰} + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۲} = ۱ + ۲ + ۴ = ۷$$

$$(۱۰۱)_{۲} = ۱ \times ۲^{۰} + ۰ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۲} = ۱ + ۰ + ۴ = ۵$$

$(۱۱۰)_۲ = ۰ \times ۲^۰ + ۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ = ۰ + ۲ + ۴ = ۶$

به‌این ترتیب:

$(۱۱۰۱۰۱۱۱۱)_۲ = (\boxed{۱۱۰}_۲\ \boxed{۱۰۱}_۲\ \boxed{۱۱۱}_۲)_۸$

$= (۶۵۷)_۸$

تبدیل اعداد از مبنای ۸ به مبنای ۲ بدون استفاده از مبنای ۱۰

در این روشِ تبدیل، ابتدا هر رقمِ عدد داده‌شده در مبنای ۸ را به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم به‌طوری که در تبدیل برای هر رقم مبنای ۸ ، سه رقم در مبنای ۲ ایجاد شود. به‌این صورت:

$(۱)_۸ = (۰۰۱)_۲$ $(۵)_۸ = (۱۰۱)_۲$

$(۲)_۸ = (۰۱۰)_۲$ $(۶)_۸ = (۱۱۰)_۲$

$(۳)_۸ = (۰۱۱)_۲$ $(۷)_۸ = (۱۱۱)_۲$

$(۴)_۸ = (۱۰۰)_۲$

و به‌دنبال تبدیل اوّلیهٔ بالا، ارقام دستهٔ سه‌تاییِ مبنای ۲ را در کنار هم قرار می‌دهیم و حاصل تبدیل عدد داده‌شده از مبنای ۸ به‌مبنای ۲ است.

مثال ۵ : معادلِ عدد $(۲۰۳۴۷)_۸$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل : ابتدا ارقام عدد داده‌شده در مبنای ۸ را از سمت راست به چپ به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم:

$(۷)_۸ = (۱۱۱)_۲$

$(۴)_۸ = (۱۰۰)_۲$

$(۳)_۸ = (۰۱۱)_۲$

$(۰)_۸ = (۰۰۰)_۲$

$(۲)_۸ = (۰۱۰)_۲$

حال در عدد ۲۰۳۴۷ به‌جای هر رقم، معادل دو دویی آن را می‌نویسیم و داریم:

$(۲۰۳۴۷)_۸ = (\boxed{۰۱۰}_۲\ \boxed{۰۰۰}_۲\ \boxed{۰۱۱}_۲\ \boxed{۱۰۰}_۲\ \boxed{۱۱۱}_۲)$

$= (۰۱۰۰۰۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱)_۲$

$= (۱۰۰۰۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱)_۲$

تبدیل اعداد ممیزدار از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰

هر عدد ممیزدار[17] مبنای ۲ از دو قسمت صحیح[18] و کسری[19] (یا قسمت بعداز ممیز) تشکیل‌شده‌است. برای تبدیل این‌گونه اعداد از مبنای ۲ به‌مبنای ۱۰ ، کافی است هرقسمت را به‌طور مستقل به‌مبنای ۱۰ تبدیل کرده، آنگاه نتیجه‌ها را باهم جمع کنیم یا در کنار هم بنویسیم.

به‌یاد داشته‌باشید که ارزش اوّلین رقمِ بعداز ممیز یک عدد در مبنای ۲ ، درتبدیل به‌مبنای ۱۰ ، $۲^{-۱}$ و ارزش n امین رقم بعداز ممیز در این تبدیل ۲^{-n} است.

مثال ۶ : معادل عدد $(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲$ را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید.

حل : داریم: $(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲ = (۱۱۰۱)_۲ + (۰/۱۱۱۰)_۲$

که در تساوی بالا، عدد ۱۱۰۱ قسمت صحیح و عدد ۰/۱۱۱۰ قسمت کسری یا ممیزدار عدد ۱۱۰۱/۱۱۱۰ را تشکیل می‌دهد.

اکنون هرقسمت را به‌طور مستقل در مبنای ۱۰ می‌نویسیم:

$(۱۱۰۱)_۲ = ۱ \times ۲^۰ + ۰ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۲ + ۱ \times ۲^۳$

$= ۱ + ۰ + ۴ + ۸ = ۱۳$

$(۰/۱۱۱۰)_۲ = ۱ \times ۲^{-۱} + ۱ \times ۲^{-۲} + ۱ \times ۲^{-۳}$

$+ ۰ \times ۲^{-۴} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + ۰$

$= ۰/۵ + ۰/۲۵ + ۰/۱۲۵ = ۰/۸۷۵$

درنتیجه :

$(۱۱۰۱/۱۱۱۰)_۲ = ۱۳ + ۰/۸۷۵ = ۱۳/۸۷۵ = (۱۳/۸۷۵)_{۱۰}$

تبدیل اعداد اعشاری از مبنای ۱۰ به مبنای ۲

می‌دانیم هر عدد اعشاریِ مبنای ۱۰ از دو قسمت صحیح و قسمت اعشاری تشکیل شده‌است. برای تبدیل این‌گونه اعداد از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲، کافی است هر قسمت را به‌طور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل کرده آنگاه نتیجه‌ها را با هم جمع کنیم یا در کنار هم بنویسیم.

روش تبدیل قسمت صحیح یک عدد اعشاری از مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲، کار ساده‌ای است که شرح آن در اوّلین قسمت این بخش آمده‌است.

اما برای تبدیل قسمت اعشاری عددِ مبنای ۱۰ به‌مبنای ۲ ، قسمت اعشاری عدد داده شده را به‌طور متوالی در عدد ۲ ضرب کرده، پس از انجام عمل ضرب، قسمت صحیح حاصل ضرب راکه صفر یا یک است به عنوان یک رقم قسمت ممیزدارِ این تبدیل یادداشت می‌کنیم و به‌دنبال آن قسمت اعشاریِ عدد اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم و این کار را تا چند مرحله ادامه می‌دهیم.

مثال ۷: معادل عدد $(۳٦۷/٦۸۴۳)_{۱۰}$ را به‌مبنای ۲ به‌دست آورید.

حل: داریم: $(۳٦۷/٦۸۴۳)_{۱۰} = (۳٦۷)_{۱۰} + (۰/٦۸۴۳)_{۱۰}$

حال هر قسمت را بطور مستقل به‌مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم.

با مراجعه به مثال ۱ این بخش داریم:

$$(۳٦۷)_{۱۰} = (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$$

اما: $(۰/٦۸۴۳)_{۲} = (\ ?\ )_{۲}$

حال در تبدیل مبنا، قسمت اعشاری عدد داده شده یعنی ۰/٦۸۴۳ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۰/٦۸۴۳ \times ۲ = ۱/۳٦۸٦$$

۱ را به‌عنوان اوّلین رقمِ این تبدیل در سمت راست نقطهٔ دو دویی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱.

اکنون نیز قسمت اعشاری عدد بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۰/۳٦۸٦ \times ۲ = ۰/۷۳۷۲$$

۰ را به‌عنوان دومین رقم این تبدیل، در سمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰

و همینطور برای: $۰/۷۳۷۲ \times ۲ = ۱/۴۷۴۴$

۱ را به‌عنوان سومین رقم این تبدیل، در سمت راستِ رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱

و $۰/۴۷۴۴ \times ۲ = ۰/۹۴۸۸$

۰ را به‌عنوان چهارمین رقم این تبدیل، درسمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱۰

و $۰/۹۴۸۸ \times ۲ = ۱/۸۹۷٦$

۱ را به‌عنوان پنجمین رقم این تبدیل، درسمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی: ۰/۱۰۱۰۱

و $۰/۸۹۷٦ \times ۲ = ۱/۷۹۵۲$

۱ را به‌عنوان ششمین رقم این تبدیل، در سمت راست رقم قبلی یادداشت می‌کنیم یعنی به‌صورت ۰/۱۰۱۰۱۱. عمل ضرب در ۲ را می‌توان تاچند مرحلهٔ دیگر نیز ادامه داد که ما تا همین ٦ رقمِ بعداز اعشار بسنده می‌کنیم.

در نتیجه داریم: $(۰/٦۸۴۳)_{۱۰} = (۰/۱۰۱۰۱۱)_{۲}$

بدین ترتیب در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}(۳٦۷/٦۸۴۳)_{۱۰} &= (۳٦۷)_{۱۰} + (۰/٦۸۴۳)_{۱۰}\\ &= (۱۰۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} + (۰/۱۰۱۰۱۱)_{۲}\\ &= (۱۰۱۱۰۱۱۱۱/۱۰۱۰۱۱)_{۲}\end{aligned}$$

توجه دارید که اعداد در کامپیوتر به صورت مبنای ۲ نمایش داده می‌شوند. از آن‌جا که در کامپیوتر طول خانهٔ حافظه[۲۰] برای نمایش اعداد اعشاری محدود است از این رو طبق محاسبات انجام شده در تبدیل بالا، اعداد اعشاری را نمی‌توان به‌طور دقیق در مبنای ۲ نمایش داد به عبارت دیگر اعداد اعشاری به‌صورتِ تقریبی، در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شوند. این‌گونه نمایش نادقیق اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر یکی از منابع ایجاد خطا[۲۱] در محاسبات[۲۲] کامپیوتری است.

با ارائه چند مثال متنوع بحث این قسمت را به پایان می‌رسانیم:

مثال: اگر هر کلمهٔ حافظه از ۱٦ بیت تشکیل شده باشد نمایش هریک از اعداد صحیح زیر را در یک کلمه بنویسید:

الف) $۲^{۱۵} - ۱ = (۲ - ۱)(۲^{۱۴} + ۲^{۱۳} + ... + ۲^{۱} + ۱)$

زیرا از ریاضیات داریم:

$$x^{n} - ۱ = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + ... + x + ۱)$$

که دراین جا $x = ۲$ و $n = ۱۵$. بنابراین

$$\begin{aligned}۲^{۱۵} - ۱ &= ۲^{۱۴} + ۲^{۱۳} + ... + ۲ + ۱ = ۱ \times ۲^{۱۴} + ۱\\ &\times ۲^{۱۳} + ... + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰}\\ &= \underbrace{(۱۱۱ ... ۱۱)_{۲}}_{\text{۱۵ رقم}}\end{aligned}$$

که نمایش بیتی آن چنین است:

بیت علامت ↓	$۲^{۱۴}$	$۲^{۱۳}$	$۲^{۱۲}$	$۲^{۱۱}$	$۲^{۱۰}$	$۲^{۹}$	$۲^{۸}$	$۲^{۷}$	$۲^{٦}$	$۲^{۵}$	$۲^{۴}$	$۲^{۳}$	$۲^{۲}$	$۲^{۱}$	$۲^{۰}$
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

ب) $۱ - ۲^{۱۵}$

داریم: $۱ - ۲^{۱۵} = -(۲^{۱۵} - ۱)$

چون عدد $(۱ - ۲^{۱۵})$ - یک عدد منفی است پس عدد داده‌شده دارای همان نمایش $۲^{۱۵} - ۱$ است با این تفاوت که عدد داده شده یک عدد منفی است یعنی بیت علامت آن یک می‌باشد.

بیت علامت ↓															
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

این عدد منفی است پس در بیت علامتِ عدد، یک داریم:

ج) $-۲^{۱۳}$

$$\begin{aligned}-۲^{۱۳} &= ۱ \times ۲^{۱۳} + ۰ \times ۲^{۱۲} + ۰ \times ۲^{۱۱} + ... + ۰ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰}\\ &= -\underbrace{(۱۰۰۰ ... ۰۰)_{۲}}_{\text{۱۴ رقم}}\end{aligned}$$

بیت علامت ↓

۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

د) -۱۲۷

$$-۱۲۷ = -۱۲۸ + ۱ = -(۱۲۸ - ۱) = -(۲^۷ - ۱)$$
$$= -(۲^٦ + ۲^۵ + ۲^۴ + ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ + ۱)$$
$$= -(۱ \times ۲^٦ + ۱ \times ۲^۵ + ۱ \times ۲^۴ + ۱ \times ۲^۳ + ۱ \times ۲^۲ + ۱ \times ۲^۱ + ۱ \times ۲^۰)$$
$$= -(\underbrace{۱۱۱۱۱۱۱}_{\text{۷ رقم}})_۲$$

نمایش بیتی عدد ۱۲۷− در دو بایتِ حافظه چنین است:

۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

↑ بیت علامت

ه) -۲۵٦

$$-۲۵٦ = -۲^۸ = -(۱ \times ۲^۸ + ۰ \times ۲^۷ + \dots + ۰ \times ۲^۱ + ۰ \times ۲^۰)$$
$$= -(\underbrace{۱۰۰۰ \dots ۰۰}_{\text{۹ رقم}})$$

باتوجه به مثالهای حل شدهٔ بالا، براحتی می‌توانید عدد داده‌شده را در حافظه نمایش دهید.

و) ۱۰۲۳

$$۱۰۲۳ = ۱۰۲۴ - ۱ = ۲^{۱۰} - ۱ = ۲^۹ + ۲^۸ + \dots + ۲^۱ + ۲^۰$$
$$= (\underbrace{۱۱۱ \dots ۱۱}_{\text{۱۰ رقم}})_۲$$

ز) -۴۰۹٦

$$-۴۰۹٦ = -۲^{۱۲} = -(۱ \times ۲^{۱۲} + ۰ \times ۲^{۱۱} + \dots + ۰ \times ۲^۱ + ۰ \times ۲^۰) = -(\underbrace{۱۰۰۰ \dots ۰۰}_{\text{۱۳ رقم}})_۲$$

تمرین: برابریهای ۱ و ۲ زیر را باتوجه به مثالهای حل شده ثابت کنید.

۱ـ بااستفاده از روش تقسیمهای متوالی

$$(۲۵٦)_{۱۰} = (۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_۲$$

۲ـ ب: بااستفاده از روش تفریقهای متوالی

$$(٦۴۰)_{۱۰} = (۱۰۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲$$

۳ـ ثابت کنید: $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_۲ = (۲۹۲)_{۱۰}$

۴ـ ثابت کنید: $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_۲ = (۲۹۲۵)_{۱۰}$

۵ـ ثابت کنید: $(۱۱۰۱۰۱۱۱۰)_۲ = (٦۵٦)_۸$

٦ـ ثابت کنید: $(۱۵۷)_۸ = (۱۱۰۱۱۱۱)_۲$

۷ـ ثابت کنید: $(۱۱۰۰۱/۱۰۱۱۱۱)_۲ = (۲۵/۷۳۴۳۷۵)_{۱۰}$

۸ـ ثابت کنید: $(۲۵/۳۷۵)_{۱۰} = (۱۱۰۰۱/۰۱۱)_۲$

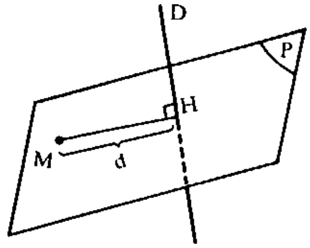
* واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1 - Representation
2 - Digit
3 - Base
4 - Decimal system
5 - Place value
6 - Conversion
7 - Successive Division
8 - Remainder
9 - Quotient
10 - Rightmost
11 - Leftmost
12 - Equivalent
13 - Successive Subtraction
14 - Subtrahend
15 - Minuend
16 - Binary
17 - Floating Point
18 - Integer Part
19 - Fractional Part
20 - Memory
21 - Error
22 - Computations

فاصلهٔ نقطه از خط در فضا

● محمد هاشم رستمی

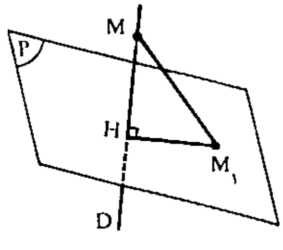
نقطهٔ M و خط D را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M صفحهٔ P را بر خط D عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطهٔ H می‌نامیم. از M به H وصل می‌کنیم. پاره‌خط MH را فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D می‌نامند. به‌طور کلی می‌توان گفت:



فاصلهٔ یک نقطه از یک خط در فضا، طول پاره‌خطی است محصور بین آن نقطه و نقطهٔ تقاطع آن خط با صفحه‌ای که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌شود.

محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه از خط - برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه $M_1(x_1, y_1, z_1)$ از خط $D: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ به یکی از راه‌های زیر می‌توان عمل کرد:

راه اوّل: معادلات پارامتری خط D را به دست می‌آوریم. این معادلات مختصات یک نقطه مانند $M(x, y, z)$ از این خط می‌باشند. آنگاه طول پاره‌خط M_1M را محاسبه کرده، به کمک مشتق، کمترین مقدار آن را محاسبه می‌کنیم.



$$D: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}=t \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{array} \right. , M_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow d = M_1M$$

$$= \sqrt{(pt+x_0-x_1)^2+(qt+y_0-y_1)^2+(rt+z_0-z_1)^2} \Rightarrow d' = \dots$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(1,2,3)$ را از خط $D: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}=t \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} x=2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t+2 \end{array} \right. , M_1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$$

$$d = M_1M = \sqrt{(2t+1-1)^2+(2t-1-2)^2+(t+2-3)^2}$$

$$\Rightarrow M_1M = d = \sqrt{9t^2-14t+10}$$

$$\Rightarrow (M_1M)' = d' = \frac{18t-14}{2\sqrt{9t^2-14t+10}}$$

$$, d' = 0 \Rightarrow 18t-14=0 \Rightarrow t=\frac{7}{9} \Rightarrow \boxed{d=\frac{\sqrt{41}}{3}}$$

و پای عمود نقطهٔ $H(\frac{23}{9}, \frac{5}{9}, \frac{25}{9})$ است.

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ M_1 بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم و با معادلهٔ خط D قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ H پای عمود مرسوم از M_1 بر خط D به‌دست آید. آنگاه طول پاره‌خط M_1H را محاسبه می‌کنیم.

حل: بردار هادی خط D .

$$D: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow \vec{V}(3, 2, 4)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} \quad A \in D, x = 2$$

$$\Rightarrow y = 0, z = -1$$

$$\Rightarrow A(2, 0, -1), M_1(-1, 2, -3) \Rightarrow \overrightarrow{M_1A}(3, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}(-12, -6, 12)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}| = \sqrt{144+36+144} = 18$$

$$\Rightarrow M_1H = \frac{|\overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1H = \frac{18\sqrt{29}}{29}}$$

مثال ۲: فاصلهٔ نقطهٔ $A(2, 3, -1)$ رااز خط $D: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = 4t+13 \end{cases}$ به‌دست آورید.

حل:

$$t = -1 \Rightarrow A_1 \in D \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A} \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{vmatrix}, \vec{V} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{V} \begin{vmatrix} 18 \\ -18 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{\sqrt{18^2+18^2}}{\sqrt{1+1+16}}$$

$$= \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 6$$

مثال ۳: ثابت کنید که دو خط $D: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{4}$ و $D': \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ متوازی‌اند و فاصلهٔ بین‌این‌دو خط‌موازی را حساب کنید.

حل: معادلهٔ کانونیک خط D' را به‌دست می‌آوریم.

$$2 \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \Rightarrow 4x-3z-54=0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{z+18}{4}$$

$$- \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \Rightarrow x+3y+12=0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1}$$

بردار هادی خط D'
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4} \Rightarrow \vec{V'} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

بردار هادی خط D
$$D: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{4} \Rightarrow \vec{V} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V} \parallel \vec{V'} \Rightarrow D \parallel D' \quad \text{یا} \quad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{-1}{-1} = \frac{4}{4} \Rightarrow D \parallel D'$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو خط متوازی کافی است فاصلهٔ نقطه‌ای دلخواه از یک خط را، از خط دیگر به‌دست آوریم.

$$M_1 \in D(-3, 2, 6), A \in D'(0, -4, -18)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1A}(3, -6, -24) \Rightarrow M_1H = \frac{|\overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|}$$

فاصلهٔ بین دو خط موازی D و D'
$$= \frac{3\sqrt{1065}}{\sqrt{26}}$$

مثال ۴: مقدار m را به قسمی‌بیابید که فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(m, 2, -1)$ از خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2}$ برابر $2\sqrt{2}$ باشد.

حل:

$$M_1(m, 2, -1), A \in D(0, 0, -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1A}(-m, -2, -2)$$

$$\vec{V}(2, -1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}(-6, 2m-4, m+4)$$

$$M_1H = \frac{|\overrightarrow{M_1A} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} \Rightarrow 2\sqrt{2}$$

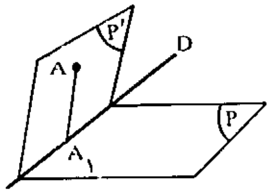
$$= \frac{\sqrt{36+(2m-4)^2+(m+4)^2}}{\sqrt{4+1+4}=3} \Rightarrow$$

$$5m^2 - 8m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ و } m = -\frac{2}{5}$$

مثال۵: فاصلهٔ‌نقطهٔ $A(0, 0, 3)$ رااز‌خط $D: \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 3x+y-z+3=0 \end{cases}$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده از روشهای گفته شده می‌توان فاصلهٔ نقطهٔ A از خط D را محاسبه کرد. امّا اگر $x - 2y + z - 1 = 0$ معادلهٔ صفحهٔ P و $3x + y - z + 3 = 0$ معادله صفحهٔ P' باشد، اوّلاً، نقطهٔ A روی

صفحهٔ P' ، واقع است زیرا مختصاتش در معادلهٔ این صفحه صدق می‌کند. $A(0,0,3) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } P'} 0 + 0 - 3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$



ثانیاً، این دو صفحه بر هم عمودند زیرا:

$$P: x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 , b = -2 , c = 1$$

$$P': 3x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow a' = 3 , b' = 1 , c' = -1$$

$$\Rightarrow aa' + bb' + cc' = 0 \Rightarrow 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow P \perp P'$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A از خط D ، همان فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ P است، لذا داریم:

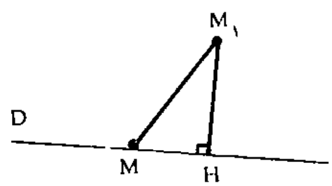
$$AA_1 = d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow AA_1 = d = \frac{|0 - 0 + 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مثال ٦: فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(-1, 1, +2)$ را از خط $D: 3x - 6 = -y + 1 = 2z$ با روشهای مختلف محاسبه کنید.

حل:

راه اول: معادلهٔ پارامتری خط D را به‌دست می‌آوریم.



$$D: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} = t$$

$$\Rightarrow (x = 2t + 2 , y = -6t + 1 , z = 3t)$$

$$\Rightarrow M \begin{vmatrix} x = 2t + 2 \\ y = -6t + 1 \\ z = 3t \end{vmatrix} \quad M_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ +2 \end{vmatrix}$$

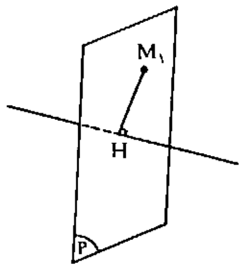
$$\Rightarrow M_1M = d = \sqrt{(2t + 3)^2 + (-6t)^2 + (3t - 2)^2}$$

$$\Rightarrow d = M_1M = \sqrt{49t^2 + 13} \Rightarrow d'$$

$$= (M_1M)' = \frac{98t}{2\sqrt{49t^2 + 13}}$$

$$d' = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow d = \sqrt{13} \Rightarrow \boxed{M_1H = \sqrt{13}}$$

راه دوم: معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطهٔ M_1 بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم. داریم:



$$D: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} \Rightarrow \vec{V}(2, -6, 3)$$

$$M_1(-1, 1, 2) \Rightarrow 2(x + 1) - 6(y - 1) + 3(z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow P: 2x - 6y + 3z + 2 = 0$$

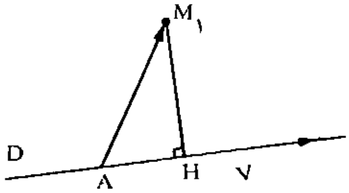
$$\begin{cases} 2x - 6y + 3z + 2 = 0 \\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{3} = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 2) - 6(-6t + 1) + 3(3t) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow H(2, 1, 0) \Rightarrow d = M_1H$$

$$= \sqrt{(2 + 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow d = M_1H = \sqrt{13}$$

راه سوم: نقطهٔ دلخواه A به‌طول ۴ را روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:

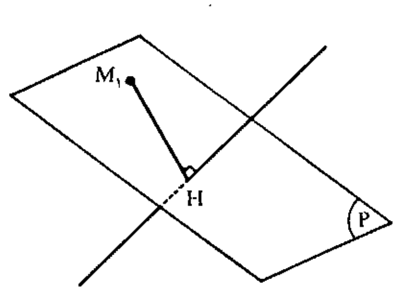


$$A \in D \begin{vmatrix} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 3 \end{vmatrix} \quad M_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} , \quad \vec{V} \begin{vmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM_1} \begin{vmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM_1} \cdot \vec{V} = -10 - 36 - 3 = -49 , \quad |\vec{V}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{AM_1} \cdot \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \frac{49}{7} = 7 , AM_1 = \sqrt{25 + 36 + 1}$$

$$= \sqrt{62} \quad \Rightarrow M_1H = \sqrt{AM_1^2 - AH^2} = \sqrt{62 - 49} = \sqrt{13}$$



مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(۰ , ۲ , ۱)$ را از خط $D:\frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۱} = \frac{z+۲}{۳}$ محاسبه کنید.

حل: معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ $M_۱$ بر خط D عمود می‌شود به‌صورت $۲(x - ۰) + ۱(y - ۲) + ۳(z - ۱) = ۰$ یا $۲x + y + ۳z - ۵ = ۰$ است. زیرا پارامترهای هادی خط D همان تصاویر بردار عمود بر صفحهٔ P می‌باشند. یعنی: $(a = ۲ ، b = ۱ ، c = ۳)$. حال نقطهٔ تقاطع این صفحه با خط D را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} P: &\ \begin{cases} ۲x + y + ۳z - ۵ = ۰ \\ \frac{x}{۲} = y - ۱ = \frac{z+۲}{۳} = t \end{cases} \\ D: & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x = ۲t , y = t + ۱ , z = ۳t - ۲)$$

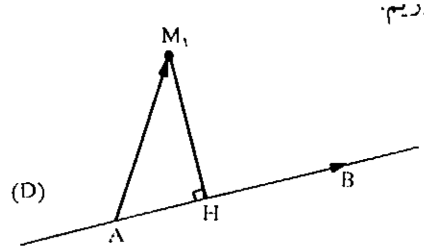
$$\Rightarrow ۲(۲t) + ۱(t + ۱) + ۳(۳t - ۲) - ۵ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۵}{۷} \Rightarrow$$

$$H(\frac{۱۰}{۷}, \frac{۱۲}{۷}, \frac{۱}{۷}) \Rightarrow M_۱H$$

$$= \sqrt{(\frac{۱۰}{۷} - ۰)^۲ + (\frac{۱۲}{۷} - ۲)^۲ + (\frac{۱}{۷} - ۱)^۲} \quad \Rightarrow M_۱H = \frac{۲\sqrt{۳۵}}{۷}$$

فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D

راه سوم: دو نقطهٔ اختیاری A و B را روی خط D در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ $M_۱$ به نقطهٔ A وصل می‌کنیم و از $M_۱$ عمود $M_۱H$ را بر خط D فرودمی‌آوریم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AM_۱H$ طول وتر $AM_۱$ با معلوم بودن مختصات دو نقطهٔ A و $M_۱$ (یا تصاویر $\overrightarrow{AM_۱}$) و طول ضلع AH به کمک حاصل‌ضرب عددی دو بردار $\overrightarrow{AM_۱}$ و $\overrightarrow{AB}$ قابل محاسبه است. زیرا می‌دانیم که حاصل‌ضرب درونی دوبردار برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار در اندازهٔ جبری تصویر بردار دیگر برروی همان بردار.

$$\overrightarrow{AM_۱} . \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| . \overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overrightarrow{AM_۱} . \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \Rightarrow$$

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM_۱} . \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

بنابراین طول ضلع $M_۱H$ یعنی فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱$ از خط D برابر است با:

$$\boxed{M_۱H = \sqrt{AM_۱^۲ - AH^۲}}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(۲ , -۱ , ۱)$ از خط $D: ۲x + ۴ = ۳y - ۳ = -z + ۳$ را به‌دست آورید.

حل: نقطهٔ A به‌طول ۲− و نقطهٔ B به‌طول ۱ را روی خط D اختیار می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A \in D \left| \begin{array}{l} x = -۲ \\ y = ۱ \\ z = ۳ \end{array} \right. \qquad B \in D \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = \frac{۷}{۳} \\ z = -۱ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} ۰ + ۲ = ۲ \\ \frac{۷}{۳} - ۱ = \frac{۴}{۳} \\ -۱ - ۳ = -۴ \end{array} \right. , \quad M_۱ \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AM_۱} \left| \begin{array}{l} ۲ + ۲ = ۴ \\ -۱ - ۱ = -۲ \\ ۱ - ۳ = -۲ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM_۱} . \overrightarrow{AB} = (۴)(۲) + (-۲)(\frac{۴}{۳}) + (-۲)(-۴) = \frac{۴۰}{۳}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۴ + \frac{۱۶}{۹} + ۱۶} = \sqrt{\frac{۱۹۶}{۹}} = \frac{۱۴}{۳}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{AM_۱} . \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\frac{۴۰}{۳}}{\frac{۱۴}{۳}} = \frac{۲۰}{۷} , |\overrightarrow{AM_۱}| = \sqrt{۱۶ + ۴ + ۴} = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow M_۱H = \sqrt{AM_۱^۲ - AH^۲} = \sqrt{۲۴ - \frac{۴۰۰}{۴۹}} = \frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_۱H = \frac{۲}{۷}\sqrt{۱۹۴}}$$ فاصلهٔ نقطه $M_۱$ از خط D

تبصره: به‌جای بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌توان بردار هادی خط D را در نظر

گرفت. در این مسأله معادلهٔ کانونیک خط D به‌صورت $\frac{x+۲}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-۳}{-۶}$ است، پس بردار هادی خط $\vec{V}(۳,۲,-۶)$ است. بنابراین داریم:

$$A(-۲,۱,۳) \text{ ، } M_۱(۲,-۱,۱) \Rightarrow \overrightarrow{AM_۱}(۴,-۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{AM_۱}\cdot\vec{V}=(۴)(۳)+(-۲)(۲)+(-۲)(-۶)=۲۰ ,$$

$$|\vec{V}|=\sqrt{۹+۴+۳۶}=۷ \Rightarrow AH=\frac{|\overrightarrow{AM_۱}\cdot\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{۲۰}{۷} ,$$

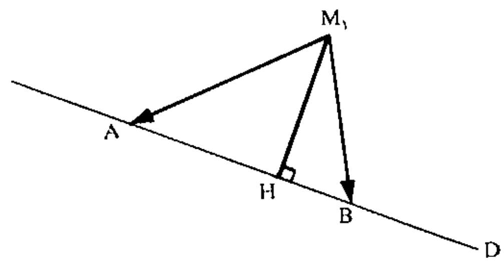
$$|\overrightarrow{AM_۱}|=\sqrt{۱۶+۴+۴}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow$$

$$M_۱H=\sqrt{AM_۱^۲-AH^۲}=\sqrt{۲۴-\frac{۴۰۰}{۴۹}}=\frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_۱H=\frac{۲\sqrt{۱۹۴}}{۷}}$$

راه چهارم: دو نقطهٔ دلخواه A و B را روی خط (D) اختیار کرده، از $M_۱$ به A و B وصل می‌کنیم. پاره‌خط $M_۱H$ ارتفاع نظیر ضلع AB از مثلث $M_۱AB$ است. لذا داریم:

$$۲S_{M_۱AB}^{\Delta}=M_۱H\ .\ AB$$



از طرفی اندازه حاصل‌ضرب خارجی $\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}$، دو برابر مساحت مثلث $M_۱AB$ است، $|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|=۲S_{M_۱AB}^{\Delta}$ پس:

$$۲S_{M_۱AB}^{\Delta}=M_۱H.AB=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|$$

$$\boxed{\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|}{|\overrightarrow{AB}|}}$$

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(-۲,۱,۳)$ را از خط $D: \frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$ محاسبه کنید.

حل: دو نقطهٔ دلخواه A و B از خط D را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x_A=۱$ و $x_B=-۱$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$x=۱\xrightarrow{\text{در معادلهٔ } D}\frac{۱+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=-۱ \text{ و } z=۳ \Rightarrow A(۱,-۱,۳)$$

$$x=-۱\xrightarrow{\text{در معادلهٔ } D}\frac{-۱+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=۰ \text{ و } z=۱ \Rightarrow B(-۱,۰,۱)$$

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

$$=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۰+۱)^۲+(۱-۳)^۲}=۳\Rightarrow \boxed{AB=۳}$$

$$M_۱\begin{vmatrix}-۲\\ ۱\\ ۳\end{vmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}\begin{vmatrix}۱+۲=۳\\ -۱-۱=-۲\\ ۳-۳=۰\end{vmatrix} ,\quad \overrightarrow{M_۱B}\begin{vmatrix}-۱+۲=۱\\ ۰-۱=-۱\\ ۱-۳=-۲\end{vmatrix}$$

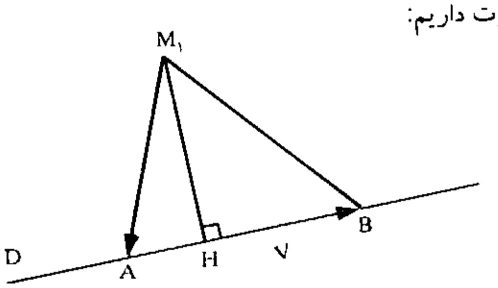
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}(۴-۰,۰+۶,-۳+۲)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}(۴,۶,-۱)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|=\sqrt{۱۶+۳۶+۱}=\sqrt{۵۳}$$

$$\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{۵۳}}{۳}$$

راه پنجم: اگر $\vec{V}(p,q,r)$ بردار هادی خط D باشد و دو نقطهٔ A و B را روی این خط چنان اختیار کنیم که $\overrightarrow{AB}=\vec{V}$ باشد، در این‌صورت داریم:



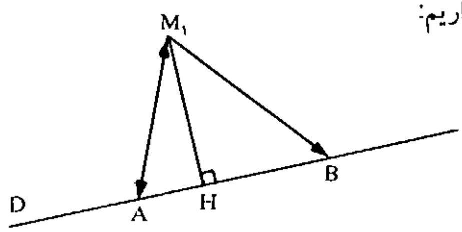
$$۲S_{M_۱AB}=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\vec{V}|$$

$$=|\overrightarrow{AB}|\ .\ M_۱H=|\vec{V}|\ .\ M_۱H\Rightarrow\boxed{M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}}$$

مثال ۱: فاصلهٔ نقطهٔ $M_۱(-۱,۲,-۳)$ را از خط $D: \frac{x-۲}{۳}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۱}{۴}$ به‌دست آورید.

$\Rightarrow \boxed{M_۱H=\sqrt{۱۳}}$

راه چهارم: دونقطهٔ A به‌طول ۲ و B به‌طول ۰ را روی خط D اختیار می‌کنیم. داریم:



$$A\in D \left| \begin{array}{l} x=۳ \\ y=-۲ \\ z=\frac{۳}{۲} \end{array} \right. \quad B\in D \left| \begin{array}{l} x=۰ \\ y=۷ \\ z=-۳ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۷+۲)^۲+(-۳-\frac{۳}{۲})^۲}$$

$$=\sqrt{۹+۸۱+\frac{۸۱}{۴}}=\frac{۲۱}{۲}$$

$$M_۱ \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۱ \\ ۲ \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{M_۱A} \left| \begin{array}{l} ۴ \\ -۳ \\ -\frac{۱}{۲} \end{array} \right. , \overrightarrow{M_۱B} \left| \begin{array}{l} ۱ \\ ۶ \\ -۵ \end{array} \right.$$

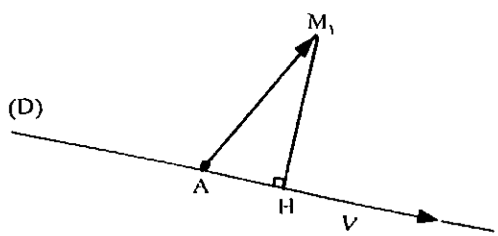
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B} \left| \begin{array}{l} ۱۸ \\ \frac{۳۹}{۲} \\ ۲۷ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{M_۱A}\wedge\overrightarrow{M_۱B}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{۳۲۴+\frac{۱۵۲۱}{۴}+۷۲۹}}{\frac{۲۱}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۲۱\sqrt{۱۳}}{۲}}{\frac{۲۱}{۲}}=\sqrt{۱۳} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_۱H=\sqrt{۱۳}}$$

راه پنجم: نقطهٔ دلخواه A به‌طول ۱− را روی خط D اختیار می‌کنیم.

بردار هادی این خط $\vec{V}(۲\ ,\ -۶\ ,\ ۳)$ است. پس داریم:



$$A\in D(x=-۱\ ,y=۱۰\ ,z=\frac{-۹}{۲}) \quad M_۱(-۱,۱,۲)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM_۱}(۰,-۹,\frac{۱۳}{۲}),\ \vec{V}(۲,-۶,۳)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM_۱}\wedge\vec{V}(۱۲,۱۳,۱۸),\ |\vec{V}|=\sqrt{۴+۳۶+۹}=۷$$

$$\Rightarrow M_۱H=\frac{|\overrightarrow{AM_۱}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}=\frac{\sqrt{۱۴۴+۱۶۹+۳۲۴}}{۷}$$

$$=\frac{۷\sqrt{۱۳}}{۷}\Rightarrow \boxed{M_۱H=\sqrt{۱۳}}$$

تمرین

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ M از خط D را در هریک از حالتهای زیر محاسبه کنید:

الف) $M(-۲\ ,۱\ ,۰)\quad ,\ D: \frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z}{-۲}$

ب) $M(-۱,\ ۰\ ,\ ۲)\ ,\ D:\ ۳x+۶=۵-۲z=y+۲$

پ) $M(-۱,۰,۱)\quad ,\quad D: \begin{cases} x+۲y-z=۳ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$

ت) $M(۳,-۱,۰)\quad ,\quad D: \begin{cases} ۲x-۳=۳y-۲ \\ z=۲ \end{cases}$

ث) $M(-۲,۳,-۱)\quad ,\quad D: \begin{cases} x=-۳t+۱ \\ y=t-۲ \\ z=-t+۳ \end{cases}$

۲ـ مختصات تصویر قائم نقطهٔ $A(-۲\ ,۱\ ,۳)$ روی خط $D: \begin{cases} x=۳t \\ y=۵t-۷ \\ z=۲t+۲ \end{cases}$ را تعیین کنید.

۳ـ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $A(۴\ ,۱\ ,۶)$ نسبت به خط $D: \begin{cases} x-y-۴z+۱۲=۰ \\ ۲x+y-۲z+۳=۰ \end{cases}$ را بیابید.

۴ـ مقدار m را چنان‌بیابید که فاصلهٔ نقطهٔ $A\ (m-۱\ ,\ ۳\ ,۰)$ از خط $D: \begin{cases} x-۲=۳y-۶ \\ z=۱ \end{cases}$ برابر $\sqrt{۶}$ باشد.

۵ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲\ ,\ ۴\ ,\ -۳)$ از محورهای مختصات را تعیین کنید.

۶ـ فاصلهٔ‌نقطهٔ $M_۱\ (\ x_۱\ ,\ y_۱\ ,\ z_۱)$ از محورهای مختصات را بیابید.

۷ـ فاصلهٔ بین دو خط متوازی $D: \frac{x+۱}{-۲}=\frac{y}{۱}=\frac{z-۳}{۲}$ و $D': \begin{cases} x=۱-۴t \\ y=۲t+۱ \\ z=۴t-۳ \end{cases}$ را پیدا کنید.

پاسخهای مربوط به مقالهٔ پیش‌گویی و عدد جادویی هفت

● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

من پیشاپیش به شما بگویم که پاسخ شما شامل یک ۱، یک ۲، یک ۴، یک ۵، یک ۷ و یک ۸ است که به‌ترتیبی نامشخص در کنار هم قرار گرفته‌اند. عدد مورد نظر شامل هیچ یک از ارقام ۶، ۳ یا ۹ نخواهد بود. اما چگونه من این پاسخ را دریافته‌ام؟ یک روش آن بود که همهٔ محاسبات ارقام ۱ تا ۶ را صرفاً انجام داده، از نتیجه آگاه می‌شدم. اما برای دست یافتن به‌پاسخ می‌توان از یک راه حل کم‌زحمت‌تر سود جست، به این ترتیب:

اگر طبق دستورها عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{7} \times 999,999 \times d = \frac{d}{7}(10^6 - 1)$$

$$= \frac{d}{7} \times 10^6 - \frac{d}{7}$$

که در آن d یکی از ارقام ۱ تا ۶ است که به‌دلخواه برگزیده‌ایم. تقسیم ۱/۷، عدد ۰/۱۴۲۸۵۷ را به‌دست می‌دهد و خط افقی بالای آن به این معناست که رشتهٔ رقمهای تشکیل دهندهٔ عدد تکرار می‌شود. ضمن انجام عمل تقسیم دریافتیم که شش باقی‌ماندهٔ نخست (که هیچ یک از آنها صفر نیست) همان شش رقم انتخابی هستند و ششمین باقی‌مانده عدد ۱ است. از آن پس باقی‌مانده‌ها و رقمها همچنان تکرار خواهند شد.

اما در مورد تقسیم ۲/۷، مراحل محاسبه و ارقام به‌دست آمده درست مانند مراحل تقسیم ۱/۷ پس از رسیدن به باقی‌ماندهٔ ۲ است. در آن‌جا دومین باقی‌مانده ۲ بود و در تقسیم ۲/۷ داریم:

۰/۲۸۵۷۱۴ = ۲/۷. چنانچه می‌بینیم، رقمها و ترتیب آنها مانند تقسیم ۱/۷ است، با این تفاوت که رشتهٔ ارقام به‌جای ۱ با ۲ شروع می‌شود. این امر در مورد تقسیمهای ۳/۷، ... و ۶/۷ نیز صدق می‌کند.

حال به این مورد توجه کنید:

۱۰۰۰۰۰۰÷۷=۱۴۲۸۵۷/۱۴۲۸۵۷۱۴...

اگر عدد ۱/۷ را که نمایانگر رشته رقمهای بعد از ممیز است، از حاصل کم کنیم، خواهیم داشت ۱۴۲۸۵۷ = ۹۹۹,۹۹۹/۷. با استفاده از مشاهداتمان دربارهٔ محاسبات ۲/۷، ... و ۶/۷ نتیجه می‌گیریم که ۹۹۹,۹۹۹/۷ × ۲ و جز آن، همگی توسط جایگشتهای دوری ۱۴۲۸۵۷ نشان داده می‌شوند. حتی می‌دانیم کدام جایگشت دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ است؛ i/۷ آن جایگشت دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ است که با i امین رقم کوچکتر این شش رقم شروع می‌شود.

توجه داشته باشید که از ما خواسته شده بود که فقط ثابت کنیم که هر یک از رقمهای ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۷ و ۸ درست یک‌بار در پاسخ شش رقمی می‌آیند. ما در ضمن ارائهٔ راه‌حل به اطلاعات دقیقتری دربارهٔ آن دست یافتیم. حال اگر جزئیات امر در صورت مسأله بوضوح قید شده بود و مسأله در این قالب نسبتاً کلی و نارسا مطرح نمی‌شد، مخاطب با سهولت بیشتری به‌پاسخ می‌رسید، چه ارائه شرح و بیان تفصیلی روشنتر، سر نخ نهفته در آن ـ یعنی یک دورهٔ تناوب منحصر ـ را آشکار می‌کرد.

شرط عمود بودن و مماس بودنِ یک خط بر مقاطع مخروطی

◆ سیامک جعفری

* دایره

برای پیدا کردن شرطی که بنا به آن خط $y = mx + b$ بر مقطع مخروطی، دایره مماس باشد چنین عمل می‌کنیم. معادله دایره را $x^2 + y^2 = R^2$ بگیرید.

اگر (α, β) نقطه تماس باشد، کاملاً مشخص است که خط $x\alpha + y\beta = R^2$ از نقطه (α, β) می‌گذرد و در همین نقطه بر دایره مماس است. حال اگر با $y = mx + b$ متحد قرار دهیم با مقایسه ضرایب خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{-1} = \frac{-R^2}{b}$$

نتیجه می‌دهد:

$$\alpha = -\frac{R^2 m}{b} \quad , \quad \beta = \frac{R^2}{b}$$

که در معادله دایره صدق می‌کند.

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 \Rightarrow \left(\frac{R^4 m^2}{b^2}\right) + \left(\frac{R^4}{b^2}\right) = R^2$$
$$\Rightarrow R^2(1 + m^2) = b^2$$

رابطه اخیر شرط مماس بودن خط مذکور است و $\left(-\frac{R^2 m}{b}, \frac{R^2}{b}\right)$ نقطه تماس خواهد بود.

** بیضی

از قبل می‌دانیم معادله مماس بر بیضی در نقطه (x_1, y_1)، $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ می‌باشد. این خط باید با $y = mx + h$ متحد باشد و با مقایسه ضرایب خواهیم داشت.

$$\frac{x_1}{a^2 m} = \frac{y_1}{-b^2} = \frac{-1}{h}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$x_1 = -\frac{a^2 m}{h} \quad و \quad y_1 = \frac{b^2}{h}$$

این نقطه در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2 m}{h}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2}{h}\right)^2 = 1$$

و نتیجه می‌دهد:

$$h^2 = a^2 m^2 + b^2$$

از رابطه اخیر که شرط تماس خط با بیضی خواهد بود، ملاحظه می‌کنید که

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

این شرط را در بر می‌گیرد و بر بیضی مماس می‌شود. نقاط تماس برای خطوط $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ و $y = mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ بترتیب به‌صورتِ

$$\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right), \left(-\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}\right)$$

خواهند بود.

*** هذلولی

این شرط برای هذلولی با توجه به شباهتی که با رابطه بیضی دارد به همان ترتیب به‌دست می‌آید:

$$h^2 = a^2 m^2 - b^2$$

**** سهمی

اگر خط $y = mx + h$ بر سهمی $y^2 = 4Rx$ در (x_1, y_1) مماس باشد، می‌دانیم معادله خط مماس در این حالت بر سهمی در نقطه‌ای واقع بر آن به شکل $yy_1 = 2k(x + x_1)$ می‌باشد که با خط

مذکور متحد خواهد شد، از مقایسه ضرایب نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2k}{m} = \frac{2kx_1}{h}$$

در سهمی صدق می‌کند:

$$x_1 = \frac{h}{m} \quad , \quad y_1 = \frac{2k}{m}$$

$$\left(\frac{2k}{m}\right)^2 = 4k\left(\frac{h}{m}\right) \Rightarrow h = \frac{k}{m}$$

معادله خط مماس $y = mx + \frac{k}{m}$ بوده و نقطه تماس $\left(\frac{k}{m^2} \ , \ \frac{2k}{m}\right)$ می‌باشد.

تست ۱

مرکز یک دایره بر مبدأ مختصات منطبق و این دایره بر خط $3x - 4y + 20 = 0$ مماس است. معادله دایره را پیدا کنید.

۱) $x^2 + y^2 + 16 = 0$ ۳) $x^2 + y^2 - 20 = 0$

۲) $x^2 + y^2 - 16 = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 20 = 0$

حل:

$$R^2(1+m^2)=b^2 \Rightarrow R^2 = \frac{b^2}{1+m^2} = \frac{\left(\frac{20}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{-4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow R = 4$$

جواب ۲ درست است.

تست ۲

خط $x - y - 5 = 0$ بر یک بیضی به کانونهای $F(3 , 0)$ و $F'(-3 , 0)$ مماس است. معادله این بیضی را بنویسید.

۱) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{17} = 1$ ۳) $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$

۲) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ ۴) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

حل:

$$h^2 = a^2m^2 + b^2 \Rightarrow (-5)^2 = a^2(1)^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} 25 = a^2 + b^2 \\ 9 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

فاصله کانونی $C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a^2 = 17 \\ b^2 = 8 \end{matrix}$$

جواب ۳ درست است.

تست ۳

یک هذلولی به معادله $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{8} = -1$ مفروض است. بر این هذلولی مماسهای موازی با خط $2x + 4y - 5 = 0$ مرور داده‌ایم؛ فاصله آنها را حساب کنید.

۱) $2\sqrt{\frac{2}{5}}$ ۳) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$

۲) $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ ۴) $2\sqrt{10}$

حل:

$$h^2 = a^2m^2 - b^2 \Rightarrow h^2 = 64 \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow h = \pm\sqrt{8}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{8}|}{\sqrt{20}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

جواب ۱ درست است.

تست ۴

در چه نقطه‌ای از سهمی به معادله $y^2 - x + 1 = 0$ خط مماس بر آن به موازات خط $2y - x + 1 = 0$ است.

۱) $(2 \text{ و } -1)$ ۳) $(-2 \text{ و } 1)$

۲) $(-2 \text{ و } -1)$ ۴) $(2 \text{ و } 1)$

حل:

$$y^2 = (x + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

و می‌دانیم که $m = \frac{1}{2}$.

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2k}{\frac{1}{2}} = \frac{2k(x_1 - 2)}{h} \begin{cases} y_1 = 4k \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_1 = 2h + 2 \end{cases}$$

$$(4k)^2 = (2h+2-1) \Rightarrow 16k^2 = 2h + 1$$

چون $k = \frac{1}{4} \Rightarrow h = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

جواب ۴ درست است.

برای پیدا کردن شرط قائم بودن یک خط بر مقطع مخروطی، این مقاطع را مانند حالتی که در بحث مماس ملاحظه کردید جداگانه و در حالت ساده‌ای بررسی می‌کنیم که تعمیم آن مشکل نیست.

* **دایره:**

برای دایره‌ای به معادله $x^۲ + y^۲ + ۲fx + ۲fy + k = ۰$ می‌دانیم که خط قائم، $y = mx + b$ از مرکز این مقطع می‌گذرد. پس $(-g , -f)$ در معادله این خط صدق می‌کند: $-f = m(-g) + b$

نتیجه می‌دهد $mg - f = b$

** **بیضی:**

اگر فرض کنیم خط $y = mx + h$ در نقطه $(x_۱ , y_۱)$ بر بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ عمود باشد آنگاه معادلات زیر متحد هستند:

خط مورد نظر $y = mx + h$

و خط قائم بر بیضی $c^۲ = a^۲ - b^۲$

$$\frac{a^۲x}{x_۱} - \frac{b^۲y}{y_۱} = c^۲$$

با مقایسه ضرایب

$$\frac{a^۲}{mx_۱} = \frac{b^۲}{y_۱} = \frac{b^۲ - a^۲}{h}$$

مختصات نقطه تماس به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = \frac{ha^۲}{m(b^۲ - a^۲)} \quad , \quad y_۱ = \frac{hb^۲}{b^۲ - a^۲}$$

امّا نقطه $(x_۱ , y_۱)$ روی بیضی است.

$$\frac{h^۲a^۲}{m^۲(b^۲ - a^۲)^۲} + \frac{h^۲b^۲}{(b^۲ - a^۲)^۲} = ۱$$

نتیجه می‌دهد

$$h^۲ = \frac{m^۲(a^۲ - b^۲)^۲}{a^۲ + m^۲b^۲}$$

که همان شرط مورد نظر است.

و دو خط قائم به‌دست می‌آید:

$$y = mx \pm \frac{m\left(a^۲ - b^۲\right)}{\sqrt{a^۲ + m^۲b^۲}}$$

*** **هذلولی:**

در این حالت مشابه بیضی، اگر معادله هذلولی به‌صورت $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ باشد آنگاه

$$h^۲ = \frac{m^۲(a^۲ + b^۲)^۲}{a^۲ - m^۲b^۲}$$

و دو معادلهٔ خط قائم می‌شوند:

$$y = mx \pm \frac{m\,(a^۲ + b^۲)}{\sqrt{a^۲ - m^۲b^۲}}$$

**** **سهمی:**

فرض کنیم خط $y = mx + h$ بر سهمی به معادله $y^۲ = ۴kx$ در نقطه $(x_۱ , y_۱)$ قائم باشد. آنگاه دو معادله زیر متحد هستند.

$$y = mx + h \quad , \quad y - y_۱ = -\frac{y_۱}{۲k}(x - x_۱)$$

با مقایسه ضرایب به‌دست می‌آید:

$$\frac{y_۱}{m} = \frac{۲k}{-۱} = \frac{-۲ky_۱ - x_۱y_۱}{h}$$

چون $y_۱^۲ = ۴kx_۱$ داریم: $h = -(۲km + km^۳)$

که رابطه اخیر شرط قائم بر سهمی است.

تست ۱

معادله قطر دایره $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y - ۱۷ = ۰$ راکه بر خطی به معادله $۵x + ۲y - ۱۳ = ۰$ عمود است پیدا کنید.

۱) $y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۱۹}{۵}$ ۳) $y = -\frac{۲}{۵}x - ۲$

۲) $y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۱۹}{۵}$ ۴) $y = -\frac{۵}{۲}x - ۲$

حل:

$$m' = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow m = \frac{۲}{۵}$$

$$mg - f = b \Rightarrow \frac{۲}{۵} \times ۲ + ۳ = b \Rightarrow b = \frac{۱۹}{۵}$$

نتیجه اینکه خط مورد نظر می‌شود.

$$y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۱۹}{۵}$$

یا با ساده کردن

$$۲x - ۵y + ۱۹ = ۰$$

جواب ۱ درست است.

تست ۲

در خط $y = -x + h$ مقدار h را طوری بدست آورید که خط بر بیضی $\frac{x^۲}{۲۰} + \frac{y^۲}{۵} = ۱$ عمود باشد.

۱) $h = -۳$ ۲) $h = \sqrt{۳}$ ۳) $h = -\sqrt{۳}$ ۴) $h = \pm ۳$

حل:

$$h^2=\frac{m^2\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+m^2b^2} \Rightarrow h^2=\frac{(20-5)^2}{20+5}$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{15^2}{25}$$

$$\Rightarrow h=\pm 3$$

جواب ۴ درست است.

تست ۳

خط $x-y-4=0$ بر یک هذلولی به کانونهای $F'(-2$ و $0)$ و $F(2$ و $0)$ عمود است. معادله هذلولی را بنویسید.

۱) $\frac{5x^2}{2}-\frac{5y^2}{3}=-1$ ۳) $\frac{2x^2}{5}-\frac{2y^2}{3}=1$

۲) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ ۴) $\frac{2x^2}{5}+\frac{2y^2}{3}=1$

حل: $m=-1$ و $h=-4$ و $a^2+b^2=c^2=4$

$$h^2=\frac{m^2(a^2+b^2)^2}{a^2-m^2b^2} \Rightarrow 16=\frac{16}{a^2-b^2}$$

دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}a^2-b^2=1\\ a^2+b^2=4\end{cases} \Rightarrow a^2=\frac{5}{2} \quad , \quad b^2=\frac{3}{2}$$

خواهد شد:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1 \Rightarrow \frac{2x^2}{5}-\frac{2y^2}{3}=1$$

پس جواب ۳ درست است.

تست ۴

بر سهمی به معادله $y^2=12x$ خطی به معادله $y=mx+9$ قائم است. مطلوب است شیب خط و مختصات نقطه تماس:

۱) $m=-1 , x_1=-3 \; y_1=6$ ۳) $m=1 , x_1=3 \; y_1=-6$

۲) $m=-1 , x_1=3 \; y_1=6$ ۴) $m=1 , x_1=-3 \; y_1=6$

حل: $h=+9$ و $k=3$

حدس زده می‌شود که $m=-1$ جواب معادله است.

$$h=-(2km+km^3) \Rightarrow 9=-(6m+3m^3)$$

$$m=-1$$

$$\frac{y_1}{m}=\frac{2k}{-1} \Rightarrow y_1=6$$

$$\Rightarrow y^2=12x \Rightarrow 36=12x \Rightarrow x=3$$

جواب ۲ درست است.

منابع

۱ـ جبر تحلیلی — غلامرضا عسجدی

۲ـ جبر پایه — محمد هاشم رستمی

۳ـ هندسه تحلیلی — کیندل

۴ـ مجله یکان

۵ـ مجله برهان

ادب ریاضی

ریاضیات همواره به سبب دو عامل پیشرفت کرده و گسترش یافته است، یکی عامل بیرونی که همانا، نیازهای بشر بوده و کاربرد ریاضیات در علوم دیگر نمایانگر این عامل است و دیگری عامل درونی که همانا، زیبایی ریاضیات است و روابط منطقی حاکم بر اجزای آن که پیدایش نظریه‌ها و شاخه‌های محض در ریاضیات نمایانگر این عامل است که غالباً از آنها نیز مدتی بعد کاربردهایی در علوم دیگر مشاهده می‌شود.

در پیرامون منظومهٔ شمسی*

(یک معمای شگفت‌انگیز، قسمت اول)

● نوشتهٔ مارتین‌گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

در این شماره یک حقهٔ سحرآمیز ریاضی ـ تخیلی را بررسی و آن را به شکل معما مطرح می‌کنیم. پرسشی که در این زمینه مطرح می‌شود، این است که چرا معمای حاضر همواره مصداق دارد؟ اما گفتنی است که شما می‌توانید این معما را به عنوان یک کار برجسته و حیرت‌آور حس ششم خود به دوستان عرضه کنید.

شیوهٔ کلی انجام این سرگرمی در نظر حاضران چنین است: در حالی که شما پشت به حاضران ایستاده‌اید، از یکی از آنان می‌خواهید یک سکهٔ پنج ریالی در یکی از نه خانهٔ نشان داده شده در تصویر زیر بگذارد. بی‌آن‌که صورت خود را برگردانید، با دادن دستورهایی به بازیکن می‌گویید؛ سکهٔ پنج ریالی را به طور تصادفی در خانه‌های مختلف ماتریس مزبور چنان حرکت دهد که گویی این سکه مانند یک سفینهٔ فضایی در منظومهٔ شمسی گشت می‌زند. همگام با صورت گرفتن این حرکتهای تصادفی به بازیکن می‌گویید که برخی از خانه‌ها را با یک سکهٔ دو ریالی مسدود کند. این روند تا بدان‌جا ادامه می‌یابد که سرانجام هشت خانه به وسیلهٔ سکه‌های دو ریالی اشغال می‌شود. در حالی که همچنان پشت به حاضران ایستاده‌اید، می‌توانید به آنان بگویید که هم‌اکنون «سفینهٔ فضایی» در کدام یک از نه سیارهٔ یاد شده مستقر شده است.

حال شما خوانندهٔ عزیز را فرا می‌خوانیم که در این‌جا تأمل کنید و یک سکهٔ پنج ریالی و هشت سکهٔ دو ریالی فراهم آورید تا بازی را جزء به جزء با هم انجام دهیم. البته به جای سکه‌های دو ریالی می‌توانید از دکمه یا هر شیء مشابه دیگر نیز استفاده کنید. اینک من به عنوان افسونگر و شما در نقش ناظر و بازیکن وارد عمل می‌شویم:

عطارد	اورانوس	زهره
مریخ	مشتری	زحل
نپتون	ماه	پلوتون

یکی از نه خانهٔ ماتریس را درنظر بگیرید و سکهٔ پنج ریالی را در آن بگذارید. در انتخاب این خانه شما کاملاً آزادید و آشکار است که من نباید هیچ اطلاعی از آن داشته باشم. هرگاه من دستور حرکت دادن سکهٔ پنج ریالی را دادم، شما فقط می‌توانید هر بار آن را به یکی از خانه‌های مجاور در جهت افقی یا عمودی منتقل کنید. هرگونه حرکت سکه در امتداد قطرها ممنوع است. در هر بار حرکت سکهٔ پنج ریالی، یک حرف خانه‌ای راکه اوّل بار سکه را در آن قرار دادید، بلند و شمرده بر زبان می‌آورید. برای مثال، چنانچه بازی را با گذاشتن سکه بر خانهٔ مریخ آغاز کرده‌اید، با تأنی می‌گویید: م ـ ر ـ ی ـ خ. به عبارت دیگر این کلمه را به تفکیک حروف تلفظ می‌کنید و همزمان با ادای هر حرف، سکه را یک خانه به بالا، پایین، راست و یا چپ آن

خانه می‌برید. توجه داشته باشید که با تلفظ هر حرف، تنها یکبار سکه را باید حرکت دهید.

وقتی که کار تلفظ حرفهای کلمهٔ نخستین خانهٔ انتخابی را به پایان رسانیدید، یک سکهٔ دو ریالی در خانهٔ زهره بگذارید. البته من شرط می‌بندم که سکهٔ پنج ریالی، قطع نظر از این‌که شما بازی را از کدام خانه آغاز کنید و یا این‌که در نخستین حرکت آن را به کدام خانه منتقل کنید، هرگز به خانهٔ زهره نخواهد رفت.

از این لحظه به بعد، در هر یک از مرحله‌های «گردش» در منظومهٔ شمسی، «سفینه» را بدون توجه به نام خانه‌ای که سکه در آن جای می‌گیرد، تنها هفت بار حرکت دهید. این حرکتها، مانند مورد پیشین، برحسب تصادف صورت می‌گیرد و فقط محدود به خانه‌هایی هستند که قبلاً اشغال نشده‌اند. پیداست که همگام با گذاشتن سکه‌های دو ریالی روی ماتریس، رفته‌رفته از شمار خانه‌های خالی کاسته می‌شود.

پس از هفت بار حرکت دادن سکهٔ پنج ریالی، یک سکهٔ دو ریالی در مریخ بگذارید. هفت حرکت دیگر انجام بدهید و یک سکهٔ دو ریالی در عطارد بگذارید. آیا تاکنون همهٔ سکه‌های دو ریالی روی خانه‌ها قرار گرفته‌اند؟

- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در اورانوس بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در نپتون بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در زحل بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در مشتری بگذارید.
- هفت حرکت انجام بدهید. یک سکهٔ دو ریالی در ماه بگذارید.

اگر به دستورات مو به مو عمل کرده باشید، حال باید سکهٔ پنج ریالی روی پلوتون باشد!

همان‌گونه که پیشتر گفتیم، به هنگام اجرای بازی و دادن دستورات باید پشت به بازیکن بایستید. می‌توانید بر جنبهٔ اسرارآمیز بودن بازی تأکید بگذارید؛ به این ترتیب که به ناظر اجازه دهید در هر بار حرکت سکه به جای شمردن تا هفت، کلمهٔ هفت به زبان انگلیسی را (Seven) تلفظ کند؛ یعنی بخواند S-e-v-e-n. پس از گذاشتن یک سکهٔ دو ریالی روی ماه می‌توانید، بی‌آن‌که سر خود را برگردانید، بگویید که سکهٔ پنج ریالی روی پلوتون است.

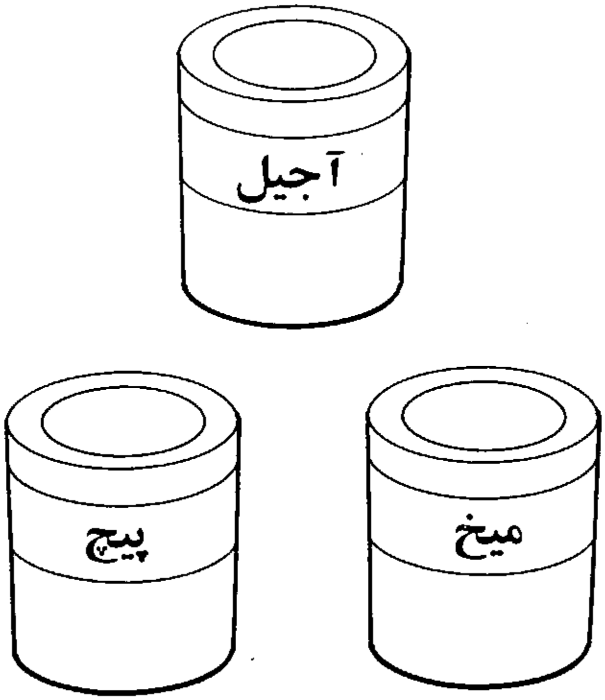
اما چرا این امر همواره مصداق می‌یابد؟ پاسخ این معما معرف مفهوم همپایگی برای شما خواهد بود. مفهوم همپایگی هم از نظر ریاضیات ترکیبیاتی و هم از نظر فیزیک ذره‌ای جدید حائز اهمیت فراوان است. برای آگاهی بیشتر در این زمینه و پی‌بردن به پاسخ، شمارهٔ بعدیِ مجله را مطالعه کنید.

مرجع:

* برگرفته شده از کتاب «معماهای ابوالهول»، نوشتهٔ مارتین گاردنر، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اوّل ۱۳۷۰. ص ۱۴.

تفریح اندیشه ۵

یک قوطی میخ، یک قوطی پیچ، و یک قوطی آجیل داریم. هر قوطی برچسبی دارد که از داخل آن خبر می‌دهد. برادر کوچکم برچسبها را چنان با هم عوض کرده که هیچ‌یک از آنها نظیر محتویات قوطیش نیست. آیا امکان دارد پس از بازکردن تنها یکی از آنها مشخص کنیم که در هر قوطی چیست؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

معرفی کتاب



دایرة المعارف مسائل هندسه (جلد اول)

تألیف: محمد هاشم رستمی

انتشارات مدرسه، چاپ اول، بهار ۱۳۷۴

دایرة المعارف مسائل هندسه مجموعه‌ای است که نظیر آن تا به حال در جوامع ریاضی منتشر نشده است. مؤلف این کتاب از حدود سی سال قبل به جمع آوری مسائل هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی و یا ترجمه شده به فارسی و مسائل کتابهای هندسه کشورهای مختلف جهان و نیز مسائل المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای دیگر، برای تألیف دایرة‌المعارفی از مسائل هندسه، اقدام نموده است.

جلد اول این دایرة‌المعارف بیش از هشتصد مسأله دارد که فقط مربوط به خواص توصیفی اشکال هندسی (نقطه، خط، زاویه، مثلث، چند ضلعی و دایره) است و شامل ۷ بخش زیر است:

بخش ۱ ـ پیدایش هندسه، نقش هندسه در علوم، صنعت زندگی و کاربرد هندسه.

بخش ۲ ـ نقطه، خط، زاویه. بخش ۳ ـ مثلث. بخش ۴ ـ خطوط راست متوازی، خطوط راست عمود بر هم. بخش ۵ ـ چهار ضلعیها. بخش ٦ ـ مساحتها. بخش ۷ ـ دایره.

هر بخش خود شامل زیر بخشهایی است مثلاً بخش ۳ (مسائل مربوط به مثلث)، شامل زیربخشهای زیر است: ۳ـ ۱ ـ تساوی مثلثها. ۳ ـ ۲ ـ مثلث متساوی‌الساقین ۳ ـ ۳ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع. ۳ ـ ۴ ـ مثلث قائم‌الزاویه. ۳ ـ ۵ ـ مثلث غیر مشخص. ۳ ـ ٦ ـ نامساویها در مثلث.

در هر یک از زیر بخشهای فوق نیز مسائل با نظم خاصی مرتب شده‌اند.

مسائل آسان دایرة‌المعارف حل نشده‌اند. مسائل نیمه مشکل، برای حل، راهنمایی گردیده‌اند و مسائل مشکل حل شده‌اند. مسأله‌های تاریخی هندسه نیز مانند: مسأله پروانه (دو بال و سه بال)، مسأله اشتینر ـ لموس، مسأله مورلی، دایرهٔ فویرباخ، خط اولرخط سمسن و ... با ذکر تاریخچه‌ای از آنها حل گردیده‌اند.

در ضمن سایر مباحث هندسه. مانند: رابطه‌های متری در مثلث، چند ضلعیها و دایره، مکانهای هندسی و ترسیمات هندسی و ... در جلدهای دیگر دایرة‌المعارف در دست تهیه برای چاپ است.

دایرة‌المعارف مسائل هندسه برای دانش‌آموزان رشته ریاضی و تجربی، دانشجویان رشته ریاضی و مراکز تربیت معلم، معلمین و هر فرد علاقمند به داشتن مجموعه‌ای کامل از مسائل هندسه برای هر مبحث از آن، مفید و قابل استفاده است.

نام کتاب: مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC

تألیف: مهندس حسین ابراهیم زادهٔ قلزم

مهندس محمد جواد عظیمی

ناشر: نشر روز ـ تهران ـ بهار ۱۳۷۴

کتاب مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC به‌منظور آشنا ساختن دانش‌آموزان دبیرستان نظام جدید و قدیم با مفاهیم اساسی مبانی کامپیوتر، الگوریتم و فلوچارت و برنامه‌نویسی با BASIC، به‌گونه‌ای تألیف شده است که می‌تواند به مشکلات و مسائل متعدد یک تازه کار در مسائل کامپیوتری مرحله به مرحله پاسخ دهد و علاوه بر این می‌تواند نخستین کتاب کامپیوتر جهت کسب آگاهی و اطلاعاتِ دانش

کامپیوتر باشد.

کتاب فوق در واقع مجموعه‌ای از مطالب سه کتاب مختلف کامپیوتر با عناوین ۱ـ مبانی کامپیوتر ۲ ـ برنامه‌نویسی با BASIC ۳ ـ برنامه نویسی گرافیکی با BASIC می‌باشد. در قسمت مبانی کامپیوتر این کتاب، راجع به اجزاء مختلف سخت افزار و نرم افزارهای مهم با تصویر به‌طور مشروح بحث شده است. در فصل ۲ از مبانی کامپیوتر در زمینهٔ تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱۶ با مثالهای متعدد و جالب گفتگو شده است. الگوریتم و فلوچارت و انواع روشهای مرتب سازی در فصل ۳ کتاب با بیانی بسیار ساده و روان آمده است. فصل ۴ کتاب شامل مطالبی در زمینه برنامه نویسی با BASIC می‌باشد. قسمت برنامه‌نویسی گرافیکی با BASIC که فصل ۵ کتاب را تشکیل می‌دهد شامل مطالبی راجع به امکانات متعدد گرافیکی BASIC و دستورات SCREEN ، TAB، LOCATE ، LINE ، DRAW ، PAINT و دیگر دستورات BASIC است. در این فصل از کتاب، روش رسم و برنامهٔ انواع توابع جبری و مثلثاتی نظیر $Y = \frac{۲X^۲ - ۳X}{X^۲ + X + ۲}$ و $Y = \frac{\sin X}{X}$ و

همچنین برنامهٔ رسم‌توابعی نظیر $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(۱ - \cos\theta) \end{cases}$ که در کتب دبیرستانی کمترمورد بررسی قرار می‌گیرد در مختصات دکارتی به‌صورت طبیعی و دقیق ارائه شده است.

مطالب کتاب با بیش از ۶۰۰ مثال و برنامهٔ کامپیوتری در ۵۱۰ صفحه به همراه حل مسائل و اجرای برنامه‌ها به سبکی بسیار روان نوشته شده است. استفاده از این کتاب را به دبیران محترم کامپیوتر و دانش‌آموزان دبیرستان، سال سوم نظام قدیم و جدید توصیه می‌کنیم.

نام کتاب: برنامه نویسی با پاسکال

ترجمهٔ: حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

تالیف: جینوا ـ ج ـ بلفورد ـ چانگ. ل. لیو

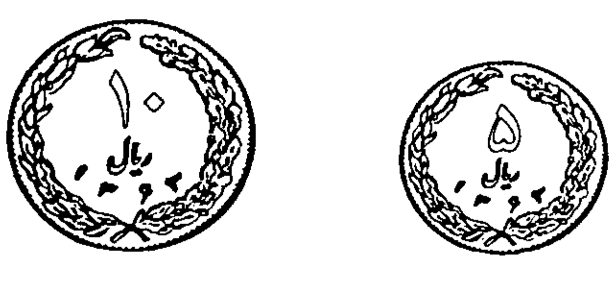
ناشر: دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) ـ چاپ دوم ـ بهار ۱۳۷۴

کتاب برنامه‌نویسی با پاسکال نوشتهٔ جینیوا بلفورد ولیو، استادان دانشگاه ایلینوی یکی از مناسب‌ترین و مفیدترین کتابهای موجود در زمینهٔ برنامه‌نویسی با پاسکال است که تاکنون منتشر شده است. این کتاب به‌گونه‌ای تألیف شده است که خواننده می‌تواند پس از مطالعه دو فصل اول کتاب، به‌سرعت و براحتی برنامه‌های ساده بنویسد و از کامپیوتر خود استفاده کند. در این کتاب روش برنامه‌نویسی ساختیافته و نمودار جریان کار به روش ناسی ـ شنایدرمن ارائه شده است. در کتاب فوق برای اینکه از برنامه‌نویسی در هم و بر هم و نامرتب جلوگیری به عمل آید از هرگونه استفاده از دستورات Goto و Label خودداری شده است، کتاب مذکور دارای ۱۶ فصل و شامل مطالبی راجع به دستورات Write و Writeln ، دستورات جایگزینی و عبارات محاسباتی، دستورات Read و Readln ، بحث و بررسی حلقه‌های تکرار FOR ، While و Repeat - until ، دستورات شرطی IF و Case بررسی متغیرهای رشته‌ای و کاراکتری، زیر برنامه‌های FUNCTION و PROCEDURE، زیر برنامه‌های بازگشتی Recursive و تعریف داده‌های ساختیافته ساده و شمارشی، تعریف نوع دادهٔ مجموعه‌ای، استفاده از رکوردها و فایل‌ها در برنامه، اشاره‌گرها و لیست‌های پیوندی می‌باشد.

علاوه بر این مترجم کتاب، در انتهای هر فصل مجموعاً بیش از ۷۰ برنامهٔ متنوع پاسکال نوشته همگی آنها راکامپایل و اجرا نموده و به همراه خروجی برنامه‌ها ارائه داده است.

تفریح اندیشه ۶

دو سکه به ارزش کل ۱۵ ریال در جیب داریم. آیا امکان دارد که یکی از آنها ده ریالی نباشد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

جــواب نامــه‌هــا

آقای رامین معتمد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

از تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. اِن شاءا... از آنان در (قسمت مسائل برای حل) شماره‌های بعدی مجله استفاده می‌کنیم. در ضمن باید بگوییم که تکرار صورت مسأله در قسمت جواب مسائل مقدور نیست، زیرا حجم مجله بالا می‌رود و همچنین جای یک سری مطالب ضروری را اشغال می‌کند.

آقای عبدالرحمن آرمین؛ دانش‌آموز هنرستان (مهاباد)

از مسائل حل شده ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای قدیر فتح‌الهی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شیروان)

ضمن تشکر از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که مسائل خود را در سطح مطلوبتری ارائه دهید. و قبل از طرح مسائل، قسمت مسائل برای حل مجلات قبلی برهان را مشاهده نمایید تا از طرح مسائل تکراری جلوگیری شود و همچنین سطح مسائل برایتان مشخص شود.

آقای محمد شاهرخ محبتی؛ دانش آموز رشته ریاضی (اصفهان)

از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مطلبی در رابطه با «محاسبه $\cos\frac{\pi}{2^k}$» می‌باشد متشکریم.

مطلب شما را (هر چند در برخی از کتابهای ریاضی موجود است) عیناً در اینجا می‌آوریم:

داریم:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} : \quad \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} : \cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

به همین ترتیب:

$$\alpha = \frac{\pi}{16} : \cos\frac{\pi}{16} = \cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

... و

$$\alpha = \frac{\pi}{32} : \cos\frac{\pi}{32} = \cos\frac{\pi}{2^5} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

و به‌طور کلی:

$$\cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

$$(k \in N, k \neq 1)$$

توجه: تعداد رادیکالها $(k-1)$ مرتبه می‌باشد.

آقای یونس قره‌داغی؛ دانشجوی برق ـ قدرت تبریز

از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «آیا می‌دانید که «انتگرال» چیست» متشکریم. امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی در جای مناسب به‌وجود آید.

آقای مهدی مهدوی پور؛ دانشجوی رشته ریاضی (نیشابور)

از نامه ارسالی شما که حاوی دو مطلب در رابطه با «بازی با اعداد» می‌باشد متشکریم. امید است امکان درج آن در شماره‌های بعدی مجله به‌وجود آید.

آقای علیرضا فاضلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)
ضمن تشکر و قدردانی از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «محاسبهٔ مشتق n ام برخی از توابع» به عرض می‌رسانیم که مطلب شما در حد یک مقاله نیست ولی از مسائل آن در قسمت مسائل برای حل استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

*** خانم سمیرا قائم مقامی؛ دانش‌آموز**
ضمن تشکر از مسأله حل شده ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که ان‌شاءالله از آن برای شماره‌های بعد استفاده خواهیم کرد. و در رابطه با حل مسألهٔ «اگر $x + y + z = \pi$ باشد، ثابت کنید: $tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$» باید بگوییم که حل صحیح این مسأله را در شماره‌های قبلی مجلهٔ برهان می‌توانید مشاهده کنید.

آقای کوروش خانجانزاده؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (نوشهر)
ضمن قدردانی و تشکر از نامهٔ شما به عرض می‌رسانیم که ایراد شما در رابطه با یک تست که در شمارهٔ ۲ برهان آمده است به جا است. زیرا در صورت تست اشکالی رخ داده است که با عرض پوزش در اینجا شکل صحیح آن را به اطلاع عموم می‌رسانیم:
اگر دامنهٔ $y = f(x)$ فاصلهٔ (۱ و ۰) باشد، دامنهٔ عبارت $f(\log x)$ $|x+1|$ کدام است؟
۱) [۱ و ۰)   ۲) (۱۰ و ۱]   ۳) (۱۰ و ۱)   ۴) [۱۰ و ۱)

خانم لاله تراب‌نژاد؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)
از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان برای شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم.

آقای علی بلوکی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)
از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آنان در جای مناسب استفاده می‌کنیم. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری برای دانش‌آموزان دبیرستان، ارائه دهید.

*** آقای سید شهاب بنی‌هاشمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی نظام جدید (لنگرود)**
از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان برای شماره‌های آتی مجله استفاده کنیم.

*** آقای ابوالفضل کریمایی؛ دیپلمه ریاضی (شهریار)**
ضمن تشکر از نامه محبت آمیز شما، به عرض می‌رسانیم که از مسائل شما برای شماره‌های آینده مجله انتخاب خواهیم کرد.

آقای سهیل خوشبین‌فر؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رشت)
از مسأله حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. درصورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد. سعی کنید مسائل را در سطح مطلوبتری برای دانش‌آموزان ارائه دهید.

*** آقای رضا لقایی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تکاب)**
از ارسال مسائل و تستهای حل شدهٔ شما متشکریم. ان‌شاءالله برای شماره‌های بعدی از آنان استفاده خواهیم کرد.

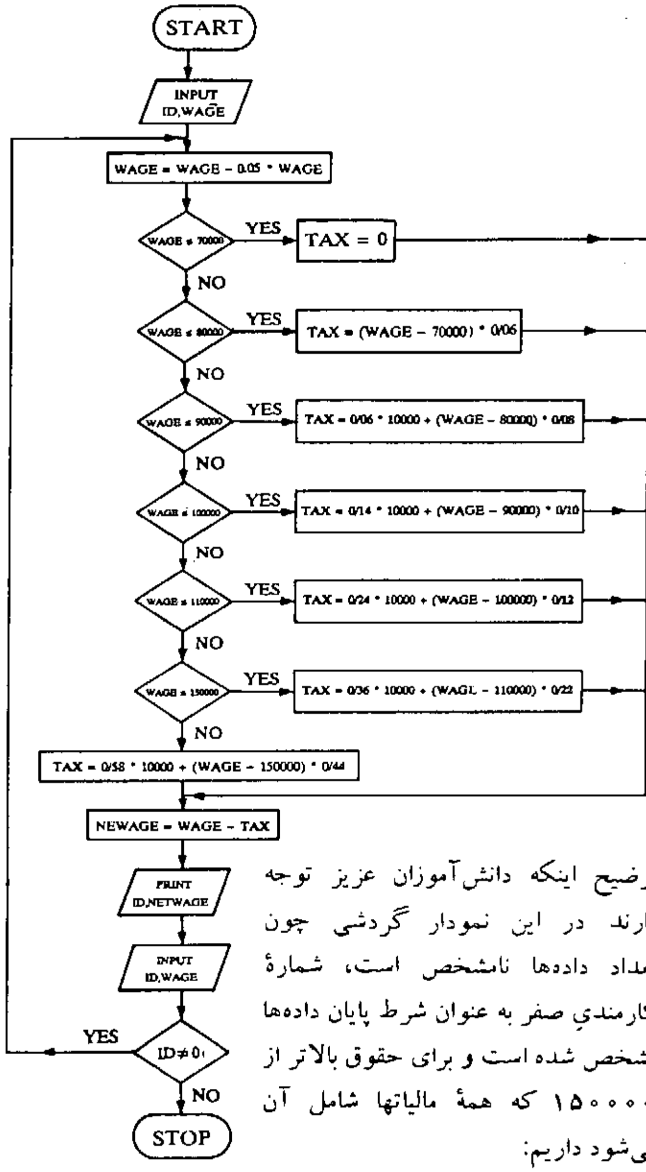
آقای علیرضا مرادی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)
از مسائل و تستهای حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در قسمت مسائل برای حل شماره‌های بعدی مجله استفاده کنیم.

آقای حمید رضا محمدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی دبیرستان علامه حلی (اراک)
ضمن تشکر و قدردانی از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما به اطلاع می‌رسانیم که از آنان برای شماره‌های بعدی مجله استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

آقای رامین معتمد چابکی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)
ضمن تشکر از نامهٔ شما به اطلاع می‌رسانیم که پاسخهای مسائل المپیادها را می‌توانید در شماره‌های آتی رشد آموزش ریاضی مشاهده کنید. ضمناً به عرض می‌رسانیم که کار در رابطه با المپیادها جزو اهداف مجله نیست و شما می‌توانید به کتب و مجلات منتشر شده در این زمینه مراجعه کنید.

خانم مینا رحیمی؛ دانشجوی رشته ریاضی (تهران)
از نامه ارسالی شما متشکریم. به عرض می‌رسانیم که برای دریافت مجله می‌توانید با ارسال فرم اشتراک، مشترک شوید و یا از شعبه انتشارات مدرسه واقع در ایرانشهر شمالی تهیه نمایید. ضمناً از سه مسألهٔ حل شده شما نیز تشکر می‌کنیم و اِن شاءا.. برای شماره‌های آتی از آن استفاده خواهیم کرد.

حل مسائل مسابقه‌ایِ برهانِ ۱۲



توضیح اینکه دانش‌آموزان عزیز توجه دارند در این نمودار گردشی چون تعداد داده‌ها نامشخص است، شمارهٔ کارمندیِ صفر به عنوان شرط پایان داده‌ها مشخص شده است و برای حقوق بالاتر از ۱۵۰۰۰۰ که همهٔ مالیاتها شامل آن می‌شود داریم:

۰/۵۸=۰/۰٦+۰/۰۸+۰/۱۰+۰/۱۲+۰/۲۲

حقوق = WAGE   شماره کارمندی = ID

حقوق خالص = NETWAG   مالیات = TAX

برنامه:

```
10 INPUT "ENTER IDENTIFICATION NO. &  WAGE ";ID,WAGE
15 WAGE=WAGE-WAGE*.05
20 IF WAGE <= 70000! THEN TAX=0
25 IF WAGE >70000!  AND WAGE<=80000!  THEN TAX=(WAGE-70000!)*.06
30 IF WAGE >80000!  AND WAGE<=90000!  THEN TAX=.06*10000+(WAGE-80000!)*.08
35 IF WAGE >90000!  AND WAGE<=100000! THEN TAX=.14*10000+(WAGE-90000!)*.1
40 IF WAGE >100000! AND WAGE<=110000! THEN TAX=.24*10000+(WAGE-100000!)*.12
45 IF WAGE >110000! AND WAGE<=150000! THEN TAX=.36*10000+(WAGE-110000!)*.22
50 IF WAGE >150000! THEN TAX=10000*.58+(WAGE-150000!)*.44
55 NETWAGE=WAGE-TAX
60 PRINT "IDENTIFICATION NO. = ";ID;"NETWAGE = ";NETWAGE
65 INPUT "ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ";ID,WAGE
70 IF ID <> 0 THEN 15
75 END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER IDENTIFICATION NO. &  WAGE ? 14500,3000
IDENTIFICATION NO. =  14500 NETWAGE =  2850
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14501,75000
IDENTIFICATION NO. =  14501 NETWAGE =  71175
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14502,100000
IDENTIFICATION NO. =  14502 NETWAGE =  93100
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14503,140000
IDENTIFICATION NO. =  14503 NETWAGE =  124340
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14504,160000
IDENTIFICATION NO. =  14504 NETWAGE =  145320
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14541,200000
IDENTIFICATION NO. =  14541 NETWAGE =  166600
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 14542,170000
IDENTIFICATION NO. =  14542 NETWAGE =  150640
ENTER IDENTIFICATION NO. & WAGE ? 0,0
```

اسامی افرادی که مسأله مسابقه‌ای برهان ۱۲ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ـ زهرا حاتمی ـ کرمان
۲ـ محمدرضا صدیق ـ گلپایگان
۳ـ شاقیک آتا کارامیانس ـ تهران
۴ـ سامان جاوید ـ پیرانشهر

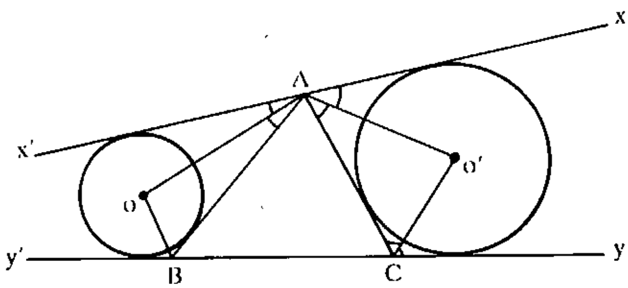
مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

◇ مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. از رأس A خط X'X را در خارج مثلث رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ مماس بر ضلع AB و نیم‌خط AX' و امتداد ضلع BC، و O' مرکز دایرهٔ مماس بر ضلع AC و نیم‌خط AX و امتداد ضلع BC باشد، ثابت کنید، OB+O'C مقدار ثابتی است.

(فرستنده: آقای محمد معصومی از اراک)



۲ ـ **اولاً**: ثابت کنید که در هر مثلث، میانهٔ وارد بر یک ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از نصف قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع بزرگتر است.

ثانیاً: اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد ثابت کنید:

$$\frac{۳P}{۲} < m_a + m_b + m_c < ۲P$$

۳ ـ ثابت کنید گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ همواره دارای ارزش درست است.

۴ ـ اگر ارزش گزارهٔ $[p \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow p)]$ درست بوده و ارزش گزارهٔ $(s \vee q)$ نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow \sim q$ را تعیین کنید.

۵ ـ اگر P(A) مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A بوده (مجموعهٔ توانیِ A) و P(B) نیز چنین باشد، ثابت کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

ب) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(فرستنده: آقای مسعود فزون‌بال سال چهارم ریاضی از تهران)

۶ ـ بدون استفاده از روش عضوگیری ثابت کنید:

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

۷ ـ کسر مقابل را گویا کنید:

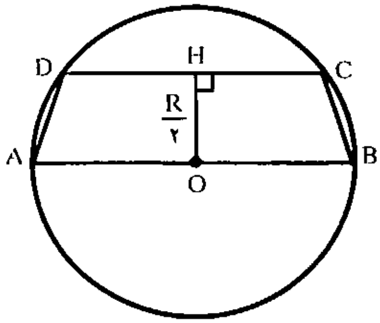
$$\frac{۲}{۲(\sqrt[۳]{۲}+۱)+\sqrt[۳]{۴}}$$

۸ ـ به‌ازای مقادیر مختلف m در تعداد ریشه‌های معادله زیر بحث کنید:

$$(x-۱)m^۲ + (۵-۳x)m + (۲x-۶) = ۰$$

◇ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD در دایره‌ای به شعاع R چنان محاط است که AB قطر دایره و ارتفاع این ذوزنقه $\frac{R}{۲}$ می‌باشد. محیط و مساحت این ذوزنقه را بر حسب R محاسبه کنید.



۹ـ انتهای کمان α در کدام ناحیه باشد تا عبارت $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha + \cos\alpha}$ همواره مثبت باشد.

(فرستنده: آقای علی لاری دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران))

۱۰ـ حداقل و حداکثر عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A = \cos\alpha\ (2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۱۱ـ صحت تساوی $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$ را تحقیق کنید.

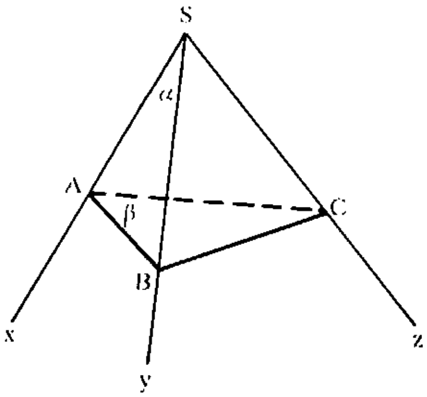
فرستنده: خانم سمیرا قائم‌مقامی دانش‌آموز (سمیرم)

۱۲ـ معادلهٔ $\operatorname{tg}^{73}x\ \operatorname{tg}^{73}2x + 1 = 0$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$، دارای چند جواب حقیقی است؟

◇ مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ـ در یک کنج منتظم سه‌وجهی اندازهٔ هر زاویه برابر α° و اندازهٔ هر فرجه برابر β° است. ثابت کنید $\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

فرستندگان: آقایان علی صبحی‌پور از اهواز و علیرضا رمضانی‌فر از ملایر



۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) مفروض است. اولا: ثابت کنید $r_a = P$ (P نصف محیط مثلث است.) ثانیا: اگر $r_a = 6$ و $h = 3$ باشد، اندازهٔ r_c را حساب کنید.

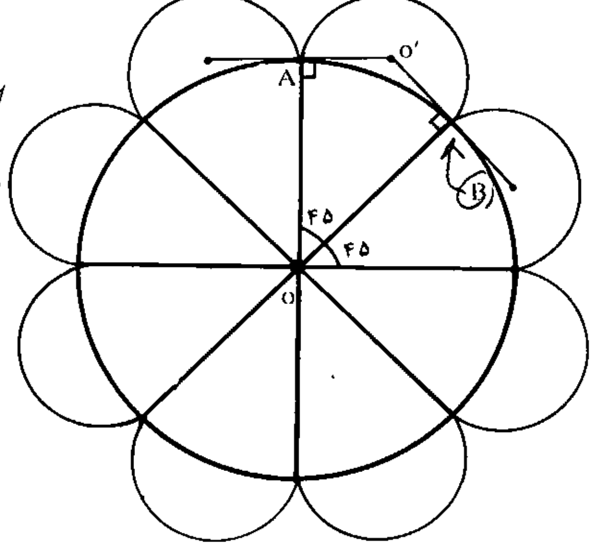
(فرستنده: آقای علیرضا خسروی فروشانی، از اهواز)

۳ـ در مثلث ABC می‌دانیم که $\hat{A} = 120^\circ$ است. ثابت کنید که:

الف) $d_b d_c = 2Rd_a$

ب) $8(m_b^2 + m_c^2) - 4m_a^2 = 9a^2$

۲ـ محیط دایره‌ای به شعاع R را به ۸ قسمت متساوی تقسیم و ۸ شعاع واصل به این نقاط را که با هم زاویهٔ 45° می‌سازند رسم می‌کنیم. سپس دایره‌هایی مماس به هر دو شعاع متوالی در انتهای این شعاعها رسم می‌کنیم. محیط شکل حاصل (شکل شبیه گلسرخ) را حساب کنید.



۳ـ اگر f_1 ، f_2 و . . . و f_n توابعی یک‌به‌یک و حقیقی باشند ثابت کنید $(f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n)$ نیز یک‌به‌یک است.

(فرستنده: آقای مسعود فزون‌بال سال چهارم ریاضی از تهران)

۴ـ تابعی دوسویی از مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ به B یا به عکس از B به A تعریف کنید که

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $0 = |A| = ad - bc$ = دترمینانِ A باشد ثابت کنید $A^2 = (a + d)A$.

(فرستنده: خانم مریم مردانی سال دوم نظام جدید از تهران)

۶ـ ثابت کنید هر گروه که دارای ۴ عضو باشد حتماً آبلی است.

۷ـ اندازهٔ محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای 30^{cm} و اندازه وتر آن $(13)^{cm}$ است. اضلاع مثلث را بیابید.

۸ـ ثابت کنید اگر ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ تصاعد عددی بسازند، داریم: $9b^2 = 100ac$

۴ ـ هرگاه بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b باید برقرار باشد تا بردارهای $(V_1 - V_2 - V_3)$ و $(aV_1 + bV_2 + V_3)$ و $(V_1 - 2aV_2 + bV_3)$ نیز مستقل خطی باشند.

۵ ـ عبارت بولی $T = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz$ را پس از ساده کردن توسط عضوهای منطقی رسم کنید.

٦ ـ حروف کلمهٔ کمال‌الملک را به تصادف در کنار یکدیگر قرار می‌دهیم مطلوب است:

الف) احتمال آن‌که در کلمهٔ بوجود آمده حروف ل کنار هم باشند.

ب) بین دو حرف ک دقیقاً سه حرف دیگر واقع شده باشد.

۷ ـ m کتاب تاریخ و n کتاب جغرافیا به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند هرگاه بخواهیم هیچ یک از کتب جغرافیا کنار هم نباشند.

(آقای محمد صادق عسگری دبیر ریاضی از تهران)

۸ ـ به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ بحث کنید.

۹ ـ اگر $y = \sqrt{\dfrac{1}{\cos 2x}}$ و $\cos 2x > 0$ ثابت کنید $y + y'' = 3y^5$

۱۰ ـ اگر $f(x) = \sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x$ باشد، ثابت کنید: $f(12^\circ) = 2\sqrt{2}\cos 12^\circ \cos 21^\circ$

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱۱ ـ دستگاه معادلات زیر در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$، دارای چند جواب حقیقی است؟

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

فرستنده: آقای رضا لقایی دانش‌آموز رشته ریاضی (تکاب)

۱۲ ـ نوع مثلثی را تعیین کنید که در آن رابطهٔ $b + c = 4R\cos\dfrac{\hat{A}}{2}$ برقرار باشد.

فرستنده: آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

۱۳ ـ جوابهای عمومی معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$15\,tg^2x + 8\cos 2x = 9$$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

۱۴ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

فرستنده: آقای علی لاری دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

◇ مسائل کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱۵ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا مقادیر X و N را از ورودی دریافت کرده (N عدد صحیح است و می‌تواند مثبت، منفی و صفر باشد و x یک مقدار دلخواه صحیح یا اعشاری است) سپس مقدار X^N را محاسبه کرد، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

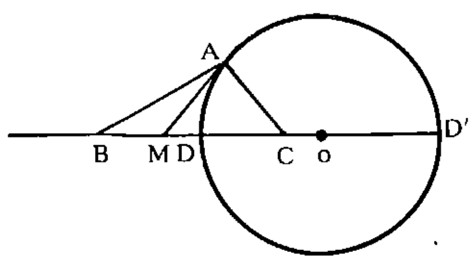
۱٦ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا عدد صحیح و مثبت N و مقدار X را از Keyboard بخواند و مقدار y را از رابطهٔ رادیکال مرکب زیر محاسبه کرده، نتیجه را با پیغام مناسب در خروجی چاپ کند.

$$y = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots + \sqrt{x}}}}}}_{N\ \text{بار}}$$

۱۷ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا عدد N را از Keyboard دریافت کند. آنگاه دوجمله‌ای $(x + y)^N$ را بسط دهد.

◇ مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ در مثلث ABC، نقاط D و D′ پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A می‌باشند. در صورتی که میانهٔ AM از این مثلث بر دایرهٔ به قطر DD′ مماس باشد، ثابت کنید که این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.



۲ ـ کرهٔ به معادلهٔ $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ محورهای مختصات را در سه نقطه به طول و عرض و ارتفاع مثبت قطع می‌کند، اندازهٔ مساحت مثلث حاصل را محاسبه کنید.

۳ـ اولاً: معادلهٔ دسته صفحه‌ای را بنویسید که بر خط
$$D: \begin{cases} x = t - ۱ \\ y = ۳ - ۲t \\ z = ۳t + ۴ \end{cases}$$
می‌گذرد.

ثانیاً: معادلهٔ صفحه‌ای از این دسته را تعیین کنید که با صفحهٔ $P: ۲x - y - ۲z = ۳$ زاویهٔ ۶۰° می‌سازد.

۴ـ هرگاه عکس نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را به‌صورت $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ نشان دهیم ثابت کنید، این دو گزاره با هم، هم‌ارز می‌باشند.

۵ـ اگر در حلقهٔ یکدارِ R ، a عضوی از R بوده و پوچ توان از مرتبهٔ ۳ باشد ($a^۳ = \bar{۰}$). ثابت کنید $(a - ۱)$ وارون‌پذیر بوده و داریم:

$(۱ - a)^{-۱} = a^۲ + a + ۱$

(a پوچ توان از مرتبهٔ m است هرگاه $a^m = \bar{۰}$ و اگر $k < m$ آنگاه $a^k \neq \bar{۰}$)

۶ـ با استفاده از استقراء ثابت کنید، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با ۲^n.

۷ـ ثابت کنید عدد چهار رقمی $A = \overline{xyxy}$ مربع کامل نیست.

۸ـ ثابت کنید رقم یکانِ توانهای هر عدد، هر ۴ بار یک مرتبه با هم برابرند یعنی رقم یکان a^n و $a^{n+۴}$ برابر می‌باشند.

۹ـ فرض کنید $f(x) = x^۵ - ۳x^۲ + ۷x - ۱$ و M یک ماتریس مربعیِ وارون‌پذیر و D هم مرتبه با M باشد ثابت کنید:

$f(MDM^{-۱}) = M f(D) M^{-۱}$

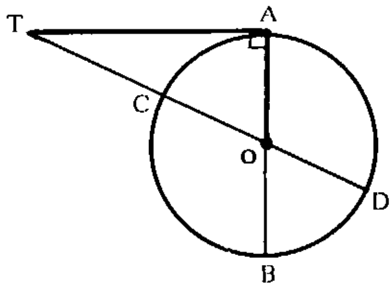
(فرستنده: آقای بهروز بیرامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از نقده)

۱۰ـ منحنی نمایش تغییرات رابطه به معادله $y^۲ + x^۴ = a^۲x^۲$ ، $a > ۰$ را رسم کنید.

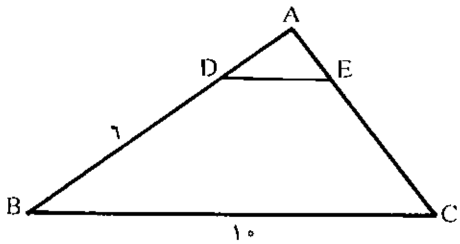
۱۱ـ منحنی نمایش تغییرات تابع به معادلهٔ $y = \frac{\sin ۲x}{۱ - \sin x}$ را در فاصله $[۰ , ۲\pi]$ را رسم کنید.

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ روی خط مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ به قطر $AB = ۲R$ طول $AT = ۲R$ را اختیار می‌کنیم. از T به O وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. اندازهٔ پاره‌خطهای TC و TD را برحسب R محاسبه کنید.



۲ـ در مثلث ABC ، نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان قرار دارند که $AD = \frac{a}{۵}$ و $DB = ۶$ و $AE = \frac{a}{۱۰} + \frac{۱}{۲}$ و $EC = \frac{۲a}{۵} + \frac{۱}{۲}$ و $BC = ۱۰$ است. در صورتی که $DE \parallel BC$ باشد، **اولاً:** مقدار a را بیابید، **ثانیاً:** ثابت کنید که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. **ثالثاً:** مساحت ذوزنقه BCED را بیابید.



۳ـ معادلهٔ $۶m^۲x - ۲m^۴ = ۵۴x$ به‌ازای چه مقادیری از m جواب ندارد؟

۴ـ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ باشند، مقدار عبارت $\left(\frac{۱}{x_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲^۲}\right)\left(\frac{۱}{x_۱^۳} + \frac{۱}{x_۲^۳}\right)$ را حساب کنید.

۵ـ معادلهٔ زیر چند ریشه حقیقی دارد؟

$$\sqrt{(۲x - ۲x^۵)^{۷۳}} + (x - x^{۷۳})^{۷۴} + |x^۳ + ۳x^۲ + ۲x| = ۰$$

۶ـ به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $۲x^۲ - ۴mx + ۲ = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۷ـ مجموعه جوابهای نامعادلهٔ $(۵x^{۳۲} - ۵)(۲ - ۲x^{۱۶}) \geq ۰$ را به دست آورید.

۸ـ مجموعه جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ $۱۸x^۲ + ۲۴x + ۶ > ۰$ و $۲۴x - ۱۲x^۲ > ۰$ را با شرط $۰ < x + ۱ < ۳$ به دست آورید.

۹ـ اگر مجموع و حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی برابر باشد، معدل آن سه عدد چقدر است؟

۱۰ـ جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $\frac{1}{2^{n-2}}$ است، حد مجموع جملات این تصاعد را حساب کنید.

۱۱ـ در یک تصاعد حسابی جملهٔ دوم ۲۳ و جملهٔ پنجم ۳۸ است، جملهٔ بیستم آن را حساب کنید.

۱۲ـ اگر $\log 7 = k$ باشد، عبارت $\log \sqrt[2k]{4900}$ را برحسب k حساب کنید.

۱۳ـ مقدار x را از معادلهٔ زیر به‌دست آورید:

$$\log(\sin 3^{\circ} \log_9(81)^{10})^x + \log(\cos 6^{\circ} \log_8(64)^5)^x = \log\left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$$

(فرستنده: آقای عمران ایدی‌زاده از شهرستان ایلام)

۱۴ـ اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، 8^{10} چند رقمی است.

۱۵ـ هرگاه $\sin x \cos x = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار عبارت $y=\sin x+\cos x$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱٦ـ عبارت زیر را ساده کنید و سپس مقدار عبارت را به ازای $\theta=\frac{\pi}{8}$ حساب کنید.

$$P = (\cos\theta + \sin\theta)^4 - (\cos\theta - \sin\theta)^4$$

فرستنده: آقای سیدشهاب بنی‌هاشمی دانش‌آموز رشته ریاضی نظام جدید (لنگرود)

۱۷ـ معادلهٔ زیر دارای چند جواب است؟

$$\text{Arc tg}\,(2t+1) = \text{Arc cos}\,\frac{1}{t+1}$$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

◇ مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ـ اگر $|\vec a| = 5$ و $\vec a\,.\,(\vec a+\vec b) = 16$ و $(\vec a, \vec b) = \frac{2\pi}{3}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $|\vec b|$.

۲ـ مساحت صفحهٔ قطری مکعبی برابر $9\sqrt{2}$ است اندازهٔ حجم این مکعب را تعیین کنید.

۳ـ اندازهٔ قطر قاعدهٔ هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی $16\sqrt{2}$ و اندازهٔ سهم آن ۱۰ است. اولاً: حجم این هرم را به‌دست آورید.
ثانیاً: اگر صفحه‌ای موازی قاعدهٔ هرم و به فاصلهٔ $\frac{1}{4}$ ارتفاع از سطح قاعدهٔ هرم رسم کنیم، حجم هرم ناقص ایجاد شده را محاسبه کنید.

۴ـ معادلات دو ضلع مقابل مربعی به صورت $4x - 2y + 3 = 0$ و $6y - 12x - 12 = 0$ است. اندازهٔ قطر مربع را حساب کنید.

۵ـ خطی که از دو نقطهٔ A(۳ و ۵) و B(۴ و ۴) می‌گذرد با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

٦ـ مطلوب است تعیین مقادیر a و b به شرط آنکه تابع با قانون مفروض زیر در نقطه‌ای به طول $x_0 = 0$ پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} - 4 & x > 0 \\ \frac{x^3 - a^3}{x-a} - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

فرستنده: آقای فرزاد نصیری دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۷ـ مشتق n ام تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1}{ax+b}$ را به‌دست آورید.
(a و b پارامتر می‌باشند و متعلق به اعداد حقیقی هستند.)

فرستنده: آقای علیرضا فاضلی دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۸ـ ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[5]{x^3+9}$ در نقطهٔ تقاطع خط $x + y + 2 = 0$ با محور طولها را حساب کنید:

۹ـ کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A=4\sin x+3-2\sqrt{5}\cos x$ چقدر است؟

فرستنده: آقای رامین معتمد دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۱۰ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x = \cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی دیپلمه ریاضی (شهریار)

۱۱ ـ ثابت کنید:

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 54^\circ = \frac{3}{4}$$

فرستنده: آقای سعید اقبالی دیپلمه ریاضی (تهران)

۱۲ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\operatorname{Arc}\cos(1 - 2t^2) = 2\operatorname{Arc}\sin t^2$$

فرستنده: آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

◇ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ مقدار k را چنان پیدا کنید که دو خط به معادلات $6x+2y=40$ و $kx+y=2$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع باشند.

۲ ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=2\sin x-\cos 3x$ را در محل تلاقی منحنی با محور y ها بنویسید.

۳ ـ تابع با ضابطهٔ $y=x^3+ax+b$ مفروض است، مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که منحنی تابع روی محور y ها با خط $y=x+1$ مماس باشد.

۴ ـ مطلوب است تعیین مختصات مرکز، کانونها، رئوس و معادلات مجانبهای هذلولی به معادلهٔ زیر:

$$9x^2-16y^2 = 64y+18x-89$$

۵ ـ تابع اولیه تابع با ضابطهٔ $f(x) = 72\cos 7x \sin 3x$ را به‌دست آورید.

۶ ـ معادلات زیر را حل کنید:

۱) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$

۲) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

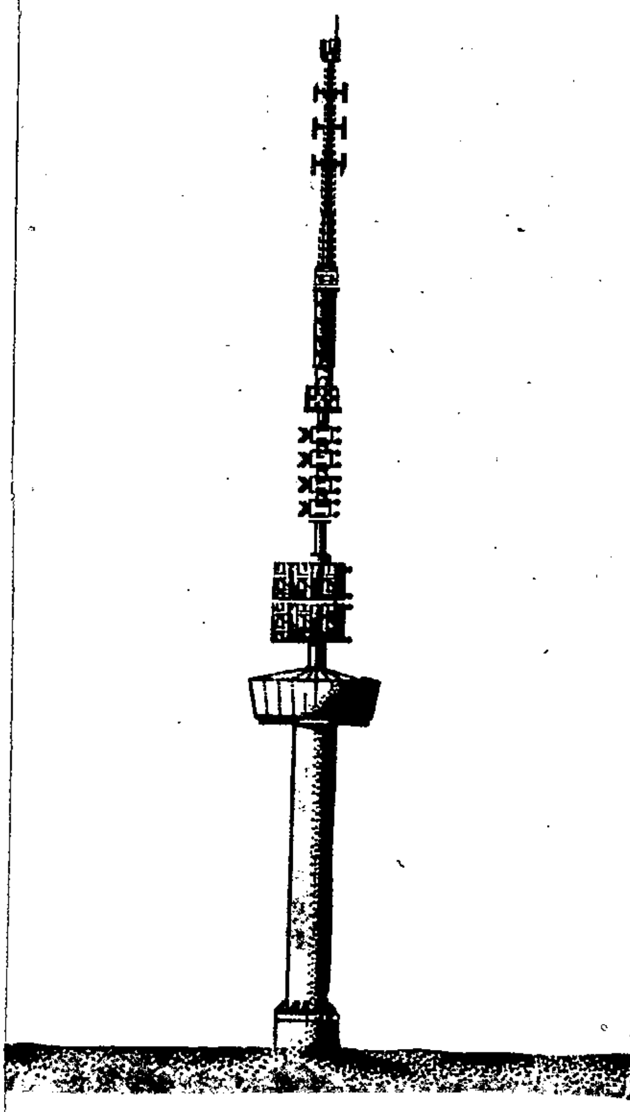
۳) $4\sin^2 x + 2\sin 2x + 12\cos^2 x = 10$

۷ ـ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم $a^2+bc = b^2+c^2$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ را تعیین کنید. در صورتی که داشته باشیم $R=\sqrt{3}$، اندازهٔ ضلع a را بیابید.

تفریح اندیشه ۷

برج تلویزیون مسکو ۵۳۰ متر ارتفاع و ۳۰۰۰۰ تن وزن دارد. مدل به مقیاس کوچکتر ساخته شده از همان ماده، درصورتی که ۵۳ سانتی‌متر ارتفاع داشته باشد، چند گرم وزن دارد؟

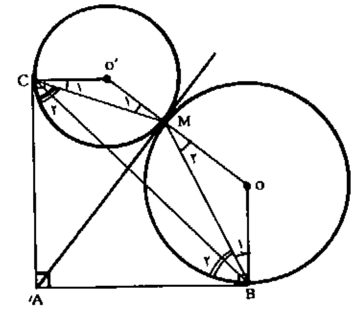
جواب در صفحهٔ ۸۸



حل مسائل برهان شمارهٔ ۱۳

□ حل مسائل ریاضیات سال اول ریاضی

۱ ـ الف) مراکز دوایر مماس بر ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب O و O' می‌نامیم. از O به B و از O' به C و از O به O' همچنین از M به نقاط B و C وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که OO' از نقطهٔ M می‌گذرد،



داریم:

$$B\hat{M}C = 180° - (\hat{M}_1 + \hat{M}_2) = 180° - (\hat{C}_1 + \hat{B}_1)$$

اما $\hat{C}_1 = 90° - \hat{C}_2$ و $\hat{B}_1 = 90° - \hat{B}_2$ است. پس:

$$B\hat{M}C = 180° - (90° - \hat{C}_2 + 90° - \hat{B}_2) = \hat{B}_2 + \hat{C}_2$$

از طرفی چون در چهارضلعی ACMB، اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۹۰° است پس:

$$B\hat{M}C + \hat{C}_2 + \hat{B}_2 = 270°$$

در نتیجه داریم: $B\hat{M}C + B\hat{M}C = 270 \Rightarrow 2B\hat{M}C = 270$

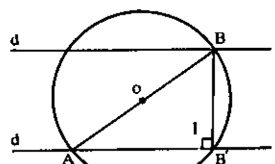
$$\Rightarrow B\hat{M}C = 135°$$

بنابراین مکان هندسی نقطه M وقتی دوایر تغییر می‌کنند (با شرطهای داده شده در مسأله) کمان درخور زاویهٔ ۱۳۵° مقابل به پاره‌خط ثابت BC است.

ب) چون $B\hat{M}C = 135°$ و $B\hat{A}C = 90°$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ M بخشی از دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AB است. یعنی $AM = AB = AC$ بنابراین AM بر دو دایرهٔ O و O' مماس است.

ج) چون AM مماس بر دایره است پس $AM \perp OO'$ است بنابراین خط المرکزین OO' بر دایره‌ای به مرکز A و شعاع $AB = AC$ مماس است.

۲ ـ فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دو خط متوازی d و d' که به فاصله l از یکدیگر واقعند جواب مسأله باشند. از B عمود BB' را بر خط d فرود می‌آوریم، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB' با معلوم بودن اندازه وتر و یک ضلع قابل رسم است. بنابراین برای حل مسأله، ابتدا به قطر پاره‌خط AB یک دایره رسم می‌کنیم. آنگاه به مرکز B و به شعاع l قوسی می‌زنیم تا دایره را در نقطهٔ B' قطع کند. از B' به A وصل می‌کنیم خط AB' یا d یکی از خطوط جواب مسأله است. حال از نقطهٔ B خط d' را به موازات خط d رسم می‌کنیم تا خط دیگر جواب مسأله نیز مشخص شود.



تمرین: شرط وجود جواب را بررسی کنید.

۳ ـ طبق فرض $(\sim q \Rightarrow p)$ ارزش نادرست دارد پس $\sim q \equiv T$ و $p \equiv F$ می‌باشد. از طرفی چون طبق فرض $(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow S)$ ارزش درست دارد پس $(p \vee \sim r) \equiv (q \Rightarrow S)$ و چون $\sim q \equiv T$ باید $p \equiv F$ بوده و گزارهٔ $(q \Rightarrow S)$ به انتفای مقدم ارزش درست داشته و باید $(P \vee \sim r)$ نیز درست باشد که چون، $p \equiv F$ پس باید $\sim r \equiv T$ لذا $\sim p \equiv T$ و $r \equiv F$ بنابراین ارزش گزارهٔ $r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)$ با توجه به نتایج حاصل همواره با $(\sim S)$ هم ارزش می‌باشد.

اگر $S \equiv T \rightarrow [r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)] \equiv F$

اگر $S \equiv F \rightarrow [r \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow S)] \equiv T$

۴ ـ اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را x و تعداد اعضای مجموعهٔ B را y فرض کنیم طبق مفروضات مسأله داریم:

$$2^x = 64 \times 2^y \Rightarrow \frac{2^x}{2^y} = 64 \Rightarrow 2^{x-y} = 64 \Rightarrow x - y = 6$$

از طرفی $x + y = 10 \Rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ x-y=6 \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = 2$

۵ ـ طبق فرض مسأله داریم $A' \cap B' = \varnothing$ و $A' \cup B' = M$ از طرفی می‌دانیم $A' \cap A = \varnothing$ و $A' \cup A = M$ بنابراین،

پس: $\begin{cases} A' \cap B' = A' \cap A \\ A' \cup B' = A' \cup A \end{cases}$

$$B' = \underbrace{B' \cup (A' \cap B')}_{\text{جذب}} = B' \cup (A' \cap A) = (B' \cup A') \cap (B' \cup A)$$

$$= (A' \cup A) \cap (B' \cup A) = (A' \cap B') \cup A = \underbrace{(A' \cap A) \cup A = A}_{\text{جذب}}$$

۶ ـ

$$\left[(A-B)' \cup (B-A)'\right] \cup (A' \cup B')$$

$$= \left[(A \cap B')' \cup (B \cap A')'\right] \cup (A' \cup B')$$

$$= \left[(A' \cup B) \cup (B' \cup A)\right] \cup (A' \cup B')$$

$$= \left(A' \cup \left[B \cup (B' \cup A)\right]\right) \cup (A' \cup B')$$

$$= \left(A' \cup \left[(B \cup B') \cup A\right]\right) \cup (A' \cup B')$$

$$= \left[A' \cup (\underbrace{M \cup A}_{M})\right] \cup (A' \cup B')$$

$$= (A' \cup M) \cup (A' \cup B') = M \cup (A' \cup B') = M$$

۷ ـ

$$\frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^2 = 4 \\ b = 2 \\ ab = 2^3 = 8 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{4^2} + \sqrt[3]{4 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{2(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})}{4 - 2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

۸ ـ

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^7\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{31}\sqrt{a}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a^{63}}}}}$$

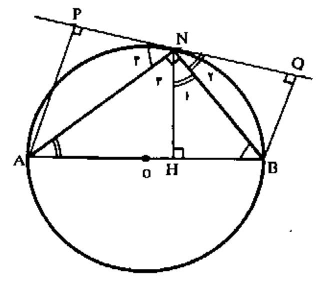
$$= \sqrt[36]{a^{63}} = \sqrt[16]{a^{21}} = a^{\frac{21}{16}} = (2^7)^{\frac{21}{16}}$$

$$= a^{\frac{3}{16}} \qquad a = 128 = 2^7$$

□ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ (حل از آقای محمود کدخدایی از اصفهان). از نقطه N به نقاط A و B وصل می‌کنیم. مثلث ANB در رأس N قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{N}_1 = \hat{N}_2 \quad \text{و} \quad \hat{B}_1 = \hat{N}_3 = \hat{N}_4$$



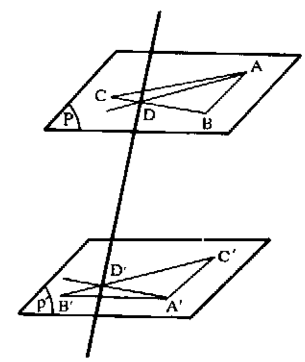
بنابراین: $\Delta NHA = \Delta NAP$ و $\Delta NBH = \Delta NBQ$ در نتیجه $HB = BQ$ و $HA = AP$ است. امّا در مثلث ANB داریم:

$$NH^2 = HA.HB$$

با جایگذاری $HA = AP$ و $HB = BQ$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow NH^2 = AP.BQ$$

۲ـ صفحهٔ $A'BC$ صفحه P را در فصل مشترک BC قطع می‌کند و صفحهٔ P' را در فصل مشترکی قطع می‌کند که از نقطهٔ A' موازی BC رسم می‌شود. این خط موازی، خط $B'C'$ از صفحهٔ $AB'C'$ را در نقطه‌ای مانند D' قطع می‌کند که یک نقطه از فصل مشترک مورد نظر است. همچنین D نقطهٔ تلاقی BC با خطی که از A به موازات $B'C'$ رسم می‌شود دومین نقطهٔ فصل مشترک مورد نظر می‌باشد. پس خط راست DD' فصل مشترک خواسته شده در مسأله است.



۳ـ فرض کنیم $B \subseteq C$ ثابت می‌کنیم $A\times B \subseteq A\times C$، برای این منظور عضوی دلخواه از $A\times B$ گرفته و ثابت می‌کنیم عضو $A\times C$ نیز می‌باشد:

[فرض کنیم $(x, y) \in (A\times B) \Rightarrow x\in A \wedge y\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in A \wedge y\in C \Rightarrow (x, y) \in A\times C$] $\Rightarrow (A\times B) \subseteq A\times C$

۴ـ شرط لازم: فرض کنیم R رابطه‌ای هم ارزی باشد، در این‌صورت طبق تعریف واضح است که رابطهٔ R بازتابی است از طرفی،

اگر: $aRb \wedge bRc \overset{\text{R متعدی است}}{\Longrightarrow} aRc \overset{\text{R متقارن است}}{\Longrightarrow} cRa$

شرط کافی: حال فرض کنیم دو شرط الف) و ب) برقرار باشند یعنی داشته باشیم:

الف) R بازتابی است

ب) $\forall a,b,c \in A ; aRb\wedge bRc \Rightarrow cRa$

ثابت می‌کنیم رابطهٔ R هم‌ارزی است.

با توجه به فرض (الف) برای اثبات هم ارزی بودن باید دو خاصیت تقارنی و تعدی را بررسی کنیم:

I) فرض کنیم $aRb \overset{\text{R بازتابی}}{\Longrightarrow} aRb \wedge bRb \overset{\text{شرط (ب)}}{\Longrightarrow} bRa$

II) فرض کنیم $aRb \wedge bRc \overset{\text{شرط (ب)}}{\Longrightarrow} cRa \overset{\text{R متقارن است}}{\Longrightarrow} aRc$

۵ـ می‌دانیم اگر دایره‌ای را دوران دهیم شکل حاصل دوباره دایره خواهد بود بنابراین برای به‌دست آوردن معادلهٔ جدید دایره کافی است مختصات مرکز جدید را پس از دوران به اندازهٔ $\pi/4$ محاسبه کنیم.
چون مرکز دایره قبل از دوران $w\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ می‌باشد پس:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w'\left|\begin{matrix}\frac{5\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right.$$ مرکز جدید

و لازم به تذکر است که در دورانِ هر دایره، شعاع دایره نیز تغییر نمی‌کند که این موضوع را بعداً در کتاب ریاضیات جدید سال چهارم ملاحظه خواهید کرد: پس معادلهٔ دایرهٔ جدید به قرار زیر است:

$$\left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$$

۶ـ چون G نسبت به عمل * شرکت‌پذیر است و دارای عضو خنثی چون e می‌باشد لذا برای اثبات گروه بودنِ G می‌بایست خاصیت عضو متقابل را با توجه به شرط داده شده بررسی کنیم. از طرفی طبق شرط داریم:
$\forall x\in G\ \exists !\ y\in G ،\ xy=e$

پس کافی است ثابت کنیم:
$\forall x\in G\ \exists !\ y\in G ،\ yx=e$

حال فرض کنیم x عضو دلخواهی از G باشد طبق فرض مسأله y ای منحصر به فرد در G هست که: $xy=e$ و چون $y\in G$ طبق همان فرض y' ای منحصر بفرد هست که $yy' = e$ بنابراین:

$$xy = e \Rightarrow y(xy) = ye$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\Longrightarrow} (yx)y = y \Rightarrow [(yx)y]\, y' = yy'$$

$$\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\Longrightarrow} (yx)(yy') = e \Rightarrow (yx)\, e = e$$

$$\Rightarrow yx = e$$

پس y متقابلِ x است.

۷ـ $x^2 - 2x - 1 = 0$

اگر ریشهٔ معادلهٔ مفروض را x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را y بنامیم داریم:

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

در معادله به‌جای x قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2} - 2\sqrt[3]{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2} - 2\sqrt[3]{y} = 1$$

طرفین را به توان (۳) می‌رسانیم:

$$y^2 - 8y - 3\left(\sqrt[3]{y^2}\right)\left(2\sqrt[3]{y}\right)(1) = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y - 6y = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - 14y - 1 = 0$$ معادلهٔ جدید

$$x'^6 + x''^6 = y_1^2 + y_2^2 = S^2 - 2P$$

$$= (14)^2 - 2(-1) = 198$$

۸ـ فرمول: $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

$$S_{10} = S_6 \Rightarrow \frac{10}{2}\left[2a_1 + 9d\right] = \frac{6}{2}\left[2a_1 + 5d\right]$$

$$\Rightarrow 5(2a_1 + 9d) = 3(2a_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow 10a_1 + 45d = 6a_1 + 15d$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 30d = 0 \Rightarrow 2a_1 + 15d = 0$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left[2a_1 + 15d\right] = \frac{16}{2}[0] = 0$$

۹ـ با توجه به اتحادهای مثلثاتی: $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$ و $\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$ و $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$

داریم:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

ـ۱۰

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\cos 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{6} \qquad \cos 2\pi x = 3k + \frac{1}{2}$$

می‌دانیم $-1 \le \cos a \le 1$ ، پس داریم:

$$-1 \le 3k + \frac{1}{2} \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le 3k \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{6}$$

$\overset{(k\in z)}{\Longrightarrow}$

$K = 0$

$\Rightarrow \cos 2\pi x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = k \pm \frac{1}{6}\ ,\ k\in Z}$

۱۱ـ

$36\sqrt{2}\,\mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = 12\pi\cos\frac{\pi}{4}$

پس از اختصار لازم داریم:

$3\sqrt{2}\,\mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{Arcsin}\sqrt[3]{x} = \frac{\pi}{6}$

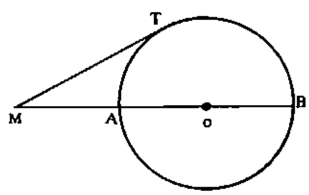
$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{8}}$

□ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ فرض می‌کنیم نقطه M یکی از نقاط مورد نظر باشد، دو سر قطر دایره، گذرنده از نقطهٔ M را A و B می‌نامیم، و از این نقطهٔ مماس MT را بر دایره رسم می‌کنیم. بنا به فرض مسأله $\frac{MA}{MT} = k$ است. از طرفی می‌دانیم که: $MT^2 = MA.MB$. به‌جای MT در این رابطه با استفاده از فرض مسأله مقدار می‌گذاریم، خواهیم داشت:

$MT = \frac{MA}{K} \Rightarrow \frac{MA^2}{K^2} = MA.MB \Rightarrow \frac{MA}{MB} = K^2 \Rightarrow$

$\frac{MA}{K^2} = \frac{MB}{1} = \frac{MB-MA}{1-K^2} = \frac{AB}{1-K^2} = \frac{2R}{1-K^2}$

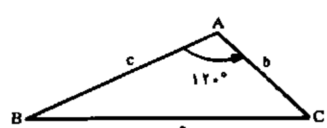


$= \frac{MA+MB}{K^2+1} = \frac{2OM}{K^2+1}$

$\Rightarrow OM = \frac{R(1+K^2)}{1-K^2} = Cte$ مقدار ثابت

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع مقدار ثابت فوق است.

۲ ـ می‌دانیم که اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = 120°$ باشد، داریم: $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. با توجه به این نکته خواهیم داشت:



الف) $r_b + r_c = R \Rightarrow \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = R \Rightarrow$

$s\left(\frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)}\right) = \frac{abc}{4s} \Rightarrow \frac{as}{(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4s}$ ،

$\Rightarrow 4s^2 = bc(p-b)(p-c)$

$4P(p-a)(p-b)(p-c) = bc(p-b)(p-c)$

$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a) = bc$

$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = bc \Rightarrow a^2 + bc - a^2 = bc$

$\Rightarrow \boxed{bc = bc}$

ب) $h_b . h_c = \frac{3}{4}bc \Rightarrow \frac{2s}{b} \times \frac{2s}{c} = \frac{3}{4}bc \Rightarrow$

$16s^2 = 3b^2c^2 \Rightarrow$

$16p(p-a)(p-b)(p-c) = 3b^2c^2$

$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 3b^2c^2$

$\Rightarrow (b^2+c^2+2bc-a^2)\left[a^2-(b^2+c^2-2bc)\right]$

$= 3b^2c^2$

$\Rightarrow (bc)(3bc) = 3b^2c^2 \Rightarrow \boxed{3b^2c^2 = 3b^2c^2}$

۳ ـ برای اثبات زیر فضا بودن چون $R \neq \emptyset$ و $R \subseteq M_{n\times n}$ کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ R یعنی، $R = \{A | AB_0 = B_0A\}$ (مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ که ضرب آنها با B_0 جابجایی دارد) نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است.

I) $A_1 , A_2 \in R \Rightarrow A_1B_0 = B_0A_1 \wedge A_2B_0 = B_0A_2$

برای این که ثابت کنیم $(A_1 + A_2)$ عضو R است باید با B_0 تعویض‌پذیر باشد

$(A_1+A_2)B_0 = A_1B_0 + A_2B_0 = B_0A_1 + B_0A_2 = B_0(A_1+A_2)$

II) فرض کنیم $r \in IR\ ,\ A \in R \Rightarrow AB_0 = B_0A$

مجدداً برای اثبات این که R نسبت به ضرب اسکالر بسته است باید ثابت کنیم rA با B_0 تعویض‌پذیر است تا بتوانیم نتیجه بگیریم $rA \in R$

$(rA)B_0 = r(AB_0) = r(B_0A) = B_0(rA)$

۴ ـ با توجه به شکل، ۲ نفر خاص را اگر a و b بنامیم یکی از حالتهای مطلوب آن است که a در مکان ۱ و b در مکان ۸ قرار بگیرد و یا به ترتیب در مکانهای ۲ و ۷ یا ۳ و ۶ یا ۴ و ۵ که چهار حالت امکان‌پذیر است و در هر حالت ۶ صندلی دیگر توسط ۶ نفر باقی مانده به !۶ طریق می‌تواند پُر شود و در ضمن در هر حالت جای a و b می‌تواند با هم عوض شود بنابراین در قسمت اولاً جواب عدد ۴ × !۲ × !۶ بوده و در قسمت ثانیاً دو نفر در کنار یکدیگر در مکانهای ۱ و ۲ یا ۲ و ۳ یا ... یا ۷ و ۸ می‌توانند قرار بگیرند که ۶ حالت داشته پس جواب به شکل (۶ × !۶ × ۲) می‌باشد.

۴	۳	۲	۱
۵	۶	۷	۸

۵ ـ در حالت کلّی اگر r شیئی متمایز را بین n خانه به تصادف توزیع کنیم احتمال آن که در یک خانهٔ معین k شیئی جا داده شده باشد از رابطهٔ $P = \frac{\binom{k}{r} \times (n-1)^{r-k}}{n^r}$ ،

در این مسأله ← $n = 2\ ,\ r = 12\ ,\ k = 3$

$\Rightarrow P = \frac{\binom{12}{3} \times 2^9}{3^{12}}$

۶ ـ طبق فرض مسأله داریم:

$\frac{\sum x_i}{50} = 16 \Rightarrow \sum x_i = 800$

$19 - 9 = 10 \Rightarrow$ میانگین واقعی $= \frac{800 - 10}{50} = 15/8$

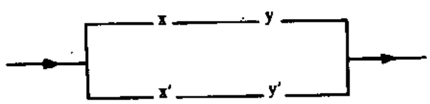
۷ ـ چون جبر گزاره‌ها همراه با دو عمل فصلی (∨) و عطفی (∧) نیز یک جبر بول است و در این جبر داریم:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p\wedge q) \vee \sim(p\vee q)$

بنابراین

$x \Leftrightarrow y \equiv (xy) + (x+y)' \equiv xy + (x'.y')$

که مدار آن به شکل زیر خواهد بود



۸ـ

$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{-\sin^2\pi[x]}$

$-\sin^2\pi[x] \geq 0 \Rightarrow \sin\pi[x] = 0$

$\Rightarrow \pi[x] = k\pi$

$\Rightarrow [x] = k\ ,\ k\in Z \Rightarrow \boxed{D_f = R}$

$\Rightarrow f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{0}\ ,\ x\in R$

$\Rightarrow -1 \leq \sin\frac{\pi x}{2} \leq +1$

$\Rightarrow \boxed{R_f = R}$

۹ـ

فرض می‌کنیم: $M\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ یک نقطه از مکان باشد. و ضریب زاویه مماسها را m فرض می‌کنیم.

معادله فرضی مماس. $y-y_1 = m(x-x_1) \Rightarrow y = mx - mx_1 + y_1$

$\begin{cases} y = mx - mx_1 + y_1 \\ y = \frac{x^2+1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{mx - mx_1 + y_1}{1}$

معادله تقاطع خط و منحنی $\Rightarrow (m-1)x^2 + (y_1 - mx_1)x - 1 = 0$

برای آن‌که خط بر منحنی مماس باشد باید معادله تقاطع ریشه مضاعف داشته باشد.

پس باید $\Delta = ۰$

$$\Delta = (y_۱ - mx_۱)^۲ + ۴(m-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow x_۱^۲m^۲ + (۴ - ۲x_۱y_۱)m + (y_۱^۲ - ۴) = ۰$$

چون دو مماس بر هم عمودند. پس: $m'.m'' = -۱$

$$m'.m'' = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{y_۱^۲ - ۴}{x_۱^۲} = -۱$$

$$\Rightarrow y_۱^۲ - ۴ = -x_۱^۲ \Rightarrow \boxed{x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴}$$ معادله مکان نقطه M.

۱۰- $$A = \sin\frac{\pi}{۵}\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin\frac{۳\pi}{۵}\sin\frac{۴\pi}{۵}$$
$$= \left(\sin\frac{\pi}{۵}\sin\frac{۴\pi}{۵}\right)\left(\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin\frac{۳\pi}{۵}\right)$$
$$= \left(\sin\frac{\pi}{۵}\sin(\pi - \frac{\pi}{۵})\right)\left(\sin\frac{۲\pi}{۵}\sin(\pi - \frac{۲\pi}{۵})\right)$$
$$= \sin^۲\frac{\pi}{۵}\sin^۲\frac{۲\pi}{۵} = \sin^۲ ۳۶^\circ \sin^۲ ۷۲^\circ$$
$$= (۱ - \cos^۲ ۳۶^\circ)(۱ - \cos^۲ ۷۲^\circ)$$
$$\Rightarrow A = ۱ - (\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۷۲^\circ) + \cos^۲ ۳۶^\circ \cos^۲ ۷۲^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ \times ۲ \times ۲\sin ۳۶^\circ}{۲ \times ۲\sin ۳۶^\circ}$$
$$= \frac{۲\sin ۷۲^\circ \cos ۷۲^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{\sin ۱۴۴^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{\sin(۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ)}{۴\sin ۳۶^\circ}$$
$$= \frac{\sin ۳۶^\circ}{۴\sin ۳۶^\circ} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow A = ۱ - \left(\frac{۱ + \cos ۷۲^\circ}{۲} + \frac{۱ + \cos ۱۴۴^\circ}{۲}\right) + \frac{۱}{۱۶}$$
$$= \frac{۱}{۱۶} - \frac{\cos ۷۲^\circ + \cos ۱۴۴^\circ}{۲} = \frac{۱}{۱۶} - \frac{\cos ۷۲^\circ - \cos ۳۶^\circ}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۱۶} + \frac{۲\sin ۵۴^\circ \sin ۱۸^\circ}{۲} = \frac{۱}{۱۶} + \sin ۵۴^\circ \sin ۱۸^\circ$$
$$= \frac{۱}{۱۶} + \cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۱۶}$$
$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{۵}{۱۶}}$$

۱۱- داریم:

$$tg(۲\alpha - \alpha) = \frac{tg\,۲\alpha - tg\alpha}{۱ + tg\alpha\, tg۲\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{tg۲\alpha - tg\alpha}{۱ + tg\alpha\, tg\,۲\alpha}$$
$$\Rightarrow tg\alpha\, tg\,۲\alpha = \frac{tg\,۲\alpha - tg\,\alpha}{tg\,\alpha} - ۱$$
$$tg(۳\alpha - ۲\alpha) = \frac{tg\,۳\alpha - tg\,۲\alpha}{۱ + tg۳\alpha\, tg\,۲\alpha}$$
$$\Rightarrow tg۲\alpha\, tg\,۳\alpha = \frac{tg\,۳\alpha - tg\,۲\alpha}{tg\alpha} - ۱$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$S = \frac{tg\,۲\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - ۱ + \frac{tg\,۳\alpha - tg\,۲\alpha}{tg\alpha} - ۱ + \dots + \frac{tgn\alpha - tg(n-۱)\alpha}{tg\alpha} - ۱$$
$$= \frac{tg۲\alpha - tg\alpha + tg۳\alpha - tg۲\alpha + \dots + tgn\alpha - tg(n-۱)\alpha}{tg\alpha} - n$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$S = \frac{tgn\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - n$$

۱۲- $$\cos^{۱۰}x + \sin^{۱۰}x = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$$
$$(\cos^۲x)^۵ + (\sin^۲x)^۵ = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$$
$$\Rightarrow \left(\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}\right)^۵ + \left(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}\right)^۵ = \frac{۲۹}{۱۶}\cos^۲ ۲x$$
$$\Rightarrow (۱ + \cos ۲x)^۵ + (۱ - \cos ۲x)^۵ = ۵۸\cos^۲ ۲x$$

با توجه به اتحاد:

$$(a \pm b)^۵ = a^۵ \pm ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ \pm ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ \pm b^۵$$

و اختصار لازم داریم:

$$۲۴\cos^۴ ۲x - ۱۰\cos^۲ ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ ۲x = \frac{۵ \pm ۷}{۲۴}$$

جواب مورد قبول چنین است:

$$\cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲},$$
$$\cos ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۸},$$
$$\cos ۲x = \cos\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{۳\pi}{۸}$$

۱۳- با توجه به تساویهای $b = ۲R\sin\hat{B}$ و $c = ۲R\sin\hat{C}$ داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۸R^۲\cos\hat{B} \Rightarrow ۴R^۲\sin^۲\hat{B} + ۴R^۲\sin^۲\hat{C}$$
$$= ۸R^۲\cos\hat{B}$$
$$\Rightarrow \sin^۲\hat{B} + \sin^۲\hat{C} = ۲\cos\hat{B}$$

و با استفاده از اتحاد $\sin^۲\hat{C} = \frac{۱ - \cos ۲\hat{C}}{۲}$ و شرط مسأله $\hat{B} = ۲\hat{C}$، خواهیم داشت:

$$\sin^۲\hat{B} + \frac{۱ - \cos\hat{B}}{۲} = ۲\cos\hat{B}$$
$$\Rightarrow ۱ - \cos^۲\hat{B} + \frac{۱ - \cos\hat{B}}{۲} = ۲\cos\hat{B}$$
$$\Rightarrow ۲\cos^۲\hat{B} + ۵\cos\hat{B} - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow \cos B = \frac{-۵ \pm ۷}{۴}$$

و جواب مورد قبول چنین است:

$$\cos\hat{B} = \frac{-۵ + ۷}{۴} = \frac{۱}{۲} = \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$$
$$,\ \hat{A} = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ,\ \hat{B} = ۶۰^\circ,\ \hat{C} = ۳۰^\circ$$

□ حل مسائل کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱ - اولاً: قرار دهید $F(x) = (2x + 1)^2 - 4\cos\pi x$ ، چون $F(\frac{1}{4}) < ۰$ و $F(\frac{1}{3}) > ۰$ است و از آنجاکه $F(x)$ در فاصلهٔ داده شده پیوسته است بنابراین یک x در فاصلهٔ $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ وجود دارد که در آن $F(x) = ۰$.

خوانندگان دقیق توجه دارند دنباله‌هایی که با روش نیوتن - رفسون برای x_nها ایجاد می‌شود زمانی منتهی به جواب می‌شود که این دنباله همگرا باشد. بحث کامل و پیشرفتهٔ این روش را که مشتمل بر برقراری دو شرط:

۱- به ازای تمام مقادیر x در فاصلهٔ $[a,b]$ بایستی $|g'(x)| < 1$ باشد.

۲- به ازای تمام مقادیر x در فاصلهٔ $[a,b]$ بایستی $a \le g(x) \le b$ باشد، است؛ می‌توانید در هر کتاب مقدماتی آنالیز عددی بیابید.

ثانیاً: برنامه:

```
10   REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20   LET PI=4*ATN(1)
30   INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 1/4 & 1/3 PLEASE : ";X
40   LET Y=X-((2*X+1)^2-4*COS(PI*X))/(4*(2*X+1)+4*PI*SIN(PI*X))
50   WHILE ABS(Y-X) > .000001
60      LET  X       = Y
70      LET  FX      = (2*X+1)^2-4*COS(PI*X)
80      LET  FPRIME  = 4*(2*X+1)+4*PI*SIN(PI*X)
90      LET  Y       = X-FX/FPRIME
100  WEND
110  PRINT"APPROXIMATE ROOT OF (2*X+1)^2-4*COS(PI*X) = 0 EQUALS X=";Y
120  END
```

۵-

$1)\ s \Rightarrow p$
$2)\ p \Rightarrow (p \wedge r)$
$3)\ \sim q \wedge (s \vee t)$
$\therefore\ t$

از (۱) و (۲) و قیاس	$4)\ s \Rightarrow (q \wedge r)$
از (۳) و حذف عاطف	$5)\ (s \vee t)$
از (۵) و تبدیل فصلی به شرطی	$6)\ (\sim t \Rightarrow s)$
از (۶) و (۵) و قیاس	$7)\ \sim t \Rightarrow (q \wedge r)$
از ۳ و حذف عاطف	$8)\ \sim q$
از (۸) و ادخال فاصل	$9)\ (\sim q \vee \sim r)$
از ۷ و ۹ و نقیض انتزاع	$10)\ \therefore t$

۶- چون طبق فرض در حلقهٔ یکدار R داریم $ab = 1$ پس $b \neq 0$ و $a \neq 0$ از طرفی:

$$(ab)\times 1 = ab \overset{ab=1}{\Longrightarrow} (ab)ab = ab$$
$$\Rightarrow a(ba)b = ab \Rightarrow a(ba)b - ab = 0$$
$$\Rightarrow a(ba-1)b = 0 \overset{\text{R مقسوم علیه صفر ندارد}}{\Longrightarrow} (ba-1)=0 \Rightarrow ba=1$$

۷- می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم: $2^{n-1}(x^n+y^n) \geq (x+y)^n$

$n = 1 \rightarrow 2^0(x+y) \geq (x+y) \Rightarrow p(1) \equiv T$

فرض استقراء $n = k \rightarrow 2^{k-1}(x^k+y^k) \geq (x+y)^k$

حکم استقراء

$n = (k+1) \rightarrow 2^k(x^{k+1}+y^{k+1}) \geq (x+y)^{k+1}$

طرفین فرض را در $(x+y)$ ضرب می‌کنیم که خواهیم داشت:

$2^{k-1}(x^k+y^k)(x+y) \geq (x+y)^{k+1}$

حال با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده و حکم استقراء کافی است ثابت کنیم:

$2^{k-1}(x^k+y^k)(x+y) \leq 2^k(x^{k+1}+y^{k+1})$

$$\overset{\text{بر } 2^{k-1} \text{ تقسیم}}{\Longleftrightarrow} (x^{k+1}+x^ky+y^kx+y^{k+1}) \leq 2(x^{k+1}+y^{k+1})$$
$$\Leftrightarrow x^{k+1}+y^{k+1}+x^ky+y^kx \geq 0 \Leftrightarrow x^k(x+y)+y^k(y+x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x^k+y^k) \geq 0$$

نامساوی آخر برقرار است زیرا طبق فرض x و y اعداد مثبت بوده پس x^k و y^k نیز مثبت بوده بنابراین $(x+y)$ و (x^k+y^k) هر دو مثبت می‌باشند.

۸- از روش نردبانی استفاده کرده و قسمت اولاً را ثابت می‌کنیم:

	۱	۲	۱	۳		
$15a+4b$	$11a+3b$	$4a+b$	$3a+b$	a	b	
$4a+b$	$3a+b$	a	b			

$(15a+4b \text{ و } 11a+3b) = (a,b) \Leftarrow$ طبق آلگوریتم اقلیدسی

ثانیاً:

$$3^4 = 81 \overset{17}{\equiv} (-4) \Rightarrow (3^4)^{n+1} \overset{17}{\equiv} (-4)^{n+1}$$
$$4^3 = 64 \overset{17}{\equiv} -4 \Rightarrow (4^3)^{n+1} \equiv (-4)^{n+1}$$
$$\Rightarrow 3^{4n+4} - 4^{3n+3} \overset{17}{\equiv} (-4)^{n+1} - (-4)^{n+1} = 0$$

۹- چون $(9n+7 \text{ و } 5n+4) = 1$ لذا معادلهٔ $(9n+7)x + (5n+4)y = 8$ همواره در Z دارای جواب است و اگر قرار دهیم $n = 1$ معادله به شکل $16x + 9y = 8$ ظاهر می‌شود که داریم:

$$y = \frac{8-16x}{9} = \frac{9-1-18x+2x}{9} = 1-2x+\frac{2x-1}{9}$$

چون $y \in Z \Rightarrow \frac{2x-1}{9} = t \Rightarrow 2x-1 = 9t \Rightarrow x = \frac{9t+1}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{8t+t+1}{2} = 4t + \frac{t+1}{2}$$

اگر $\frac{t+1}{2} = k \Rightarrow t+1 = 2k \Rightarrow t = 2k-1$

اگر $k = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \boxed{x=-4}$ و $\boxed{y=8}$

۱۰- چون $|A| = k$ و با توجه به این که اگر A ماتریس $n \times n$ باشد همواره $|\alpha A| = \alpha^n|A|$ داریم:

$$||A|A|A| = ||kA|A| = |k^n|A|A|$$
$$= |k^{n+1}A| = (k^{n+1})^n\ |A| = k^{n^2+n} \times k = k^{n^2+n+1}$$

۱۱- ماتریس تبدیل کل از ضرب این دو ماتریس تبدیل در یکدیگر حاصل می‌شود یعنی:

$$\text{ماتریس تبدیل کل} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال برای نوشتن معادلهٔ خط حاصل کافی است ماتریس تبدیل کل را روی نقطه‌ای دلخواه از خط اثر داده و تبدیل یافته آن را یافته و روی معادلهٔ خط اعمال کنیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 & 2 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{3}{2}}y + 2 \\ \sqrt{3}/2\,x + \frac{1}{2}y - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 = X \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = X - 2 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = Y + 1 & 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}X - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}}$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \frac{1}{2}y = Y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$\Rightarrow y = 2Y + 2 - \sqrt{3}x$$
$$= 2Y + 2 - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y = 2Y + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{3}{2}Y + \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}Y - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{2\sqrt{3}+1}{2}}$$

حال در معادلهٔ خط داده شده یعنی $2x - y = 4$ به‌جای x و y تبدیل یافته‌های آنها را قرار می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$2\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}Y - \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right) = 4$$
$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)X + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)Y$$
$$= \frac{13}{2} \quad \text{معادلهٔ جدید خط}$$

۱۲- $y = \frac{ax^2+bx}{x^2+x+3} \qquad b<0$

$$y' = \frac{(a-b)x^2+6ax+3b}{(x^2+x+3)^2} = 0$$
$$\Rightarrow (a-b)x^2 + 6ax + 3b = 0$$
$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{12}{5} = \frac{-6a}{a-b} \Rightarrow \boxed{3a = -2b}$$

$y = \frac{ax^2+bx}{x^2+x+3} \Rightarrow$ طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow (y-a)x^2 + (y-b)x + 3y = 0$$
$$\Delta = (y-b)^2 - 12y(y-a) = 0$$
$$\Rightarrow -11y^2 + (12a - 2b)y + b^2 = 0$$
$$y_1 y_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{9}{11} = \frac{b^2}{-11}$$
$$\Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b=-3} \text{ و } \boxed{a=2}$$

۱۳-

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3dt$$
$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2}\left(4t^3\right)dt = 4\int t\,\sqrt[3]{1+t}\,dt$$

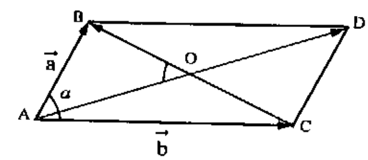
۲ ـ برنامه:

```
10   REM NEWTON - RAPHSON METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS
20   INPUT"  ENTER A NUMBER BETWEEN (0) & 2 PLEASE : ";X
30   LET Y=X-(2*SIN(X)-X)/(2*COS(X)-1)
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50     LET  X      = Y
60     LET  FX     = 2*SIN(X)-X
70     LET  FPRIME = 2*COS(X)-1
80     LET  Y      = X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"APPROXIMATE ROOT OF 2*SIN(X)-X = 0 EQUALS X=";Y
110  END
```

```
10   REM  SOLVING X^3+X-1=0 BY NEWTON - RAPHSON METHOD
20   INPUT"ENTER A NUMBER BETWEEN 0 & 1 PLEASE :";X
30   LET Y=X-(X^3+X-1)/(3*X^2+1)
40   WHILE ABS(Y-X) > .000001
50     LET  X      = Y
60     LET  FX     = X^3+X-1
70     LET  FPRIME = 3*X^2+1
80     LET  Y      =  X-FX/FPRIME
90   WEND
100  PRINT"  X= ";Y;" IS A ROOT OF X^3+X-1=0 "
110  END
```

☐ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ الف) اگر $\vec{a} = \vec{AB}$ و $\vec{b} = \vec{AC}$ اختیار شود، $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ خواهد بود. با فرض $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ در مثلث ABD داریم:



$$A\hat{B}D = ۱۸۰ - \alpha,\ AB = |\vec{a}| = ۴,\ BD = |\vec{b}| = ۶,$$

$$AD = |\vec{a} + \vec{b}| = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$\Rightarrow \cos A\hat{B}D = \cos(۱۸۰ - \alpha) = \frac{AB^۲ + BD^۲ - AD^۲}{۲AB.BD}$$

$$= \frac{۱۶ + ۳۶ - ۷۶}{۲ \times ۴ \times ۶} = \frac{-۲۴}{۴۸} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{۳}$$

ب) در متوازی‌الاضلاع ABDC داریم:

$$AD^۲ + BC^۲ = ۲(AB^۲ + AC^۲)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^۲ + |\vec{a} - \vec{b}|^۲$$

$$= ۲(|\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲)$$

$$\Rightarrow (۲\sqrt{۱۹})^۲ + |\vec{a} - \vec{b}|^۲ = ۲(۱۶ + ۳۶)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^۲ = ۲۸ \Rightarrow \boxed{|\vec{a} - \vec{b}| = ۲\sqrt{۷}}$$

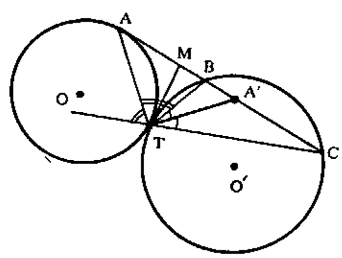
ج) در مثلث AOB داریم: $AB = ۴, OB = \sqrt{۷}, OA = \sqrt{۱۹}$.
با فرض $A\hat{O}B = \theta$ خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{OA^۲ + OB^۲ - AB^۲}{۲OA.OB} = \frac{۱۹ + ۷ - ۱۶}{۲\sqrt{۱۹} \times \sqrt{۷}}$$

$$= \frac{۵}{\sqrt{۱۳۳}} \Rightarrow$$

زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر $\theta = \text{Arccos}\frac{۵}{\sqrt{۱۳۳}} = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$

۲ ـ حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره مماس خارجند. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا خط AB را در نقطهٔ M قطع کند. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطه M را به‌دست آورده A' می‌نامیم.



بنا به روابط طولی در دایره داریم: $MT^۲ = MB.MC$

امّا $MT = MA = MA'$ پس $MA^۲ = MA'^۲ = MB.MC$. باتوجه به اینکه نقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' است، رابطه فوق نشان می‌دهد که (AA'BC) یک تقسیم توافقی و T-AA'BC یک دستگاه توافقی است که چون دو شعاع TA و TA' بر هم عمودند (زیرا در مثلث AA'T داریم $MA = MT = MA'$)، پس TA و TA' نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویهٔ BTC می‌باشد که در این حالت TA نیمساز زاویهٔ خارجی BTC است در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند به روش مشابه ثابت می‌شود که TA نیمساز زاویهٔ داخلی BTC است.

۳ ـ معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط $D: ۲x - ۱ = y = z - ۳$ را می‌نویسیم و از بین صفحات این دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ $P: x + ۲y + z = ۰$ عمود باشد.

$$D: \begin{cases} ۲x - ۱ - y = ۰ \\ y - z + ۳ = ۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط D:

$$\alpha(۲x - y - ۱) + \beta(y - z + ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow ۲\alpha x + (\beta - \alpha)y - \beta z - \alpha + ۳\beta = ۰ \Rightarrow$$

بردار نرمال دسته صفحه $\vec{V}(۲\alpha, \beta - \alpha, -\beta)$

بردار نرمال صفحهٔ P $\quad P: x + ۲y + z = ۰ \Rightarrow \vec{V'}(۱, ۲, ۱)$

شرط عمود بودن دو صفحه $\quad aa' + bb' + cc' = ۰$

$$\Rightarrow ۱(۲\alpha) + ۲(\beta - \alpha) + ۱(-\beta) = ۰$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = ۰ \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow -۲\beta x + ۲\beta y - \beta z + ۴\beta = ۰$$

معادلهٔ صفحهٔ موردنظر (صفحهٔ P') $\Rightarrow \boxed{-۲x + ۲y - z + ۴ = ۰}$

$P: x + ۲y + z = ۰$ و $P': -۲x + ۲y - z + ۴ = ۰$

$$\alpha(x + ۲y + z) + \beta(-۲x + ۲y - z + ۴) = ۰$$
$$\Rightarrow (\alpha - ۲\beta)x + (۲\alpha + ۲\beta)y + (\alpha - \beta)z + ۴\beta = ۰$$

معادله دسته صفحهٔ شامل دو صفحهٔ P و P'.

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x + ۴y = ۴ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ + z^۲ = ۹$$

$\Rightarrow O_۱(۱, -۲, ۰)$ مرکز کره، $R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳$ شعاع کره

شرط مماس بودن صفحه بر کره آن است که فاصلهٔ مرکز کره از صفحه، برابر شعاع کره باشد، یعنی:

$$۳ = \frac{|\alpha - ۲\beta - ۴\alpha - ۴\beta + ۴\beta|}{\sqrt{(\alpha - ۲\beta)^۲ + (۲\alpha + ۲\beta)^۲ + (\alpha - \beta)^۲}}$$
$$= \frac{۳|\alpha + \beta|}{\sqrt{۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲}}$$

$$\Rightarrow |\alpha + \beta| = \sqrt{۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲} \Rightarrow \alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\alpha\beta$$
$$= ۶\alpha^۲ + ۱۴\beta^۲ \Rightarrow ۵\alpha^۲ - ۲\alpha\beta + ۱۳\beta^۲ = ۰$$

$\Delta' = \beta^۲ - ۶۵\beta^۲ = -۶۴\beta^۲ < ۰ \Rightarrow$ جواب ندارد.

بنابراین هیچ صفحه‌ای از دسته صفحه بالا نمی‌تواند بر کره داده شده مماس باشد. علت آن است که خط $D': \frac{x}{۲} = \frac{y + ۱}{۱} = \frac{z - ۲}{-۴}$ فصل مشترک دو صفحه P و P' با کره متقاطع است بنابراین هر صفحه‌ای که بر D' بگذرد کره را قطع خواهد کرد.

۴ ـ

$$[(\sim s \wedge p) \vee (p \wedge s)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$$

$$\equiv [p \wedge (\underbrace{\sim s \vee s}_{(T)})] \Rightarrow [\sim(p \Rightarrow q) \vee q]$$

$$\equiv (p \wedge T) \Rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee q] \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

$$1+t=u \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ t=u-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=4\int (u-1)\,u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$=4\int u^{\frac{4}{3}}\,du-4\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$=4\times\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}}-3u^{\frac{4}{3}}+c$$

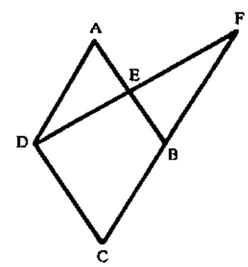
$$=\frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}-3(1+t)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{4}{3}}+c$$

□ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ـ در مثلث FDC، $EB \| DC$ است لذا داریم:

$$\frac{CF}{CB}=\frac{DF}{DE} \qquad (1)$$



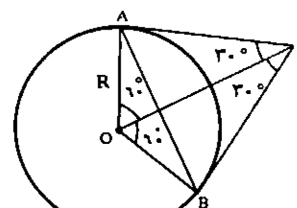
از طرفی دلیل موازی بودن AD و FB می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{DF}{DE} \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) با توجه به اینکه $CB=CD$ و $AB=AD$ است نتیجه می‌شود که:

$$\frac{CF}{CD}=\frac{AD}{AE}$$

۲ـ از نقطه P به نقطه O مرکز دایره و از A به B وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OP عمودمنصف AB و همچنین نیمساز زوایای APB و AOB است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP داریم:



$$\hat{A}=90^\circ \;,\; A\hat{P}O=30^\circ \;,\; A\hat{O}P=60^\circ$$

و $OA=R$ پس: $OP=2R$ و $AP=R\sqrt{3}$ زیرا:

$$OA^2+AP^2=OP^2$$

بنابراین نقطهٔ P را روی مماس مرسوم بر دایره از نقطهٔ A چنان باید اختیار کنیم که $AP=R\sqrt{3}$ باشد. برای محاسبهٔ طول وتر AB ابتدا AH را محاسبه می‌کنیم:

$$AH.OP=OA.AP \Rightarrow AH\times 2R=R\times R\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$AH=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB=R\sqrt{3}$$

نکته: مثلث APB متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰° است، پس متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $AB=AP=PB=R\sqrt{3}$ است.

۳ـ معادلهٔ درجه دومی با ریشه‌های $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-4x+1=0$$

در اینجا $F(x)$ را بر عبارت x^2-4x+1 تقسیم می‌کنیم:

$$F(x)=(x^2-4x+1)(x^5-x^3+x^2-7)+2x-4$$

$$x=2+\sqrt{3}\;:\; f(2+\sqrt{3})=2(2+\sqrt{3})-4=2\sqrt{3}$$

۴ـ داریم:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)=2(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac-2bc=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$$

هر سه عبارت سمت چپ تساوی اخیر مثبت می‌باشند پس حاصل جمع آنها صفر نخواهد بود مگر هر کدام از عبارتها صفر باشند:

$$(a-b)^2=0 \;\text{و}\; (a-c)^2=0 \;\text{و}\; (b-c)^2=0$$

$$\Rightarrow a=b \;,\; a=c \;,\; b=c \Rightarrow a=b=c$$

$$A=\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{c}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$$

۵ـ

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n$$

$$=\left(\frac{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+1)}{x-1}\right)^2-x^n$$

$$=\frac{(x^{n+1}-1)^2}{(x-1)^2}-x^n$$

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^n(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^{2n+2}-x^{n+2})-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x^{n+1}+x^n+\dots+1)}{x-1}$$

$$=(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})\,(1+x+x^2+\dots+x^{n+1})$$

۶ـ با فرض $x=X^3$ و $y=Y^3$ داریم:

$$a=\sqrt{X^6+\sqrt{X^{12}Y^6}}+\sqrt{Y^6+\sqrt{X^6Y^{12}}}$$

$$=\sqrt{X^4(X^2+Y^2)}+\sqrt{Y^4(Y^2+Y^2)}$$

$$=(X^2+Y^2)\sqrt{X^2+Y^2}=(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow X^2+Y^2=a^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

۷ـ

$$P=\sqrt{3-\sqrt{3}+\underbrace{\sqrt{3+\underbrace{\sqrt{13+4\sqrt{3}}}_{a}}}_{b}}$$

$$a=\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{12+1+2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{12})^2}=1+\sqrt{12}=1+2\sqrt{3}$$

$$b=\sqrt{3+1+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{3-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2 \Rightarrow \boxed{P=2}$$

۸ـ

$$\frac{(x^2+1)(x^2-3x+2)(x^3+2x^2)}{(x^5+x^4)(x^2+x+1)(x^2-4)}=0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-3x+2)(x^3+2x^2)=0$$

و $(x^5+x^4)(x^2+x+1)(x^2-4)\neq 0$

$\Rightarrow x^2+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=2$

$x^3+2x^2=0 \Rightarrow x^2(x+2)=0 \Rightarrow x^2=0$ یا $x+2=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

مخرج کسر را به ازای ریشه‌های صورت محاسبه می‌کنیم. بدیهی است ریشه‌هایی که مخرج کسر را صفر نکند ریشهٔ معادله به‌حساب می‌آیند، پس از جایگزین کردن ریشه‌ها در مخرج کسر نتیجه می‌شود که معادله فقط یک ریشه دارد و آن $x=1$ می‌باشد.

۹ـ

$$A=\sqrt{\sqrt[3]{x^2-1}}+\sqrt{\sqrt[5]{1-x^2}}$$
$$\Rightarrow A=\sqrt[6]{x^2-1}+\sqrt[10]{1-x^2}$$

A وقتی تعریف شده است که عبارتهای زیر رادیکال، مثبت یا صفر باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\geq 1 \\ x^2\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \ \text{یا}\ x\leq -1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

از اشتراک نامعادلات دستگاه اخیر نتیجه می‌شود: $x=\pm 1$

بنابراین عبارت A به ازای $x=\pm 1$ تعریف شده است:

$$x=\pm 1 \Rightarrow A=0$$

۱۰ـ

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\dots$$
$$S=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots)$$
$$S=(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots)-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots)$$
$$S=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots)$$
$$S'=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots \Rightarrow \begin{cases} S'-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots \\ \frac{S'}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow S'-1=\frac{S'}{4} \Rightarrow S'=\frac{4}{3} \text{ و } S=\frac{1}{2}S'=\frac{1}{2}(\frac{4}{3})=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \boxed{S=\frac{2}{3}}$$

۱۱ـ عبارت A را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots)+(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots)$$
$$+(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\dots+\frac{1}{5^{n-1}}+\dots)$$

هر یک از پرانتزها یک تصاعد هندسی نامتناهی با قدر نسبت مثبت و کوچکتر از یک می‌باشد. بنابراین داریم:

$$A=\frac{a_1}{1-q_1}+\frac{a_2}{1-q_2}+\frac{a_3}{1-q_3}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\frac{1}{15}}$$
$$\Rightarrow A=2+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{19}{4} \Rightarrow \boxed{A=\frac{19}{4}}$$

۱۲ـ صورت و مخرج کسر یک تصاعد هندسی نامتناهی با قدر نسبت مثبت کوچکتر از یک می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-2x}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-2x}{1-x}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2-4x=1-x \Rightarrow 3x=1$$
$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

۱۳ـ اگر $\log_2\log_3\log_4^x=0$ باشد، داریم:

$$\log_2\log_3\log_4^x=0 \Rightarrow \log_3\log_4^x=1$$
$$\Rightarrow \log_4^x=3 \Rightarrow x=4^3 \Rightarrow \boxed{x=64}$$

۱۴ـ

$$\sin x\cos x=-\frac{1}{4} \Rightarrow 2\sin x\cos x=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=1-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin x+\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

۱۵ـ

$$\sin x\cos^3x-\cos x\sin^3x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x\cos x(\cos^2x-\sin^2x)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow 2\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=1 \Rightarrow \boxed{\sin 4x=1}$$

۱۶ـ

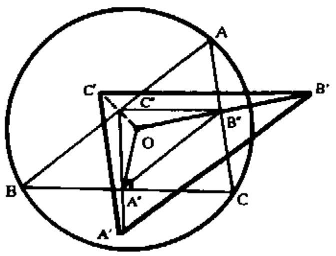
$$\frac{1+tg23^\circ}{1-tg23^\circ}=\frac{tg45^\circ+tg23^\circ}{tg45^\circ-tg23^\circ}=\frac{\frac{\sin(45^\circ+23^\circ)}{\cos45^\circ\cos23^\circ}}{\frac{\sin(45^\circ-23^\circ)}{\cos45^\circ\cos23^\circ}}$$
$$=\frac{\sin68^\circ}{\sin22^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-22^\circ)}{\sin22^\circ}=\frac{\cos22^\circ}{\sin22^\circ}=\text{cotg}\,22^\circ$$

۱۷ـ

$$\sqrt{2}\cos x=\cos^3x+\sin^3x+\sin x\cos^2x+\cos x\sin^2x$$
$$=\cos^3x+\sin x\cos^2x+\sin^3x+\cos x\sin^2x$$
$$=\cos^2x(\cos x+\sin x)+\sin^2x(\sin x+\cos x)$$
$$=(\cos x+\sin x)\underbrace{(\cos^2x+\sin^2x)}_{1}$$
$$=\cos x+\sin x$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos x=\cos x+\sin x$$
$$\Rightarrow \sin x=\sqrt{2}\cos x-\cos x$$
$$\Rightarrow \sin x=\cos(\sqrt{2}-1)$$
$$\Rightarrow tgx=\sqrt{2}-1=tg22/5^\circ$$
$$\Rightarrow x=k\pi+22/5^\circ$$

□ حل مسائل ریاضیات سوّم تجربی

۱ـ نقاط تقاطع OA'، OB' و OC' با اضلاع BC، AC و AB را به‌ترتیب A'' و B'' و C'' می‌نامیم و این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. می‌دانیم که A'' وسط ضلع BC (قطر عمود بر وتر، وتر و کمان مقابلش را نصف می‌کند) و A'' وسط OA' است (زیرا A' قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به ضلع BC است) و B'' وسط ضلع AC و C'' وسط ضلع AB می‌باشند بنابراین: $B''C''=\frac{BC}{2}$ و $B''C''=\frac{B'C'}{2}$ پس $B'C'=BC$ و به همین دلیل $A'B'=AB$ و $A'C'=AC$ است، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم برابرند و اضلاع نظیرشان نیز متوازی‌اند، زیرا $B''C''||BC$ و $B''C''||B'C'$، پس $B'C'||BC$، و به همین ترتیب $A'B'||AB$ و $A'C'||AC$ است.



۲ـ می‌دانیم که: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

پس داریم: $(\vec{a}+\vec{b})^2=25+16+2\times5\times4\cos\frac{2\pi}{3}$

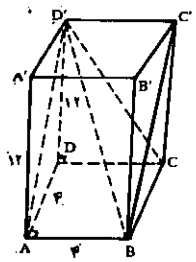
$$(\vec{a}+\vec{b})^2=41-20=21$$

۳ـ اولاً: با توجه به اندازه قطر در مکعب مستطیل به ابعاد a و b و c داریم:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow D'B=\sqrt{16+16+144}$$
$$\Rightarrow D'B=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$$

ثانیاً: $A'D=\sqrt{16+144}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$

$$\Rightarrow S_{ABC'D'}=AB.AD'=4\times4\sqrt{10}=16\sqrt{10}$$



صفحه $ABC'D'$ صفحه‌ای قطری است که حجم منشور را به دو قسمت برابر بخش می‌کند.

ثالثاً:

$$\text{حجم هرم}=V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times DD'$$
$$=\frac{1}{3}\times16\times12=64$$

۴ـ ابتدا نقطهٔ عطف منحنی را به‌دست می‌آوریم:

$$y+f(x)=3x^2-x^3 \Rightarrow y'=6x-3x^2 \Rightarrow y''=6-6x$$
$$\Rightarrow y''=0 \Rightarrow 6-6x=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1\ ,\ f(1)=3-1=2$$

و (۲ و ۱) A نقطه عطف

ضریب زاویه خط مماس $m=f'(1)=6-3=3$

$$\Rightarrow m'=-\frac{1}{m} \Rightarrow \boxed{\text{ضریب زاویهٔ خط قائم: } m'=-\frac{1}{3}}$$

۵- $y = x^3 - 3ax^2 + 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 6ax + 3$

$\Rightarrow y' \ge 0 \Rightarrow 3x^2-6ax+3\ge 0 \Rightarrow x^2-2ax+1\ge 0$

ضریب x^2 مثبت است، بنابراین باید داشته باشیم: $\Delta' = a^2-1 \le 0$

$\Rightarrow a^2-1\le 0 \Rightarrow a^2\le 1 \Rightarrow \boxed{-1\le a\le 1}$

۶- دامنه تابع چنین است:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow D_f=\{x \mid x+1\ge 0 ,\ 1-x^2>0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ 1-x^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ -1<x<1\end{cases} \Rightarrow -1<x<1$$

$$\Rightarrow D_f=\{x|-1<x<1\}=]-1 , 1[\Rightarrow \boxed{D_f=(-1 , 1)}$$

۷-

$f(x)=\frac{1}{x}$, $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2+1}$ (۱)

در ضابطهٔ تابع f تبدیل $x\to g(x)$ را انجام می‌دهیم:

$f(g(x))=\frac{1}{g(x)}$ (۲)

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{1}{g(x)}=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\xrightarrow{(x\to x^2)} \boxed{g(x^2)=\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}}$$

۸- شرایط پیوستگی در نقطهٔ $A\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ چنین است:

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(kx^2+s)=s$

و $\lim_{x\to 0^-}(\sin x+k-1)=k-1$ و $f(0)=1 \Rightarrow s=k-1=1$

$$\Rightarrow s=1 ,\ k=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x<0\\ 2x^2+1 & x\ge 0\end{cases}$$

$\Rightarrow f(1)=2(1)^2+1=2+1=3$

$x<0 : f(x)=\sin x+1 \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x$

$x=\frac{-\pi}{2} : f''\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\Rightarrow f(1)f''\left(\frac{-\pi}{2}\right)=1\times 3=3 \Rightarrow \boxed{f(1)f''\left(\frac{-\pi}{2}\right)=3}$

۹- مرکز تقارن تابع درجهٔ سوم با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+1$ منطبق بر نقطهٔ عطف آن است. بنابراین داریم: $f'(x)=3x^2-6x$

$\Rightarrow f''(x)=6x-6 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$ و $f(1)=-1$

نقطه عطف یا مرکز تقارن $A(1 , -1)$ و $x-y+k=0$

$$d=\frac{|1-(-1)+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$$

$=\sqrt{2} \Rightarrow |k+2|=2$

$\Rightarrow k+2=\pm 2 \Rightarrow k=-2\pm 2 \Rightarrow \boxed{k=0 \text{ یا } k=-4}$

۱۰-

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x\,tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x\,tgx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to 0}\sin x \sim \lim_{x\to 0} x\\ \lim_{x\to 0} tgx \sim \lim_{x\to 0} x\end{cases}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{-x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^2}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}$$

۱۱- داریم: $\cos 3a=4\cos a\cos(60°-a)\cos(60°+a)$

$a=10°$: $\cos 30°=4\cos 10°\cos 50°\cos 70°$

$$tgx=\frac{\cos^2 10°}{\cos 20°\cos 30°}=\frac{\cos^2 10°}{4\cos 10°\cos 50°\cos 70°\cos 20°}$$

$$=\frac{\cos 10°}{4\cos 50°\cos 70°\cos 20°}$$

$$=\frac{\cos 10°}{4\cos 50°\sin 20°\cos 20°}=\frac{\cos 10°}{(2\cos 50°)(2\sin 20°\cos 20°)}$$

$$=\frac{\cos 10°}{2\cos 50°\sin 40°}=\frac{\sin 80°}{2\sin 40°\sin 40°}=\frac{2\sin 40°\cos 40°}{2\sin^2 40°}$$

$$=\frac{\cos 40°}{\sin 40°}$$

$tgx=\cot g40°=tg50° \Rightarrow tgx=tg50° \Rightarrow x=k\pi+50°$

۱۲- داریم:

$4x\cos^{72} x+4x=0$ یا $\sin^{72} x+|\sin x|+\sqrt{\sin x}=0$

$4x\cos^{72} x+4x=0 \Rightarrow 4x\left(\cos^{72} x+1\right)=0 \Rightarrow 4x=0$ یا

$\cos^{72} x+1=0$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\cos^{72} x=-1 \Rightarrow \cos x=-1=\cos\pi$

$\Rightarrow \boxed{x=2k\pi\pm\pi}$

عبارتهای $\sqrt{\sin x}$ و $|\sin x|$ و $\sin^{74} x$ همواره مثبت و یا صفر می‌باشند، بنابراین باید داشته باشیم:

$\sin^{72} x=0$, $|\sin x|=0$, $\sqrt{\sin x}=0$

از هر سه معادله نتیجه می‌شود: $\sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$

بنابراین مجموعهٔ جواب معادله چنین است:

مجموعه جواب $=\{x \mid x=0 , x=2k\pi\pm\pi , x=k\pi , k\in Z\}$

مجموعه جواب $=\{x \mid x=k\pi , k\in Z\}$

۱۳- معادله را با استفاده از اتحاد $Arccos(-x)+Arccos x=\pi$، ساده می‌کنیم:

$$48Arcsin\sqrt[3]{x}=8Arccos(-x)+8Arccos x$$

$$\Rightarrow 48Arcsin\sqrt[3]{x}=8\left(Arccos(-x)+Arccos x\right)$$

$$\Rightarrow 6Arcsin\sqrt[3]{x}=\pi \Rightarrow Arcsin\sqrt[3]{x}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{x}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt[3]{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{8}}$$

۱۴- با استفاده از رابطهٔ $\cot g\alpha=tg(90°-\alpha)$ می‌توان نوشت:

$A=tg70°\cot g40°\cot g80°=tg70°tg50°tg10°$

و با توجه به اتحاد مثلثاتی: $tgx\,tg(60°-x)tg(60°+x)=tg3x$ داریم:

$$x=10° : tg10°\,tg50°\,tg70°=tg30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$B=\sin 42°-\cos 12°+\sin 18°=\sin 42°+\sin 18°-\cos 12°$

$=2\cos 12°\sin 30°-\cos 12°=2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 12°-\cos 12°$

$=\cos 12°-\cos 12°=0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

۱۵-

$tg7n^4x\cot g5x \overset{?}{=} -1 \Rightarrow \frac{tg7n^4x}{tg5x}=-1$

$\Rightarrow tg7n^4x=tg(-5x) \Rightarrow 7n^4x=k\pi-5x$

$7n^4x+5x=k\pi \Rightarrow (7n^4+5)x=k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{7n^4+5}}$

۱۶- داریم:

$$\frac{2a^3+2b^3+2c^3}{2a+2b+2c}=\frac{2a^2}{3} \Rightarrow a^3+b^3+c^3=a^2(a+b+c)$$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=a^3+a^2b+a^2c \Rightarrow b^3+c^3=a^2(b+c)$

$\Rightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2)=a^2(b+c)$

$\Rightarrow b^2+c^2-bc=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

$\Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\hat{A}=\cos 60° \Rightarrow \boxed{\hat{A}=60°}$

☐ حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱- مشتق توابع ضمنی با ضابطهٔ عمومی $f(x,y)=c$ چنین است:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$x^3+y^3-3xy-x-y=4 \Rightarrow y'=-\frac{3x^2-3y-1}{3y^2-3x-1}$$

۲ـ داریم:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u$$

$$y = 7u^3 + 7u^4 + 1 \Rightarrow y'_u = 21u^2 + 28u^3$$

$$u = \cos^2 2x \Rightarrow u'_x = -2 \times 2\cos 2x \sin 2x = -2\sin 4x$$

$$y'_x = u'_x y'_u = -2\sin 4x\,(21\cos^4 2x + 28\cos^6 2x)$$

$$x = \frac{\pi}{8} : y'_x\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -2\sin\frac{\pi}{2}\left(21\cos^4\frac{\pi}{4} + 28\cos^6\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -2\left(21\left(\frac{1}{4}\right) + 28\left(\frac{1}{8}\right)\right) = -2\left(\frac{42+28}{8}\right) = -\frac{70}{4} = -\frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'_x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{35}{2}}$$

۳ـ نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها چنین است:

$$y + x + 2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 ,\ A(-2 , 0)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+8)^2}}$$

$$\Rightarrow m = f'(-2)$$

توجه: m ضریب زاویهٔ خط مماس بی‌نهایت شود خط مماس موازی محور yها می‌باشد. $f'(-2) = tg\alpha \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

بنابراین خطی که عمود بر محور طولها است و از نقطهٔ $A(-2 , 0)$ می‌گذرد، خط مطلوب است. $\boxed{\text{معادله خط مماس}: x = -2}$

۴ـ $y = x^4 - 2x^3 + mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 6x^2 + 2mx$

$$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x^2 + 2mx = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3x + m) = 0$$

شرط این‌که تابع فوق دارای سه اکسترمم باشد؛ این است که معادلهٔ اخیر سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8m > 0$$

$$\Rightarrow 8m < 9 \Rightarrow \boxed{m < \frac{9}{8}}$$

۵ـ $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = 2 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \text{ و } S = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{S = 4\pi}$$

۶ـ می‌دانیم محل تلاقی قطرهای بیضی مرکز تقارن آن است:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{و} \quad 3y + 12 = 0 \Rightarrow y = -4$$

$$\Rightarrow O'(3 , -4)$$

چون بیضی فوق بر محورهای مختصات مماس است، پس $a = 4$ و $b = 3$ و در نتیجه بیضی قائم است و داریم:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

۷ـ $18x^2 - 32y^2 - 36x + 64y - 302 = 0$

$$\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 - 2y) = 151 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 ,\quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{9+16}}{4} = \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{\text{خروج از مرکز مداری}: e = \frac{5}{4}}$$

۸ـ $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = a$

$$V = \pi\int_0^a (y_1^2 - y_2^2)\,dx = \pi\int_0^a (x^4 - a^2x^2)\,dx$$

$$= \left|\pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{a^2}{3}x^3\right]_0^a\right| = \pi\left(\frac{2a^5}{15}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi a^5}{15} = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow a^5 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۹ـ $tg\frac{\pi}{16} + 2tg\frac{\pi}{8} + 4tg\frac{\pi}{4} = cotg\frac{\pi}{16}$

پس از استفاده از اتحاد مثلثاتی $tgx = cotgx - 2cotg2x$، داریم:

$$\text{طرف اول} = cotg\frac{\pi}{16} - 2cotg\frac{\pi}{8} + 2\left(cotg\frac{\pi}{8} - 2cotg\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ 4\left(cotg\frac{\pi}{4} - 2cotg\frac{\pi}{2}\right) = cotg\frac{\pi}{16} - 8cotg\frac{\pi}{2}$$
$$= cotg\frac{\pi}{16}$$

۱۰ـ $4(\sin x\cos x + m\cos^2 x) = 1 + \sin^2 x$

از تقسیم طرفین معادله بر $\cos^2 x$ و استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$، داریم:

$$4tgx + 4m = 1 + tg^2x + tg^2x$$

$$\Rightarrow 2tg^2x - 4tgx + 1 - 4m = 0$$

شرط وجود جواب: $\Delta' = 4 - 2(1 - 4m) \geq 0$

$$\Rightarrow 4 - 2 + 8m \geq 0 \Rightarrow 8m \geq -2 \Rightarrow \boxed{m \geq -\frac{1}{4}}$$

۱۱ـ پس از بسط $\sin(x-\alpha)$ و اختصار لازم، به معادلهٔ کلاسیک نوع اول زیر می‌رسیم:

$$m\sin(x-\alpha) + \sin\alpha - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow (m\cos\alpha - 1)\sin x - m\sin\alpha\cos x = -\sin\alpha$$

معادلهٔ کلاسیک $a\sin x + b\cos x = c$ وقتی دارای جواب حقیقی است که داشته باشیم:

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \qquad (1)$$

بنابراین داریم: $(m\cos\alpha - 1)^2 + (-m\sin\alpha)^2 \geq (-\sin\alpha)^2$

$$\Rightarrow m^2\cos^2\alpha - 2m\cos\alpha + 1 + m^2\sin^2\alpha \geq \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow m^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2m\cos\alpha + 1 - \sin^2\alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m\cos\alpha + \cos^2\alpha \geq 0 \Rightarrow (m - \cos\alpha)^2 \geq 0$$

شرط (۱) به ازای جمیع مقادیر m برقرار است، بنابراین معادله به ازای هر $m \in IR$ همواره دارای جواب است.

۱۲ـ $A = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x$

$$= 1 + \cos 2x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 8x$$

$$= 1 + 2\cos 4x\cos 2x + 2\cos 6x\cos 2x$$

$$= 1 + 2\cos 2x(\cos 4x + \cos 6x)$$

$$= 1 + 2\cos 2x\,(2\cos 5x\cos x)$$

$$= 1 + 4\cos x\cos 2x\cos 5x = 1 + \frac{4\sin x\cos x\cos 2x\cos 5x}{\sin x}$$

$$= 1 + \frac{2\sin 2x\cos 2x\cos 5x}{\sin x} = 1 + \frac{\sin 4x\cos 5x}{\sin x}$$

$$x = \frac{\pi}{9} : A = 1 + \frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{-\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}}$$

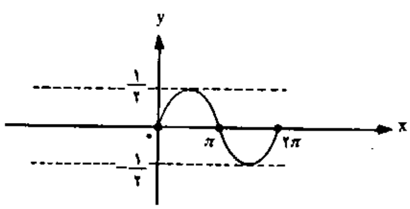
$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

۱۳ـ ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \frac{\sin x\cos^2 x + \sin x}{2 + 2\cos^2 x} = \frac{\sin x(\cos^2 x + 1)}{2(1 + \cos^2 x)}$$

داریم $\cos^2 x + 1 \neq 0$، پس می‌توان نوشت:

$$y = \frac{\sin x}{2} \text{ و } T = [0 , 2\pi]$$



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: بله، موجودند ـ به عنوان نمونه (۳− , ۲− , ۱−)، یا (a− , ۰ , a) به ازای هرعدد صحیح a .

جواب ۲: عدد را سروته کنید.

جواب ۳: باید ٦ بار تیراندازی کرد و چهار بار ۱۷ و دوبار ۱٦ را به دست آورد.

جواب ۴: ۱٦ ثانیه. فاصلهٔ بین دو ضربه ۲ ثانیه است. تعداد فواصل یکی کمتر از تعداد ضربه‌هاست.

جواب ۵: بله. اگر، مثلاً، در قوطی با برچسب «میخ» پیچها را پیدا کنید، در این صورت قوطی با برچسب «آجیل» باید دارای میخ باشد، و قوطی دارای برچسب «پیچ» دارای آجیل.

جواب ٦: البته که دارد: سکه‌ای که ده ریالی نیست پنج ریالی است، اما دیگری در واقع ده ریالی است!

جواب ۷: ۳۰ گرم. از این حقیقت استفاده می‌کنیم که نسبت جرمها (یعنی، حجمها)ی اشکال متشابه به مکعب نسبت اضلاع آن اشکال است.

سپیده دم نزدیک است

پیروزی درخشان دانش‌آموزان ایرانی را در کسب رتبهٔ اوّل بیست و هفتمین المپیاد جهانی شیمی در میان ۱۲۰ کشور و موفقیت پرافتخار دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیاد جهانی ریاضی و دستیابی به رتبهٔ اول در رشتهٔ هندسه و نیز موفقیت دانش‌آموزان شرکت کننده در المپیادهای کامپیوتر و فیزیک را به حضور رهبر خردمند انقلاب اسلامی حضرت آیةا... خامنه‌ای و به این عزیزان و خانواده‌های محترمشان و معلمین دلسوز و جامعهٔ فرهنگی و تمام مردم ایران تبریک می‌گوییم.

از خداوند متعال می خواهیم این پیروزیها را طلیعهٔ پیروزیهای بزرگتر برای نظام مقدسِ جمهوری اسلامی قرار دهد.

In the name of God

Borhān

VOL. 4. No. 4

Serial numbers : 14

Summer 1995

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

1. Conditions of perpendicular and tangent lines to a conic section. — S. Jafari
2. Limit: Definition of limit of functions. — A. Ghandehari
3. Short articles of authentic mathematics Jornals. — G. R. Yassipour
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. Recursive problems. — G. R. Yassipour
5. Locus (IV). — M. H. Rostami
6. Books Introduction.
7. Answers to letters.
8. Problems.
9. Solution of an interesting geometry problem by the homographic function. — Dr. A. Sharafeddin
10. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
11. Proving of validity of elementary quantification laws.
12. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
13. Vectors (III) — S. M. R. Hashemi Mosavi
14. Congruence relation - It's properties and applications in Z — H. R. Amiri
15. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
16. A brief history of mathematics magazins in Iran.
17. Prediction and magic number seven. — H. Nasirnia
18. Distance from a point to a line in space. — M. H. Rostami
19. About the solar system. — H. Nasirnia

برهان خواجه نصیرالدین طوسی برای قانون سینوسها

خواجه نصیرالدین طوسی،متولد سال ۵۷۹ هـ. ش. در شهر طوس خراسان و در سال ۶۵۲ هـ. ش. در کاظمین درگذشت.

منجم، ریاضیدان، محقق، مفسر و فیلسوف وزیر هلاکو و هنرمندی ابزارساز بود که ۱۲ دستگاه و ابزار رصدخانه‌مراغه را با ابداع و ابتکار خاص خود به وجود آورد به‌طوری‌که تیکوبراهه منجم هلندی کارهای او را برای رصدخانه اورانین‌برگ تقلید نمود. حدود ۸۰ کتاب و رساله در علم حساب، هندسه، مثلثات، فلسفه، تفسیر و مسائل اجتماعی نوشت و از کارهای معروف او تنظیم جدولهای نجومی، وضع مثلثات و قضایای هندسه کروی، تفهیم بی‌نهایت کوچکها و تکمیل نظریه ارشمیدس است. تأسیس رصدخانه مراغه یکی از شاهکارهای مراکز علمی قرون وسطی جهان بود. و به همین علت نام این مرد دانشمند ایرانی به افتخار کارهای ریاضی و نجومی‌اش بر کره ماه ثبت شده است.

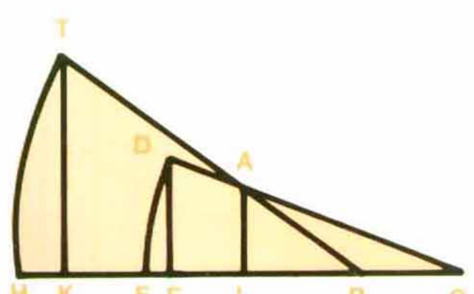
نصیرالدین قانون سینوسهای مثلثهای مسطحه را برای تهیهٔ یک ابزار اساسی در حل مثلثها مطرح می‌کند، و خواهیم دید که او چگونه این قانون را ثابت می‌کند و چگونه آن را برای پیداکردن اجزای مجهول مثلثی برحسب اجزای معلوم آن به کار می‌برد.

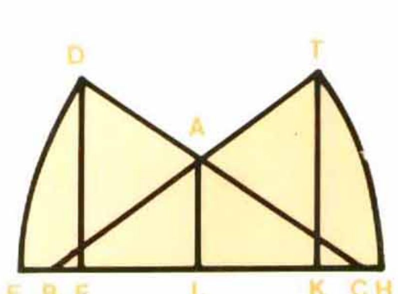
قانون سینوسها. اگر ABC مثلث دلخواهی باشد آن‌گاه $c/b = \sin C/\sin B$.

شکل الف حالتی را نشان می‌دهد که یکی از زاویه‌های B یا C منفرجه است، و شکل ب حالتی را نشان می‌دهد که نه B منفرجه است و نه C، و بنابراین یکی از آنها حاده است. در هر مورد، CA را تا D و BA را تا T امتداد دهید به طوری‌که طول هریک ۶۰ واحد طول باشد. به مرکزهای B، C کمانهای مستدیر TH و DE را رسم کنید. حال اگر عمودهای TK و DF را بر قاعدهٔ BC، یا درصورت لزوم بر امتداد آن، وارد کنیم آن‌گاه $TK = \sin B$ و $DF = \sin C$. حال AL را بر BC عمود کنید. چون مثلثهای ABL، TBK متشابه‌اند، $AB/AL = TB/TK$، و چون مثلثهای ACL و DCF متشابه‌اند، $AL/AC = DF/DC$ اما $TB = ۶۰ = DC$. لذا، اگر طرفهای چپ و راست این تناسبها را به ترتیب درهم ضرب کنیم، تناسب $AB/AC = DF/TK$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین $c/b = \sin C/\sin B$، و این، قانون سینوسها را ثابت می‌کند.

چون تابع سینوس نصیرالدین صرفاً ۶۰ برابر سینوس کنونی است، قضیهٔ بالا در مورد تابع سینوس‌کنونی نیز برقراراست. می‌توانیم قضیه‌را به‌صورت $c/\sin C = b/\sin B = a/\sin A$ بنویسیم، که شکل امروزی آن اغلب به این صورت است، و می‌توان آن را با بیان اینکه در هر مثلث مفروض نسبت هر ضلع به سینوس زاویهٔ مقابلش ثابت است، به آسانی در خاطر داشت.

برگرفته از کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی (انتشارات فاطمی)





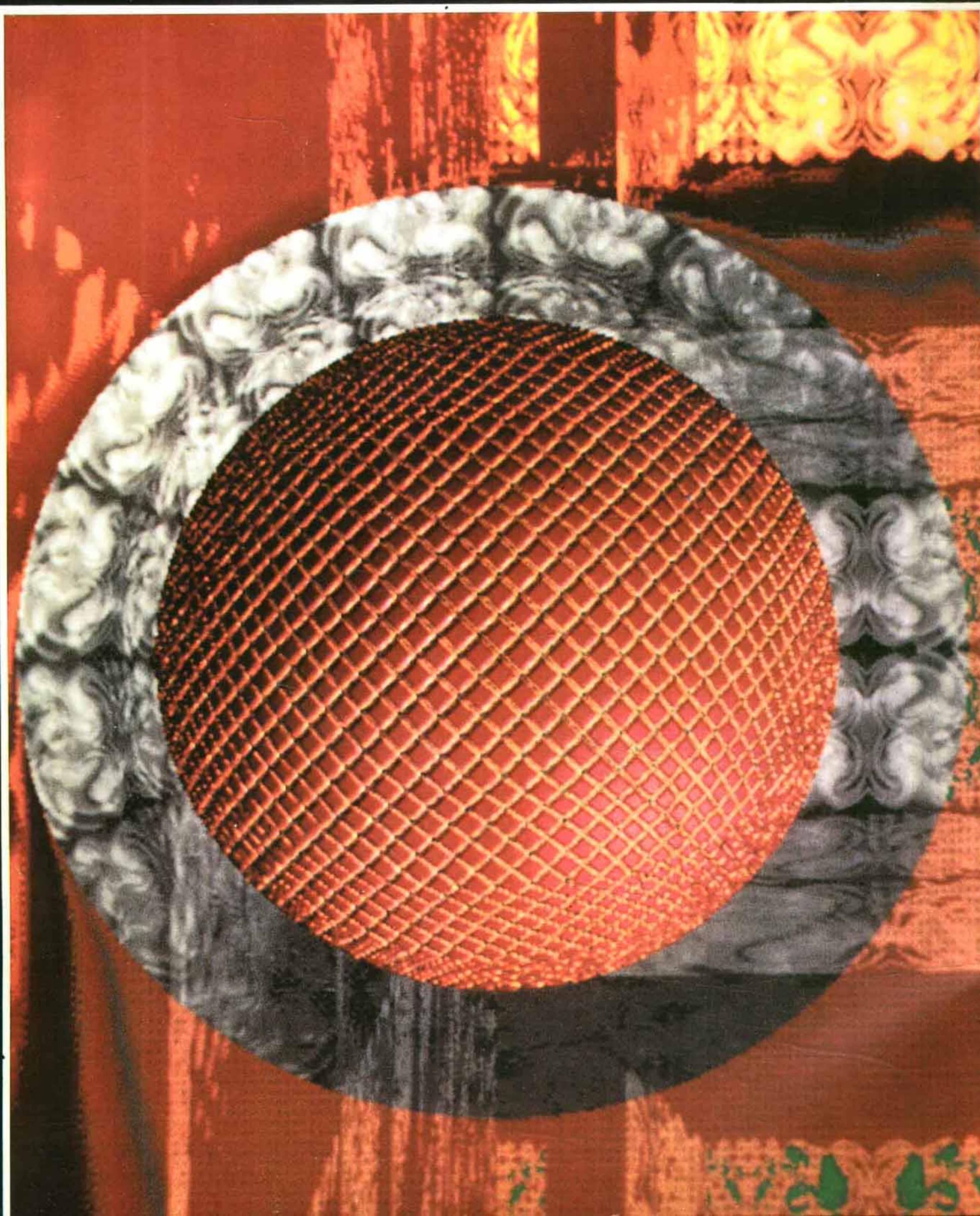
مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۵

سال پنجم، پاییز ۱۳۷۴، شمارهٔ اول، بها ۱۵۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❏ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❏ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی ❏ سردبیر: حمیدرضا امیری

❏ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❏ حمیدرضا امیری ❏ محمدهاشم رستمی ❏ احمد قندهاری ❏ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

❏ غلامرضا یاسی‌پور (باتشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و باتشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

❏ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❏ طراح و صفحه آرا: احمد پیرحسینلو ❏ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

۱ حرف اوّل ▪ ۲ شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۵) / پرویز شهریاری ▪ ۷ مبحث تقارن (ریاضیات ۳ نظام جدید) / احمد قندهاری ▪ ۱۴ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۳) / غلامرضا یاسی‌پور ▪ ۱۷ آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۱) (جبر و احتمال نظام جدید و ریاضیات جدید سال چهارم) / حمیدرضا امیری ▪ ۲۰ تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۴) ▪ ۲۳ نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها (ریاضی ۱ و ریاضیات جدید سال اول) / شهرام صدر - حمیدرضا امیری ▪ ۲۸ دلیل محسوس در کنار «برهان» / احمد شرف‌الدین ▪ ۳۲ فضای برداری (قسمت اول) (ریاضیات جدید سوم ریاضی) / حمیدرضا امیری ▪ ۳۶ خطهای راست و صفحه‌های عمود برهم در فضا / پرویز شهریاری ▪ ۴۰ مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (سوم ریاضی نظام جدید و قدیم) / حسین ابراهیم‌زاده قلزم ▪ ۵۰ مکان هندسی (اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان) / محمد هاشم رستمی ▪ ۵۵ در پیرامون منظومه شمسی (قسمت دوم) / حسن نصیرنیا ▪ ۵۶ بردارها (ریاضی ۴ نظام جدید و ریاضیات جدید دوم ریاضی) / سید محمدرضا هاشمی موسوی ▪ ۶۲ طرح و حل مسائل اساسی به روشهای مقدماتی (۱۳) / غلامرضا یاسی‌پور ▪ ۶۵ صورت قطبی (مثلثاتی) و هندسی اعداد مختلط (جبر و احتمال نظام جدید) / روح‌الله جهانی‌پور ▪ ۷۰ جواب‌نامه‌ها ▪ ۷۲ حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۳ ▪ ۷۴ مسائل برای حل ▪ ۷۹ حل مسائل برهان شمارهٔ ۱۴ ▪

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱- نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲- طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۳- طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴- طرح معماهای ریاضی ۵- نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.
- مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۴-۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

لزوم توجه به مسائل سیاسی و اجتماعی از سوی دانش‌آموزان، بارها از طرف امام خمینی(ره) و مقام معظم رهبری حضرت آیةا... خامنه‌ای و اولیاء مسائل آموزشی و تربیتی تأکید شده است. این سخن به این معنی است که دانش‌آموزان ما در عرصهٔ فعالیتهای علمی خود سایر فعالیتهای اجتماعی را نیز در نظر داشته باشند و آنها را جزو ضرورتهای زندگی و شکل‌دهندهٔ شخصیتهای فردی قلمداد کنند.

رشد یک بعدی و دانش‌اندوزی بدون تهذیب نفس، هر چند انسان را به مدارج علمی قابل توجهی می‌رساند، اما فرایند آن چیزی جز افسارگسیختگی و نارساییهای اجتماعی را به دنبال نخواهد داشت.

دانش‌آموزان ما از دیرباز آموخته‌اند که تنها، گنجینهٔ متحرک علوم بشری نباشند، بلکه همسوی جامعه به عنوان فردی مفید از آن جامعه برای سایر نیازهای فطری خویش پاسخی شایسته داشته باشند. به همین دلیل بسیاری از دانش‌آموزان کوشا و ساعی در عرصهٔ علوم، دانش‌آموزانی هستند که در سایر مباحث اجتماعی و سیاسی فعال هستند. شرکت دانش‌آموزان در مجامعی چون بسیج دانش‌آموزی، انجمنهای اسلامی، راهپیماییها و تظاهرات سیاسی مبیّن این نکته است که ما، دانش‌آموزان اندیشمند و متفکر، فراوان داریم و این امر ریشه در تاریخ معاصر کشور ما دارد.

حضور فراگیر و گستردهٔ دانش‌آموزان در مبارزات انقلابی مردم در سال ۵۷ و حماسه‌آفرینی آنها در روز ۱۳ آبان همان سال نقش تعیین‌کننده‌ای در سقوط رژیم شاه داشت و این روند را می‌توان در سالهای جنگ تحمیلی به خاطر آورد و از دانش‌آموزی چون شهید حسین فهمیده یاد کرد که مراتب والایی از حضور دانش‌آموزان را در دفاع مقدس به نمایش گذاشت. او تا جایی پیش رفت که رهبر کبیر انقلاب حضرت امام خمینی (ره) از او به عنوان «رهبر ما» یاد کردند. امروز بسیاری از همان دانش‌آموزان، در عرصهٔ علم و دانش از متخصصان و دانشمندان این جامعه هستند و آنهایی که به شهادت رسیده‌اند، با شهادت خویش امنیت و آرامش را برای علم‌آموزی سایرین هموار نمودند و خود در بهشتِ زیبای خداوند همنشین پاکان و دوستان خدا شدند.

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۵)

پرویز شهریاری

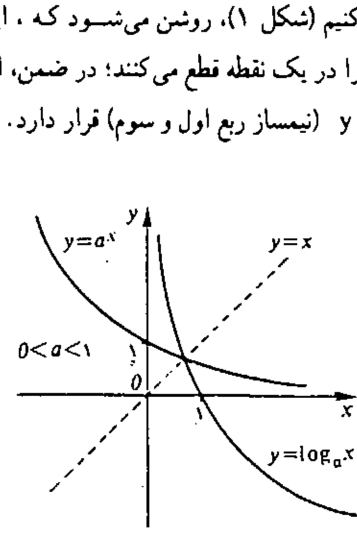


مثال ۱۱: این معادله، چند ریشه دارد:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x \qquad (1)$$

اگر طرح نمودار تابعهای $y = a^x$ و $y = \log_a x$ را، با شرط $0 < a < 1$ رسم کنیم (شکل ۱)، روشن می‌شود که ، این نمودارها، همیشه، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؛ در ضمن، این نقطه، روی خط راست $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد.

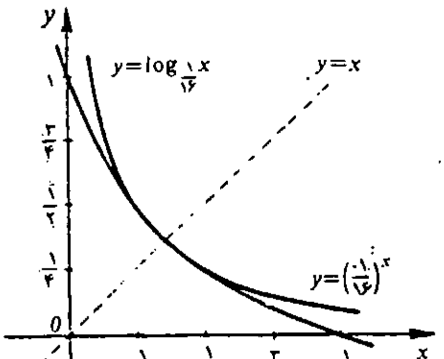
شکل (۱)



ولی به طور مستقیم دیده می‌شود که معادلهٔ (۱)، دو جواب دارد: $x = \frac{1}{4}$ و $x = 1$ (آزمایش کنید!)؛ در ضمن، نقطه های متناظر این ریشه‌ها در روی نمودار، روی خط راست $y = x$ نیستند. به این ترتیب، معادلهٔ (۱)، دست کم سه جواب دارد.

این حقیقت، موجب شگفتی بسیاری از دانش‌آموزان و، به احتمالی، دبیران آن‌ها می‌شود. ولی این، مسألهٔ تازه‌ای نیست و، به عنوان نمونه، می‌تواند ما را قانع کند که، در حل نموداری معادله‌ها و استفاده از شکل، باید احتیاط کامل را رعایت کنیم تا گمراه نشویم. راز کار روشن است: شکل ۱، تنها طرحی و مُدلی تقریبی از نمودار تابعهاست و در مورد معادلهٔ (۱)، منجر به اشتباه می‌شود[1].

شکل (۲)

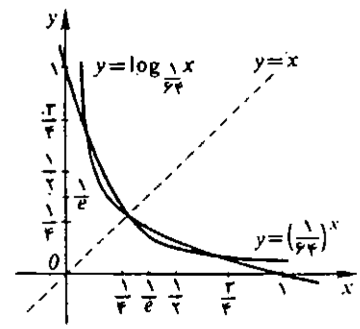


---

۱ ــ مجله «کوانت» چاپ مسکو، شمارهٔ ۵، سال ۱۹۹۰ میلادی (صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲).

شکل ۲، دقیق‌تر و به کمک کامپیوتر رسم شده است. روی این شکل هم نمی‌توان، تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۱) را، مشخص کرد، زیرا به دلیل ضخامت خط‌های منحنی، دو نمودار در فاصله‌ای، روی هم قرار گرفته‌اند.

شکل (۳)



شکل ۳ هم، به همان دقت شکل ۲ و با کامپیوتر رسم شده است. ولی روی آن، به روشنی دیده می‌شود که معادلهٔ زیر دارای سه ریشه است:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x = \log_{\frac{1}{64}} x$$

اگر نمودارهای دو تابع $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ و $y=\log_{\frac{1}{16}} x$ را، با همان دقت قبلی، و به طور مثال با واحد برابر 10^6 سانتیمتر، رسم می‌کردیم، آن وقت شبیه شکل ۳ به دست می‌آمد و قانع می‌شدیم که معادلهٔ (۱) هم، دارای سه ریشه است. ولی دریغ که، در این جا، نمی‌توانیم این شکل را، با توجه به بُعدهای بزرگ خود نشان دهیم. درست است که شکل‌های ۲ و ۳ با کامپیوتر رسم شده اند، ولی هیچ کامپیوتری نمی‌تواند نمودارهای دقیق ایده‌آلی رسم کند. بنابراین، نمی‌توان با استناد به شکل، مساله را مورد تحقیق قرار داد و با تکیه به شکل، آن را حل شده دانست. برای حل مسأله، استدلال دقیق ریاضی لازم است.

حالت کلی معادله را در نظر می گیریم:

$$a^x = \log_a x \qquad (۲)$$

که در آن، a می‌تواند هر عدد مثبتی به جز واحد باشد.

یادآوری می کنیم که، معادلهٔ (۲)، با معادلهٔ

$$a^{a^x} = x \qquad (۲')$$

هم ارز است. به جای معادلهٔ (۲′)، معادلهٔ

$$a^x = x \qquad (۳)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر x_0، ریشه‌ای از معادلهٔ (۳) باشد، آن وقت:

$$a^{a^{x_0}} = a^{x_0} = x_0$$

یعنی x_0، در ضمن ریشهٔ معادلهٔ (۲) یا (۲′) هم هست.

به این ترتیب، اگر معادلهٔ (۳)، دست کم یک ریشه داشته باشد، معادله (۲) هم دارای ریشه خواهد بود. نکته دیگری را هم یادآوری می‌کنیم. به ازای $a>1$، تابع $f(x)=a^x$ صعودی است. معادلهٔ (۲′) را می‌توان به صورت $f(f(x))=x$ نوشت که، در این صورت، معادلهٔ (۳) به صورت $f(x)=x$ در می‌آید.

پیش قضیه، اگر تابع $y=f(x)$ صعودی باشد، آن وقت معادله‌های زیر هم ارزند:

$$f(f(x))=x \quad \text{و} \quad f(x)=x$$

اثبات: x_0 را ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=x$ می‌گیریم. در این صورت:

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$$

یعنی x_0، ریشهٔ معادلهٔ $f(f(x))=x$ هم هست. بر عکس، فرض کنید $f(f(x_0))=x_0$ و، در ضمن $x_0 \neq f(x_0)$، در این صورت یا $x_0 > f(x_0)$ و یا $x_0 < f(x_0)$؛ ولی از آن جا که تابع f صعودی است، در حالت اول به دست می‌آید:

$$f(x_0) > f(f(x_0)) = x_0$$

و در حالت دوم:

$$f(x_0) < f(f(x_0)) = x_0$$

و این یک تناقض است، زیرا با شرط $x_0 > f(x_0)$ به دست می‌آید $x_0 < f(x_0)$ و بر عکس.

از این پیش قضیه و یادآوری قبلی، نتیجه می‌شود که، به ازای $a>1$، معادلهٔ (۲) با معادلهٔ $a^x=x$ هم ارز است.

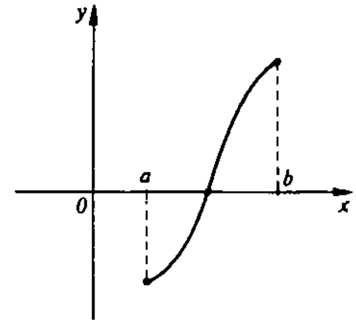
بررسی معادلهٔ $a^x = x$

ابتدا از قضیهٔ مهمی یاد می کنیم که، به احتمال زیاد، از آن اطلاع دارید.

قضیه: (بولتسانو ـ وایراشتراس). اگر تابع $y=f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، معین و پیوسته باشد، در ضمن $f(a)<0$ و $f(b)>0$، آن وقت معادلهٔ $f(x)=0$، ریشه‌ای در بازهٔ (a,b) دارد.

اثبات این قضیه در دورهٔ آنالیز ریاضی داده می‌شود. با وجود این، درک عینی آن روشن است: منحنی پیوسته‌ای که در شکل ۴ داده شده است، به ناچار، محور Ox را قطع می‌کند. از این قضیه، در این جا، بارها استفاده خواهیم کرد.

شکل (۴)



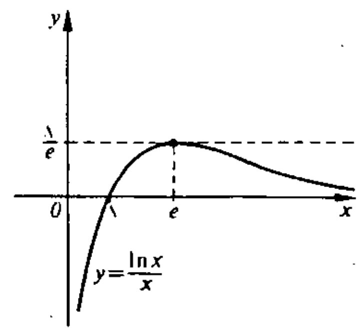
در حالت خاصی که، تابع $f(x)$، در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، همه جا صعودی یا همه جا نزولی باشد، معادله $f(x)=0$، در بازهٔ (a,b)، یک ریشهٔ منحصر دارد.

اکنون، معادلهٔ (۳) را بررسی می‌کنیم. این معادله، با معادلهٔ

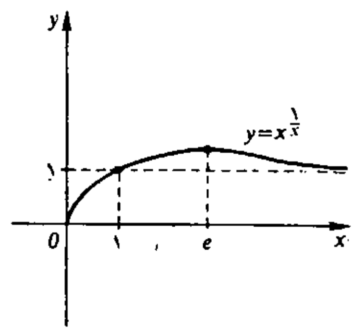
$$Lna = \frac{Lnx}{x} \qquad (3')$$

هم ارز است. نمودار تابع $h(x)=\frac{Lnx}{x}$ را رسم می‌کنیم. چون $h'(x)=\frac{1-Lnx}{x^2}$، پس تابع $h(x)$، به ازای $x<e$ صعودی، و به ازای $x>e$ نزولی است و در نقطهٔ $x=e$، ماکزیممی برابر $\frac{1}{e}$ دارد (شکل ۵). بنابراین معادلهٔ ($3'$)، به ازای $Lna>\frac{1}{e}$ (یعنی به ازای $a>e^{\frac{1}{e}}$) ریشه ندارد و به ازای $a=e^{\frac{1}{e}}$، تنها یک ریشه دارد: $x=e$.

شکل (۵).



شکل (۶)



بر اساس بحث‌های بالا، این سه تمرین را حل کنید:

تمرین ۱. ثابت کنید به ازای $0<Lna<\frac{1}{e}$، یعنی به ازای $1<a<e^{\frac{1}{e}}$، معادلهٔ ($3'$)، درست دو ریشه دارد.

تمرین ۲. با استفاده از نمودار شکل ۵، ثابت کنید، نمودار تابع $y=x^{\frac{1}{x}}$ به صورت شکل ۶ در می‌آید و، از آن جا، معادلهٔ $x^{\frac{1}{x}}=a$ را مورد بررسی قرار دهید.

تمرین ۳. نمودار تابع $y=x^x$ را رسم و معادلهٔ $x^x=a$ را بررسی کنید.

به این ترتیب، معادلهٔ (۲)، به ازای $1<a<e^{\frac{1}{e}}$، درست دو ریشه؛ به ازای $a=e^{\frac{1}{e}}$، یک ریشهٔ $x=e$ دارد؛ و به ازای $a>e^{\frac{1}{e}}$، ریشه‌ای ندارد.

حالت $0<a<1$

معادلهٔ $a^x=x$، به ازای $0<a<1$، دارای یک ریشهٔ منحصر x است.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=a^x-\log_a x$$

و رفتار آن را مطالعه می کنیم. برای این منظور، مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=a^x Lna-\frac{1}{xLna}=\frac{xa^xLn^2a-1}{xLna}$$

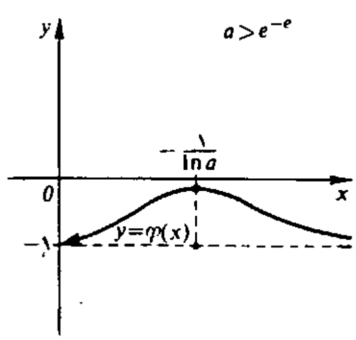
صورت کسر مشتق را $\varphi(x)$ می‌نامیم:

$$\varphi(x)=xa^xLn^2a-1$$

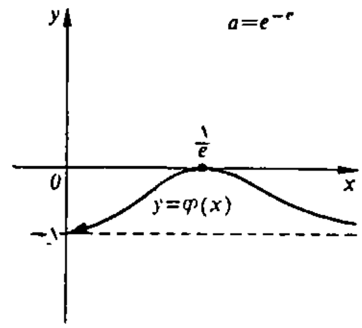
مخرج کسر مشتق منفی است (به ازای هر $x>0$)، و بنابراین، علامت $f'(x)$، مخالف علامت $\varphi(x)$ است.

تمرین ۴. ثابت کنید، تابع $\varphi(x)$، به ازای $x<-\frac{1}{Lna}$ نزولی و به ازای $x>-\frac{1}{Lna}$ صعودی است و حداکثر مقدار $\varphi(x)$ به ازای $x=-\frac{1}{Lna}$ به دست می‌آید.

شکل (۷)



شکل (۸)



از تمرین۴، نتیجه می‌شود، اگر حداکثر مقدار $\varphi(x)$، به ازای همهٔ مقدارهای x ، غیر مثبت باشد ($\varphi_{max} \le ۰$)، آن وقت تابع $f(x)$، به ازای هر $x > ۰$، صعودی است، به نحوی که $x_۰$ ، تنها ریشهٔ معادلهٔ (۲) خواهد بود (شکلهای ۷ و ۸).

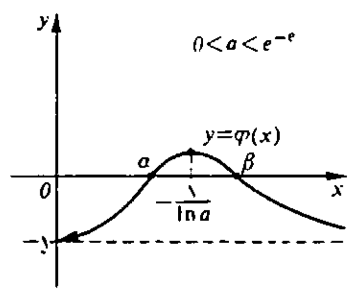
اگر نامعادلهٔ $\varphi_{max} = -\frac{Lna}{e} - ۱ \le ۰$

را حل کنیم، به دست می‌آید: $a \ge e^{-e}$. بنابراین معـادلهٔ (۲)، به ازای $e^{-e} \le a < ۱$ درست یک ریشهٔ دارد: $x = x_۰$.

در حـــالت $۰ < a < e^{-e}$ داریم: $\varphi_{max} > ۰$ و نمـــودار تـابع φ بصورتی است که در شکل ۹ نشان داده شده است. برای روشن شدن مطلب، کافی است توجه کنیم که

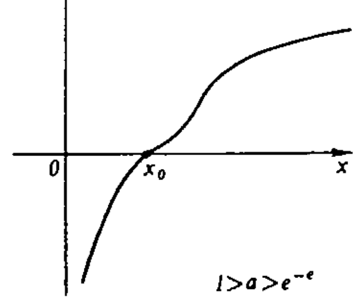
$$\varphi(۰) = -۱ \quad , \quad \varphi(۱) < ۰$$

شکل (۹)

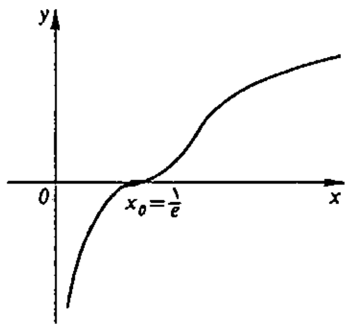


در ضـــمن نمــــودار تابع $f(x) = a^x - \log_a x$ ، به ازای $e^{-e} < a < ۱$ در شکل ۱۰ و به ازای $a = e^{-e}$ در شکل ۱۱ نشـــان داده شده است.

شکل (۱۰)



شکل (۱۱)



تمرین ۵. ثابت کنید، به ازای $۰ < a < e$ ، داریم:

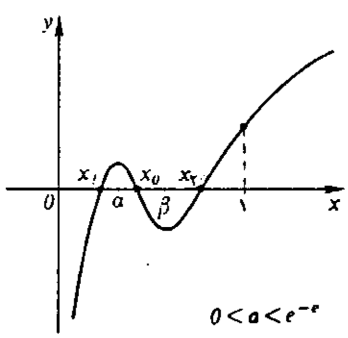
$$\varphi(۱) = aLn^۲a - ۱ < ۰$$

راهنمایی. ماکزیمم تابع $g(a) = aLn^۲a$ را پیدا کنید.

از تمرین ۵ نتیجه می‌شود که، تابع $\varphi(x)$ ، در دو نقطهٔ α و β برابر صفر می‌شود و، در ضمن

$$۰ < \alpha < -\frac{۱}{Lna} \quad , \quad -\frac{۱}{Lna} < \beta < ۱$$

شکل (۱۲)



و این، به معنـای آن است که تابع f ، به ازای $x \in (۰,\alpha)$ صعـودی، به ازای $x \in (\alpha,\beta)$ نزولی و دوباره به ازای $x \in (\beta,۱)$ صعـودی است. بنابراین، α نقطهٔ مـاکزیمم و β نقطهٔ می‌نیـمم تابع f است (نمودار این تابع، در شکل ۱۲ داده شده است).

برای کامل کردن بررسی خود، ثابت می‌کنیم: $\alpha < x_۰ < \beta$

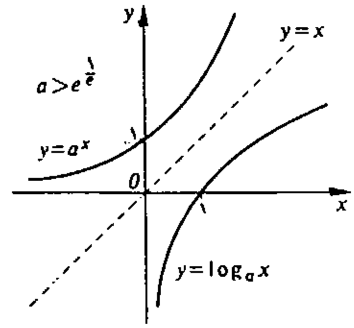
تمرین۶. ثابت کنید، به ازای $۰ < a < e^{-e}$ ، داریم $x_۰ < \frac{۱}{e}$.

راهنمایی. اگر فرض کنید $x_۰ > \frac{۱}{e}$ ، بدست می‌آورید:

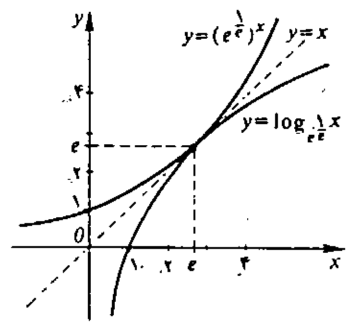
$$x_۰ = a^{x_۰} < a^{\frac{۱}{e}} < \frac{۱}{e}$$

که فرض $x_۰ > \frac{۱}{e}$ را نقض می‌کند.

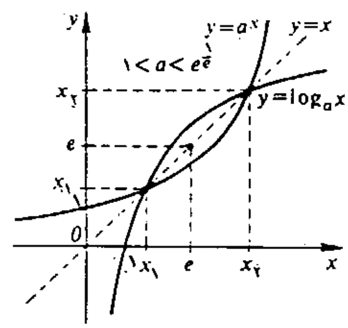
شکل (۱۳)



شکل (۱۴)



شکل (۱۵)



اکنون به محاسبه می‌پردازیم:

$$\varphi(x_{\circ}) = x_{\circ}^{2}\text{Ln}^{2}a - 1 = \text{Ln}^{2}a^{x_{\circ}} - 1 = \text{Ln}^{2}x_{\circ} - 1$$

چون $\text{Ln}x_{\circ} < -1$ ، بلافاصله نتیجه می‌شود: $\varphi(x_{\circ}) > 0$ ، به نحوی که $f'(x_{\circ}) < 0$ ، یعنی $\alpha < x_{\circ} < \beta$.

از این جا نتیجه می‌شود: $f(\alpha) > 0$ و $f(\beta) < 0$ و با توجه به یکنوا (مونوتون) بودن تابع f ، سرانجام، روشن می‌شود که معادلهٔ (۲)، در هر یک از بازه‌های $(0 , \alpha)$ ، (α , β) و $(\beta , 1)$ دارای یک ریشه است و در بازهٔ $(1 , \infty)$ ریشه ندارد.

نتیجه بررسی: معادله $a^x = \log_a x$ ، در بازهٔ $0 < a < e^{-e}$ سه ریشه دارد و در بازهٔ $e^{-e} \leq a < 1$ دارای یک ریشه است.

تمرین ۷. ثابت کنید، به ازای مقدارهای مختلف a ، موقعیت نمودار تابعهای $y = a^x$ و $y = \log_a x$ ، نسبت به یکدیگر، به صورتی است که در شکلهای ۱۳، ۱۴ و ۱۵ نشان داده‌ایم، برای حالتهای $e^{-e} < a < 1$ ، $a = e^{-e}$ و $0 < a < e^{-e}$ ، خودتان نمودارها را رسم کنید.

بحث مربوط به «شکل» و دشواریهای ناشی از آن را در حل مسأله‌های هندسی، در شمارهٔ بعد ادامه می‌دهیم.

ادب ریاضی

علم حِیَل عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آنها در ریاضیات با برهان ثابت شده است بر اجسام خارجی منطبق سازد، و به ایجاد و وضع آنها در اجسام خارجی فعلیت بخشند. توضیح آنکه در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد، و دیگر مفاهیم ریاضی—تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی— بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج— یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به‌وسیلهٔ صنعت— به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد و مطابقهٔ آنها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن نماید، زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند، که آن احوال مانع می‌شوند از این‌که مفاهیمی که در ریاضیات ثابت شده است، به آسانی و هرطور که هست، بر این اجسام منطبق گردد، بلکه نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آنچنان آماده کند که این صورتهای ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود پذیرا شوند، و در برطرف ساختن عوایق و موانع رام دست باشد.

علم حِیَل همان علمی است که راههای شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به‌وسیلهٔ صنعت مشخص می‌سازد، و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس، آشکار نمود.

«احصاء العلوم»

مبحث تقارن

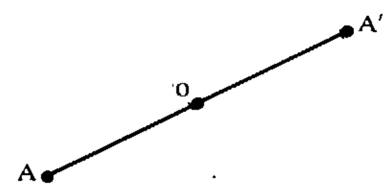
(بخش دوم و بخش سوّم مربوط به ریاضیات (۳) نظام جدید)

● احمد قندهاری

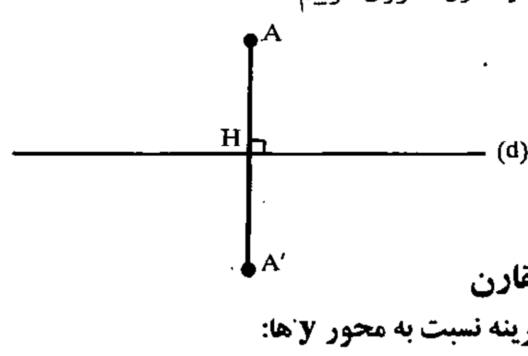
□ مقدمه

۱ ـ تعریف تقارن مرکزی: هرگاه دو نقطهٔ A و o در صفحه‌ای مفروض باشند. اگر نقطهٔ A را به نقطهٔ o وصل کنیم و آن را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، نقطه‌ای مانند 'A به‌وجود می‌آید که نقطهٔ 'A را قرینهٔ مرکزی نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ o گوییم. نقطهٔ o را مرکز تقارن نامیم و این تقارن را تقارن مرکزی گوییم.

$Ao = oA'$



۲ ـ تعریف تقارن محوری: هرگاه نقطه‌ای مانند A و خطّی مانند خط (d) در صفحه‌ای مفروض باشد. چنانچه از نقطهٔ A عمودی مانند AH بر خط (d) رسم کنیم و این عمود را به اندازهٔ AH امتداد دهیم، نقطه‌ای مانند 'A به‌وجود می‌آید که نقطهٔ 'A را قرینهٔ محوری نقطهٔ A نسبت به خط (d) گوییم. خط (d) را محور تقارن نامیم و این تقارن را تقارن محوری گوییم.



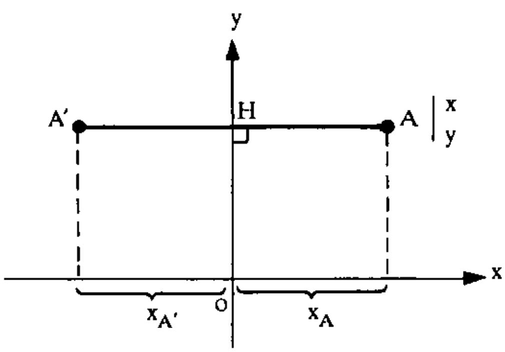
□ تقارن

۱ ـ قرینه نسبت به محور yها:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد چنانچه نقطهٔ 'A قرینه نقطهٔ A نسبت به محور yها باشد خواهیم داشت:

$AH = A'H$

پس x_A و $x_{A'}$ از نظر فاصله هندسی مساوی‌اند ولی از نظر جبری مختلف‌العلامه‌اند.



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به محور yها نقطه $A'\left|\begin{matrix}-x\\y\end{matrix}\right.$ است.

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۲\\۵\end{matrix}\right.$ است.

مثال: اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲m-۱\\۳\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}-m+۵\\۳\end{matrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت به محور yها باشند، مقدار m را بیابید.

$x_A = -x_{A'} \implies ۲m - ۱ = -(-m + ۵)$

$۲m - ۱ = m - ۵ \implies \boxed{m = -۴}$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی x را به (x−) تبدیل کنیم، معادله خط یا منحنی جدیدی به‌دست می‌آید که نمودار آنها

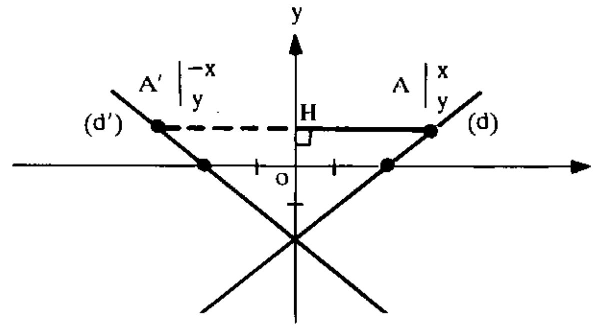
قرینه نمودار خط یا منحنی اوّلیّه نسبت به محور y ها است.

مثال: معادله قرینهٔ خط (d) به معادله $y = x - 2$ را نسبت‌به محور y ها بیابید و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

حل: باید x را به $(-x)$ تبدیل کنیم پس معادله خط (d') به صورت $y = -x-2$ است.

$$d: y = x - 2 \qquad \left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$$

$$d': y = -x - 2 \qquad \left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$$

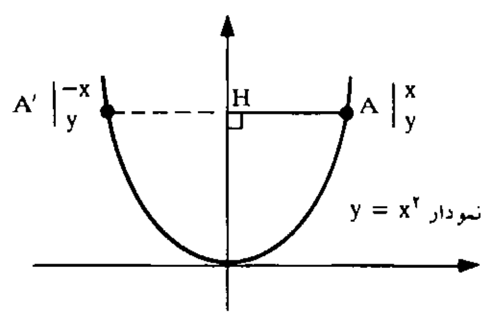


نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی x را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند، نمودار آن نسبت به محور y ها قرینه است.

مانند: منحنی $y = x^2$

که اگر در معادله فوق به‌جای x، $(-x)$ قرار دهیم، معادله آن تغییر نمی‌کند. پس محور y ها محور تقارن منحنی آن است.

$$y = (-x)^2 \implies y = x^2$$

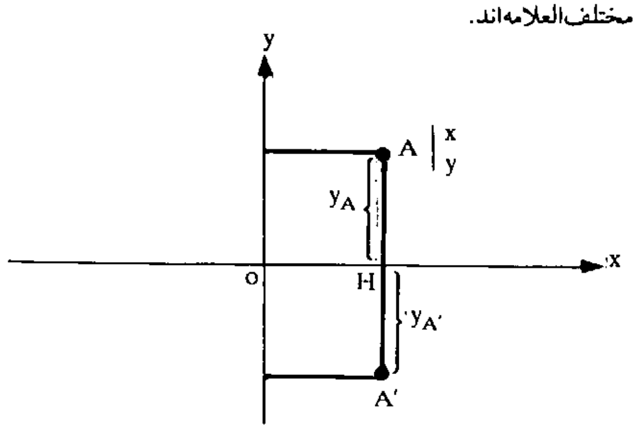


۲ـ قرینه نسبت به محور x ها:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد چنانچه نقطهٔ A' قرینه نقطهٔ A نسبت به محور x ها باشد خواهیم داشت:

$$AH = A'H$$

پس y_A و $y_{A'}$ از نظر فاصله هندسی مساوی‌اند ولی از نظر جبری مختلف‌العلامه‌اند.



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به محور x ها نقطه $A'\left|\begin{matrix}x\\-y\end{matrix}\right.$ است.

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ نسبت به محور x ها نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$ است.

مثال: اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}3\\m^2-m\end{matrix}\right.$ و نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت‌به محور x ها باشند، مقدار m را بیابید.

$$y_A = -y_{A'} \Rightarrow m^2 - m = 2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی y را به $(-y)$ تبدیل کنیم معادله خط یا منحنی جدیدی به دست می‌آید که نمودار آنها قرینه نمودار خط یا منحنی اولیّه نسبت به محور x ها است.

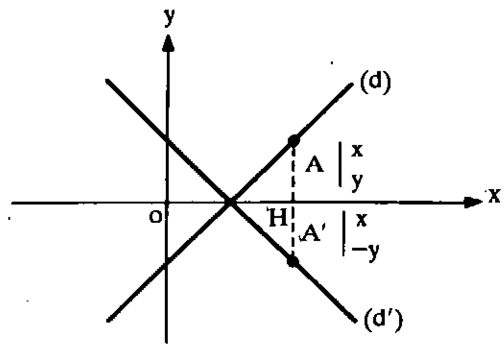
مثال: معادلهٔ قرینهٔ خط (d) به معادله $y=x-1$ را نسبت به محور x ها بیابید. و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

حل: y را به $(-y)$ تبدیل می‌کنیم. پس: $-y = x - 1$

$$\implies y = -x + 1 \quad (d') \text{ معادله خط}$$

$$(d): y = x - 1 \implies \left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

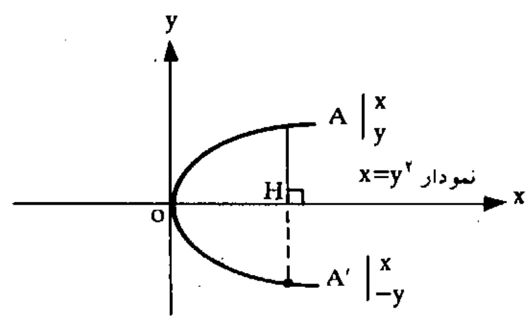
$$(d'): y = -x + 1 \implies \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$



نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی y را به (y−) تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند آنگاه محور x ها محور تقارن نمودار آن منحنی است. مانند: $x = y^۲$

که اگر در معادله فوق به‌جای y، (y−) را قرار دهیم، معادله آن تغییر نمی‌کند. پس محور x ها، محور تقارن منحنی آن است:

$x = (-y)^۲ \implies x = y^۲$



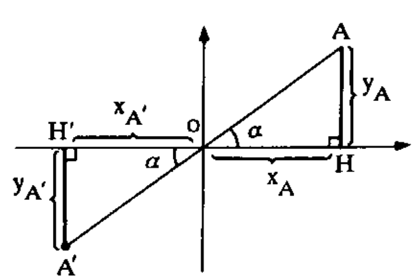
۳ـ قرینه نسبت به مبدأ مختصات:

اگر نقطه $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحه محورهای مختصات مفروض باشد. چنانچه نقطهٔ 'A قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به مبدأ مختصات باشد خواهیم داشت:

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AoH}$ و $\overset{\Delta}{A'oH'}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه) مساوی‌اند $(Ao = A'o$ و $\alpha = \alpha)$

$\implies oH = oH' \implies x_{A'} = -x_A$

$\implies AH = A'H' \implies y_{A'} = -y_A$



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت به مبدأ مختصات نقطه $A'\left|\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right.$ است.

مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-۲\\-۳\end{matrix}\right.$ است.

مثال: m و n را چنان بیابید تا دو نقطه $A\left|\begin{matrix}۲m-۴\\n+۲\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}n-۳\\m-۵\end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگر نسبت به مبدأ مختصات باشند.

حل:

$$\begin{cases}x_A = -x_{A'}\\ y_A = -y_{A'}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲m-۴ = -n+۳\\ n+۲ = -m+۵\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲m+n = ۷\\ n+m = ۳\end{cases} \xrightarrow{(-۱)} \begin{cases}۲m+n = ۷\\ -n-m = -۳\end{cases} \Rightarrow$$

$m = ۴$ و $n = -۱$

نتیجهٔ ۲: اگر در معادله یک خط یا یک منحنی، x را به (x−) و y را به (y−) تبدیل کنیم، معادله خط یا منحنی جدیدی به دست می‌آید که نمودار آنها قرینه نمودار خط یا منحنی اولیّه نسبت به مبدأ مختصات است.

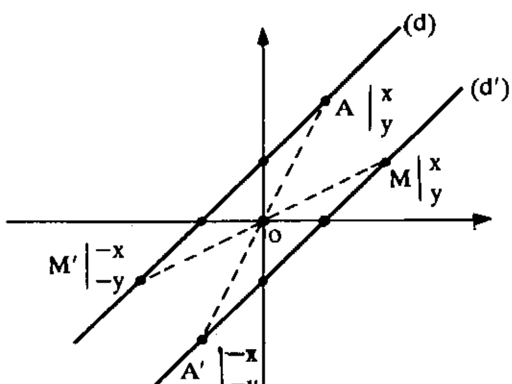
مثال: معادله قرینهٔ خط (d) به معادله $y = x + ۱$ را نسبت به مبدأ مختصات بیابید و هر دو را در یک شکل رسم کنید.

حل: باید x را به (x−) و y را به (y−) تبدیل کنیم. پس معادله خط (d') چنین است: $-y = -x + ۱ \implies y = x - ۱$

معادلهٔ خط d':

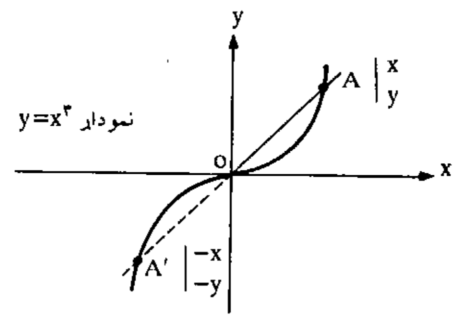
$(d): y = x + ۱ \implies \left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$

$(d'): y = x - ۱ \implies \left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$



نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند، آنگاه نمودار آن منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. مانند: نمودار $y = x^3$ که اگر x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل کنیم، معادله منحنی تغییر نمی‌کند.

$$-y = (-x)^3 \Rightarrow -y = -x^3 \Rightarrow y = x^3$$

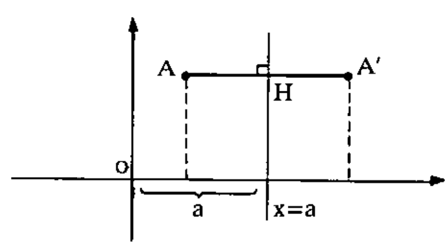


۴ـ قرینهٔ نسبت به خط $x = a$:

باتوجه به شکل اگر نقطه A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $x = a$ باشد داریم: $y_A = y_{A'}$ و نقطهٔ H وسط AA' است پس می‌توان نوشت:

$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow a = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$x_A + x_{A'} = 2a \Rightarrow x_{A'} = 2a - x_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{array}{l}2a-x\\y\end{array}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ نسبت به خط $x=a$، نقطه $A'\left|\begin{array}{l}2a-x\\y\end{array}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ نسبت به خط $x = 1$ چنین است:

$$A\left|\begin{array}{l}3=x\\1=y\end{array}\right. \quad \text{و} \quad a = 1 \Longrightarrow A'\left|\begin{array}{l}2a-x=2(1)-3\\y=1\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow A'\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right.$ نسبت به خط $x = 1$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم معادلهٔ قرینهٔ یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $x = a$ پیدا کنیم، باید به‌جای x، $(2a - x)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینهٔ خط (d) به معادله $y=x-2$ را نسبت به خط $x=2$ بیابید.

$$a = 2 \Longrightarrow 2a - x = 4 - x$$

در معادله $y = x - 2$ به‌جای x، $(4 - x)$ را قرار می‌دهیم.

معادله خط (d'): $y = 4 - x - 2 \Longrightarrow y = -x + 2$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، $(2a - x)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند نتیجه می‌گیریم که خط $x = a$، معادله محور تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید که خط $x = 1$ معادله محور تقارن منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 2x$ است.

$$a = 1 \Longrightarrow 2a - x = 2 - x$$

در معادله $y = x^2 - 2x$ به‌جای x، $(2 - x)$ را قرار می‌دهیم.

$$\Longrightarrow y=(2-x)^2-2(2-x) \Longrightarrow y=4+x^2-4x-4+2x$$

$$\Longrightarrow y=x^2-2x$$

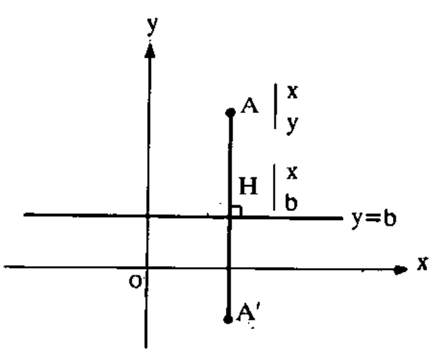
چون معادله حاصل همان معادلهٔ اولیّه است پس خط $x = 1$ معادله محور تقارن منحنی است.

۵ـ قرینه نسبت به خط $y = b$:

با توجه به شکل، اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = b$ باشد، داریم: $x_A = x_{A'}$ و نقطه H وسط AA' است.

$$\Rightarrow y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow b = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow$$

$$y_A + y_{A'} = 2b \Rightarrow y_{A'} = 2b - y_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x\\2b-y\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left\|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت‌به خط $y=b$، نقطه $A'\left\|\begin{matrix}x\\2b-y\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$ نسبت‌به خط $y=2$ چنین به‌دست می‌آید:

$$A\left|\begin{matrix}-1=x\\-2=y\end{matrix}\right. \text{ و } b=2 \implies A'\left|\begin{matrix}x\\2b-y\end{matrix}\right. \implies A'\left|\begin{matrix}-1\\4+2\end{matrix}\right.$$

$$\implies A'\left|\begin{matrix}-1\\6\end{matrix}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-1\\6\end{matrix}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=2$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم معادلهٔ قرینهٔ یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y = b$ پیدا کنیم باید به‌جای y، $(2b - y)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y=4x-1$ را نسبت‌به خط $y=2$ بیابید.

$$b = 2 \implies 2b - y = 4 - y$$

در معادله $y = 4x - 1$، به‌جای y باید $(4 - y)$ را قرار دهیم.

$$\implies 4-y=4x-1 \implies -y = 4x - 5 \implies$$

$y = -4x + 5$ (d') معادله خط

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای y، $(2b - y)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند، نتیجه می‌گیریم که خط $y = b$ معادله محور تقارن منحنی است.

مثال: نشان دهید خط $y = 2$ معادله محور تقارن منحنی به معادله $x = y^2 - 4y$ است.

$$b = 2 \implies 2b - y = 4 - y$$

در معادله $x = y^2 - 4y$، به‌جای y، $(4 - y)$ را قرار می‌دهیم.

$$x=(4-y)^2-4(4-y) \implies x=16+y^2-8y-16+4y$$

$$\implies x=y^2-4y$$

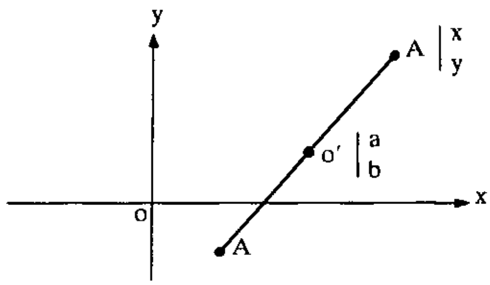
چون معادله حاصل همان معادلهٔ اوّلیّه منحنی است پس خط $y = 2$ معادله محور تقارن منحنی است.

۶ـ قرینه نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$:

با توجه به شکل، اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ باشد، می‌توان گفت که نقطهٔ o' وسط AA' است پس می‌توان نوشت:

$$x_{o'} = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow a = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow$$
$$x_A + x_{A'} = 2a \Rightarrow x_{A'} = 2a - x_A$$

$$y_{o'} = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow b = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow$$
$$y_A + y_{A'} = 2b \Rightarrow y_{A'} = 2b - y_A$$



بنابراین اگر $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ باشد نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}2a-x\\2b-y\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\left\|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نسبت‌به نقطهٔ $o'\left\|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$، نقطه $A'\left\|\begin{matrix}2a-x\\2b-y\end{matrix}\right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$ رانسبت‌به نقطه $o'\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ **بیابید.**

$$A\left|\begin{matrix}1=x\\5=y\end{matrix}\right. \text{ و } \begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases} \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}2a-x\\2b-y\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-4-1\\6-5\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-5\\+1\end{matrix}\right.$$

پس نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-5\\1\end{matrix}\right.$ قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $o'\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به نقطه

$o' \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ به‌دست آوریم باید به‌جای x، $(2a - x)$ و به‌جای y، $(2b - y)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y=2x+1$ را نسبت به نقطهٔ $o' \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$ را بیابید.

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - x = -2 - x \\ 2b - y = 4 - y \end{cases}$$

باید به‌جای x، $(-2 - x)$ و به‌جای y، $(4 - y)$ را در معادله $y = 2x + 1$ قرار دهیم.

$$\Longrightarrow 4-y=2(-2-x)+1 \Longrightarrow 4-y=-4-2x+1$$

$$\Longrightarrow -y=-2x-7 \Longrightarrow y=2x+7 \quad : (d') \text{ معادله خط}$$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، $(2a - x)$ و به‌جای y، $(2b - y)$ را قرار دهیم و معادله منحنی تغییر نکند، آنگاه نقطه $o' \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز تقارن منحنی تابع است.

مثال: نشان دهید نقطهٔ $o' \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$ مرکز تقارن منحنی تابع $y = x^3 - 6x^2 + 19$ است.

$$o' \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - x = 4 - x \\ 2b - y = 6 - y \end{cases}$$

باید در معادله منحنی به معادله $y = x^3 - 6x^2 + 19$ به‌جای x، $(4 - x)$ و به‌جای y، $(6 - y)$ را قرار دهیم.

$$6-y = (4-x)^3 - 6(4-x)^2 + 19$$

$$6-y = 64-x^3-48x+12x^2-6(16+x^2-8x)+19$$

$$6-y = -x^3+6x^2-13 \Rightarrow -y = -x^3+6x^2-19$$

$$\Rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 19$$

چون معادله حاصل همان معادله اولیّه است پس نقطهٔ $o' \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$ مرکز تقارن منحنی است.

۷ـ قرینه نسبت به خط $y = x$:

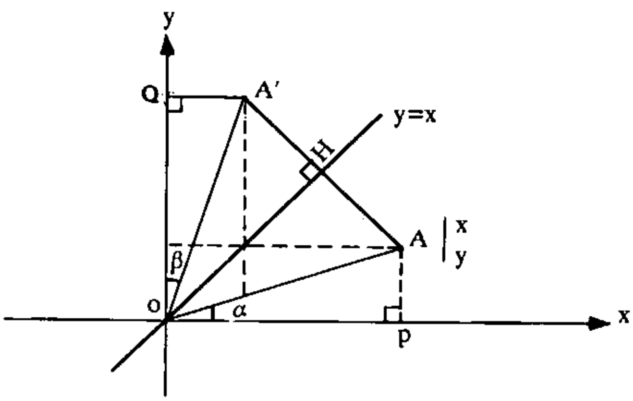
اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = x$ باشد می‌توان گفت که: خط $y = x$ عمود منصف AA' است. پس: $oA = oA'$

$$\Longrightarrow \angle A'oH = \angle AoH \Longrightarrow \alpha = \beta$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{oPA}$ و $\overset{\Delta}{oQA'}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه مساوی‌اند.

$$\Rightarrow \overline{oP} = \overline{oQ} \Rightarrow x_A = y_{A'}$$

$$\Rightarrow \overline{AP} = \overline{A'Q} \Rightarrow y_A = x_{A'}$$



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ نسبت به خط $y=x$، نقطه $A' \left| \begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \right.$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$ نسبت به خط $y=x$، نقطهٔ $A' \left| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$ است.

نتیجه ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y = x$ بیابیم باید در معادله خط یا منحنی جای x و y را با هم عوض کنیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y = 2x + 3$ را نسبت به خط $y = x$ بیابید.

باید جای x و y را با هم عوض کنیم.

$$\Longrightarrow x = 2y + 3 \Longrightarrow 2y = x - 3$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad : (d') \text{ معادله خط}$$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی جای x و y را باهم عوض کنیم و معادله منحنی تغییر نکند می‌گوییم خط $y = x$ معادله محور تقارن آن منحنی است.

مثال: نشان دهید که خط $y = x$ معادلهٔ محور تقارن منحنی به معادله $x^۲ + y^۲ + ۳xy = ۱$ است.

حل: جای x و y را باهم عوض می‌کنیم.

$$\Longrightarrow \quad y^۲ + x^۲ + ۳yx = ۱$$

ملاحظه می‌کنیم که معادله اصلی تغییر نکرده است. پس خط $y = x$ معادله محور تقارن این منحنی است.

۸ـ قرینه نسبت به خط $y = -x$:

اگر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط $y = -x$ باشد می‌توان گفت که خط $y = -x$ عمودمنصف AA' است.

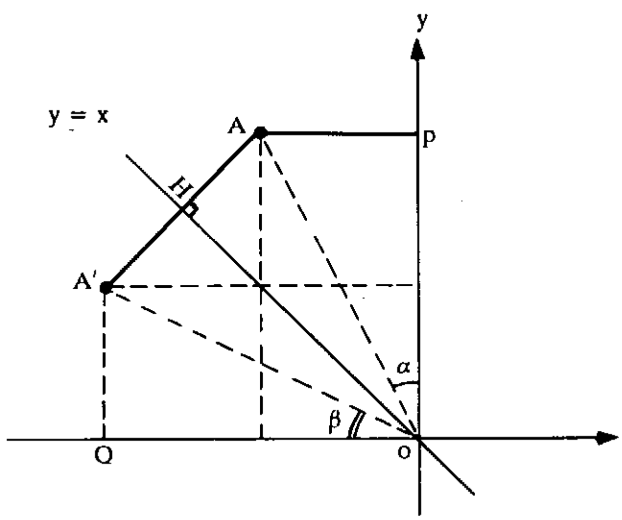
پس: $\angle A'oH = \angle AoH$ و $oA = oA'$

در نتیجه: $\alpha = \beta$

و دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{APo}$ و $\overset{\Delta}{A'Qo}$ (به حالت وتر و یک زاویه حادّه مساوی‌اند).

در نتیجه، با توجه به علامت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{oP} = -\overline{oQ} \;\Rightarrow\; y_A = -x_{A'} \\ \overline{AP} = -\overline{A'Q} \;\Rightarrow\; x_A = -y_{A'} \end{cases}$$



نتیجهٔ ۱: قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نسبت به خط $y=-x$، نقطهٔ $A'\begin{vmatrix} -y \\ -x \end{vmatrix}$ است.

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۵ \end{vmatrix}$ نسبت به خط $y=-x$، نقطهٔ $A'\begin{vmatrix} -۵ \\ -۲ \end{vmatrix}$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر بخواهیم قرینه یک خط یا یک منحنی را نسبت به خط $y = -x$ پیدا کنیم باید در معادله آنها به‌جای x، $(-y)$ و به‌جای y، $(-x)$ را قرار دهیم.

مثال: قرینه خط (d) به معادله $y = ۲x - ۱$ را نسبت به خط $y = -x$ بیابید. باید x را به $(-y)$ و y را به $(-x)$ تبدیل کنیم.

$$-x = -۲y - ۱ \quad\Longrightarrow\quad ۲y = x - ۱$$

معادله خط (d'): $\Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}}$

نتیجهٔ ۳: اگر در معادله یک منحنی به‌جای x، $(-y)$ و به‌جای y، $(-x)$ را قرار دهیم و معادله آن تغییر نکند می‌گوییم خط $y = -x$ معادله محور تقارن آن است.

مثال: نشان دهید که خط $y = -x$ معادله محور تقارن منحنی به معادله $x^۲y^۲ + (x - y)^۲ = ۱$ است.

حل: به‌جای x، $(-y)$ و به‌جای y، $(-x)$ را قرار می‌دهیم.

$$(-y)^۲ (-x)^۲ + (-y + x)^۲ = ۱ \quad\Longrightarrow\quad y^۲x^۲ + (x-y)^۲ = ۱$$

معادله منحنی تغییر نکرده است پس خط: $y = -x$ معادله محور تقارن منحنی است.

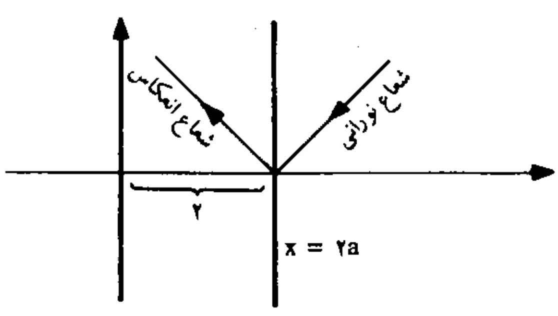
مساله: یک شعاع نورانی به معادله $y = ۲x - ۴$ به محور xها می‌تابد، معادله شعاع انعکاس را بیابید.

حل: این شعاع نورانی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ = x قطع می‌کند $(y = ۰ \Rightarrow x = ۲)$. باتوجه به درس آئینه‌ها در فیزیک برای تعیین معادله شعاع انعکاس باید قرینه معادله شعاع نورانی را نسبت به خط $x = ۲$ پیدا کرد (شمارهٔ (۴) درس همین مقاله).

$$a = ۲ \quad\Longrightarrow\quad ۲a - x = ۴ - x$$

باید در معادله شعاع نورانی به‌جای x، $(۴ - x)$ را قرار داد.

معادله شعاع انعکاس: $\Longrightarrow y = ۲(۴-x) - ۴ \Longrightarrow y = ۴ - ۲x$



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۳)

آیا یک عدد، به حاصلضرب عوامل اول یکتا تجزیه می‌شود؟

(اقتباس)

از مجلهٔ: QUANTOM

■ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱. هر عدد معلوم را می‌توان به حاصلضرب عوامل اول چنان تجزیه کرد که در آخر تنها عوامل اول در حاصلضرب موجود باشند. به‌عنوان مثال، ۶۰ را می‌توان به صورت ۱۰×۶، ۶ را به‌صورت ۳×۲، و ۱۰ را به‌صورت ۵×۲ تجزیه کرد و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$۶۰ = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۵$$

و همان‌طور که معلوم است تمام این عوامل اولند.

به طریقی دیگر می‌توانیم این عدد را ابتدا به‌صورت:

$$۶۰ = ۴ \times ۱۵ \quad و \quad ۴ = ۲ \times ۲ \quad و \quad ۱۵ = ۳ \times ۵$$

تجزیه کنیم و از آن:

$$۶۰ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵$$

را به‌دست آوریم. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت در تجزیه عوامل یکسان ظاهر شده‌اند و تعداد این عوامل نیز در هر دو حالت یکی است. با به ترتیب اندازه نوشتن این عوامل اول در هردو حالت داریم:

$$۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵$$

این حقیقت که در هر دو این حالات به یک نتیجه می‌رسیم بسیار واضح به‌نظر می‌رسد و این بدان علت است که چنان عادت کرده‌ایم. چه، در حساب چنین فرض کرده‌ایم که چون عددی را تا آنجا که ممکن است به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنیم، همواره ــ بی‌توجه به اینکه کار را چگونه آغاز کرده‌ایم ــ عوامل یکسان به‌دست می‌آوریم.

این گزاره راست است، اما حقیقتاً آن‌طور که به‌نظر می‌رسد واضح است؟ عدد بزرگی چون ۳۰۰۳۱ را درنظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که برای تجزیهٔ آن به‌کار قابل ملاحظه‌ای نیاز داریم. و ممکن است پس از آزمایشهای بسیار کشف کنیم که این عدد را می‌توان به حاصلضرب ۵۰۹×۵۹ که هر دو اولند تجزیه کرد. اکنون تحت چه مبنایی به‌طور مسلم می‌توان گفت که واضح است آزمایشهای دیگر، عوامل دیگری را که با این عوامل متفاوتند به‌دست نمی‌دهد؟

این مطلب با تمام مفاهیمی که در پذیرفتن این‌که حاصلضرب اعداد اول مشخصی به یک عدد مشخص تبدیل می‌شود، آموخته‌ایم مغایرت دارد. در این بحث غرض از قسمتهای ۲ و ۳ این است که نشان داده شود این مفاهیم شهودی مبنای صحیحی ندارند. پس از آن با نشان دادن این موضوع که در این مورد، به حقیقت، مسأله‌ای مطرح است، در باقیماندهٔ مقاله به اثبات این مطلب می‌پردازیم که «تجزیهٔ اعداد به عوامل اول واقعاً یکتاست».

۲. برای این‌که خویش را از مفاهیم از پیش‌داوری شده برکنار کنیم دستگاه عددی ناآشنایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و اعداد به‌صورت $a + b\sqrt{۶}$ را که در آنها a و b اعداد صحیح‌اند، درنظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال، $۱۲ + ۵\sqrt{۶}$، $۲ - \sqrt{۶}$ و $۳\sqrt{۶}$ از چنین اعدادی هستند. درحالی که $۲ + ۳\sqrt{۱۲}$ نیست. در این دستگاه اعداد صحیح را کنار نگذاشته‌ایم، این اعداد در حقیقت b را مساوی صفر دارند و قسمتی از دستگاه عددیمان را تشکیل می‌دهند و بنابراین، این دستگاه جدید نگاشت مجموعهٔ اعداد صحیح است.

محاسبه با این اعداد درست به همان طریق که طبیعتاً انتظار می‌رود انجام می‌گیرد و تمام اعمال با استفاده از جبر، آشنا هستند. طریق جمع و تفریق دو عدد از این اعداد از مثال زیر معلوم می‌شود.

$$(۳ + \sqrt{۶}) + (۵ + \sqrt{۶}) = ۸ + ۲\sqrt{۶}$$

ضربهای زیر که توسط قواعد معمول جبر انجام شده‌اند، چگونگی عمل ضرب هر دو عدد از این اعداد را نشان می‌دهند.

$$(۳ + \sqrt{۶})(۳ - \sqrt{۶}) = ۹ - ۶ = ۳$$

$$(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲)=۶-۴=۲$$
$$(۳+\sqrt{۶})(\sqrt{۶}-۲)=۳\sqrt{۶}-۶+۶-۲\sqrt{۶}=\sqrt{۶}$$
$$(۳-\sqrt{۶})(\sqrt{۶}+۲)=\sqrt{۶}$$
$$(۳+\sqrt{۶})(۲+\sqrt{۶})=۱۲+۵\sqrt{۶}$$
$$(۳-\sqrt{۶})(\sqrt{۶}-۲)=-۱۲+۵\sqrt{۶}$$

در مورد تقسیم نیازی نیست که سخنی گفته شود. چه، درست مانند مورد اعداد صحیح، گاهی عددی بر عدد دیگر تقسیم می‌شود و گاهی نمی‌شود.

در این دستگاه عددی، ۶ را می‌توان چون طریق معمول، به $\sqrt{۶}\ \sqrt{۶}$ تجزیه کرد.

$$۶=۲\times۳=\sqrt{۶}\sqrt{۶} \qquad (۱)$$

در این مثال، ۶ به ظاهر به دو طریق متفاوت تجزیه می‌شود. و این مطلب منجر به این می‌شود که سؤال قبل، یعنی آیا ۳۰۰۳۱ تجزیه‌ای متفاوت با ۵۰۹×۵۹ دارد یا خیر، را به خاطر بیاوریم. چنین می‌نماید که (۱) وضعیتی مشابه این وضعیت را نمایش می‌دهد.

اما این حالت را می‌توان به روشی بسیار طبیعی توضیح داد و آن به این طریق است که اعداد ۲ و ۳ اعدادی اولند و نمی‌توانند در دستگاه عددی معمولی تجزیه شوند، اما می‌توان آنها را در دستگاه جدید تجزیه کرد. درحقیقت، با استفاده از مثالهای ضربمان داریم:

$$۲=(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲) \quad , \quad ۳=(۳+\sqrt{۶})(۳-\sqrt{۶})$$

در این صورت، با ادامه دادن به تجزیهٔ ۳×۲=۶ خواهیم داشت

$$۶=(\sqrt{۶}+۲)(\sqrt{۶}-۲)(۳+\sqrt{۶})(۳-\sqrt{۶}) \qquad (۲)$$

دو تجزیهٔ (۱) صرفاً همان (۲) با جفتهای عوامل متفاوتند. چه، تجزیهٔ اول (۱) از ترکیب دو عامل اول و دو عامل آخر (۲) به‌دست می‌آید، و تجزیهٔ دوم آن از ترکیب عوامل اول و چهارم، همین‌طور دوم و سوم (۲) حاصل می‌شود.

واضح است که در این مورد ترکیبات دیگری نیز وجود دارد. به‌عنوان مثال، اگر عوامل اول و سوم و عوامل دوم و چهارم را ترکیب کنیم خواهیم داشت:

$$۶=(۱۲+۵\sqrt{۶})(-۱۲+۵\sqrt{۶})$$

درستی این تجزیه را می‌توان با استفاده از ضرب اثبات کرد.

این وضع با وضعی که با آن آشناییم تفاوت ندارد. چه، در توضیح آن مجبورنبودیم که بدانیم عوامل واقع در (۲) اولند. واضح است که اکنون از اعداد اول عددی را درنظر می‌گیریم که نتواند در دستگاهمان تجزیه شود، و نشان دادن این‌که چهار عامل مورد بحث اولند مشکل نیست.

۳. اکنون دستگاه عددی دیگری را درنظر می‌گیریم. این دستگاه مجموعهٔ اعداد به‌صورت $a+b\sqrt{-۶}$ است که در آن بار دیگر a و b اعداد صحیح معمولیند. در این حالت نیز وضعیتی نظیر (۱) پیدا می‌کنیم، اما این مرتبه نمی‌توانیم آن را آن‌گونه که (۱) را با (۲) توضیح دادیم توضیح دهیم. محاسبات در این دستگاه به همان سادگی محاسبه در دستگاه $a+b\sqrt{۶}$ است و قواعد جبر درست به همان ترتیب که قبلاً به‌کار می‌رفتند، به‌کار می‌روند. در این صورت متناظر با (۱) داریم:

$$۶=۲\times۳=-\sqrt{-۶}\sqrt{-۶} \qquad (۳)$$

مشابه با حالت دیگر، سعی می‌کنیم که ۲، ۳ و $\sqrt{-۶}$ را تجزیه کنیم. اما این‌بار چنان معلوم می‌شود که این اعداد در این دستگاه اولند و نمی‌توانیم آنها را تجزیه کنیم.

بهتر است که در این بحث از مفهوم «نُرم[۱]» یک عدد استفاده کنیم. نرم عدد $a+b\sqrt{-۶}$ حاصلضرب این عدد با $a-b\sqrt{-۶}$ است، یعنی

$$N(a+b\sqrt{-۶})=(a+b\sqrt{-۶})(a-b\sqrt{-۶})=a^۲+۶b^۲$$

به عبارت دیگر، در این دستگاه، نرم یک عدد حاصلضرب آن عدد در عددی است که با قرار دادن $-\sqrt{-۶}$ به جای $\sqrt{-۶}$ در آن عدد به‌دست می‌آید. به این ترتیب نرم یک عدد همواره یک عدد صحیح و مثبت معمولی است. همچنین نرم حاصلضرب دو عدد، برابر با حاصلضرب نرمهای آن دو عدد است. زیرا، بنا به قاعده، داریم:

$$N\ (a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})$$
$$=\left[(a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})\right]\left[(a-b\sqrt{-۶})(c-d\sqrt{-۶})\right]$$

این چهار عامل را می‌توان به‌صورت:

$$(a+b\sqrt{-۶})(a-b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})(c-d\sqrt{-۶})$$

نوشت که طبق قاعده دقیقاً:

$$N(a+b\sqrt{-۶})N(c+d\sqrt{-۶})$$

است.

اگر در این دستگاه بتوان ۲ را به‌صورت دو عامل تجزیه کرد، داریم:

$$۲=(a+b\sqrt{-۶})(c+d\sqrt{-۶})$$

و درنتیجه:

$$N(۲)=N(a+b\sqrt{-۶})N(c+d\sqrt{-۶})$$

اما نرم ۲ عبارت است از

$$N(۲) = (۲ + ۰\sqrt{-۶})(۲ - ۰\sqrt{-۶}) = ۲ \times ۲ = ۴$$

بنابراین داریم:

$$۴ = (a^۲ + ۶b^۲)(c^۲ + ۶d^۲)$$

یعنی، باید ۴ به حاصلضرب دو عدد صحیح معمولی هر یک به صورت $x^۲ + ۶y^۲$ تجزیه شود. اما تنها به دو طریق است که می‌توان ۴ را با استفاده از اعداد معمولی تجزیه کرد، در یکی از این دو، هر دو عامل ۲ و در دیگری یکی ۴ و دیگری یک است، و هیچ یک از این دو به کارمان نمی‌آید؛ چرا که ۲ را نمی‌توان به‌صورت $x^۲+۶y^۲$ درآورد و ۱ تنها به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۰$ به این صورت درمی‌آید. بنابراین تنها طریقی که طبق آن ۲ را می‌توان در این دستگاه به دو عامل تجزیه کرد، این است که یکی از عوامل $۱ = ۰\sqrt{-۶}+۱$ باشد. ولی ما این تجزیه را در دستگاهمان به‌عنوان تجزیه درنظر نمی‌گیریم، همان‌طور که $۵ = ۱\times۵$ را در دستگاه عددی معمولی به‌عنوان یک تجزیه درنظر نمی‌گرفتیم.

با روشی دقیقاً شبیه این روش می‌توان دریافت که ۳ و $\sqrt{-۶}$ در این دستگاه اولند. درحالی که به جای نرم ۴، نرمهای ۹ و ۶ باید به صورت $x^۲ + ۶y^۲$ تجزیه شوند.

یادداشت:

1. Norm

ادب ریاضی



فیثاغورث

کتابی که به اقلیدس فیثاغوری منسوب است، شامل اصول هندسه و عدد می‌باشد، این کتاب به‌نام اُسطُقُسّات معروف شده، و مطالعه در این اصول از دو راه است: راه تحلیل، و راه ترکیب.

دانشمندان پیشین این رشته– غیر از اقلیدس– در کتابهای خود، راه تحلیل و ترکیب را با هم آورده‌اند، اما اقلیدس مطالب کتاب خود را تنها براساس ترکیب، تألیف کرده است.

«احصاء العلوم»

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۱)

(جبر و احتمال نظام جدید و ریاضیات جدید سال چهارم)

● حمید رضامیری

✱ PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION

Let us try to answer the following question: What is the sum of all integers from one through n, for any positive integer n? If $n=1$, the sum equals 1 because 1 is the only summand. The answer we seek is a formula that will enable us to determine this sum for each value of n without having to add the summands.

✱ اصل استقرای ریاضی

اجازه بدهید به سؤال زیر پاسخ دهیم: مجموعِ همهٔ اعداد صحیح و مثبت از ۱ تا n چقدر است؟ اگر n = ۱ ، مجموع، مساوی ۱ است زیرا ۱ تنها «جمع وند»، در مجموع، مورد نظر است. پاسخی که به دنبال آن هستیم فرمولی است که به ما توانایی می‌دهد تا این مجموع را، بدون آن که لزومی برای افزایش «جمع وندها» باشد، به ازای هر مقدار n ، معین کنیم.

Table 1-1 lists the sum S_n of the first n consecutive positive integers for values of n from 1 through 10. Notice that in each case S_n equals one-half the product of n and the next integer; that is,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Although this formula gives the correct value of S_n for the first ten values of n, we cannot be sure that it holds for n greater than 10.

جدول ۱ ـ ۱ لیست (یا فهرست) مجموعِ S_n از اولین n عدد صحیح و مثبتِ متوالیِ مورد نظر را به ازای مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n به دست می‌دهد. توجه دارید که در هر حالت S_n برابر است با نصف (یک دوم) حاصل ضرب n در عدد صحیحِ بعدیِ آن یعنی، به ازای n = ۱، ۲، ۳، ....، ۱۰ ،

$$S_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۱-۱-۱)$$

با این که این فرمول مقدار صحیحی برای S_n در مورد ده مقدار اولیهٔ n برای ما حاصل می‌کند، ما نمی‌توانیم مطمئن باشیم که به ازای n بزرگتر از ۱۰ نیز برقرار است.

To construct Table 1-1, we do not need to compute S_n each time by adding the first n positive integers. Having obtained values of S_n

TABLE 1-1: SUM S_n OF THE FIRST n CONSECUTIVE POSITIVE INTEGERS.

n	S_n	n	S_n
1	1	6	21
2	3	7	28
3	6	8	36
4	10	9	45
5	15	10	55

for n less than or equal to some integer k, we can determine S_{k+1} simply by adding $(k+1)$ to S_k:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1).$$

برای ساختن جدول ۱ ـ۱، لازم نیست که S_n را هر دفعه، با جمع کردنِ اولین n عدد صحیح و مثبت ، حساب کنیم. با به دست آوردن مقادیر S_n برای n های کوچکتر یا مساوی با عددی چون K ، می‌توانیم S_{K+1} را بسادگی با افزودن K + ۱ به S_K معین کنیم:

$$S_{K+1} = S_K + (K+۱)$$

This last approach suggests a way of verifying equation (1-1-1). Suppose we know that formula (1-1-1) is true for $n \le k$, where k is a positive integer. Then we know that

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

and so

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)$$
$$= \frac{(k+2)(k+1)}{2},$$

that is,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

این رهیافت اخیر راهی برای برقراری تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) ارائه می‌دهد. فرض کنید بدانیم که فرمول (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n \le K$، که در آن K عددی صحیح و مثبت است، درست باشد. در این صورت می‌دانیم که

$$S_K = \frac{K(K+۱)}{۲}$$

بنابراین

$$S_{K+۱} = S_K + (K+۱)$$
$$= \frac{K(K+۱)}{۲} + (K+۱) = \left(\frac{K}{۲}+۱\right)(K+۱)$$
$$= \frac{(K+۲)(K+۱)}{۲}$$

یعنی

$$S_{K+۱} = \frac{(K+۱)((K+۱)+۱)}{۲}$$

The last equation is the same as equation (1-1-1) except that n is replaced by $k+1$.

We have proved that if equation (1-1-1) holds for $n \le k$, then it holds for $n = k+1$, and we have already verified that equation (1-1-1) holds for $n = 1, 2, \ldots, 10$. Therefore, by the preceding argument, we conclude that equation (1-1-1) is also correct for $n = 11$. Since it holds for $n = 1, 2, \ldots, 11$, the same process shows that it is correct for $n = 12$. Since it is true for $n = 1, 2, \ldots, 12$, it is true for $n = 13$, and so on.

تساوی اخیر همان تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) است که به جای n، (K+۱) قرار داده شده است.

ثابت کردیم که اگر تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای $n \le K$ برقرار باشد، آن گاه به ازای n = K+۱ نیز برقرار است، پیش از این بررسی کردیم که تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای n = ۱,۲,......,۱۰ برقرار است. پس، بنا به استدلالی مشابه قبل، می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که تساوی (۱ ـ ۱ ـ ۱) به ازای n = ۱۱ نیز صحیح است، و چون به ازای n = ۱,۲,....,۱۱ برقرار است، فرایندی مشابه نشان می‌دهد که به ازای n = ۱۲ برقرار است. و از آنجا که برای n = ۱,۲,.....,۱۲ درست است، به ازای n = ۱۳ نیز صحیح خواهد بود و غیره.

✱ **Principle of mathematical induction:** *A statement about integers is true for all integers greater than or equal to 1 if*
 (i) *it is true for the integer 1, and*
 (ii) *whenever it is true for all the integers $1, 2, \ldots, k$, then it is true for the integer $k+1$.*

By "a statement about integers" we do not necessarily mean a formula. A sentence such as "$n(n^2-1)(3n+2)$ is divisible by 24" is also acceptable (see Exercise 17 of this section). The assumption that "the statement is true for $n = 1, 2, \ldots, k$" will often be referred to as the *induction hypothesis*. Sometimes the role 1 plays in the Principle will be replaced by some other integer, say b; in such instances the principle of mathematical induction establishes the statement for all integers $n \ge b$.

✱ **اصل استقرای ریاضی:** گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح و به ازای هر عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با یک، راست است اگر

I) به ازای عدد صحیح ۱ راست باشد، و

II) اگر به ازای هر عدد صحیح ۱ و ۲ و ... K راست باشد، آنگاه به ازای عدد صحیح K+۱ نیز راست باشد.

منظور ما از «گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح» الزاماً اشاره به یک فرمول نیست، و شامل جمله‌ای مانند «$n(n^۲-۱)(۳n+۲)$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است» نیز شده و مورد قبول است. معمولاً به این جمله که «گزاره به ازای n = ۱,۲,....,K راست است» فرض استقراء گفته می‌شود. گاهی اوقات نقشی که عدد ۱ در اصل مزبور بازی می‌کند، با عدد صحیح دیگری مانند b جایگزین می‌شود که در چنین نمونه‌هایی اصل استقرای ریاضی گزاره مزبور را به ازای جمیع اعداد صحیح $n \ge b$ برقرار می‌کند.

❑ اصطلاحات

Principle	اصل
Mathematical Induction	استقرای ریاضی
Sum	مجموع
Integer	عدد صحیح
One	یک
Positive Integer	عدد صحیح و مثبت

فارسی	English
برابر بودن، مساوی بودن	To Equal
جمع وند	Summand
فرمول	Formula
افزایش دادن، اضافه کردن	To Add
جدول	Table
متوالی	Consecutive
حاصل ضرب	Product
مقدار	Value
حساب کردن	To Compute
رهیافت	Approach
تحقیق کردن	To Verify
برابری، تساوی	Equation
استدلال، برهان	Argument
فرایند	Process
تنظیم	Formulation

فارسی	English
گزاره	Statement
بزرگتر	Greater
برابر، مساوی	Equal
راست	True
بخش‌پذیر	Divisible
مفروض	Assumption
فرض استقراء	Induction Hypothesis
شرط	Condition
نتیجه	Result
قضیه	Theorem
عدد حقیقی	Real Number
تبصره	Remark
اثبات	Proof
قضیهٔ فرعی	Corollary

تفریح اندیشه ۱

ماشینی که از لحاظ سوخت در وضعیت ویژه‌ای است و به‌ازای هر ۳۲ مایل یک بشکه گازوییل می‌سوزاند درمقابل ماشینی که به‌ازای هر مایل یک بشکه گازوییل مصرف می‌کند، در طی یک سال تا چه حد می‌تواند در مصرف گازوییل صرفه‌جویی کند؟ فرض کنید میانگین مسافتی که یک ماشین در هر سال می‌پیماید ۹۰۰۰ مایل است.

جواب در صفحهٔ ۸۸

ادب ریاضی

کسی که به تحصیل حکمت* می‌پردازد باید جوان و تندرست باشد، آداب اخیار را از دست ندهد، علوم شرع و قرآن و لغت را پیش از آن آموخته باشد. عفیف و راستگو باشد. غدّار و خائن نباشد. به گرم کردن بازار خود و حیله و مکر نپردازد. مصالح زندگانی را فراهم کرده، وظایف شرعی را انجام دهد. هیچیک از آداب و ارکان شریعت را ترک نگوید. علم و علما را بزرگ دارد. جز علم و علما را محترم نشمارد و حکمت را حرفه نکند. هر که به خلاف این صفات باشد، حکیم دروغین است.

«احصاء العلوم»

* حکمت نظری به سه قسمت الهیات، ریاضیات و طبیعیات تقسیم می‌شده است.

تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۴)

☐ در مقالهٔ **علم و منطق** شمارهٔ ۸ یکان چنین می‌خوانیم:

دربارهٔ آنکه در آینده چه خواهد شد، پا را از حدود حدس نمی‌توان فراتر گذاشت.

در زمان حاضر، آینده را به یکی از این دو صورت در پیش داریم: یا آینده‌ای که در آن علم با همین سرعت بسط و توسعه یابد، یا جهانی که پیشرفتهای جدید علم برایش فرجامی بد و عاقبتی شوم داشته باشد.

برنامه‌های مدارس زیر تأثیر این‌گونه عاملهای خارجی دگرگون می‌شود و برای آنکه نسل آینده برای رو به‌رو شدن با وضع زمان آماده گردد به بعضی دروس توجه بیشتری می‌شود و به محتویات برخی از آنها افزوده می‌گردد و مواد تازه‌ای هم جای خود را در برنامه‌های تحصیلی باز می‌کند.

در توجه جدی به علوم منطق هم مورد توجه خاص واقع گردیده است. و ما در این سطور خواهیم دید که چگونه علم و منطق با هم کار می‌کنند.

غالباً منطق به کمک ریاضیات عملی در علوم دیگر مداخله داده می‌شود و گاهی هم در خود ریاضی به‌کار می‌رود تا شاخه‌ای از ریاضیات محض، به‌خاطر خود آن، به‌وجود آید. اما بر روی هم طرز استفاده از منطق در شاخه‌های مختلف علم یکسان است.

☐ در مقالهٔ **خدمات ریاضیدانان ایرانی** چنین آمده است:

اولین ریاضیدان بزرگ ایرانی **محمدبن موسی خوارزمی** است که در ایام جوانی در دربار **مأمون** خلیفهٔ عباسی می‌زیسته و سپس در قرن نهم برای تحصیل به **هند** اعزام شده است و پس از بازگشت مسئول کتابخانهٔ مأمون بوده است وی کتابی در جبر و حساب تألیف کرد، که ترجمهٔ لاتین قسمت مربوط به حساب آن درسال ۱۸۵۷ کشف گردیده است. در این کتاب برای اولین بار ارقام هندی یعنی ارقام متداول امروزی در محاسبات به‌کار برده شده که در اثر ترجمه آن اروپائیان نیز ارقام فوق را مورد استفاده قرار داده‌اند و چون در ترجمه به لاتین اسم خوارزمی الگاریتمی نوشته شده کلمهٔ الگوریتم که به معنای محاسبه است اصطلاحی برای محاسبه با پایهٔ ده گردید.

امروزه آنهایی که با داشتن ده رقم قادر به نوشتن بزرگترین اعداد هستند قدر و موهبت این خدمت خوارزمی را هرگز نمی‌دانند. توجه به دو سطر زیر که یکی مربوط به قدیمی‌ترین اثر خطی اروپائیان در سال ۹۷۶ و دیگری کهنترین ارقام مسلمین به سال ۹۷۰ میلادی است دو موضوع مهم را برای ما روشن می‌سازد.

نخست آنکه ارقام فعلی اروپائیان همان ارقام مأخوذ از کتاب **خوارزمی** است که فقط در اثر مرور زمان کمی تغییر شکل پیدا کرده است دوم اینکه استفاده از صفر در عددنویسی تا سال ۹۷۶ میلادی در بین آنان معمول نبوده و درنتیجهٔ ترجمهٔ آثار **خوارزمی** و دانشمندان اسلامی دیگر توجه به اصل ارزش ارقام در آنها پیدا شده است.

در بخش جبر کتاب **خوارزمی** برای اولین مرتبه لفظ **جبر و مقابله** تظاهر می‌کند که منظور از جبر نقل جملات از یک‌طرف به طرف دیگر و قصد از مقابله جمع جملات متشابه است. بدون شک این کتاب بزرگترین و مهمترین کتابی است که تا آن زمان در جبر نوشته شده است. البته بابلیها و هندیان و حتی یونانیان نیز چیزی شبیه به جبر داشتند. ولی آنها هرگز بیش از ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم را به حساب نمی‌آوردند. بعلاوه از علائم اختصاری، که اساس علم جبر است، استفاده نمی‌کردند. کتاب فوق که کلمهٔ جبر را برای این علم در میان اروپائیان معمول کرد، هفت قرن و نیم مهمترین کتاب جبر در دنیا بود.

اواخر قرن دوازدهم جبر خوارزمی به‌وسیلهٔ ژرارد ایتالیایی، به زبان لاتین ترجمه گردید و مدت چهارصد سال برنامهٔ عمدهٔ جبر و مقابلهٔ دانشگاههای اروپا شد. پس از آن هم کتاب خوارزمی در قرن نوزدهم در رم و لندن و در قرن بیستم در نیویورک به چاپ رسید.

یکی دیگر از افتخارات ایرانیان ابوالوفای بوزجانی است که در سال ۹۴۰ میلادی در شهر بوزجان از توابع نیشابور به دنیا آمد. وی پس از تحصیلات ریاضی و نجوم به دربار عضدالدوله دیلمی بار یافت و به تألیف و تصنیف کتب متعددی در علوم عصر خویش پرداخت. از جملهٔ آنها کتابی است در جبر و حساب که در آنها کتب ریاضیدانان سلف خود مانند دیوفانتس یونانی و خوارزمی را تفسیر کرده، و بعضی از قضایایی را که دانشمندان فوق‌الذکر بدون اثبات ذکر کرده‌اند به طرق جالبی اثبات کرده است.

دقت او در تنظیم جدولی برای جیب و ظل (سینوس و تانژانت) که مقادیر آنها را دقیقه به دقیقه تا نه رقم اعشار محاسبه کرده است مورد تحسین کلیهٔ دانشمندان ریاضی است به علاوه وی واضع دو نسبت قطر ظل و قطر ظل تمام (سکانت و کسکانت) نیز می‌باشد. ولی شهرت و عظمت ابوالوفا بیشتر در علم نجوم است. او درنتیجهٔ مطالعات خود به جز حرکات وضعی و انتقالی ماه یک حرکت جالب دیگر وی را که فعلاً واریاسیون می‌گویند کشف نمود ولی هزار افسوس که کشف او به اطلاع مغرب زمین نرسید و به همین جهت این ابداع را به تیکوبراهه منجم هلندی که ششصد سال بعد از او این نظریه را اظهار کرده است نسبت می‌دهند.

□ در شمارهٔ نهم قسمت کوتاهی تحت عنوان مسألهٔ بوفون ملاحظه می‌کنیم که در آن چنین آمده است:

روش دیگری برای تعیین عدد π پس از به‌وجود آمدن علم احتمالات با طرح مسألهٔ سوزن به‌وجود آمد. اگر صفحهٔ مستوی را با خطوط نازک و متوازی و متساوی‌الفاصله و به فاصلهٔ 2l خط‌کشی کنیم و سوزنهای یکنواخت (یا چوب‌کبریتهای استوانه‌ای شکل) به طول h را برحسب تصادف (نه به قصد معین) روی این صفحه بریزیم، احتمال تعداد دفعاتی که این سوزنها خطوط را قطع می‌کنند، به تعداد دفعاتی که سوزنها را روی صفحه ریخته‌ایم برابر $P=\frac{2l}{\pi h}$ است. این مسأله را اولین بار بوفون طبیعیدان فرانسوی درسال ۱۷۳۳ میلادی مطرح و درسال ۱۷۷۷ آن را حل نمود.

درسالهای ۱۸۵۲ــ ۱۸۵۰ میلادی ولف منجم و ریاضیدان سوئیسی این آزمایش را با خطوطی به فواصل $l=۴/۵\,cm$ و سوزنهایی به بلندی $h=۳/۶\,cm$ انجام داد. طبق فرمول فوق $P=\frac{۲\times۳/۶}{۴/۵\pi}=\frac{۷۲}{۴۵\pi}$ است. ولف در این تجربه ۵۰۰۰ بار سوزن را روی صفحهٔ مذکور انداخت و ملاحظه کرد ۲۵۳۲ بار سوزن خطوط را قطع کرده یا مماس بر آن بود. بنابراین فرمول زیر حاصل شد:

$$P=\frac{\text{تعداد دفعاتی که سوزن خطها را قطع کرده}}{\text{تعداد کلیهٔ دفعات}}=\frac{۲۵۳۲}{۵۰۰۰}=۰/۵۰۶۴$$

حال از فرمول $\frac{۷۲}{۴۵\pi}=۰/۵۰۶۴$ عدد π برابر با $\pi=۳/۱۵۹۶$ که با عدد π حقیقی $۳/۱۵۹۶-۳/۱۴۱۵=۰/۰۱۸۱$ اختلاف دارد به‌دست می‌آید.

درسال ۱۸۵۵ نیز همین آزمایش تکرار شد. البته با سوزنهایی به طول ۳ سانتیمتر و خطوطی به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر، و مقداری که برای π به‌دست آمد ۳/۱۴۱۲ بود.

پس به‌طور خلاصه اگر صفحه‌ای را با خطوط نازک و متساوی‌الفاصله خط‌کشی کنیم و تعدادی سوزن، به بلندی فاصلهٔ خطوط، را بر این صفحه بریزیم و تعداد کلیهٔ دفعات ریختن سوزنها را بر تعداد دفعاتی که سوزنها خطوط را قطع کرده‌اند تقسیم کنیم، عدد $\frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود. شک نیست هر اندازه تجربه را تکرار کنیم طبق قوانین احتمالات مقدار π دقیقتر به دست خواهد آمد. فعلاً با ۵۰۰ سوزن عمل را یکهزار بار تکرار کرده، عدد π را مساوی ۳/۱۴۱۵۹۲۶۶ به‌دست آورده‌اند که تا هفت رقم بعد از ممیز صحیح است.

□ همان‌طور که قبلاً هم خاطر نشان شد یکی از بحثهای مورد توجه مجلهٔ یکان بحث معماهای ریاضی و منطقی است در این شماره به دو مسألهٔ زیر برخورد می‌کنیم:

سه قوطی است که در هر یک دو سنگ مرمر قرار دارد. در یکی هر دو سنگ سفید و در دیگری هر دو سنگ مشکی و در سومی یکی سفید و دیگری مشکی است. روی در هر قوطی برچسبی نصب شده است که رنگ سنگهای داخل قوطی را معلوم می‌کند. مثلاً روی در آن قوطی که داخلش دو سنگ مرمر سفید است برچسب س.س و روی در آن قوطی که در داخلش دو سنگ مشکی است برچسب م.م و بالاخره بر روی در قوطی سوم برچسب س. م چسبانده شده است. حال اگر درهای قوطیها را با هم عوض کنیم به‌طوری که از برچسب هیچ دری نتوان فهمید که در داخل آن قوطی چه رنگ سنگ قرار دارد، معلوم کنید که چند سنگ از قوطیها باید درآوریم و رنگ آن را ببینیم تا رنگ بقیهٔ سنگهای داخل قوطیها را ندیده تشخیص بدهیم؟

چند نفر به باغی رفته، مقداری گردو چیدند و در گوشهٔ اطاق انبار

نمودند و شب به استراحت پرداختند. یکی از آنها نصف شب بیدار شد و به تصور آنکه دیگران ممکن است در تقسیم او را مغبون کنند، گردوها را به تعداد نفرات تقسیم نمود، یک گردو زیاد آمد، آن را به موجب حکم وجدان که نمی‌خواست بیشتر از دیگران سهمی برده باشد، به خارج پرتاب کرد و سهم خود را پنهان ساخت و به بستر خود رفت. بلافاصله نفر دوم بیدار شد و با همین تصور باقیمانده را به تعداد نفرات تقسیم کرد و یک گردو اضافه آمد، آن را به خارج پرتاب کرده، سهم خود را پنهان کرد و به رختخواب رفت. نفر سوم، نفر چهارم الی آخر به ترتیب بیدار شدند و این عمل را تکرار کردند. تعیین کنید تعداد گردوها را.

مسأله را برای ۳ نفر و ۵ نفر حل کنید.

❑ در مقالهٔ کوتاه **آیا ارشمیدس هرگز می‌توانست زمین را بلند کند؟** چنین می‌خوانیم که:

«یک نقطهٔ اتکا به من بدهید من زمین را بلند خواهم کرد.»

این گفته‌ای است که به **ارشمیدس** یا نابغه‌ای که قانون اهرمها را کشف کرد نسبت می‌دهند.

«اگر زمین دیگری وجود داشت من به آنجا می‌رفتم و سیارهٔ خودمان را بلند می‌کردم.»

ارشمیدس می‌دانست که با نیرویی ضعیف می‌توان وزنهٔ سنگینی را با استفاده از یک اهرم بلند کرد. کافی است که این نیروی کم به انتهای بازوی کارگر وارد آید و سبب حرکت نیروی مقاوم که در انتهای بازوی ایستادگی قرار دارد، گردد. بنابراین ارشمیدس تصور می‌کرد که با فشار وارد آوردن به بازوی یک اهرم خیلی طویل قادر خواهد بود وزنه‌ای را که جرم آن معادل جرم کرهٔ زمین است بلند کند.

برای ساده شدن موضوع فرض می‌کنیم که منظور از بلند کردن زمین یعنی آن که وزنه‌ای را که جرمش به اندازهٔ جرم کرهٔ زمین باشد از روی سطح کرهٔ زمین بلند کرد.

بدون شک اگر ارشمیدس از تودهٔ عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمی‌گفت. حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیارهٔ دیگری قرار داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود. آیا می‌توانید حدس بزنید که چه زمانی طول می‌کشید تا ارشمیدس زمین را فقط یک سانتیمتر بلند کند؟

۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ سال، حتماً تعجب کرده‌اید؟ پس اجازه بدهید که با یک حساب ساده درستی این عدد را ثابت کنیم:

اگر وزنه‌ای به اندازهٔ کرهٔ زمین در روی سطح زمین قرار داشت با حسابی که کرده‌اند این وزنه به اندازهٔ ۶,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تن وزن خواهد داشت.

حال فرض می‌کنیم که یک نفر بتواند یک وزنهٔ ۶۰ کیلوگرمی را به طور مستقیم از سطح زمین بلند کند. اگر او بخواهد وزنه‌ای را که به اندازهٔ کرهٔ زمین جرم دارد بلند کند، به اهرمی احتیاج خواهد داشت که طول بازوی کارگر آن ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مرتبه بزرگتر از طول بازوی ایستادگیش باشد.

شما می‌توانید به سادگی حساب کنید که اگر انتهای بازوی کوتاهتر (بازوی مقاوم) به اندازهٔ ۱ سانتیمتر بالا رود انتهای دیگر اهرم یعنی انتهای بازوی کارگر قوسی به اندازهٔ:

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

کیلومتر طی می کند یعنی ارشمیدس برای فشار وارد آوردن به اهرم می‌بایستی این فاصله را می‌پیمود تا اهرم، کرهٔ زمین را به اندازهٔ یک سانتیمتر، فقط یک سانتیمتر بلند کند و اما پیمودن این فاصله چه مدت زمان طول می‌کشید؟

فرض کنیم که ارشمیدس می‌توانست ۶۰ کیلوگرم را در یک ثانیه، یک متر بلند کند. بنابراین برای بلند کردن تودهٔ زمین به اندازهٔ فقط یک سانتیمتر زمانی برابر:

۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

ثانیه یا

۳۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

سال لازم داشت. ملاحظه می‌شود که این زمانی است فوق‌العاده طولانی و ارشمیدس وسیله‌ای که به کمک آن این زمان را به مقدار قابل توجهی کوتاه کند، در اختیار نداشت. از این گذشته به فرض این‌که ارشمیدس قادر بود که اهرم را با سرعت نور یعنی ۳۰۰,۰۰۰ کیلومتر در ثانیه حرکت دهد برای بلند کردن تودهٔ زمین به اندازهٔ یک سانتیمتر، ده میلیون سال وقت لازم داشت. آیا اگر جای پایی هم به ارشمیدس داده می‌شد او می‌توانست زمین را بلند کند؟

نگرشی به چند مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها

(ریاضی ۱ و ریاضیات جدید سال اوّل)

● شهرام صدر

آنچه امروز به نام «ریاضیات جدید» خوانده می‌شود، همان علم ساختمانهای ریاضی است و زبان ریاضیات جدید تئوری مجموعه ها می‌باشد. ریاضیات جدید در واقع چندان جدید نیست، زیرا قسمت عمده‌ای از آن از حدود یک قرن پیش به وجود آمده است؛ بلکه تأثیر عمیق آن در امر تعلیم و تعلّم ریاضیات در سالهای اخیر سبب گشته تا آن را «ریاضیات جدید» بنامند. نظریهٔ مجموعه‌ها که نزدیک به یک قرن پیش به وسیله زرژکانتور (۱۹۱۸ ـ ۱۸۴۵) پایه‌گذاری شد، به بررسی خواص کلی مجموعه، بدون توجه به طبیعت اشیایی که مجموعه را تشکیل داده‌اند، می‌پردازد.

نظریه مجموعه‌ها، اساس تجزیه و تحلیل ریاضی جدید شناخته شده است و اطلاع در مورد آن برای هر ریاضیدانی لازم است. نظریه مجموعه‌ها پایه و اساس بسیاری از گرایشهای ریاضی، از جمله احتمالات، آنالیز، توپولوژی و جبر مجرد می‌باشد. در این مقاله سعی بر آن است که چند مفهوم اساسی نظریه مجموعه‌ها مطرح شود.

۱ـ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

شما با اصطلاحات مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ نامتناهی آشنایی دارید. مجموعه انگشتان یک دست خود را مجموعه‌ای متناهی و مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعه نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می‌شمارید. در حالت کلی مجموعه‌ای متناهی است که یا تهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت می‌باشد؛ یا به عبارت دیگر مجموعه‌ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو مختلف باشد و در شمارش عضوهای مختلف مجموعه کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

مثال:

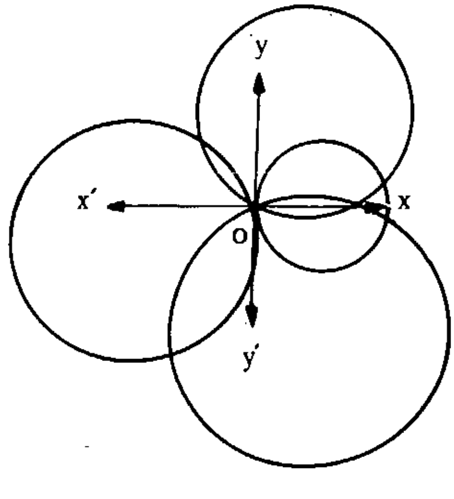
۱ ـ فرض کنیم مجموعه M روزهای هفته باشد، آنگاه M متناهی است.

M={شنبه، یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه، جمعه}

۲ ـ فرض کنیم $P = \{x \mid$ رودخانه‌ای در دنیا $x\}$ اگر چه شمردن رودخانه‌های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعهٔ P متناهی است.

۳ ـ مجموعه انسانهای روی کره زمین مجموعه متناهی است.

۴ ـ مجموعه دایره‌هایی که از مبداء مختصات می‌گذرند، مجموعه‌ای نامتناهی است.



۵ ـ مجموعه جوابهای معادله $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است. زیرا معادله دارای مجموعه جواب $\{-3, -1, 1, 3\}$ می‌باشد.

۶ ـ مجموعه اعداد طبیعی زوج و مجموعه خطوط گذرنده از یک نقطه ثابت مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.

عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد؛ با توجه به تعریفی که از مجموعه متناهی بیان شد؛ اعضای مجموعه A قابل شمارش می‌باشد. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه A گوییم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱: فرض کنیم A مجموعه اعداد اول بزرگتر از ۳۰ و کوچکتر از ۵۰ باشد:

$$A = \{۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷\}$$

مجموعه متناهی A دارای ۵ عضو می‌باشد. بنابراین عدد اصلی مجموعه A برابر با ۵ می‌باشد؛ یعنی $n(A) = ۵$.

مثال۲ : عدد اصلی مجموعه انگشتان دست راست شما برابر با ۵ می‌باشد.

مثال ۳: عدد اصلی مجموعه وجوه یک مکعب مستطیل برابر با ۶ می‌باشد، زیرا هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه یا شش مستطیل است.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\varnothing$، $\{a_۱\}$، $\{a_۱, a_۲\}$، $\{a_۱, a_۲, a_۳\}$، $\{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$ و ... به ترتیب برابر با ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ... می‌باشد. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه متناهی مانند A ، عدد صحیح و نامنفی $n(A)$ می‌باشد. به طوری که $۰ \leq n(A) \leq K \; ; \; K \in \mathbb{N}$

درباره عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی به طور مفصل در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» گفتگو خواهیم کرد.

مجموعه‌های هم عدد

برای بیان این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید دو بسته مداد داشته باشیم. در یکی مدادهای قرمز و در دیگری مدادهای سیاه باشد، از هر بسته یک مداد بر می‌داریم (یعنی یک مداد قرمز و یک مداد سیاه) و کنار می‌گذاریم. دوباره یک مداد از هر بسته خارج می‌کنیم و کنار می‌گذاریم. اگر به همین ترتیب از هر بسته یک مداد خارج کنیم، یا هر دو بسته مداد با هم خالی می‌شوند یا یکی از بسته‌ها خالی می‌شود، در حالی که در دیگری هنوز مداد باقی مانده است. واضح است که حالت اول تنها هنگامی رخ می‌دهد که در دو قوطی به تعداد مساوی مداد وجود داشته باشد و در حالت دوم بسته‌ای که خالی شده است شامل تعداد کمتری مداد بوده است.

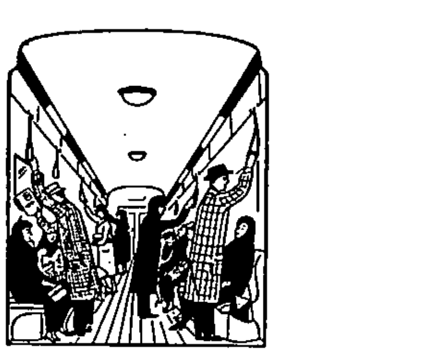
بنابراین دو مجموعه را هم عدد گوییم، هرگاه تعداد اعضای آنها با هم برابر باشند. به این ترتیب بدون شمردن عضوهای دو مجموعه، می‌توانیم معلوم کنیم که آیا دو مجموعه هم عدد هستند یا نه ؟ کافی است به طور متوالی از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده، با هم جفت کنیم. دو مجموعه را تنها وقتی «هم عدد» گوییم که اگر به طور متوالی یک عضو از هر مجموعه انتخاب و با هم جفت شوند، عضوهای دو مجموعه با هم تمام شوند. نتیجه‌ای که به دست می‌آید بستگی به ترتیب انتخاب عضوها در هر یک از دو مجموعه ندارد.

مجموعه‌های هم ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می خوانید ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که منتسب به آن عدد باشد. و بر عکس اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ منتسب به آن دانش‌آموز باشد. در این حالت می‌گوییم ، مجموعهٔ دانش‌آموزان و مجموعهٔ اعداد ۱ تا ۳۰ هم ارز می‌باشند. بنابراین مجموعه ناتهی A را هم‌ارز با مجموعه ناتهی B گوییم هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد. و می‌نویسیم $A \sim B$.

مثال: مجموعه ماشینهای سواری موجود در سطح شهر تهران با مجموعه شماره پلاکهای آنها هم‌ارز می‌باشند.

مثال: شکل زیر نشان می‌دهد که مجموعه صندلیهای اتوبوس و مجموعه مسافران هم‌ارز نیستند زیرا تعدادی از مسافران ایستاده‌اند و صندلی خالی برای نشستن موجود نمی‌باشد.



مثال: اگر فرض کنیم $\mathbb{N}_K = \{۱, ۲, ۳, \ldots, K\}$ طبق تعریف داریم:

$$A \Leftrightarrow A = \varnothing \vee A \sim \mathbb{N}_K \quad \text{مجموعه‌ای متناهی است.}$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا در مورد هر دو مجموعهٔ دلخواه می‌توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. در مورد

مجموعه‌های متناهی با شمردن عضوها و یا جفت کردن اعضای آن می‌توان به این سؤال پاسخ داد اما در مورد مجموعه‌های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوییم دو مجموعه «هم‌عددند». با تعریفی که گذشت می‌توان هم ارزی بین دو مجموعه متناهی را بررسی کرد. اکنون وقت آن رسیده است که برای بررسی هم ارزی بین دو مجموعه نامتناهی تعریف زیر را که نظریه مجموعه‌ها را دگرگون کرده است، و به ریاضیدان آلمانی ژرژ کانتور منسوب است، مطرح کنیم.

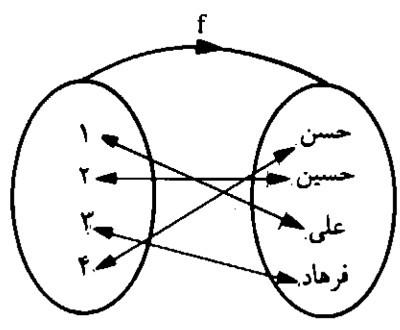
مجموعه A هم‌ارز با مجموعه B است اگر تابعی چون $f:A\to B$ موجود باشد به‌طوری که f هم یک به یک و هم پوششی[۱] باشد. در این صورت می‌گویند تابع f تناظری یک به یک بین مجموعه‌های A و B تعریف می‌کند.

مثال:

۱ــ فرض کنیم

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$ { فرهاد و علی و حسین و حسن } $=B$

نمودار زیر تابعی از A به B تعریف می‌کند که یک به یک و پوششی است. پس $A\sim B$.



علی $=f(۱)$

حسین $=f(۲)$

فرهاد $=f(۳)$

حسن $=f(۴)$

۲ــ فرض کنیم $M=\{۱,۲,۳\}$ و $N=\{۱,۲\}$، اگر همه تابعهایی که از M در N است را بنویسیم، هیچ‌یک از آنها یک به یک و پوششی نیست، زیرا M و N «هم‌عدد» نیستند پس $M\nsim N$.

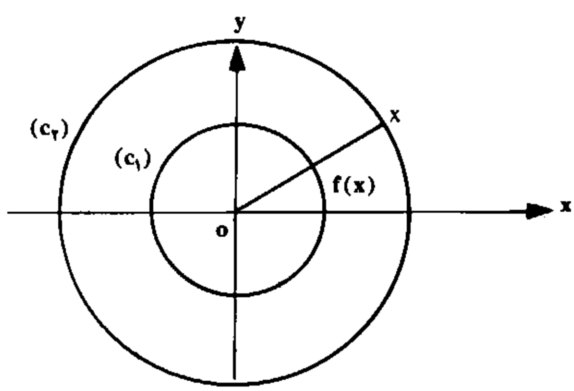
از بررسی این دو مثال به آسانی می‌توان دریافت که به طور کلی، یکی از شرایطی که دو مجموعه متناهی را هم‌ارز می‌کند، این است که تعداد عضوهای یکی با دیگری برابر باشد.

۳ــ فرض کنیم $G=[۰,۱]$ و $H=[۲,۵]$ ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه H و G نامتناهی می‌باشند؛ تابع $f:G\to H$ با ضابطه $f(x)=۳x+۲$ را در نظر می‌گیریم. با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که f هم یک به یک است و هم پوششی، پس $G\sim H$ یعنی G هم‌ارز H می‌باشد.

۴ــ فرض کنیم $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,....\}$ و $\mathbb{E}=\{۲,۴,۶,۸,....\}$ تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{E}$ با ضابطه $f(x)=۲x$ هم یک به یک و هم پوششی می‌باشد پس $N\sim E$. با توجه به مثال ۴ درمی‌یابیم که مجموعه نامتناهی اعداد طبیعی با مجموعه اعداد زوج که زیرمجموعه $\mathbb{N}$ می‌باشد، هم‌ارز است. بنابراین یک مجموعه نامتناهی می‌تواند با زیرمجموعه‌ای نامتناهی از خود هم‌ارز باشد. این خاصیت، ویژهٔ مجموعه‌های نامتناهی است.

۵ــ دو دایره متحدالمرکز را در نظر بگیرید. تناظری یک به یک بین نقاط روی دو دایره به طریق هندسی برقرار کنید.

حل: دو دایره $(C_۱)$ و $(C_۲)$ را به مرکز مبداء مختصات و شعاعهای دلخواه و نابرابر در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x نقطه‌ای بر دایره $(C_۲)$ باشد یعنی $x\in(C_۲)$ تابع $f:C_۲\to C_۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر از مرکز، شعاعی به x وصل کنیم، دایره $(C_۱)$ را در نقطه $f(x)$ قطع خواهد کرد (مطابق شکل)، بنابراین f هم یک به یک است و هم پوششی پس f تناظری یک به یک بین $(C_۱)$ و $(C_۲)$ برقرار می‌کند.

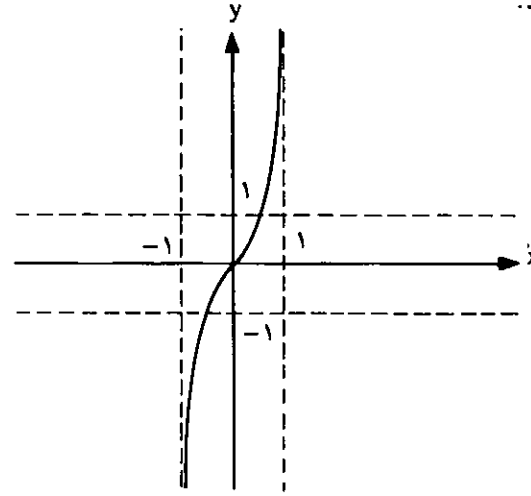


۶ــ تابع $f:(-۱,۱)\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{x}{۱-|x|}$ یک به یک و پوشا می‌باشد. بنابراین بازه $(-۱,۱)$ هم ارز مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد یعنی مجموعه اعداد حقیقی و بازه $(-۱,۱)$ «هم‌عدد» می‌باشند. چون تابع $f(x)$ دارای قدر مطلق می‌باشد، بنابراین $f(x)$ تابعی دو ضابطه‌ای، به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{۱-x} & x\geq ۰\\[2mm] \dfrac{x}{۱+x} & x<۰\end{cases}$$

۱ــ مجموعه‌های یک به یک و پوشا را می‌توانید از کتاب ریاضیات جدید سال دوم ریاضی و یا مجله‌های برهان به شماره‌های ۴ و ۶ مطالعه فرمایید.

با توجه به دامنه و ضوابط تابع f نمودار آن به شکل زیر می‌باشد. با توجه به نمودار به آسانی ملاحظه می‌شود که f یک به یک و پوششی می‌باشد.

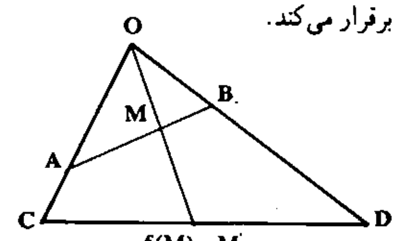


۷ــ برای برقرار کردن تناظر یک به یک بین همه عددهای مثبت فرد و همه عددهای زوج بزرگتر از صد، کافی است هر عدد فرد n را متناظر با عدد زوج n+۱۰۱ قرار دهیم.

$$1 \xrightarrow{f} 1+101$$
$$3 \xrightarrow{f} 3+101$$
$$5 \xrightarrow{f} 5+101$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$n \xrightarrow{f} n+101$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

۸ــ مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ و $M = \{1,10,100,1000,\ldots\}$ مفروضند برای برقراری تناظر یک به یک بین M و $\mathbb{N}$ تابع $f:\mathbb{N} \to M$ را با ضابطه $f(n)=10^{n-1}$ که یک به یک و پوششی می‌باشد، در نظر می‌گیریم. بنابراین: $\mathbb{N} \sim M$.

۹ــ فرض کنیم AB پاره‌خط مستقیمی به طول یک سانتیمتر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دلخواه باشد. مطابق شکل زیر، تابع f را بر مجموعه نقاط AB با این ضابطه تعریف می‌کنیم که f(M) یا M′ نقطهٔ تقاطع خط OM با CD می‌باشد. به وضوح می‌توان دید که f تناظر یک به یک بین مجموعه نقاط پاره خط AB و مجموعه نقاط پاره خط CD برقرار می‌کند.



۱۰ــ بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند توسط تابع f تناظری یک به یک موجود می‌باشد.

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ $A = \{1,4,9,16,25,36,\ldots\}$

مجموعه اعداد طبیعیِ مجذور کامل

$f:\mathbb{N} \to A$

$f(x) = x^2$

تابع f با ضابطه فوق یک به یک و پوششی می‌باشد لذا: $\mathbb{N} \sim A$.

منابع

۱ ــ نظریه مجموعه‌ها نوشته سیمورلیپ شوتس، ترجمهٔ محمود مهدی‌زاده.

۲ ــ نظریه مجموعه‌ها نوشته واستلا وسرپینکی، ترجمه پرویز شهریاری.

۳ ــ آنالیز ریاضی تألیف دکتر غلامحسین مصاحب.

۴ ــ توپولوژی عمومی (مبحث نظریه مجموعه‌ها) نوشته سیمورلیپ شوتس، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده.

۵ ــ تئوری مسائل احتمالات (مبحث نظریه مجموعه‌ها) نوشته سیمورلیپ شوتس ــ ترجمه عادل ارشقی

۶ ــ مقدمه‌ای بر منطق و نظریه مجموعه‌ها، تألیف محمد رجبی طرخورانی.

۷ – INTRODUCTION, TO THE THEORY OF SETS . JOSEPH BREUER

۲ ــ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا (شمارش‌پذیر و شمارش ناپذیر)

●حمید رضا امیری

فرض کنید می‌خواهیم اعضای مجموعهٔ $A = \{2,3,5,7,11\}$ را شماره‌گذاری کرده، به طور مثال بر روی آنها برچسب بزنیم. برای این کار برچسب‌هایی که اعداد طبیعیِ ۱ و ۲ و ۳ و ... روی آنها نوشته شده‌اند در اختیار داریم، واضح است که برچسبهای شمارهٔ ۱ تا ۵ را برای اعضای این مجموعه مصرف می‌کنیم.

حال اگر بخواهیم مجموعهٔ اعداد طبیعیِ زوج یعنی مجموعهٔ $2\mathbb{N} = \{2,4,6,8,\ldots\}$ ، را برچسب‌گذاری (شمارش) کنیم، برچسب شمارهٔ ۱ را به ۲ اختصاص می‌دهیم و برچسب شمارهٔ ۲ را به ۴ و ۳ را به ۶ و ۴ را به ۸ و ... یعنی تمام اعضای $2\mathbb{N}$ را می‌توان با خیال راحت برچسب‌گذاری کرد، منظور از خیال راحت این است که ما اطمینان داریم بین عدد ۲ و ۴ ، عدد زوج دیگری وجود نداشته و براحتی برچسب شمارهٔ ۲ را برای ۴ در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب پیش می‌رویم، البته تا هر کجا که دلمان بخواهد و محدودیت زمانی به ما اجازه دهد!

بنابراین اصطلاحاً می‌گویند مجموعه $2\mathbb{N}$ ، قابل شمارش یا شمارش‌پذیر یا شمارا می‌باشد.

حال فرض کنیم مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خودِ ۲ و خودِ ۳) دردست باشد و بخواهیم این مجموعه یعنی، $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 \le x \le 3\}$ را برچسب‌گذاری کنیم، واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شمارهٔ ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد، بلافاصله به دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شمارهٔ ۲ را که آماده کرده‌ایم روی آن بچسبانیم، آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است، ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم. که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقیِ دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده که «همواره بین هر دو عدد حقیقیِ متمایز، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد» بنابراین همچنان در به کار بردن برچسب شمارهٔ ۲ ناتوان مانده‌ایم، پس، مجموعهٔ فوق شمارش‌ناپذیر یا ناشمارا می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم با توجه به این مثالها و تعریفهایی که پیش از این خواندید، مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» را دقیقتر تعریف کنیم:

تعریف: مجموعهٔ A را شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه متناهی بوده یا با مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی $\mathbb{N}$ ، تناظر یک به یک داشته باشد پس:

$\mathbb{N} \simeq A \vee (A$ متناهی است$) \Leftrightarrow A$ شمارش‌پذیر است

(در حقیقت $\mathbb{N}$ همان مجموعهٔ برچسب‌گذار است)

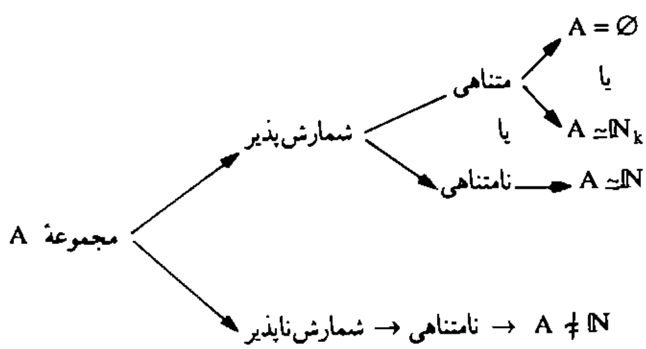
مثال: تعدادی از این مجموعه‌های شمارش‌پذیر و نامتناهی عبارتند از، $\mathbb{N}$ و Z و تمام زیر مجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ و Z .

تعریف: مجموعهٔ A را شمارش‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه، شمارش‌پذیر نباشد به عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ معادل یا هم‌ارز نباشد». پس:

$\mathbb{N} \not\simeq A \wedge (A$ نامتناهی است$) \Leftrightarrow A$ شمارش ناپذیر است.

مثال: مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهایِ مجموعهٔ A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعهٔ اعداد گنگ «ناشمارا» یا شمارش ناپذیر هستند.

با توجه به این تعریفها و مثالها، می‌توان نمودار زیر را رسم کرد:



در انتها فقط به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که عدد اصلی مجموعه‌های شمارش پذیر نامتناهی و عدد اصلی مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر با هم برابر در نظر گرفته نمی‌شوند.

ادب ریاضی

تعمق در استدلالهای ریاضی برای پی‌بردن به کنه آنها و به عمق احکام ریاضی نیز منتهای ضرورت را دارد از این راه است که تیزبین می‌شوید و فکر شما بیدار می‌شود، و صاحب نیروی ابتکار و آماده برای تحقیق می‌گردید.

مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب

«دلیل محسوس» در کنار «برهان»

دکتر احمد شرف‌الدین

مقدمه :

در سطور زیر دو حکم ریاضی ذکر کرده‌ام و برای هر یک از آنها برهانهایی راکه در کتابهای ریاضی ذکر شده‌است آورده‌ام. سپس برای نشان دادن درستی این دو حکم دو شیوه کاملاً محسوس و ملموس عرضه کرده‌ام و این دو شیوه را تحت عنوان «دلیل محسوس» ذکر کرده‌ام. این گونه دلیلها باوجود آن که به‌نظر می‌آید «برهان» می‌باشند برهان نیستند اما علاوه بر آن که در تشریح و تفهیم مطلب نقش مهمی دارند دارای جاذبه خاصی می‌باشند و شایسته است در کنار برهان ذکر شوند. از این جهت است که عنوان مقاله را («دلیل محسوس» در کنار «برهان») گذاشته‌ام. مطالعه این مقاله نه تنها برای دانش‌آموزان مفید است که برای دبیران نیز مفید است.

حکم ۱

n کسر $\frac{a_1}{b_1}$، $\frac{a_2}{b_2}$، ...، و $\frac{a_n}{b_n}$ را که صورتها و مخرجهای آنها اعداد مثبتند درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که نامساویهای زیر برقرار باشند:

$$(۱) \qquad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{a_n}$$

ثابت کنید نامساویهای زیر برقرار است:

$$(۲) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_1 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

برهان :

قرار می‌دهیم:

$$(۳) \quad \frac{a_1}{b_1} = q_1, \ \frac{a_2}{b_2} = q_2, \dots, \ \frac{a_n}{b_n} = q_n$$

از نامساویهای (۱) و (۳) رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad q_1 < q_2 < \dots < q_n$$

همچنین از رابطه‌های (۳)، رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$(۵) \quad a_1 = b_1q_1, a_2 = b_2q_2, \dots, a_n = b_nq_n$$

ار رابطه‌های (۴) و (۵) حاصل می‌شود:

$$(۶) \quad a_1 = b_1q_1, a_2 > b_2q_1, a_3 > b_3q_3, \dots, a_n > b_nq_1$$

از رابطه‌های (۶) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$(۷) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n > (b_1 + b_2 + \dots + b_n)\, q_1$$

ازرابطه (۷) باتوجه به این که $q_1 > 0$ است رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$(۸) \quad q_1 < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

از رابطه (۸) باتوجه به آن که $\frac{a_1}{b_1} = q_1$ (رابطهٔ اوّل از رابطه‌های (۳)) نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$(۹) \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

باهمین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که

$$(۱۰) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

دو نامساوی (۹) و (۱۰) همان نامساویهایی هستند که می‌خواستیم ثابت کنیم (یعنی دو نامساوی مذکور در (۲)). در سطور زیر برای نشان دادن درستی نامساویهای (۲) یک دلیل ملموس عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

اکنون برای نشان دادن درستی رابطه (۲)، شیوه‌ای کاملاً ملموس و محسوس به‌کار می‌بریم. بدین قرار: n ظرف c_1، c_2، ...، و c_n درنظر می‌گیریم و در آنها به‌ترتیب به‌اندازه‌های b_1، b_2، ...، و b_n آب و به‌اندازه‌های a_1، a_2، ...، و a_n شکر می‌ریزیم. هریک از مخلوطها را به‌هم می‌زنیم تا شکرها در آب حل شوند و n شربت در ظرفهای c_1، c_2، ...، و c_n حاصل شود.

می‌دانیم که در یک شربت هر قدر نسبت مقدار شکر به مقدار آب بیشتر باشد آن شربت شیرینتر است. چون بنا به فرض: $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ است (رجوع کنید به رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_2 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_1 است. همچنین چون $\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$ است (رجوع کنید به‌همان رابطه‌های (۱)). پس شیرینی شربت ظرف c_3 بیشتر از شیرینی شربت ظرف c_2 است و به همین ترتیب.

اکنون تمام شربتها را در یک ظرف بزرگ که آن را c می‌نامیم می‌ریزیم و مخلوط را به‌هم می‌زنیم تا یک شربت همگن حاصل شود. مقدار آب و شکر در شربت ظرف c به‌ترتیب به‌اندازه‌های $(b_1 + b_2 + ... + b_n)$ و $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ است. پس اندازه شیرینی ظرف c با مقدار کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

مشخص می‌شود.

اما شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_1 بیشتر است پس چنین داریم:

$$(۱۱)\quad \frac{a_1}{b_2} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

همچنین شیرینی شربت ظرف c از شیرینی شربت ظرف c_n کمتر است پس:

$$(۱۲)\quad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

بدین‌سان نایل آمدیم تا درستی نامساویهای (۱۱) و (۱۲) را با دلیل ساده‌ای که کاملاً محسوس و ملموس است نشان دهیم.

تبصره. به‌طور کلی اگر اعداد b_1، b_2، ...، و b_n (یعنی مخرجهای کسرها) مثبت باشند و اعداد a_1، a_2، ...، و a_n (یعنی صورتهای کسرها) اعداد جبری باشند بازهم نامساویهای (۱) برقرار است.

حکم ۲

ثابت کنید تابع بولی سه متغیری

$$(۱۳)\quad f(x, y, z) = x y z' + y z x' + z x y' + x y z$$

دارای خاصیت «اکثریت» است یعنی این که اگر مقدار دو متغیر از سه متغیر و یا هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a خواهدبود.

برهان

چون تابع (۱۳) نسبت به سه متغیر متقارن است پس کافی است ثابت کنیم که:

الف) اگر مقدار دو متغیر x و y برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۴)\quad f(a, a, z) = a$$

ب) اگر مقدار هر سه متغیر برابر a باشند آنگاه مقدار تابع برابر a است یعنی:

$$(۱۵)\quad f(a, a, a) = a$$

اثبات قسمت الف. چنین می‌نویسیم:

$$(۱۶)\quad f(a, a, z) = a . a . z' + a . z . a' + z . a . a' + a . a . a$$

با رعایت آن که $a . a = a$ و $a . a' = ۰$ از رابطهٔ (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$(۱۷)\quad f(a, a, z) = a . z + ۰ + ۰ + a$$

اگر $z = ۱$ باشد از رابطهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود:

$$f(a, a, z) = a . ۱ + a = a + a = a$$

و اگر $z = ۰$ باشد از رابطهٔ (۱۷) حاصل می‌شود:

$$f(a, a, z) = a . ۰ + a = ۰ + a = a$$

اثبات قسمت ب. چنین می‌نویسیم:

$$f(a, a, a) = a . a . a' + a . a . a' + a . a . a' + a . a . a$$
$$= ۰ + ۰ + ۰ + a = a$$

بدین‌سان آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم ثابت شد. اکنون یک دلیل ساده کاملاً ملموس برای حکم مورد نظر عرضه می‌کنیم.

دلیل محسوس

سه تن به نامهای X ، Y ، و Z باید در یک جلسه مشورتی که از این سه‌تن تشکیل می‌شود شرکت کنند. می‌خواهیم حضور اکثریت آنها را در جلسه با یک تابع بولی بنویسیم. حضور افراد X ، Y ، و Z را در جلسه مشورتی به ترتیب با x ، y ، و z و عدم حضور آنها را با x' ، y' ، و z' نشان می‌دهیم.

اکثریت این افراد هنگامی در جلسه حضور دارند که دو تن یا هر سه تن در جلسه حضور یابند. اکثریت هنگامی حاصل می‌شود که یکی از چهار حالت زیر پیش‌آید.

الف. x و y در جسه حضور داشته باشند ولی z غایب باشد. این امر را با عبارت بولی زیر نشان می‌دهیم:

$$z\,y\,z'$$

یعنی X حاضر است وَ Y حاضر است وَ Z غایب است.

ب. y و z در جلسه حضور داشته باشند ولی X غایب باشد. این امر را با عبارت بولی زیر نشان می‌دهیم:

$$y\,z\,x'$$

پ. Z و X در جلسه حضور داشته باشند ولی Y غایب باشد. این امر باعبارت زیر نشان داده می‌شود:

$$x\,y'z$$

ت. X ، Y ، و Z هر سه در جلسه حضور داشته‌باشند. این امر باعبارت زیر بیان می‌شود:

$$x\,y\,z$$

اما برای حضور اکثریت در جلسه باید حالت الف **یا** حالت ب **یا** حالت پ **یا** حالت ت اتفاق بیفتد. پس حضور اکثریت با تابع زیر بیان می‌شود:

$$f(x, y, z) = x\,y\,z' + y\,z\,x' + z\,x\,y' + x\,y\,z$$

تبصره. تابع (۱۳) یعنی تابع اکثریت را می‌توان به‌صورت زیر به‌طور خلاصه نوشت:

$$f(x, y, z) = x\,y + y\,z + z\,x$$

برهان. بنابر خاصیت همتوانی می‌توان نوشت:

$$(۱۸)\quad x\,y\,z = x\,y\,z + x\,y\,z + x\,y\,z$$

با رعایت رابطهٔ (۱۸) چنین می‌نویسیم:

$$f(x, y, z) = x\,y\,z' + y\,z\,x' + z\,x\,y' + x\,y\,z + x\,y\,z + x\,y\,x$$
$$= x\,y\,(z' + z) + y\,z(x' + x) + z\,x\,(y' + y)$$
$$= x\,y \times ۱ + y\,z \times ۱ + z\,x \times ۱$$
$$= x\,y + y\,z + z\,x$$

حکم ۳. مثالی که در زیر می‌آوریم یکی از قضیه های مهم آنالیز ریاضی مربوط به بسط فوریه است. اثبات قضیه در ریاضیات عالی توضیح داده می‌شود و با یک «دلیل محسوس»، صحّت قضیّه نشان داده می‌شود. این مطلب طوری شرح داده شده است که مطالعه آن برای دانش‌آموزان کاملاً قابل فهم و مفید خواهد بود.

بسط فوریه. اگر تابع f متناوب باشد و دوره تناوب آن ۲π باشد می‌توان تابع را در x به‌صورت بسط زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{۱}{۲}a_۰ + a_۱\cos x + b_۱\sin x + \qquad (۱)$$
$$a_۲\cos ۲x + b_۲\sin ۲x + \ldots\ldots + a_k\cos kx + b_k\sin kx + \ldots\ldots$$

در بسط بالا $a_۰$ ، $a_۱$ ، $b_۱$ ، $a_۲$ ، $b_۲$ ، .... ، a_k ، b_k ، ... اعداد جبری ثابتند. این اعداد را می‌توان به کمک دستورهای زیر به‌دست آورد.

$$\begin{cases} a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\;\;dt \\ b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\;\;dt \end{cases}$$

مثال: بسط فوریه تابع $f(x) = |\sin \omega t|$ چنین است:

$$|\sin\omega t| = \frac{۲}{\pi}\left(۱ - \frac{۲}{۳}\cos ۲\omega t - \frac{۲}{۱۵}\cos ۴\omega t - \frac{۲}{۳۵}\cos ۶\omega t + \ldots\right)$$

در زیر صورت یکی از قضیه‌های بسط فوریه را ذکر می کنیم.

قضیه. مجموع

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n}(a_k^۲ + b_k^۲)$$

هنگامی که n به‌سوی بی نهایت میل می‌کند دارای حد متناهی است.

اثبات قضیه. اثبات قضیه در کتابهای آنالیز ریاضی عالی به‌طور مشروح آمده است.

«دلیل محسوس» برای تأیید درستی قضیه: ابتدا چند مطلب ساده فیزیکی ذکر می کنیم و سپس این مطالب را به‌کار می‌گیریم.

الف ــ اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از سیمی با مقاومت R اهم بگذرد، مقدار انرژی که در واحد زمان در سیم مصرف می‌شود، چنین است:

$RI^۲$ وات

ب ــ اگر یک جریان الکتریکی با شدت ثابت I آمپر از مقاومت R اهم در مدت T ثانیه بگذرد مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت، چنین است:

RI^2T ژول

پ ــ اگر یک جریان الکتریکی متغیّر $i = I\sin\omega t$ از مقاومت R بگذرد، مقدار انرژی مصرف شده در مقاومت از لحظه t_1 تا لحظهٔ t_2، چنین است:

$\int_{t_1}^{t_2} RI^2\sin^2\omega t\ dt$ ژول

بخصوص انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ (یا از لحظه $t=0$ تا لحظه $t=2\pi$) چنین است:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} RI^2\sin^2\omega t\ dt = RI^2\pi$$

زیرا می‌دانیم که

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\omega t\ dt = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \pi$$

ت ــ اگر یک جریان الکتریکی متغیّر $i = I\cos\omega t$ از مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است:

$RI^2\pi$

اکنون با استفاده از مطالبی که هم اکنون درالف، ب، پ، و ت ذکر کردیم، یک دلیل محسوس برای درستی قضیهٔ مورد نظر ارائه می‌دهیم:

جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{2}a_0$ و جریانهای الکتریکی متغیّر: $a_1\cos x$، $b_1\sin x$، $a_2\cos x$، $b_2\sin x$، ..... را درنظر می‌گیریم (این عبارتهای ریاضی یا ضرایب بسط فوریه‌اند که در دستور (۱) ذکر کردیم). در این عبارتها x را متغیّر زمان تلقی می‌کنیم.

ث ــ اگر جریان الکتریکی ثابت $\frac{1}{2}a_0$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است (بنابر مطلب مذکور در الف)

$$A_0 = R(\frac{1}{2}a_0)^2\times 2\pi = \frac{1}{2}Ra_0^2\pi$$

ج ــ اگر جریان الکتریکی متغیّر $a_1\cos x$ از سیمی با مقاومت R بگذرد، انرژی مصرف شده از لحظه $-\pi$ تا لحظه $+\pi$ چنین است (بنابر مطلب مذکور در ت):

$A_1 = Ra_1^2\pi$

چ ــ اگر جریان الکتریکی متغیّر $b_1\sin x$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله $[-\pi,+\pi]$، چنین است:

$B_1 = Rb_1^2\pi$

ح ــ اگر جریان الکتریکی متغیر $a_k\cos kx$ از سیمی با مقاومت R بگذرد انرژی مصرف شده در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ چنین است:

$A_k = Ra_k^2\pi$

و همچنین ....

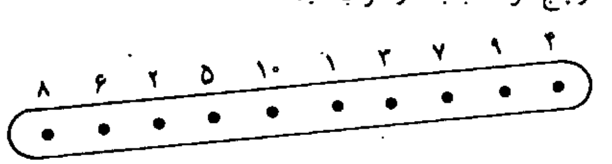
پس مجموع انرژیهای مصرف شده به‌وسیله جریانهای مذکور از سیمهایی با مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ چنین است:

$$\frac{1}{2}Ra_0^2\pi + \text{حد}_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}R(a_k^2+b_k^2)\pi \qquad (2)$$

اکنون یک جریان الکتریکی $i = f(x)$ درنظر می‌گیریم ($f(x)$ همان تابعی است که بسط فوریهٔ آن مورد مطالعه است و در دستور (۱) ذکر کردیم). انرژی مصرف شده از عبور جریان $i = f(x)$ از سیمی با مقاومت R در فاصله زمانی $[-\pi,+\pi]$ مقداری است محدود؛ زیرا تابع $f(x)$ پیوسته است. مقدار این انرژی مساوی است با مقدار انرژی که در عبارت (۲) ذکر شد پس $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$ هنگامی که $k\to\infty$ دارای حد متناهی است.

تفریح اندیشه ۲

به ترتیب نشان داده شده، ده جعبه روی یک استوانهٔ شیبدار متحرک چیده شده است. برای مرتب کردن این جعبه‌ها به ترتیب اعداد و از چپ به راست از یک بازوی مکانیکی استفاده می‌شود که برای این منظور می‌تواند هر بار، حداکثر سه جعبه را که کنار هم قرار دارند به منتهی‌الیه ریل منتقل کرده، آنها را در جای خود بیندازد. آیا می‌توانید در پنج حرکت جعبه‌ها را مرتب کنید؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

فضای برداری[1] (قسمت اول)

(ریاضیات جدید سوّم ریاضی)

● حمیدرضا امیری

پیش از این با مفهوم گروه آشنا شده‌ایم و می‌دانیم، گروه، یک دستگاهی ریاضی متشکل از یک مجموعهٔ ناتهی مانند G است و یک عمل دو تایی مانند $*$ که ۳ خاصیت یا ویژگیِ شرکت پذیری، عضو خنثی و عضو متقابل بر این دستگاه حاکم می‌باشد. و به یاد داریم که اگر گروه (G و $*$) علاوه بر خواص گروه دارای خاصیت جابه‌جایی نیز باشد، آن را یک گروه جابه‌جایی یا آبلی می‌نامیدیم. به عنوان مثال و به عنوان یادآوری، ثابت می‌کنیم، Q^+ به همراه عملِ $*$ که در زیر تعریف می‌شود یک گروه آبلی است:

$$\forall \ a,b \in Q^+ \quad , \quad a*b=\frac{a.b}{۳}$$

$$۱)\ \ a*(b*c)=a*(\frac{b.c}{۳})=\frac{a.(\frac{b.c}{۳})}{۳}=\frac{a.(b.c)}{۹} \quad (۱)$$

$$(a*b)*c=(\frac{a.b}{۳})*c=\frac{(\frac{a.b}{۳}).c}{۳}=\frac{(a.b).c}{۹}=\frac{a.(b.c)}{۹} \quad (۲)$$

شرکت پذیری $\quad (۱),(۲) \Rightarrow a*(b*c)=(a*b)*c$

تعریف عضو خنثی $\quad ۲)\ \exists! e\in G; \forall a\in G; a*e=e*a=a$

طبق تعریف عضو خنثی داریم:

$$a*e=e*a=a$$

$$a*e=a \Rightarrow \frac{a.e}{۳}=a \Rightarrow a.e=۳a \xrightarrow{a\neq ۰} e=۳$$

اگر e را از رابطهٔ $e*a=a$ نیز به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\boxed{e=۳}$$

تعریف عضو متقابل $\quad ۳)\ \forall a\in G, \exists! a'\in G, a*a'=a'*a=e$

$$a*a'=e=۳ \Rightarrow \frac{a.a'}{۳}=۳ \Rightarrow a.a'=۹ \xrightarrow{a\neq ۰} a'=\frac{۹}{a}$$

اگر از رابطهٔ $a'*a=e$ نیز استفاده کنیم a' بر حسب a همان $\frac{۹}{a}$ خواهد بود. بنابراین تا این مرحله ثابت شد که $(Q^+,*)$ یک گروه است و چون داریم: (به ازای هر $a,b\in Q^+$)

$$a*b=\frac{a.b}{۳}=\frac{b.a}{۳}=b*a$$

پس، گروه $(Q^+,*)$ آبلی می‌باشد.

همچنین در یکی دیگر از شماره‌های برهان (برهان ۸) به اندازهٔ کافی بر روی مفاهیم **حلقه** و **میدان** صحبت شد و شما بخصوص با مفهوم میدان آشنا هستید و می‌دانید میدان نیز دستگاهی است ریاضی متشکل از مجموعه‌ای ناتهی مانند F و دو عمل مانند $+$ و $\times$ که اگر اولاً، $(F,+)$ گروه آبلی باشد. ثانیاً، $(F-\{۰\},\times)$ گروه آبلی باشد و ثالثاً، عمل دوم یعنی $\times$ نسبت به عمل اول یعنی $+$ از چپ و راست توزیع‌پذیر باشد، در این صورت $(F,+,\times)$ را یک میدان می‌نامند.

به عنوان مثال اگر فرض کنیم، $F=\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) وعمل اول را جمع معمولی و عمل دوم را ضرب معمولی در نظر بگیریم، در این صورت مجموعهٔ اعداد حقیقی به همراه جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می‌دهد.

حال می‌خواهیم بین اعضای یک **گروه جابجایی** و **یک میدان**، عملی که آن را عمل ضرب اسکالر می‌نامیم، تعریف کرده و با بیان چهار شرط دیگر بر روی اعضای این دو مجموعه (گروه آبلی و میدان) ، یک دستگاه ریاضی به نام **فضای برداری** تعریف می‌کنیم.

---

[1]. Vector Space

تعریف: فرض کنیم $(V,\oplus)$ یک گروه آبلی باشد و فرض کنیم F یک میدان بوده، عمل ضرب اسکالر بین اعضای F و V به صورتی تعریف شده باشد، که این عمل در V بسته باشد یعنی،

$$\forall a \in F, \forall v \in V, a.v \in V$$

در این صورت هرگاه چهار شرط زیر نیز همگی برقرار باشند، می‌گوییم مجموعهٔ V یک **فضای برداری** روی میدان $(F,+,\times)$ تشکیل داده است.

$$1)\ \forall v \in V, 1.V = V$$

(در این شرط، ۱ عضو خنثی در میدان F نسبت به عمل دوم یا ضرب می باشد)

$$2)\ \forall a,b \in F, \forall v \in V, (a+b).V = a.v \oplus b.v$$

$$3)\ \forall a \in F, \forall v_1, v_2 \in V, a.(v_1 \oplus v_2) = a.v_1 \oplus a.v_2$$

$$4)\ \forall a,b \in F, \forall v \in V, (a \times b).v = a.(b.v)$$

تذکر: از این به بعد در سراسر این مقاله میدانِ F را میدان اعداد حقیقی همراه با جمع و ضرب معمولی در نظر گرفته، فضاهای برداری روی این میدان یعنی، $\mathbb{R}$ را، *فضای برداریِ حقیقی* می‌نامیم.

قرارداد: برای راحتی، عملِ تعریف شده روی گروهِ V را به صورت + نمایش می‌دهیم که نماد + لزوماً جمع معمولی نیست زیرا ممکن است V به طور مثال مجموعهٔ ماتریسها باشد که در این صورت بدیهی است منظور از گروهِ $(V,+)$، گروه ماتریسها همراه با عمل جمع ماتریسی خواهد بود.

پس هرگاه V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری باشد می‌نویسیم (ض ا و + و V) یک فضای برداریِ حقیقی است. (ض ا ، یعنی ضرب اسکالر).

مثال ۱: اگر فرض کنیم $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$ در این صورت با تعاریف جمع و ضرب اسکالر که در ذیل می‌آید، V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

$$(a,b,c)+(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c')$$

$$r.(a,b,c) = (ra, rb, rc)$$

۱ ــ واضح است که عمل + در V شرکت پذیر است.

۲ ــ عضو خنثی در V نسبت به + سه تاییِ مرتبِ $(0,0,0)$ می‌باشد.

۳ ــ متقابلِ جمعی (a,b,c) عبارت است از $(-a,-b,-c)$

زیرا: $(a,b,c)+(-a,-b,-c) = (0,0,0) =$ عضو خنثی

۴ ــ عمل + در V تعویض‌پذیر است زیرا:

$$(a,b,c)+(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c') =$$

$$(a'+a, b'+b, c'+c) = (a',b',c')+(a,b,c)$$

۵ ــ عمل ضرب اسکالر در V بسته است یعنی

$$r(a,b,c) = (ra, rb, rc) \in V$$

۶ ــ اگر (a,b,c) عضو دلخواهی از V باشد داریم:

$$1.(a,b,c) = (1a, 1b, 1c) = (a,b,c)$$

$$7)\ (r_1+r_2).\underbrace{(a,b,c)}_{V} = ((r_1+r_2)a, (r_1+r_2)b, (r_1+r_2)c)$$

$$= ((r_1a+r_2a), (r_1b+r_2b), (r_1c+r_2c))$$

$$= (r_1a, r_1b, r_1c)+(r_2a, r_2b, r_2c)$$

$$= r_1.\underbrace{(a,b,c)}_{V} + r_2.\underbrace{(a,b,c)}_{V}$$

$$8)\ r[\underbrace{(a,b,c)}_{V_1} + \underbrace{(a',b',c')}_{V_2}]$$

$$= r((a+a'), (b+b'), (c+c'))$$

$$= (r(a+a'), r(b+b'), r(c+c'))$$

$$= ((ra+ra'), (rb+rb'), (rc+rc'))$$

$$= (ra, rb, rc)+(ra', rb', rc')$$

$$= r.\underbrace{(a,b,c)}_{V_1} + r.\underbrace{(a',b',c')}_{V_2}$$

$$9)\ (r_1r_2).\underbrace{(a,b,c)}_{V} = ((r_1r_2)a, (r_1r_2)b, (r_1r_2)c)$$

$$= (r_1(r_2a), r_1(r_2b), r_1(r_2c))$$

$$= r_1.(r_2a, r_2b, r_2c) = r_1.[r_2.\underbrace{(a,b,c)}_{V}]$$

بنابراین V روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

(در حالت کُلی نیز می‌توان ثابت کرد مجموعهٔ همهٔ n تایی‌های مرتب با درآیه‌های حقیقی یعنی $\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ تشکیل می‌دهد).

مثال ۲: آیا $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in Q\}$ روی $\mathbb{R}$ فضای برداری تشکیل می‌دهد؟

خیر، علی‌رغم آن که همهٔ خواص گروه و شرایط چهارگانهٔ فضای‌برداری برقرار است، اما به دلیل این که ضرب اسکالر در V بسته نیست، V تشکیل فضای برداری نمی‌دهد به طور مثال:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}, (1,2,3) \in V$$

$$\sqrt{2}(1,2,3) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \notin V$$

(درآیه‌های سه‌تایی‌های مرتب در V باید اعداد گویا باشند).

مثال ۳: اگر فرض کنیم $V=\mathbb{R}$ واضح است که مجموعهٔ اعداد حقیقی همراه با عمل جمع معمولی گروه آبلی می‌باشد، یعنی $(\mathbb{R},+)$ گروه جابه‌جایی است: و در این مثال چون ضرب اسکالر بین اعضای $\mathbb{R}$ و خودش تعریف می‌شود، همان ضرب معمولی است که همهٔ خواص دیگر نیز جزو خواص دستگاه اعداد حقیقی است. پس $\mathbb{R}$ روی خودش یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۴: اگر فرض کنیم $V=Q$ در این صورت Q (مجموعهٔ اعداد گویا) روی $\mathbb{R}$ فضای برداری تشکیل نمی‌دهد، زیرا ضرب اسکالری که بین $\mathbb{R}$ و Q تعریف می‌شود همان ضرب معمولی است و این ضرب در Q بسته نیست، به طور مثال $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ و $1\in Q$ ولی $\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}\notin Q$.

مثال ۵: با فرض $V=\mathbb{R}$ مشاهده می‌شود که $\mathbb{R}$ روی میدان اعداد گویا یعنی Q یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۶: اگر $V=Q$ در این صورت Q روی خودش یک فضای‌برداری تشکیل می‌دهد ($(Q,+,\cdot)$ یک میدان است).

تمرین: ثابت کنید هر میدان مانند F روی خودش یک فضای‌برداری تشکیل می‌دهد.

مثال ۷: اگر فرض کنیم $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ در این صورت V (مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با درآیه‌های حقیقی) روی $\mathbb{R}$ تشکیل فضای برداری می‌دهد. (این مثال به طورمشروح در کتاب درسی بررسی شده است) البته در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهند.

در این قسمت توجه شما را به زیرمجموعه‌های خاصی از یک فضای برداری جلب می‌کنیم، فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، و V' زیر مجموعه‌ای ناتهی از V بوده و با همان دو عمل جمع و ضرب اسکالری که V فضای برداری تشکیل داده، V' نیز یک فضای برداری تشکیل دهد، در این صورت V' را یک **زیر فضای**، فضای برداری V می‌نامند.

با توجه به تعریف زیر فضا، مشاهده می‌شود که زیر فضای یک فضای برداری خودش یک فضای برداری است.

از طرفی اگر V' زیر فضای، فضای برداری V باشد بسیاری از خواص فضای برداری V به دلیل آن که روی همهٔ اعضای V و بخصوص اعضای V'، تعریف شده است، به V' القاء می شود، مانند خواص شرکت‌پذیری و جابجایی در گروه و چهار خاصیت فضای‌برداری، از طرفی سه خاصیت بسته بودن نسبت به جمع، عضو خنثی و عضو متقابل در گروه و همچنین خاصیت بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر از V به V' القاء نمی‌شود، که اگر دو خاصیت بسته بودن نسبت به جمع و ضرب اسکالر را برای V' در نظر بگیریم، می‌توانیم ثابت کنیم دو خاصیت دیگر یعنی عضو خنثی و متقابل را براحتی می‌توان از آن دو نتیجه گرفت که بر این اساس قضیهٔ زیر بیان شده و اثبات زیر فضا بودن را ساده می‌کند.

قضیه: اگر V یک فضای برداری بوده و V' زیر مجموعهٔ ناتهی V باشد، در این صورت «شرط لازم و کافی برای آن که V' زیر فضای V باشد، آن است که V' نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب اسکالر بسته باشد» (اثبات در کتاب درسی موجود است)

مثال ۸: ثابت کنید $H=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ یک زیر فضای فضای برداری ماتریسهای 2×2 همراه با دو عمل جمع ماتریسی و ضرب عدد در ماتریس، است. برای اثبات کافی است ثابت کنیم H، که زیر مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 و ناتهی نیز هست، نسبت به جمع و ضرب‌اسکالر بسته است.

(در این جا ضرب اسکالر همان ضرب عدد در ماتریس است)

$$H\subseteq M_{2\times 2}\ ,\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in H\Rightarrow H\neq\varnothing$$

الف) $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0+0 & c_1+c_2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}\in H$$

ب) $r\in\mathbb{R}\ ,r\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ra & rb \\ r0 & rc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\in H$

مثال ۹: نشان دهید مجموعهٔ $H=\{(x,y,z)|2x-y+z=0\}$ یک زیر فضای $\mathbb{R}^3$ است.

واضح است که $H\subseteq\mathbb{R}^3,(0,0,0)\in H\Rightarrow H\neq\varnothing$

الف) $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in H\Rightarrow$

$$2x_1-y_1+z_1=0\wedge 2x_2-y_2+z_2=0$$

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\in H$$

زیرا: $2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=$

$$(2x_1-y_1+z_1)+(2x_2-y_2+z_2)=0+0=0$$

(شرط این که سه تایی مرتبی در H باشد با توجه به تعریف مجموعهٔ H، می‌بایست دو برابر مؤلفهٔ اول منهای مؤلفهٔ دوم بعلاوهٔ مؤلفهٔ سوم آن، مساوی با صفر شود)

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in H \Rightarrow ۲x - y + z = ۰$

$r.(x,y,z) = (rx, ry, rz) \in H$

زیرا: $۲(rx) - (ry) + (rz) = r(۲x - y + z) = r۰ = ۰$

مثال ۱۰: نشان دهید، اگر H و K هر دو زیر فضای، فضای‌برداری V باشند در این صورت $(H \cap K)$ نیز زیر فضای V است. با یک مثال نقض این حکم را در مورد $(H \cup K)$ (در حالت کلی) رد کنید.

فرض‌کنیم H و K زیر فضای V باشند پس هردو فضای‌برداری بوده و می‌بایست شامل بردار صفر یعنی $\bar{o}$ باشند (بردار صفر یا $\bar{o}$ همان عضو خنثی در گروه آبلی است).

$\bar{o} \in H, \bar{o} \in K \Rightarrow \bar{o} \in (H \cap K) \Rightarrow (H \cap K) \neq \varnothing$

زیر فضای V است $H \Rightarrow H \subseteq V, H \cap K \subseteq H \Rightarrow (H \cap K) \subseteq V$

الف) فرض کنیم $x, y \in (H \cap K) \Rightarrow x, y \in H \wedge x, y \in K$

$\xrightarrow{\text{H و K زیر فضا هستند}} x + y \in H \wedge x + y \in K \Rightarrow (x + y) \in (H \cap K)$

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, x \in (H \cap K) \Rightarrow x \in H \wedge x \in K$

H و K زیر فضا هستند $\Rightarrow rx \in H \wedge rx \in K \Rightarrow rx \in (H \cap K)$

مثال نقض در حالت اجتماع دو زیر فضا: مشابه آنچه در مثال ۹ ثابت کردیم براحتی می‌توان نشان داد که $H = \{(x,y) | ۲x - y = ۰\}$ و $K = \{(x,y) | x + ۲y = ۰\}$ هر دو زیر فضای $\mathbb{R}^۲$ هستند. حال $(H \cup K)$ را تشکیل می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$H \cup K = \{(x,y) | (x,y) \in H \vee (x,y) \in K\}$$
$$= \{(x,y) | ۲x - y = ۰ \ \vee \ x + ۲y = ۰\}$$

حال کافی است دو عضو از $(H \cup K)$ طوری انتخاب کنیم که حاصل جمع آن دو عضو، عضو $(H \cup K)$ نباشد (یعنی نسبت به عمل جمع بسته نباشد) و با توجه به تعریف $(H \cup K)$ اگر زوج مرتبی یکی از دو خاصیت $۲x - y = ۰$ یا $x + ۲y = ۰$ را داشته باشد عضو آن بوده و در صورتی که هیچ کدام از این دو خاصیت را نداشته باشد، عضو $(H \cup K)$ نیست.

$(۱,۲) \in (H \cup K)$ (زیرا: $۲ \times ۱ - ۲ = ۰$)

$(-۲,۱) \in (H \cup K)$ (زیرا: $-۲ + ۲ \times ۱ = ۰$)

$(۱,۲) + (-۲,۱) = (-۱,۳) \notin (H \cup K)$

زیرا: $۲ \times (-۱) - ۳ = -۵ \neq ۰$ و $-۱ + ۲ \times ۳ = ۵ \neq ۰$

مثال ۱۱: اگر $B_۰$ ماتریسی ثابت از مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ باشد، نشان دهید مجموعهٔ $H = \{A | AB_۰ = B_۰A\}$ یک زیر فضای، فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ است. (ضرب ماتریسها در جمع آنها توزیع‌پذیر است.) واضح است که $H \neq \varnothing$ زیرا $\bar{o} = \bar{o}B_۰ = B_۰\bar{o}$ پس $\bar{o} \in H$.

از طرفی همواره $H \subseteq M_{n \times n}$ بنابراین کافی است ثابت کنیم H نسبت به جمع و ضرب اسکالر (ضرب عدد در ماتریس) بسته است.

الف) فرض کنیم $A_۱, A_۲ \in H \Rightarrow \begin{cases} A_۱B_۰ = B_۰A_۱ \\ A_۲B_۰ = B_۰A_۲ \end{cases}$

$(A_۱ + A_۲)B_۰ = A_۱B_۰ + A_۲B_۰ =$

$B_۰A_۱ + B_۰A_۲ = B_۰(A_۱ + A_۲) \Rightarrow (A_۱ + A_۲) \in H$

ب) فرض کنیم $r \in \mathbb{R}, A \in H \Rightarrow AB_۰ = B_۰A$

$(rA)B_۰ = r(AB_۰) = r(B_۰A) = (rB_۰)A = (B_۰r)A = B_۰(rA)$

$\Rightarrow rA \in H$

مثال ۱۲: نشان دهید خاصیت جابه‌جایی نسبت به عمل جمع در یک فضای برداری را می‌توان از سایر اصول نتیجه گرفت.

فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و فرض کنیم x و y دو عضو دلخواه از V باشند، داریم:

$(۱+۱)(x+y) = (۱+۱)x + (۱+۱)y = x + x + y + y \quad (۱)$

از طرف دیگر داریم:

$(۱+۱)(x+y) = ۱(x+y) + ۱(x+y) = x + y + x + y \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow x + x + y + y = x + y + x + y$

و با توجه به قانون حذف در گروه $(V,+)$ داریم:

$x + y = y + x$

حال که خواص فضای برداری را بررسی کرده، زیر فضاها را نیز تا حدودی شناختیم، آمادگی داریم تا به داخل این ساختمان ریاضی قدم گذاشته و اجزای تشکیل دهندهٔ این فضا را که همان بردارهای فضای‌برداری هستند مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم؛ و این خود مستلزم مقاله‌ای مفصل و مجزا است که ان‌شاء ا... در شمارهٔ بعد خواهد آمد.

خطهـــــای راست
و صفحه‌های عمود بـــر هم در فضا

پرویز شهریاری

برای این که به درس هندسهٔ فضایی مسلط باشیم و از عهدهٔ حل مسأله‌های مربوط به آن برآییم، باید به سه نکتهٔ اصلی توجه کنیم: تمرین ذهنی برای تجسم شکلهای فضایی؛ رسم کم وبیش درست شکل فضایی بر صفحه و، سرانجام، تسلط براثبات قضیه‌ها. یکی از اساسیترین بحثهای کلیدی در هندسهٔ فضایی، بحث مربوط به «عمودبودن» در فضاست و، این مقاله کوتاه، به همین موضوع اختصاص دارد. استدلالها را تعقیب کنید، هر جا لازم است، شکل مربوط را رسم کنید (در برخی موردها، شکل را رسم نکرده‌ایم) و برای حل مسأله‌هایی که در این جا حل نکرده‌ایم، تلاش کنید. مقاله، باشیوه‌ای متفاوت با کتاب درستی تنظیم شده است و، بنابراین می‌تواند سودمند باشد.

۱. معیار شناسایی، درحالتی‌که خط راستی بریک صفحه عمود است

تعریف. خط راست را وقتی عمود برصفحه گویند که برهر خط راستی از صفحه عمودباشد.

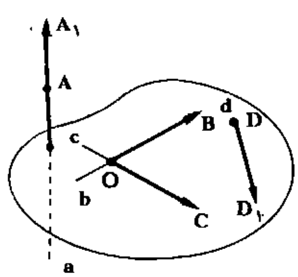
وقتی که خط راست a و صفحهٔ α برهم عمود باشند، آن را بانماد $\alpha \perp a$ یا $a \perp \alpha$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.(معیار عمود بودن خط راست وصفحه بریکدیگر). اگر خط راستی بردوخط راست متقاطع واقع برصفحه عمود باشد، آن وقت برصفحه عمود است.

فرض: $b \cap c = \circ$ ،$b \subset \alpha$ ،$c \subset \alpha$ ،$a \perp b$ ،$a \perp c$

حکم: $a \perp \alpha$

شکل (۱)



اثبات. خط راست دلخواه d را، واقع برصفحهٔ α، درنظر می‌گیریم (شکل ۱). روی خطهای راست b و c نقطه‌های B و C، متفاوت بانقطهٔ O، و روی خطهای راست a و d، به‌ترتیب، نقطه‌های متمایز A و A_1، D و D_1 را انتخاب می‌کنیم. این بردارها را درنظر می‌گیریم:

$$\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c},\ \overrightarrow{DD_1} = \mathbf{d}$$

بردار **d** را برمبنای **(b,c)** تجزیه می‌کنیم، یعنی بردار **d** را به دوبرداری تجزیه می‌کنیم که، یکی از آنها درجهت بردار **b** و دیگری درجهت‌بردار **c** باشد:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$$

دوطرف این برابری را، دربردار **a**، ضرب اسکالر (عددی) می‌کنیم:

$$\mathbf{d.a} = x\mathbf{b.a} + y\mathbf{c.a} \qquad (۱)$$

چون بنابر فرض $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$، بنابراین $\mathbf{b.a} = \circ$ و $\mathbf{c.a} = \circ$. بنابراین، برابری (۱) به‌صورت $\mathbf{d.a} = \circ$ درمی‌آید و این به‌معنای آن است که $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$ یا $a \perp d$، درنتیجه، باتوجه به تعریف خط راست عمود برصفحه، داریم $a \perp \alpha$.

مسأله. ثابت کنید، بتغییر مکان فضلـ عمود بودن خط راست

بر صفحه را حفظ می‌کند.

حل. خط راست a و صفحه α را عمودبرهم در نظر می‌گیریم. هر تغییر مکان F، موجب می‌شود تا خط راست a به خط راست a_1، و صفحهٔ α به صفحه α_1 تبدیل شود. باید ثابت کنیم $a_1 \perp \alpha_1$.

دوخط راست متقاطع b و c را روی صفحهٔ α رسم می‌کنیم. ضمن تغییر مکان F، این دوخط راست، به صورت خطهای راست متقاطع b_1 و c_1 درمی‌آیند. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه داریم: $a \perp b$ و $a \perp c$. تغییر مکان، زاویهٔ بین خطهای راست را تغییر نمی‌دهد، بنابراین $a_1 \perp b_1$ و $a_1 \perp c_1$. به این ترتیب، بنابر معیار عمود بودن خط راست و صفحه $a_1 \perp \alpha_1$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱. ۱) وجه‌های DAB و DAC از چهار وجهی ABCD، مثلثهای قائم الزاویه‌ای، بازاویهٔ قائمه در رأس A، هستند. ثابت کنید، یالهای BC و AD برهم عمودند.

۲) مربع ABCD و خط راست SD عمود برصفحهٔ مربع مفروض‌اند. اگر بدانیم:

$$|AB| = |SD| = a$$

فاصلهٔ نقطهٔ S را از نقطه‌های A، B و C پیدا کنید.

۲. ۱) مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ثابت کنید، صفحه‌ای که از نقطه‌های A، B_1 و D_1 می‌گذرد، برخط راست A_1C (قطر مکعب) عمود است.

۲) مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است؛ درضمن

$$|AB| = 2|BC| \;,\; |AA_1| = |BC|$$

آیا خط راست BD_1 برصفحهٔ A_1C_1D عمود است؟

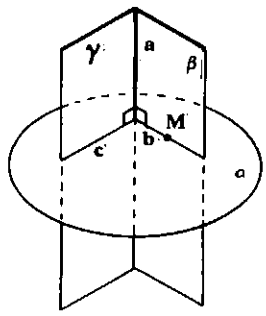
۳. ۱) ازنقطه‌ای واقع بریک خط راست، سه خط راست گذرانده‌ایم که، هر یک از آنها، برخط راست مفروضی عمود است. ثابت کنید، این سه خط راست، روی یک صفحه واقع‌اند.

۲) مکان خطهای راستی را پیدا کنید که از نقطه‌ای واقع بریک خط راست، عمود برآن رسم شده‌اند.

۲. وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم

مسألهٔ ۱. ثابت کنید، صفحه‌ای وجوددارد که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و برخط راست مفروض عمود است.

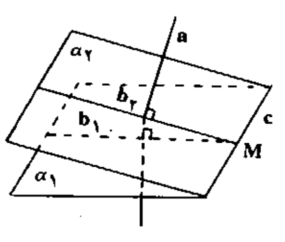
شکل (۲)



حل. نقطهٔ M و خط راست a را در نظر می‌گیریم (شکل ۲). صفحهٔ β را از M و a می‌گذرانیم (اگر $M \in a$، آن وقت β، صفحهٔ دلخواهی است که از a می‌گذرد). به‌جز این، صفحهٔ γ راهم، غیراز β، از خط راست a عبور می‌دهیم. از نقطهٔ M و در صفحهٔ β، خط راست b را عمود بر a، و از نقطه $O = b \cap a$ و درصفحه γ، خط راست c را، بازهم عمود بر a، رسم می‌کنیم. سپس، از b و c صفحه α را می‌گذرانیم. بنابر معیارعمود بودن خط راست و صفحه داریم $a \perp \alpha$. یعنی وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم، ثابت شد.

یادداشت. آیا ازنقطه M می‌توان صفحهٔ دیگری، غیراز صفحهٔ α، عمود برخط راست a رسم کرد؟ فرض می‌کنیم بتوان دوصفحه متمایز α_1 و α_2 را، از نقطهٔ M، عمود برخط راست a رسم کرد.

شکل (۳)

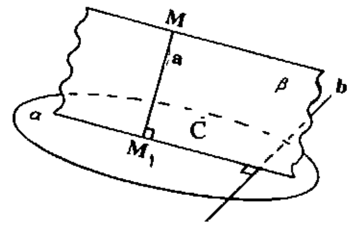


(شکل ۳)؛ c را خط راست فصل مشترک این دو صفحه می‌گیریم. از خط راست a ونقطه M ($M \in c$) صفحهٔ β را می‌گذرانیم و فصل مشترک آن را باصفحه‌های α_1 و α_2، به‌ترتیب، b_1 و b_2 می‌نامیم. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه، باید خط راست a بردوخط راست b_1 و b_2 عمود باشد؛ یعنی درصفحهٔ β، توانسته‌ایم از نقطهٔ M، دوخط راست عمود برخط راست a رسم کنیم و از هندسهٔ مسطحه می‌دانیم که این، ممکن نیست. به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که از هر نقطه، تنها یک صفحه می‌توان برخط راست مفروض، عمود کرد.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، از هر نقطه، تنها یک خط راست می‌توان

برصفحه مفروض، عمودکرد.

شکل (۴)



حل. نقطه M وصفحهٔ α را مفروض می‌گیریم (شکل ۴). خط راست مجهول باید از نقطه M بگذرد و بردوخط راست متقاطع از صفحه α عمودباشد.

در صفحهٔ α، خط راست دلخواه b را رسم می‌کنیم و از نقطه M، صفحهٔ βرا عمود برخط راست b درنظر می‌گیریم (مسألهٔ ۱)، و فرض می‌کنیم: $\alpha \cap \beta = c$. درصفحهٔ βو از نقطهٔ M، خط راست a را، عمودبرخط راست c رسم می‌کنیم.

چون $b \perp \beta$ و $a \subset \beta$، پس $b \perp a$، به جز این $a \perp c$. درنتیجه $a \perp \alpha$، a، خط راست مجهول است.

یادداشت. اکنون منحصر به فرد بودن خط راست a را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، از نقطهٔ M، دو خط راست مختلف a و a_1، عمود برصفحهٔ α رسم شده باشند. از a و a_1، صفحهٔ βرا می‌گذرانیم تا صفحهٔ α را در خط راست c قطع کند. دراین صورت، در صفحهٔ β، از یک نقطه، دوخط راست مختلف a و a_1 عمود بر c رسم شده‌اند که باآنچه در هندسهٔ مسطحه خوانده‌ایم، متناقض است.

به این ترتیب، از نقطه مفروض می‌توان یک، و تنها یک خط راست، عمود برصفحهٔ مفروض رسم کرد.

خط راست عمود برصفحه را، به‌صورت کوتاه، عمود برصفحه می‌نامیم.

پرسشها و مسأله‌ها

۴. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M متعلق به پاره‌خط راست AC مفروض‌اند. مقطع مکعب را، باصفحه‌ای که از نقطهٔ M و خط راست عمود بر AC می‌گذرد، پیدا کنید.

۵. چهار وجهی ABCD داده‌شده‌است که در آن

$$\hat{ACD} = \hat{BCD} = 90^\circ$$

۱) مقطع چهاروجهی را باصفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ $M \in [DC]$ و عمود براین یال می‌گذرد.

۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که M، وسط یال DC باشد و درضمن، داشته باشیم:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$

۶. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده‌شده‌است. ۱) ثابت کنید، خط راست AC، برصفحهٔ BDD_1 عمود است.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ M واقع برپاره خط راست BC بگذرد و بر صفحهٔ ACC_1 عمود باشد.

۷. قاعدهٔ منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$، مثلث متساوی الساقینی است که درآن $|AC| = |AB|$. ۱) ثابت کنید، ارتفاع این مثلث برصفحهٔ BCC_1 عموداست.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ $M \in [AB]$ بگذرد و برصفحهٔ BCC_1 عمود باشد.

۳. رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن درفضا

در هندسهٔ مسطحه، قضیه‌هایی را دیده‌ایم که به رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن خطهای راست مربوط می‌شدند. مثلاً، اگر دوخط راست، برخط راست سوم عمود باشند، این دوخط راست باهم موازی‌اند. قضیه‌های مشابهی، درهندسهٔ فضایی، برای خطهای راست و صفحه وجود دارد.

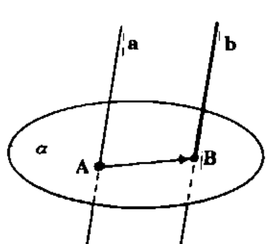
قضیهٔ ۲. اگر یکی از دوخط راست موازی، برصفحه‌ای عمود باشد، آن وقت خط راست دیگر هم براین صفحه عمود است.

فرض: $a \parallel b$، $a \perp \alpha$.

حکم: $b \perp \alpha$.

اثبات. فرض کنید $a \cap \alpha = A$و$b \cap \alpha = B$ (شکل ۵). انتقال به اندازهٔ بردار $\vec{AB}$، صفحهٔ α رابرخودش و خط راست a را برخط

شکل (۵)



راست b می‌نگارد. ولی انتقال، یک جابجایی (= تغییرمکان) است و،

بنابراین، عمود بودن خط راست و صفحه را برهم، حفظ می‌کند (بند ۱، مسأله) ؛ یعنی $b\perp\alpha$.

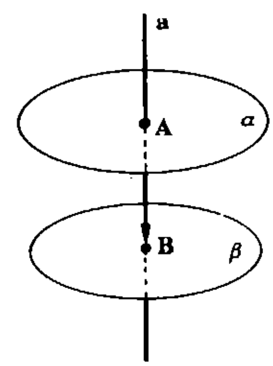
قضیهٔ ۳. اگر خط راستی، بریکی از دوصفحه موازی عمود باشد، بردیگری هم عموداست.

فرض: $a\perp\alpha$ ، $\alpha\parallel\beta$.

حکم: $a\perp\beta$.

اثبات. فرض کنید $a\cap\alpha=A$ و $a\cap\beta=B$ (شکل ۶). انتقال به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ ، خط راست a رابرخودش و صفحهٔ α را برصفحهٔ β می‌نگارد؛ و عمود بودن خط و صفحه بریکدیگر، ضمن انتقال، محفوظ می‌ماند، یعنی $a\perp\beta$.

شکل (۶)



قضیه‌های عکس این دوقضیه هم درست‌اند.

قضیه ۴. اگر دوخط راست بریک صفحه عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۵).

قضیه ۵. اگر دو صفحه بریک خط راست عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۶). اثبات این دوقضیه، شبیه اثبات قضیه‌های ۲ و ۳اند.

پرسشها و مسأله‌ها

۸. ۱) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. از نقطه‌ای واقع برضلع مثلث $A_1B_1C_1$ ،عمودی برصفحهٔ ABC رسم کنید. ثابت کنید، این عمود، ضلع مثلث ABC راقطع می‌کند.

۲) مقطع این منشور را باصفحه‌ای پیداکنید که از نقطه‌ای واقع بریال جانبی آن وخط راستی عمود به‌این یال می‌گذرد.

۹. از نقطه‌های A وB ، که در دوطرف صفحهٔ α واقع‌اند، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α رسم کرده‌ایم ($A_1\in\alpha$ ، $B_1\in\alpha$ ، $A_1\neq B_1$). مطلوب است فاصلهٔ از نقطهٔ $M=(AB)\cap(A_1B_1)$ تانقطه‌های A و B_1 ، به شرطی که $|AA_1|=a$ ، $|BB_1|=b$ ، $|AB|=c$.

۱۰. صفحه‌های متمایز α و β، موازی با هم‌اند. از دو نقطهٔ M و N واقع برصفحهٔ α، عمودهایی برصفحهٔ βرسم کرده‌ایم که آن را، به ترتیب، در M_1 و N_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید $|MM_1|=|NN_1|$.

ادب ریاضی

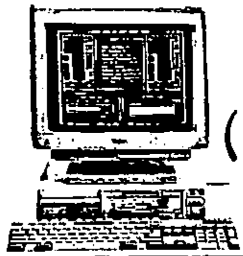
به‌نام خداوند بخشایندهٔ مهربان. این کتابی است که محمدبن موسی خوارزمی پی افکنده و در سرآغاز چنین گوید: خدای را سپاس بر نعمتهایش، بدان گونه که شایستهٔ او است؛ سپاس آن چنان که اگر برآیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود، «شکر» نامیده می‌شود و باعث افزونی نعمت می‌گردد و ...

چون به مشکلات و نیازمندیهای مردم در مورد علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خِلاصه شده؛ و فهمیدم که تمام اعداد از واحد ترکیب می‌شوند، و این واحد در تمام اعداد موجود است؛ و دانستم که تمام اعداد، از یک تا ده، از طریق واحد به دست می‌آید، و آنگاه عدد ده را، به همان شیوه‌ای که در واحد عمل می‌شود، دو چندان و سه چندان می‌کنند تا بیست و سی به‌دست آید، و بر همین قیاس به صد می‌رسد. سپس صد را مانند یکان و دهگان دو چندان و سه چندان می‌کنند تا به هزار برسد، و پس از آن، مرتبهٔ هزار را بر همین قیاس بالا می‌برند، یعنی در رأس هر عقدی افزون می‌شود تا به آخرین عدد قابل ادراک برسد.

و نیز دریافتم که اعدادی که در حساب جبر و مقابله به وجود آنها نیاز است، سه نوع هستند: جذرها و مالها و عدد مفردی که به جذری یا مالی نسبت ندارد. جذر هر چیزی است که در یک یا چند برابر خود یا در کسری از خود ضرب شده باشد؛ مال چیزی‌است‌که از حاصل‌ضرب این جذر درخودش به‌دست آید؛ و عدد مفرد هر عددی‌است‌که بدون نسبت به‌جذر یا مال برزبان آید.

گزیده‌ای از فصل اول کتاب جبر خوارزمی

مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی با BASIC (۴)



● حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۲ و ۸ و ۱٦

دومین و آخرین قسمت از سلسله مطالب تبدیلات و محاسبات ریاضی در مبناهای ۸،۲ و غیره را با جمع اعداد در مبنای ۲ شروع می‌کنیم:

❏ جمع دو یا چند عدد در مبنای ۲

جمع[1] دو یا چند عدد در مبنای ۲[2] کاملاً شبیه جمع اعداد در مبنای ۱۰ است. مانند جمع در مبنای ۱۰[3] در مبنای ۲ ابتدا ارقام یکان اعداد را با هم جمع می‌کنیم. بدنبال آن در صورت وجود رقم انتقالی[4]،آن‌را به ستون دوگان منتقل می‌کنیم. سپس جمع ارقام دوگان را در مبنای ۲ انجام می‌دهیم و عملیات مشابه را در مورد ستون چهارگان و هشتگان و غیره تکرار می‌کنیم. بدین ترتیب جمع اعداد در مبنای ۲ انجام می‌شود[5]. در جمع اعداد در مبنای ۲، توجه به چهار قاعدهٔ[6] زیر حائز اهمیت است:

۰+۰=۰
۰+۱=۱
۱+۰=۱
۱+۱=۰

و ۲ بر یک که رقم انتقالی به ستونِ[7] مرتبهٔ بلافاصله بالاتر است.

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

```
۱۱۱+
۱۰۱
۱۰۰
```

حل: ابتدا مجموع ارقام یکان را در مبنای ۱۰ به‌دست آورده، نتیجه را به مبنای ۲ تبدیل[8] می‌کنیم. چنانچه مجموع، رقم انتقالی داشته باشد آن‌را به ستونِ مرتبهٔ بالاترش منتقل می‌کنیم. این عمل را در مورد رقمهای ستونهای دیگر با روش مشابه تکرار می‌کنیم. بنابراین:

```
   ۱۱
  ۱۱۱+
  ۱۰۱
  ۱۰۰
-----
۱۰۰۰۰
```

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

```
( ۱۱۱۱۰۱۰ )+
(    ۱۰۱۱ )
(  ۱۰۰۱۱۰ )
(  ۱۱۰۰۰۱ )
(   ۱۱۱۰۰ )۲
------------
```

داریم:

```
(  ۲۲۲۲۲۱ )+
( ۱۱۱۱۰۱۰ )
(    ۱۰۱۱ )
(  ۱۰۰۱۱۰ )
(  ۱۱۰۰۰۱ )
(   ۱۱۱۰۰ )۲
------------
  ۱۱۱۱۱۰۰۰
```

مثال: جمع زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

```
۱۰۱۰۱/۰۱۰۱+
۱۰۱۰۰/۰۰۱
-----------
```

حل: همانطور که می‌دانید، چنانچه در سمت راست رقمِ[9] قسمت

اعشاری یک عدد در مبنای ۱۰ یا قسمت کسری در هر مبنای دیگر، هر تعداد صفر اضافه کنیم، تغییری در عدد ایجاد نمی‌شود.

با این توضیحات عدد ۱۰۱۰۰/۰۰۱۰ معادل عدد ۱۰۱۰۰/۰۰۱ است. درنتیجه:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}0101/0101+ \\ 10100/0010 \\ \hline 101001/0111 \end{array}$$

تمرین ــ ثابت کنید[10] که:

الف: $(110110)_2+(11111)_2+(10111)_2+(10011)_2$
$=(1111111)_2$

ب: $(111100)_2+(11000)_2+(1111000)_2+(100)_2$
$=(11010000)_2$

❑ تفاضل دو یا چند عدد در مبنای ۲

برای تفاضل[11] دو یا چند عدد در مبنای ۲، کافی است چهارقاعدهٔ زیر را درنظر بگیرید. عمل تفاضل در مبنای ۲، کاملاً مشابه تفریق در مبنای ۱۰ است:

$0-0=0$
$1-0=1$
$1-1=0$
$0-1=1$

و یک رقم قرضی[12] که به مفروق ستون مرتبهٔ بالاتر اضافه می‌شود. توجه دارید که در تفاضل $a-b$، عدد a را مفروقٌ منه و عدد b را مفروق می‌نامند.

مثال: تفاضل زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 11011010 \\ 10100010 \end{pmatrix}_2^{-}$$

حل: ابتدا رقم یکان بعد دوگان سپس چهارگان و الی آخر اعداد داده‌شده را به ترتیب[13] از هم کم می‌کنیم، داریم:

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1\overset{2}{\not{1}}011010 \\ 10100010 \end{pmatrix}_2^{-} \\ \hline 00111000 \end{array}$$

$\Rightarrow (11011010)_2-(10100010)_2=(111000)_2$

مثال: تفاضل زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1100101 \\ 111100 \\ 10101 \\ 1111 \end{pmatrix}_2^{-} \end{array}$$

حل: با درنظر گرفتن رقم قرضی داریم:

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1100\overset{2}{\not{1}}01 \\ 111100 \\ 10101 \\ 1111 \end{pmatrix}_2^{-} \\ \hline 0000101 \end{array}$$

درنتیجه:

$(1100101)_2-(111100)_2-(10101)_2-(1111)_2=(101)_2$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(111110100)_2-(100101100)_2-(1100100)_2$
$-(110011)_2=(110001)_2$

ب: $(111101011)_2-(100101100)_2-(1010000)_2$
$-(1000111)_2-(10100)_2=(10100)_2$

❑ ضرب دو عدد در مبنای ۲

ضرب[14] دو عدد در مبنای ۲ به طور دقیق مشابه ضرب دو عدد در مبنای ۱۰ است. برای ضرب دو عدد در مبنای ۲ کافی است چهار قاعدهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$0\times0=0$
$0\times1=0$
$1\times0=0$
$1\times1=1$

مثال: ضرب زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 1101111 \\ 100 \end{pmatrix}_2^{\times}$$

حل: مانند ضرب در مبنای ۱۰، کافی است حاصل ضرب دو عدد $\begin{pmatrix} 1101111 \\ 1 \end{pmatrix}_2^{\times}$ را به دست آورده، دو صفر عدد ۱۰۰ را به انتهای حاصلضرب اضافه کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1101111 \\ 1 \end{pmatrix}_2^{\times} \\ \hline 1101111 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1101111 \\ 100 \end{pmatrix}_2^{\times} \\ \hline 110111100 \end{array}$$

مثال: ضرب زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} 1101101 \\ 101101 \end{pmatrix}_2^{\times}$$

حل: مانند ضرب دو عدد در مبنای ۱۰، ارقام عامل[15] دوم ضرب را از راست به چپ در عامل اول ضرب، ضرب کرده سپس حاصل را همانند مبنای ۱۰، با یک ستون جابه‌جایی به سمت چپ، به ترتیب، زیر هم می‌نویسیم آنگاه عمل جمع را انجام می‌دهیم، نتیجهٔ عمل جمع، حاصلضرب دو عدد خواهد بود؛ بنابراین داریم:

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 1101101 \\ 101101 \end{pmatrix}_2^{\times} \\ \hline 1101101 \\ 0000000 \\ 1101101 \\ 1101101 \\ 0000000 \\ 1101101 \\ \hline 1001100101001 \end{array}$$

قبل از انجام عمل تقسیم[16] در مبنای ۲، لازم است مقایسه‌ای بین اعدد در این مبنا از نظر بزرگ و کوچک بودن به عمل آوریم:

❑ مقایسهٔ دو عدد مبنای ۲

هنگام مقایسهٔ[17] دو عدد مبنای ۲ از نظر بزرگ و کوچک بودن نسبت به یکدیگر، دو حالت پیش می‌آید **الف ــ** تعداد ارقام دوعدد مساوی نباشد. **ب ــ** تعداد ارقام دو عدد مساوی باشند.

الف ــ هرگاه تعداد ارقام دو عدد مساوی نباشد، آن عددی بزرگتر است که تعداد رقم‌هایش بیشتر از عدد دیگر باشد. درنتیجه عدد دیگر کوچکتر است.

مثال: بین دو عدد ۱۰۱۱۰۱ و ۱۱۱۱۱ کدامیک بزرگتر است؟

حل: چون عدد ۱۰۱۱۰۱ شش رقمی ولی عدد ۱۱۱۱۱ پنج رقمی است از این رو عدد ۱۰۱۱۰۱ بزرگتر از عدد ۱۱۱۱۱ است.

ب ــ هرگاه تعداد ارقام دو عدد مساوی باشند، دو عدد داده شده را از چپ به راست دو بدو با هم مقایسه می‌کنیم، هر عددی که برای اولین بار، در مقام[18] هم مرتبه‌اش یک داشته باشد و دیگری صفر، آن عدد بزرگتر است.

مثال: بین دو عدد ۱۱۱۰۱۰۰۱ و ۱۰۱۱۰۱۰۱ کدامیک بزرگتر است؟

حل: از آنجا که تعداد ارقام دو عدد داده شده برابر و هریک ۸رقمی می‌باشند بنابراین آنها را از چپ به راست با هم مقایسه می‌کنیم و ظهور[19] اولین یک در مقام هم مرتبه در یک عدد و صفر در عدد دیگر، عدد بزرگتر را مشخص می‌کند. بدین ترتیب داریم:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}101001\\110101\end{matrix}$$

مساوی ↑ نامساوی[20] ↑

چون عدد بالایی در ستون دوم از چپ یک و عدد پایینی در همین ستون صفر دارد و از این رو عدد ۱۱۱۰۱۰۰۱ بزرگتر از عدد ۱۰۱۱۰۱۰۱ است.

از مقایسهٔ دو عدد، در عملِ تقسیم مبنای ۲ استفادهٔ زیاد می‌شود.

❑ تقسیم دو عدد در مبنای ۲

برای تقسیم دو عدد درمبنای ۲، مشابه تقسیم دو عدد در مبنای ۱۰ عمل می‌کنیم. هنگام عمل تقسیم مراحل کار را مرحله به مرحله توضیح می‌دهیم:

مثال: تقسیم زیر را در مبنای ۲ انجام دهید:

$(10111011)_2 : (1101)_2 = (?)_2$

$$1011'1011 \;\big|\underline{\;1101\;}$$

حل: برای انجام عمل تقسیم، ابتدا به تعداد ارقام مقسوم علیه که‌در اینجا ۴ است، چهار رقم در مقسوم جدا می‌کنیم. از آنجا که با جدا کردن ۴ رقم در مقسوم، مقسوم[21] جدید یعنی۱۰۱۱ از مقسوم علیه[22] ۱۱۰۱ کوچکتر می‌شود، همانند تقسیم در مبنای ۱۰، یک رقم دیگر نیز به مقسوم اضافه می‌کنیم. بدین ترتیب تعداد ارقام جدا شده در مقسوم ۵ می‌شود که بزرگتر از عدد مقسوم علیه است. اکنون در این مرحله می‌توانیم عمل تقسیم را براحتی انجام دهیم. در هر مرحله از تقسیم[23]، خارج قسمت یا صفر است یا یک.

$$\begin{array}{l|l} 10111'011 & \underline{1101} \\ \underline{1101} & 1 \\ 1010 & \end{array}$$

پس از این مرحله، اکنون یک رقم از مقسوم را پایین می‌آوریم: ۱۰۱۰۰، چون ۱۱۰۱<۱۰۱۰۰، از این‌رو، عمل تقسیم امکان‌پذیر است:

```
۱۰۱۱۱'۰'۱۱ | ۱۱۰۱
           | ۱۱
۱۱۰۱
-----
۱۰۱۰۰
 ۱۱۰۱
-----
  ۱۱۱
```

در مرحلهٔ سوم چون ۱۱۰۱<۱۱۱۱ است، عمل تقسیم امکان‌پذیر است و داریم:

```
۱۰۱۱۱'۰'۱'۱ | ۱۱۰۱
            | ۱۱۱
۱۱۰۱
-----
۱۰۱۰۰
 ۱۱۰۱
-----
 ۱۱۱۱
 ۱۱۰۱
-----
  ۱۰۱
```

در مرحله چهارم چون ۱۱۰۱>۱۰۱ است به خارج قسمت یک صفر اضافه می‌کنیم و عمل تقسیم متوقف می‌شود بدین ترتیب:

```
۱۰۱۱۱'۰'۱'۱ | ۱۱۰۱
            | ۱۱۱۰
۱۱۰۱
-----
۱۰۱۰۰
 ۱۱۰۱
-----
 ۱۱۱۱
 ۱۱۰۱
-----
  ۱۰۱
```

درنتیجه:

$(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲:(۱۱۰۱)_۲=(۱۱۱۰)_۲$ و $(۱۰۱)_۲=$ باقیمانده

به عبارت دیگر:

$(۱۰۱۱۱۰۱۱)_۲=(۱۱۰۱)_۲\times(۱۱۱۰)_۲+۱۰۱$

مطلب بالا را تحقیق کنید[۲۴].

تمرین ــ ثابت کنید:

الف: $(۱۰۱۱۱)_۲\times(۱۰۱۰۱)_۲=(۱۱۱۱۰۰۰۱۱)_۲$

ب: $(۱۱۰۰)_۲\times(۱۰۱۱۰۱)_۲=(۱۰۰۰۰۱۱۱۰۰)_۲$

ج: $(۱۱۱۱۱۱۰۰۰)_۲:(۱۰۰۱)_۲=(۱۱۱۰۰۰)_۲$

د: $(۱۱۰۰۱۱)_۲:(۱۱۱۱)_۲=(۱۱)_۲$ و $(۱۱۰)_۲=$ باقیمانده

عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم درمبناهای ۸ و ۱۶ کاملاً مشابه عملیات فوق در مبنای ۱۰ و ۲ است که شرح آن در بالا آمده است.

❏ تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به مبنای ۱۶

الف ــ روش تقسیمهای متوالی:

در این روش به همان صورتی عمل می‌کنیم که در تبدیل یک عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ عمل می‌کردیم. دانش‌آموزان توجه دارند که معادل اعداد اعشاری ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، در مبنای ۱۶ به ترتیب F ،E ،D ،C ،B ،A است.

مثال: معادل عدد $(۲۹۹)_{۱۰}$ را در مبنای ۱۶ [۲۵] به دست آورید.

حل: با استفاده از روش تقسیمهای متوالی می‌توان نوشت:

$۲۹۹:۱۶=۱۸$ $\quad$ باقیمانده $=(۱۱)_{۱۶}=B$

$۱۸:۱۶=۱$ $\quad$ باقیمانده $=(۲)_{۱۶}$

چون خارج قسمت یعنی ۱ کمتر از ۱۶ است ۱۶>۱ . بدین ترتیب عمل تقسیم را متوقف می‌کنیم درنتیجه:

$(۲۹۹)_{۱۰}=(۱۲B)_{۱۶}$

تمرین ــ ثابت کنید

$(۴۳۹۶۹)_{۱۰}=(ABC۱)_{۱۶}$

$(۷۰۰۶۷۱)_{۱۰}=(AB۰FF)_{۱۶}$

ب ــ روش تفریقهای متوالی:

در این روش نیز به همان صورتی عمل می‌کنیم که در تبدیل یک عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ عمل کردیم. برای این منظور، ابتدا توانهای[۲۶] مختلف عدد ۱۶ را می‌نویسیم:

$۱۶^۰=۱$	$۱۶^۴=۶۵۵۳۶$
$۱۶^۱=۱۶$	$۱۶^۵=۱۰۴۸۵۷۶$
$۱۶^۲=۲۵۶$	$۱۶^۶=۱۶۷۷۷۲۱۶$
$۱۶^۳=۴۰۹۶$	$۱۶^۷=۲۶۸۴۳۵۴۵۶$

مثال: معادل عدد $(۱۱۹۴۶۸۴)_{۱۰}$ را با روش تفریقهای متوالی به مبنای ۱۶ به دست آورید.

حل: ملاحظه می‌شود که عدد ۱۱۹۴۶۸۴ بین دو عدد $۱۰۴۸۵۷۶=۱۶^۵$ و $۱۶۷۷۷۲۱۶=۱۶^۶$ قرار دارد. از عدد با توان کوچکتر شروع می‌کنیم و عدد داده شده را از $۱۰۴۸۵۷۶=۱۶^۵$ و توانهای پایین‌تر از ۵ عدد ۱۶ کم می‌کنیم و در هر قسمت که مفروقٌ منه از مفروق بیشتر باشد عمل تفریق را انجام می‌دهیم و برای آن مرحله ضریب[۲۷] توان را درنظر می‌گیریم درغیر این‌صورت عمل تفریق را انجام نمی‌دهیم و برای آن قسمت عدد صفر منظور می‌کنیم[۲۸]. این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که به پایین‌ترین توان غیر منفی[۲۹] عدد ۱۶، یعنی صفر برسیم. در پایان، ارقام ثبت شده در هر مرحله را به ترتیب از سمت چپ

کنار هم قرار می‌دهیم، عدد حاصل، معادل عدد داده شده در مبنای ۱۶ است.

سمت چپ ترین رقم
↓

۱ = عدد ثبت شده

$۱۱۹۴۶۸۴ - ۱\times ۱۶^{۵} = ۱۱۹۴۶۸۴ - ۱۰۴۸۵۷۶ = ۱۴۶۱۰۸$

۲ = عدد ثبت شده

$۱۴۶۱۰۸ - ۲\times ۱۶^{۴} = ۱۴۶۱۰۸ - ۱۳۱۰۷۲ = ۱۵۰۳۶$

۳ = عدد ثبت شده

$۱۵۰۳۶ - ۳\times ۱۶^{۳} = ۱۵۰۳۶ - ۱۲۲۸۸ = ۲۷۴۸$

A = ۱۰ = عدد ثبت شده

$۲۷۴۸ - ۱۰\times ۱۶^{۲} = ۲۷۴۸ - ۲۵۶۰ = ۱۸۸$

B = ۱۱ = عدد ثبت شده

$۱۸۸ - ۱۱\times ۱۶ = ۱۸۸ - ۱۷۶ = ۱۲$

سمت راست‌ترین رقم
↓

C = ۱۲ = عدد ثبت شده

$۱۲ - ۱۲\times ۱۶^{۰} = ۱۲ - ۱۲ = ۰$

درنتیجه: $(۱۱۹۴۶۸۴)_{۱۰} = (۱۲۳ABC)_{۱۶}$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۱۱۲۵۶۰۹۹)_{۱۰} = (ABC۱۲۳)_{۱۶}$

ب: $(۱۷۱۵۰۰۴)_{۱۰} = (۱A۲B۳C)_{۱۶}$

تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰

در تمام عملیات تبدیل مبنا بدون استفاده از مبنای ۱۰، ابتدا بایستی سعی کنید رابطه‌ای بین مبناهای مورد بررسی[30] در مسأله پیدا کنید. به‌طور مثال در تبدیل مبنای ۲ به ۱۶ و برعکس، رابطهٔ $۱۶^{۱} = ۲^{۴}$ بین دو عدد ۲ و ۱۶ برقرار است[31]. معنی این تساوی، آن است که هر چهار بیت[32] (رقم) در مبنای ۲، معادل یک رقم در مبنای ۱۶ است. از این‌رو برای تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۱۶، ابتدا عدد داده شده در مبنای ۲ را از راست به چپ به دسته‌های چهارتایی تقسیم‌بندی کرده سپس هر دستهٔ چهارتایی را به‌طور مستقل به یک عدد در مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم. بدنبال آن معادل عدد حاصلِ دسته را در مبنای ۱۶ می‌نویسیم و با همان ترتیب در جای خودش در دسته قرار می‌دهیم.

مثال: معادل عدد $(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲}$ را بدون استفاده از مبنای ۱۰، به مبنای ۱۶ به دست آورید:

حل: ابتدا عدد داده شده را به دسته‌های چهارتایی تقسیم بندی می‌کنیم:

$(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲} = [۱(۱۰۰۰)(۱۰۱۰)(۱۰۱۱)]_{۲}$

می‌دانیم:

$(۱۰۱۰)_{۲} = ۱۰ = (A)_{۱۶}$ $\quad (۱۰۱۱)_{۲} = ۱۱ = (B)_{۱۶}$

$(۱)_{۲} = ۱ = (۱)_{۱۶}$ $\quad (۱۰۰۰)_{۲} = ۸ = (۸)_{۱۶}$

درنتیجه پس از جایگذاری[33]:

$(۱۱۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۱)_{۲} = (۱۸AB)_{۱۶}$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲}$ را در مبنای ۱۶ به دست آورید:

حل: با توضیحات ارائه شده داریم:

$(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲} = [(۱۰)(۱۰۱۱)(۰۰۰۱)(۱۱۱۱)]_{۲}$

$(۰۰۰۱)_{۲} = (۱)_{۱۶}$ $\quad (۱۱۱۱)_{۲} = (F)_{۱۶}$

$(۱۰)_{۲} = (۲)_{۱۶}$ $\quad (۱۰۱۱)_{۲} = (B)_{۱۶}$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$(۱۰۱۰۱۱۰۰۰۱۱۱۱۱)_{۲} = (۲B۱F)_{۱۶}$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۱۰۱۱۰۰۱۱۱)_{۲} = (۱۶۷)_{۱۶}$

ب: $(۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱)_{۲} = (ABCDEF۱)_{۱۶}$

تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۲ بدون استفاده از مبنای ۱۰

از آنجا که $۲^{۴} = ۱۶^{۱}$ تعبیر این تساوی آن است که هر رقم در مبنای ۱۶ قابل تبدیل به چهار رقم در مبنای ۲ است. بدین منظور برای تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۲، کافی است هر رقمِ عدد داده شده درمبنای ۱۶ را به‌طور مستقل به مبنای ۲ با چهار رقم نمایش داده سپس با همان ترتیبِ ارقام در مبنای ۱۶، معادل مبنای ۲ ارقام را در جای خودش می‌نویسیم. بدین ترتیب تبدیل مبنا از ۱۶ به ۲ انجام شده است.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید:

حل:

$$(۱۲۳)_{۱۶} = (?)_{۲}$$

نخست لازم است هر رقم عدد داده شده در مبنای ۱۶ را به معادلش در مبنای ۲ با چهار رقم بیان کنیم. در مورد ارقامی مانند ۱ در مبنای ۱۶، سمت چپ این‌گونه ارقام را با صفر پر می‌کنیم تا چهار رقم کامل شود یعنی

$$(۱)_{۱۶} = (۰۰۰۱)_{۲}$$

بدین ترتیب:

$$(۲)_{۱۶} = (۱۰)_{۲} = (۰۰۱۰)_{۲}$$

$$(۳)_{۱۶} = (۱۱)_{۲} = (۰۰۱۱)_{۲}$$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$$(۱۲۳)_{۱۶} = [(۰۰۰۱)(۰۰۱۰)(۰۰۱۱)]_{۲}$$
$$= (۰۰۰۱۰۰۱۰۰۰۱۱)_{۲}$$
$$= (۱۰۰۱۰۰۰۱۱)$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(ABCDEF۱)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست آورید:

حل:

$$(ABCDEF۱)_{۱۶} = (?)_{۲}$$

می‌دانیم:

$$(A)_{۱۶} = (۱۰۱۰)_{۲} \quad (B)_{۱۶} = (۱۰۱۱)_{۲} \quad (C)_{۱۶} = (۱۱۰۰)_{۲}$$
$$(D)_{۱۶} = (۱۱۰۱)_{۲} \quad (E)_{۱۶} = (۱۱۱۰)_{۲} \quad (F)_{۱۶} = (۱۱۱۱)_{۲}$$

و بالاخره:

$$(۱)_{۱۶} = (۰۰۰۱)_{۲}$$

درنتیجه پس از جایگذاری داریم:

$$(ABCDEF۱)_{۱۶} =$$
$$[(۱۰۱۰)(۱۰۱۱)(۱۱۰۰)(۱۱۰۱)(۱۱۱۰)(۱۱۱۱)(۰۰۰۱)]_{۲}$$

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
A	B	C	D	E	F	۱

$$= (۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰۰۰۱)_{۲}$$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف:

$$(۸۷۵ABF)_{۱۶} = (۱۰۰۰,۰۱۱۱,۰۱۰۱۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۱۱)_{۲}$$

ب:

$$(۱۰۲CD)_{۱۶} = (۱۰۰۰۰۰۰۱۰۱۱۰۰۱۱۰۱)_{۲}$$

تبدیل اعداد از مبنای ۱۶ به مبنای ۸ بدون استفاده از مبنای ۱۰

به منظور تبدیل یک عدد از مبنای ۱۶ به مبنای ۸، ابتدا معادل عدد داده شده در مبنای ۱۶ را به مبنای ۲ تبدیل کرده، سپس عدد تولید شده[۳۴] در مبنای ۲ را طبق قاعدهٔ گفته شده از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل می‌کنیم.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(A۲۳C)_{۱۶}$ را درمبنای ۸ به دست آورید.

حل: ابتدا معادل عدد $(A۲۳C)_{۱۶}$ را در مبنای ۲ به‌دست می‌آوریم. با توجه به مثال حل شده در قسمت تبدیل مبنا از ۱۶ به مبنای ۲ داریم:

$$(A۲۳C)_{۱۶} = (۱۰۱۰,۰۰۱۰,۰۰۱۱,۱۱۰۰)_{۲}$$

حال معادل عدد $(۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱۱۱۱۰۰)_{۲}$ را در مبنای ۸ می‌نویسیم.

$$(۱۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱۱۱۱۰۰)_{۲} = [۱(۰۱۰)(۰۰۱)(۰۰۰)(۱۱۱)(۱۰۰)]_{۲}$$
$$= (۱۲۱۰۷۴)_{۸}$$

درنتیجه داریم:

$$(A۲۳C)_{۱۶} = (۱۲۱۰۷۴)_{۸}$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۹۸EDA)_{۱۶}$ را در مبنای ۸ به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$(۹۸EDA)_{۱۶} = (۱۰۰۱۱۰۰۰۱۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۰)_{۲}$$

$$(۱۰۰۱۱۰۰۰۱۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۰)_{۲} = (۲۳۰۷۳۳۲)_{۸}$$

درنتیجه:

$$(۹۸EDA)_{۱۶} = (۲۳۰۷۳۳۲)_{۸}$$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(۵۳۹۷۷)_{۱۶} = (۱۲۳۴۵۶۷)_{۸}$

ب: $(۱F۵۸D۱)_{۱۶} = (۷۶۵۴۳۲۱)_{۸}$

تبدیل اعداد از مبنای ۸ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰

برای تبدیل یک عدد از مبنای ۸ به مبنای ۱۶ بدون استفاده از مبنای ۱۰، ابتدا معادل عدد داده شده[۳۵] در مبنای ۸ را به مبنای ۲ به دست آورده سپس عدد ایجاد شده در مبنای ۲ را طبق قاعده گفته شده از مبنای ۲ به مبنای ۱۶ تبدیل می‌کنیم.

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(۲۳۴۵۷)_{۸}$ را در

مبنای ۱۶ به دست آورید.

حل:

$$(23457)_8=[(010)(011)(100)(101)(111)]_2$$

۲ ۳ ۴ ۵ ۷

$$=(10011100101111)_2$$

$$(10,0111,0010,1111)_2=(272F)_{16}$$

درنتیجه:

$$(23457)_8=(272F)_{16}$$

مثال: بدون استفاده از مبنای ۱۰، معادل عدد $(7700125)_8$ را در مبنای ۱۶ به‌دست آورید.

حل:

$$(7700125)_8=[(111)(111)(000)(000)(001)(010)(101)]_2$$

۷ ۷ ۰ ۰ ۱ ۲ ۵

$$=(111111000000001010101)_2$$

$$(111111000000001010101)_2=(1F8055)_{16}$$

درنتیجه: $(7700125)_8=(1F8055)_{16}$

تمرین ــ ثابت کنید که:

الف: $(172635)_8=(F59D)_{16}$

ب: $(702561437)_8=(70AE31F)_{16}$

با حل چند تمرین مختلف[36]، بحث تبدیل مبناها را به پایان می‌بریم[37]

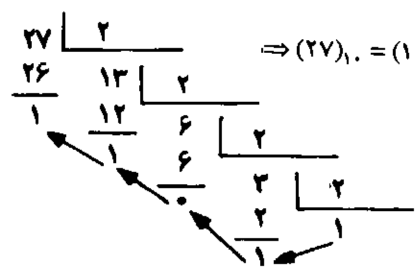
مسائل تکمیلی با جواب

۱ــ الف: با استفاده از روش تقسیمهای متوالی، اعداد زیر را در مبنای ۲ بنویسید.

۲۷ ، ۱۲۷ ، ۲۵۶

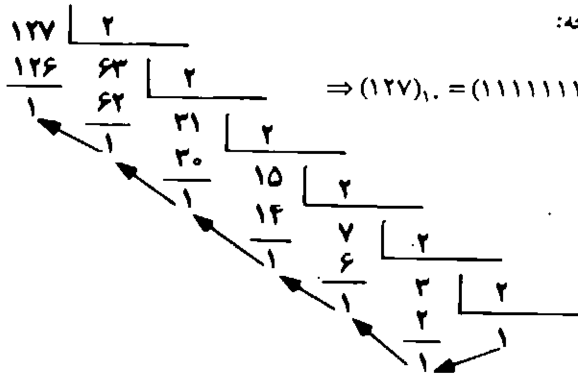
حل:

در نتیجه:



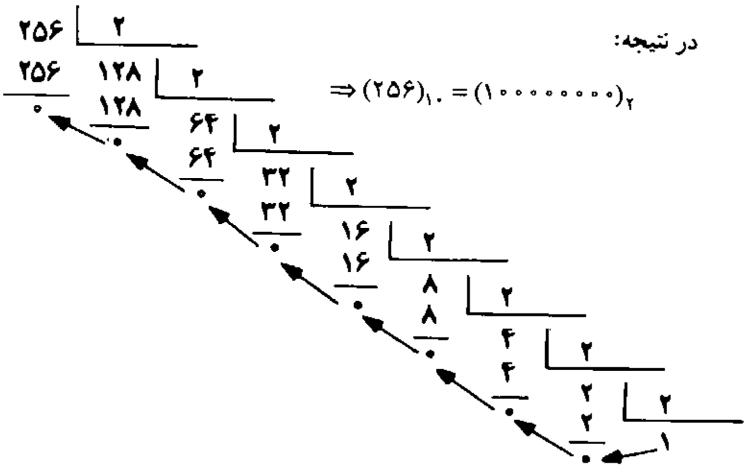
$$\Rightarrow (27)_{10}=(11011)_2$$

در نتیجه:



$$\Rightarrow (127)_{10}=(1111111)_2$$

در نتیجه:



$$\Rightarrow (256)_{10}=(100000000)_2$$

ب: با استفاده از روش تفریقهای متوالی، اعداد زیر را در مبنای ۲ بنویسید.

۵۹۳ ، ۷۵۸

حل: با توجه به اینکه عدد ۵۹۳ بین $512=2^9$ و $1024=2^{10}$ قرار دارد از این‌رو عمل تفریق را از عدد $512=2^9$ شروع می‌کنیم.

درنتیجه

سمت چپ‌ترین رقم ↓

۱ = عدد ثبت شده[38] $593-1\times2^9=593-512=81$

۰ = عدد ثبت شده $81-0\times2^8=81-0=81$

۰ = عدد ثبت شده $81-0\times2^7=81-0=81$

۱ = عدد ثبت شده $81-1\times2^6=81-64=17$

۰ = عدد ثبت شده $17-0\times2^5=17-0=17$

۱ = عدد ثبت شده $17-1\times2^4=17-16=1$

۰ = عدد ثبت شده $1-0\times2^3=1-0=1$

۰ = عدد ثبت شده $1-0\times2^2=1-0=1$

۰ = عدد ثبت شده $\quad ۱-۰\times ۲^{۱}=۱-۰=۱$

سمت راست‌ترین رقم
↓

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۱-۱\times ۲^{۰}=۱-۱=۰$

درنتیجه:

$$(۵۹۳)_{۱۰}=(۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$$

اما در مورد عدد ۷۵۸، با توجه به اینکه ۱۰۲۴>۷۵۸>۵۱۲، از این‌رو عمل تفریق را از عدد کوچکتر یعنی $۵۱۲=۲^{۹}$ شروع می‌کنیم. داریم:

سمت چپ‌ترین رقم
↓

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۷۵۸-۱\times ۲^{۹}=۷۵۸-۵۱۲=۲۴۶$

۰ = عدد ثبت شده $\quad ۲۴۶-۰\times ۲^{۸}=۲۴۶-۰=۲۴۶$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۲۴۶-۱\times ۲^{۷}=۲۴۶-۱۲۸=۱۱۸$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۱۱۸-۱\times ۲^{۶}=۱۱۸-۶۴=۵۴$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۵۴-۱\times ۲^{۵}=۵۴-۳۲=۲۲$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۲۲-۱\times ۲^{۴}=۲۲-۱۶=۶$

۰ = عدد ثبت شده $\quad ۶-۰\times ۲^{۳}=۶-۰=۶$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۶-۱\times ۲^{۲}=۶-۴=۲$

۱ = عدد ثبت شده $\quad ۲-۱\times ۲^{۱}=۲-۲=۰$

سمت راست‌ترین رقم
↓

۰ = عدد ثبت شده $\quad ۰-۰\times ۲^{۰}=۰-۰=۰$

درنتیجه:

$$(۷۵۸)_{۱۰}=(۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)$$

۲ـ معادل اعداد زیر را در مبنای ۱۰ به دست آورید.

$(۱۰۰۰۱)_{۲}$ ، $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲}$ ، $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}$

$(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲}$ ، $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲}$

حل: داریم:

$$(۱۰۰۰۱)_{۲}=۱\times ۲^{۴}+۰\times ۲^{۳}+۰\times ۲^{۲}+۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰}=۱۷=(۱۷)_{۱۰}.$$

$$(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲}=۱\times ۲^{۶}+۰\times ۲^{۵}+\cdots+۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰}=۶۵=(۶۵)_{۱۰}.$$

$$(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲}=۱\times ۲^{۸}+۱\times ۲^{۷}+\cdots+۰\times ۲^{۴}+۱\times ۲^{۳}+\cdots+۱\times ۲^{۰}=۴۹۵=(۴۹۵)_{۱۰}.$$

$$(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲}=۱\times ۲^{۸}+۰\times ۲^{۷}+۰\times ۲^{۶}+۱\times ۲^{۵}+۰\times ۲^{۴}+۰\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۲}+۰\times ۲^{۱}+۰\times ۲^{۰}$$

$$=۲۹۲=(۲۹۲)_{۱۰}$$

$$(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲}=۱\times ۲^{۱۱}+۰\times ۲^{۱۰}+۱\times ۲^{۹}+۱\times ۲^{۸}+۰\times ۲^{۷}+۱\times ۲^{۶}+۱\times ۲^{۵}+۰\times ۲^{۴}+۱\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۲}+۰\times ۲^{۱}+۱\times ۲^{۰}=۲۹۲۵=(۲۹۲۵)_{۱۰}.$$

۳ـ اگر واحد خانه‌های حافظه کلمه باشد یک کامپیوتر با ظرفیتهای زیر دارای چند کلمه است؟

الف ـ128K $\quad$ ب ـ 256K $\quad$ ج ـ 640K

حل: در کامپیوترهای شخصی سازگار با IBM، هر کلمه حافظه از ۱۶ بیت یا دو بایت تشکیل شده است. از این‌رو با فرض 1Word = 2Byte داریم:

1K=1 Kilo Byte = 1024 Byte

الف: بایت $\quad$ 128K = 128×1024Byte = 131072 Byte

کلمه $\quad$ 131072Byte:2 = 65536 word

ب: بایت $\quad$ 256K = 256×1024 Byte = 262144 Byte

کلمه $\quad$ 262144Byte:2 = 131072 word

ج: بایت $\quad$ 640K = 640×1024Byte = 655360 Byte

کلمه $\quad$ 655360Byte:2 = 327680 word

در کامپیوترهای بزرگ IBM 360/370، هر کلمهٔ حافظه از ۳۲ بیت یا چهار بایت تشکیل شده است. از این‌رو با فرض 1word=4 Byte داریم:

کلمه $\quad$ 128K = 128×1024Byte:4 = 32760word

کلمه $\quad$ 256K = 256×1024Byte:4 = 65536word

کلمه $\quad$ 640K = 640×1024Byte:4 = 163840word

هرگاه هر کلمهٔ حافظه از یک بایت تشکیل شده باشد، از این رو با فرض 1word = 1Byte داریم:

کلمه Word یا $\quad$ 128K = 128×1024Byte = 131072 Byte

کلمه Word یا $\quad$ 256K = 256×1024Byte = 262144 Byte

کلمه Word یا $\quad$ 640K = 640×1024Byte = 655360 Byte

۴ـ اگر هر کلمهٔ حافظه از ۱۶ بیت تشکیل شده باشد نمایش هریک از اعداد صحیح زیر را در یک کلمه بنویسید.

الف) ۹۷ ـ $\quad$ ب) $۱-۲^{۱۳}$ $\quad$ ج) $۱+۲^{۹}-۲^{۱۳}$

حل: الف: چون عدد ۹۷- یک عدد منفی است از این‌رو، این عدد به جزء بیت علامت دارای همان نمایش عدد ۹۷ است . درنتیجه

$$(۹۷)_{۱۰}=(۱۱۰۰۰۰۱)_{۲}$$

$$\Rightarrow -(۹۷)_{۱۰}=-(۱۱۰۰۰۰۱)_{۲}$$

نمایش بیتی [۴۱] عدد صحیح ۹۷- در دو بایت حافظه به صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱

↑
بیت علامت

ب ــ داریم:

$$۲^{۱۳}-۱=(۲-۱)(۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+...+۲^{۱}+۱)$$
$$=۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+...+۲^{۱}+۱=۱\times۲^{۱۲}+۱\times۲^{۱۱}$$
$$+۱\times۲^{۱۰}+...+۱\times۲^{۱}+۱\times۲^{۰}$$
$$=(\underbrace{۱۱۱...۱۱}_{۱۳\ \text{رقم}})$$

نمایش بیتی عدد صحیح مثبت ۱- ۲^۱۳ در دو بایت حافظه به صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

↑
بیت علامت

ج ــ

$$۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱=۲^{۹}(۲^{۴}-۱)+۱=۲^{۹}(۲-۱)(۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۱)+۱$$
$$=۲^{۹}(۲^{۳}+۲^{۲}+۲^{۱}+۱)+۱=۲^{۱۲}+۲^{۱۱}+۲^{۱۰}+۲^{۹}+۱$$
$$=۱\times۲^{۱۲}+۱\times۲^{۱۱}+۱\times۲^{۱۰}+۱\times۲^{۹}+۰\times۲^{۸}+$$
$$۰\times۲^{۷}+...+۰\times۲^{۱}+۱\times۲^{۰}$$
$$=(۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱)_{۲}$$

درنتیجه:

$$۲^{۱۳}-۲^{۹}+۱=(۱۱۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۱)_{۲}$$

نمایش بیتی عدد صحیح مثبت ۱+ ۲^۹ – ۲^۱۳ در دو بایت حافظه به‌صورت زیر است:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱

۵ ــ با توجه به اینکه هریک از ارقام ۰ تا ۷ را که در مبنای ۸ به کار می‌روند می‌توان حداکثر با سه رقم در مبنای ۲ نوشت، هریک از اعداد زیر را از مبنای ۲ به ۸ یا از مبنای ۸ به مبنای ۲ تبدیل کنید.

الف) $(۳۶)_{۸}=(?)_{۲}$ ، $(۶۴۲)_{۸}=(?)_{۲}$ ، $(۷۵۲)_{۸}=(?)_{۲}$

ب) $(۱۰۱۱۱۱)_{۲}=(?)_{۸}$ ، $(۱۰۱۱۰۰۱۱)=(?)_{۸}$ ،
$(۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰)_{۲}=(?)_{۸}$

حل: دربارهٔ شیوهٔ تبدیل یک عدد از مبنای ۲ به مبنای ۸ بدون استفاده از مبنای ۱۰ و بالعکس به برهان شمارهٔ ۱۴ مراجعه کنید [۴۲]. با استفاده از مطالب گفته شده و توجه به نکتهٔ زیر داریم:

$(۰)_{۸}=(۰۰۰)_{۲}$ $(۵)_{۸}=(۱۰۱)_{۲}$
$(۱)_{۸}=(۰۰۱)_{۲}$ $(۶)_{۸}=(۱۱۰)_{۲}$
$(۲)_{۸}=(۰۱۰)_{۲}$ $(۷)_{۸}=(۱۱۱)_{۲}$
$(۳)_{۸}=(۰۱۱)_{۲}$
$(۴)_{۸}=(۱۰۰)_{۲}$

الف)

$$(۳۶)_{۸}=[(۰۱۱)(۱۱۰)]_{۲}=(۱۱۱۱۰)_{۲}$$
↑ ↑
۳ ۶

$$(۶۴۲)_{۸}=[(۱۱۰)(۱۰۰)(۰۱۰)]_{۲}=(۱۱۰۱۰۰۰۱۰)_{۲}$$
↑ ↑ ↑
۶ ۴ ۲

$$(۷۵۲)_{۸}=[(۱۱۱)(۱۰۱)(۰۱۰)]_{۲}=(۱۱۱۱۰۱۰۱۰)_{۲}$$
↑ ↑ ↑
۷ ۵ ۲

ب)

$$(۱۰۱۱۱۱)_{۲}=[(۱۰۱)(۱۱۱)]_{۲}=(۵۷)_{۸}$$
$$(۱۰۱۱۰۰۱۱)_{۲}=[(۱۰)(۱۱۰)(۰۱۱)]_{۲}=(۲۶۳)_{۸}$$
$$(۱۰۰۰۰۱۰۱۰۰)_{۲}=[(۱)(۰۰۰)(۰۱۰)(۱۰۰)]_{۲}=(۱۰۲۴)_{۸}$$

۶ــ تمرینهای ۱ و ۲ را به کمک تمرین ۵ حل کنید.

حل: در تمرین ۱ از ما خواسته شده است که اعداد مبنای ۱۰ را در مبنای ۲ بنویسیم. برای این منظور ابتدا اعداد داده شده را از مبنای ۱۰ به مبنای ۸ تبدیل کرده، آنگاه تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۲ را انجام می‌دهیم.

بدین ترتیب داریم:

الف) $(۲۷)_{۱۰}=(۳۳)_{۸}$

$$(۳۳)_{۸}=[(۰۱۱)(۰۱۱)]_{۲}=(۱۱۰۱۱)_{۲}$$

درنتیجه: $(۲۷)_{۱۰}=(۳۳)_{۸}=(۱۱۰۱۱)_{۲}$

ب) $(۱۲۷)_{۱۰}=(۱۷۷)_{۸}$

$$(۱۷۷)_{۸}=[(۰۰۱)(۱۱۱)(۱۱۱)]_{۲}=(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$$

درنتیجه: $(۱۲۷)_{۱۰}=(۱۷۷)_{۸}=(۱۱۱۱۱۱۱)_{۲}$

ج) $(۲۵۶)_{۱۰}=(۴۰۰)_{۸}$

$$(۴۰۰)_{۸}=[(۱۰۰)(۰۰۰)(۰۰۰)]_{۲}=(۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$$

درنتیجه: $(۲۵۶)_{۱۰} = (۴۰۰)_{۸} = (۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_{۲}$

د) $(۵۹۳)_{۱۰} = (۱۱۲۱)_{۸}$

$$(۱۱۲۱)_{۸} = [(۰۰۱)(۰۰۱)(۰۱۰)(۰۰۱)]_{۲} = (۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$$

درنتیجه: $(۵۹۳)_{۱۰} = (۱۱۲۱)_{۸} = (۱۰۰۱۰۱۰۰۰۱)_{۲}$

هـ) $(۷۵۸)_{۱۰} = (۱۳۶۶)_{۸}$

$$(۱۳۶۶)_{۸} = [(۰۰۱)(۰۱۱)(۱۱۰)(۱۱۰)]_{۲} = (۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)_{۲}$$

در نتیجه: $(۷۵۸)_{۱۰} = (۱۳۶۶)_{۸} = (۱۰۱۱۱۱۰۱۱۰)_{۲}$

در تمرین ۲ از ما خواسته شده است که اعداد مبنای ۲ را در مبنای ۱۰ بنویسیم. برای این منظور ابتدا اعداد داده شده را از مبنای ۲ به مبنای ۸ تبدیل کرده، آنگاه تبدیل از مبنای ۸ به مبنای ۱۰ را انجام می‌دهیم. بدین ترتیب داریم:

الف) $(۱۰۰۰۱)_{۲} = [(۱۰)(۰۰۱)]_{۸} = (۲۱)_{۸}$

$$(۲۱)_{۸} = ۲\times۸^{۱} + ۱\times۸^{۰} = ۱۶+۱ = (۱۷)_{۱۰} = ۱۷$$

درنتیجه: $(۱۰۰۰۱)_{۲} = (۲۱)_{۸} = (۱۷)_{۱۰} = ۱۷$

ب) $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲} = [(۱)(۰۰۰)(۰۰۱)]_{۸} = (۱۰۱)_{۸}$

$$(۱۰۱)_{۸} = ۱\times۸^{۲} + ۰\times۸^{۱} + ۱\times۸^{۰} = (۶۵)_{۱۰} = ۶۵$$

درنتیجه: $(۱۰۰۰۰۰۱)_{۲} = (۱۰۱)_{۸} = (۶۵)_{۱۰} = ۶۵$

ج) $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = [(۱۱۱)(۱۰۱)(۱۱۱)]_{۸} = (۷۵۷)_{۸}$

$$(۷۵۷)_{۸} = ۷\times۸^{۲} + ۵\times۸^{۱} + ۷\times۸^{۰} = (۴۹۵)_{۱۰} = ۴۹۵$$

درنتیجه: $(۱۱۱۱۰۱۱۱۱)_{۲} = (۷۵۷)_{۸} = (۴۹۵)_{۱۰} = ۴۹۵$

د) $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = [(۱۰۰)(۱۰۰)(۱۰۰)]_{۸} = (۴۴۴)_{۸}$

$$(۴۴۴)_{۸} = ۴\times۸^{۲} + ۴\times۸^{۱} + ۴\times۸^{۰} = (۲۹۲)_{۱۰} = ۲۹۲$$

درنتیجه: $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰)_{۲} = (۴۴۴)_{۸} = (۲۹۲)_{۱۰} = ۲۹۲$

هـ) $(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = [(۱۰۱)(۱۰۱)(۱۰۱)(۱۰۱)]_{۸}$
$= (۵۵۵۵)_{۸}$

$$(۵۵۵۵)_{۸} = ۵\times۸^{۳} + ۵\times۸^{۲} + ۵\times۸^{۱} + ۵\times۸^{۰}$$
$$= (۲۹۲۵)_{۱۰} = ۲۹۲۵$$

درنتیجه:

$$(۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} = (۵۵۵۵)_{۸} = (۲۹۲۵)_{۱۰} = ۲۹۲۵$$

* واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

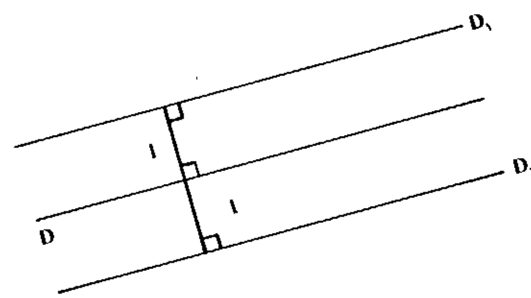
1- Sum
2- Binary Base
3- Decimal Base
4- Carry
5- Perform
6- Rule
7- Column
8- Convert
9- Rightmost Digit
10 - Prove That
11- Difference
12 - Borrowing Digit
13 - Respectively
14 - Multiplication
15 - Factor
16 - Division
17 - Comparision
18 - Place
19 - Presence
20 - Unequal
21- Dividend
22- Divisor
23- Quotient
24- Verify
25- Hexadecimal
26 - Power
27 - Coefficient
28 - Take on
29 - Nonnegative
30 - In Question
31- Fulfill
32 - Nibble
33 - By Substitution
34 - Generated
35 - Given Number
36 - Miscellaneous
37 - Terminate
38 - Registered Number
39 - Word
40 - Allocate
41 - Bit Representation
42 - Refer To

مکان هندسی (قسمت ششم)

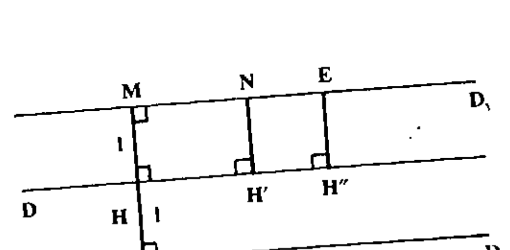
(اوّل ، دوم ، سوم، چهارم دبیرستان)

محمدهاشم رستمی

۷ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط D واقع در آن صفحه به فاصلهٔ معین l باشد، دو خط راست D_1 و D_2 موازی خط D است، که در طرفین این خط واقعند.



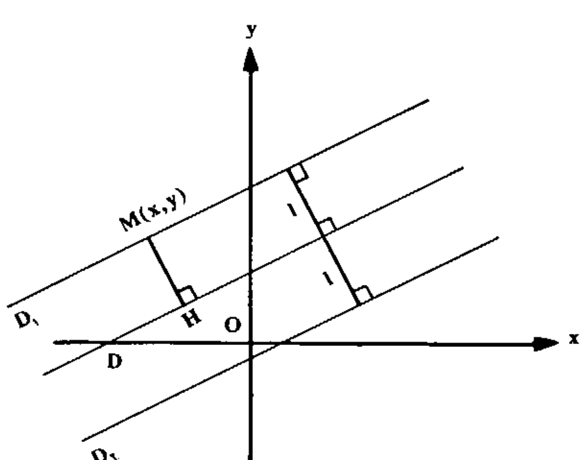
اثبات به روش هندسی ــ خط D را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم و دو خط D_1 و D_2 را به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. برای این کار از نقطهٔ H واقع بر خط D، خط راستی عمود بر این خط رسم کرده، روی آن در دو طرف نقطهٔ H، پاره‌خطهای HM و 'HM را به طول l جدا می‌کنیم، و از نقاط M و 'M خطهای D_1 و D_2 را به موازات خط D رسم می‌نماییم. این دو خط مکان هندسی نقطه‌ای می‌باشند که از خطD به فاصلهٔ معینl واقع است. زیرا:



اولاً: هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط D_1 یا D_2 قرار داشته باشد، از خط D به فاصله l واقع است، چون اگر پای عمود مرسوم از نقطهٔ N بر خط D را'H بنامیم، چهارضلعی MHH'N که اضلاعش دو به دو موازیند، متوازی‌الاضلاع است که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل می‌باشد. پس $NH' = MH = L$ است.

ثانیاً: هر نقطه‌ای مانندE از صفحهٔ P که از خط D به فاصلهٔ l قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 واقع است، زیرا با توجه به اینکه $MH = EH'' = l$ و $MH \| EH''$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ است، چهارضلعی MHH"E مستطیل، و درنتیجه $ME \| HH''$ یا $ME \| D$ است. پس نقطهٔ E روی خط D_1 قرار دارد (از نقطهٔ M تنها یک خط راست به موازات خط راست D می‌توان رسم کرد).

اثبات به روش تحلیلی ــ خط $D: ax + by + c = 0$ را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:



$$MH = d = l \Rightarrow l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow |ax + by + c| = l\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow D_1: ax + by + c + l\sqrt{a^2 + b^2} = 0 ,$$

$$D_2: ax + by + c - l\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

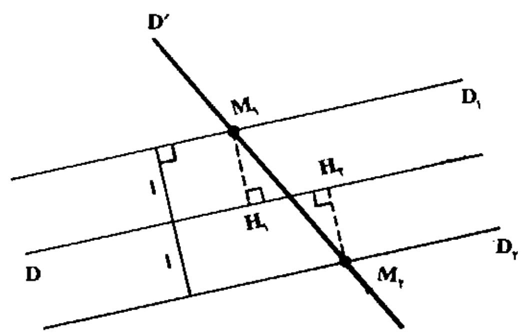
به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط D_1 و D_2 خطهای راستی هستند که با خط D موازیند. زیرا:

$$m/D_1 = m/D_2 = m/D = -\frac{a}{b}$$

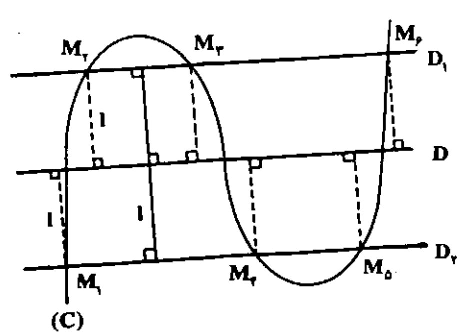
به عکس، مشخص است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ یکی از دو خط D_1 یا D_2 صدق کند، از خط $D: ax + by + c = 0$ به فاصلهٔ l قرار دارد، بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای که از خط ثابت D به فاصلهٔ معین l واقع است، دو خط راست موازی این خط است که در طرفین آن واقعند.

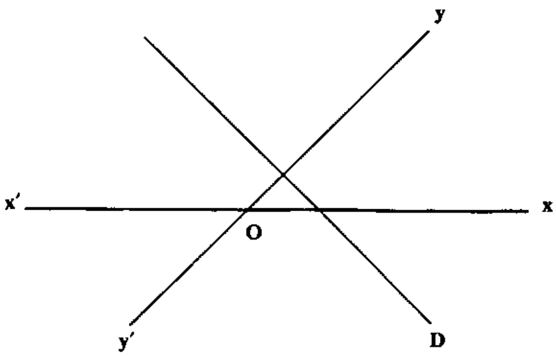
مثال ۱ ــ خط D و خط D′ (یا منحنی (C)) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط D′ (یا منحنی (C)) تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.



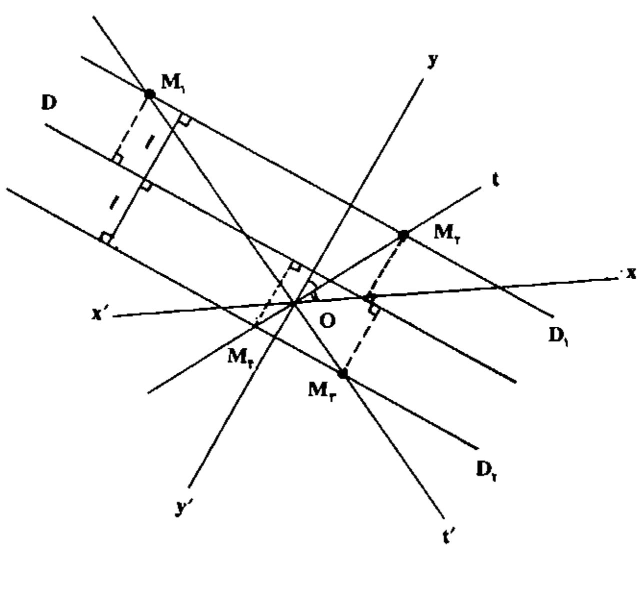
حل ــ دو خط D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معلوم l قرار دارد، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطهای D_1 و D_2 با خط D′ (یا منحنی(C)) جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله، به تعداد نقاط برخورد می‌باشد.



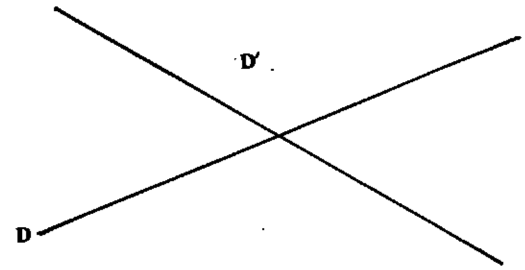
مثال ۲ ــ دو خط راست x′ox و y′oy و خط راست D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از دو خط راست x′ox و y′oy به یک فاصله، و از خط D نیز به فاصلهٔ معین l قرار داشته باشد.



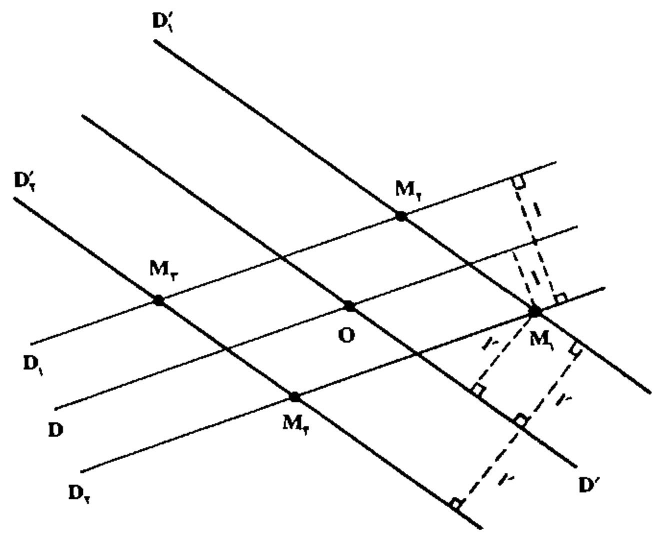
حل ــ خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معین l قرار دارد رسم می‌کنیم. از طرفی می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متقاطع به یک فاصله است، نیمسازهای زوایای بین آن دو خط است، بنابراین خطهای ot و ot′ نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط راست متقاطع x′ox و y′oy را نیز رسم می‌کنیم، نقاط تقاطع خطهای D_1 و D_2 با خطوط ot و ot′، جواب مسأله هستند. این مسأله حداقل دو جواب دارد.



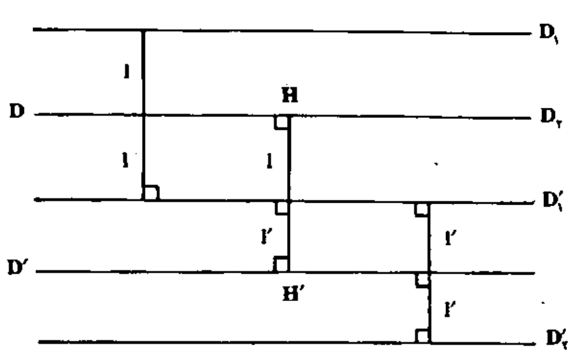
مثال ۳ ــ دو خط راست متمایز D و D′ در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D′ به فاصلهٔ l′ باشد.(بحث کنید).



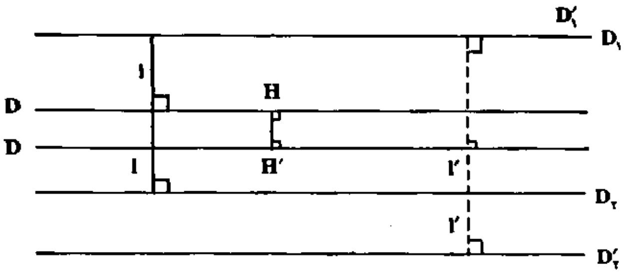
حل ــ خطهای D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ l قرار دارند و سپس خطهای D'_1 و D'_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D' به فاصلهٔ معین l' است، رسم می‌کنیم:

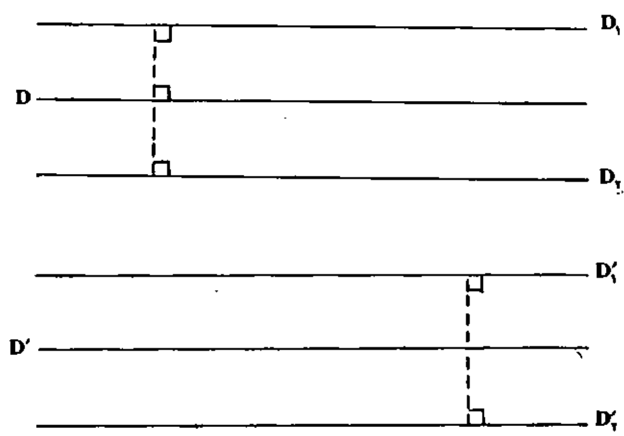


اگر خطهای D و D' متقاطع باشند، چهار خط D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 در چهار نقطهٔ M_1 و M_2 و M_3 و M_4 یکدیگر را قطع می‌کنند که این چهار نقطه جواب مسأله می‌باشند. درصورتی که دو خط D و D' متوازی باشند، خطهای D_1 و D_2 و D'_1 و D'_2 نیز متوازی خواهند بود. و دو حالت پیش می‌آید:



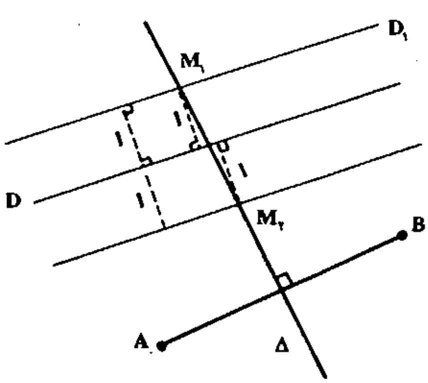
حالت اول: اگر یکی از دو خط D_1 و D_2 بریکی ازخطهای D'_1 یا D'_2 منطبق شوند، مسأله بی‌شمار جواب دارد، و این درصورتی است که فاصلهٔ بین دو خط متوازی D و D' برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ باشد.





حالت دوم: اگر هیچ‌یک از خطوط D_1 و D_2 بر خطهای D'_1 و D'_2 منطبق نشوند، معادله جواب ندارد. و این در صورتی است که فاصلهٔ بین دوخط متوازی D و D' برابر $l+l'$ یا $|l-l'|$ نباشد.

مثال ۴ ــ دو نقطهٔ A و B و خط D در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین l واقع بوده، از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد.



حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از خط مفروض D به فاصله معین l واقع است دو خط D_1 و D_2 موازی این خط و در طرفین آن است. بنابراین، این دو خط را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از دو نقطهٔ ثابت A و B عمود منصف پاره خط AB است، لذا این عمود منصف را رسم می‌کنیم و آنرا Δ می‌نامیم. نقاط تقاطع خط Δ با خطهای D_1 و D_2 جواب مسأله است و تعداد جوابهای مسأله عبارت است از:

الف) دو جواب، درصورتی که خط Δ غیرموازی با خط D باشد.

ب) بی‌شمار جواب، درصورتی که خط Δ بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 منطبق شود.

ج) بدون جواب، درصورتی که خط Δ موازی خط D و متمایز با خطهای D_1 و D_2 باشد.

مثال ۵ ــ دو خط $D: 3x - 4y - 5 = 0$ و $D': 2x + 4y + 5 = 0$ مفروضند. نقطه ای روی خط D' مشخص کنید که از خط D به فاصله ۲ سانتیمتر باشد.

حل ــ معادلهٔ خطهای D_1 و D_2 را که از خط D به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر قرار دارند، به دست می‌آوریم. نقطه‌های تقاطع این دو خط با خط D'، جواب مسأله است.

$$l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|3x - 4y - 5|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow$$

$$|3x - 4y - 5| = 10 \Rightarrow D_1: 3x - 4y + 5 = 0 \text{ و}$$

$$D_2: 3x - 4y - 15 = 0$$

$$\begin{matrix} D_1: \\ D': \end{matrix} \begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow M_1(-2, -\frac{1}{4})$$

$$\begin{matrix} D_2: \\ D': \end{matrix} \begin{cases} 3x - 4y - 15 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow M_2(-2, -\frac{9}{4})$$

نقاط جواب مسأله.

مثال ۶ ــ نقطه‌ای روی منحنی (C) به معادلهٔ $y = \frac{x+7}{x-1}$ تعیین کنید که از خط $D: 2x + y - 3 = 0$ به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ قرار داشته باشند.

حل ــ نقطهٔ تقاطع منحنی فوق با دو خط D_1 و D_2 که به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ از خط D واقعند، جواب مسأله است.

$$l = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4 + 1}} \Rightarrow$$

$$|2x + y - 3| = 10 \Rightarrow D_1: 2x + y + 7 = 0 \text{ و}$$

$$D_2: 2x + y - 13 = 0$$

$$\begin{matrix} D_1: \\ (C): \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + 7 = 0 \\ y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$$

$$\Rightarrow M_1\begin{vmatrix} 0 \\ -7 \end{vmatrix}, \quad M_2\begin{vmatrix} -3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

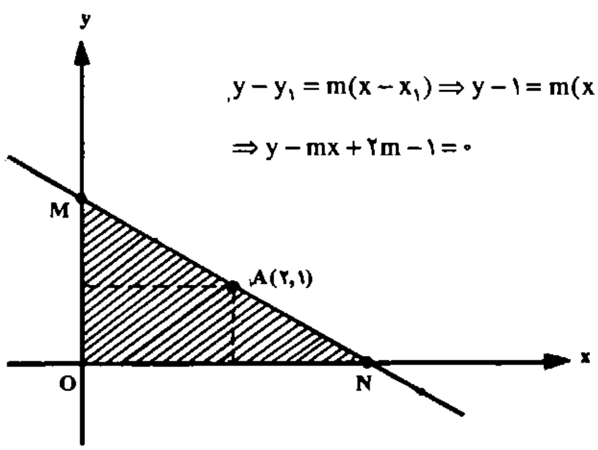
$$\begin{matrix} D_2: \\ (C): \end{matrix} \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 5$$

$$\Rightarrow M_3\begin{vmatrix} 2 \\ 9 \end{vmatrix}, \quad M_4\begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}$$

پس چهار نقطه M_1 و M_2 و M_3 و M_4 روی منحنی (C) وجود دارد که از خط D به فاصلهٔ $2\sqrt{5}$ می‌باشند.

مثال ۷ ــ نقطهٔ $A(2,1)$ در دستگاه مختصات xoy مفروض است. اولاً ــ معادلهٔ خط D را که از نقطهٔ A می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۴ سانتی‌متر مربع ایجاد می‌کند، بنویسید. ثانیاً ــ مختصات نقاطی از بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ را بیابید که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{5}$ قرار داشته باشند.

حل ــ ضریب زاویهٔ خط D را برابر m فرض می‌کنیم داریم:



$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = m(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - mx + 2m - 1 = 0$$

$x=۰ \Rightarrow y=-۲m+۱$ عرض ازمبداء خط $\Rightarrow M(۰,-۲m+۱)$

$y=۰ \Rightarrow x=\frac{۲m-۱}{m}$ طول از مبداء خط $\Rightarrow N(\frac{۲m-۱}{m},۰)$

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}|pq| \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}\left|\left(\frac{۲m-۱}{m}\right)(-۲m+۱)\right|$$

$$\Rightarrow (۲m-۱)^۲=۸|m| \Rightarrow ۴m^۲+۱-۴m=-۸m$$

$$\Rightarrow ۴m^۲+۴m+۱=۰ \Rightarrow \boxed{m=-\frac{۱}{۲}}$$

$$۴m^۲+۱-۴m=۸m \Rightarrow ۴m^۲-۱۲m+۱=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{۶\pm\sqrt{۳۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲}}\ ,\ \boxed{m=\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}}$$

مسأله را با $m=-\frac{۱}{۲}$ حل می کنیم، محاسبهٔ در مورد دو مقدار دیگر m نیز، شبیه این محاسبه است.

$$m=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow D: y+\frac{۱}{۲}x-۱-۱=۰ \Rightarrow D: ۲y+x-۴=۰$$

حال معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ $\sqrt{۵}$ واقع است می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن را با منحنی (C) به دست می‌آوریم.

$$l=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{|۲y+x-۴|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow$$

$$|۲y+x-۴|=۵ \Rightarrow ۲y+x-۴=+۵ \Rightarrow D_۱: x+۲y-۹=۰$$

$$۲y+x-۴=-۵ \Rightarrow D_۲: x+۲y+۱=۰$$

$$\begin{array}{l} D_۱: \\ (C): \end{array}\begin{cases} x+۲y-۹=۰ \\ \frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow M_۱(\frac{۱۹}{۵},\frac{۱۳}{۵})$$

$$\begin{array}{l} D_۲: \\ (C): \end{array}\begin{cases} x+۲y+۱=۰ \\ \frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱ \end{cases} \Rightarrow M_۲(\frac{۱}{۵},-\frac{۳}{۵})$$

*** نام کسانی که حل درست یک یا دو مسأله هندسهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۳ را فرستاده‌اند:**

۱ـ آقای بهمن اصلاح پذیر دبیر ریاضی منطقهٔ ۱۷ تهران

۲ـ آقای امین سعیدفر دانش آموز سال چهارم ریاضی‌فیزیک از تهران

۳ـ آقای مهران نقی‌زاده دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شهر ری

۴ـ آقای علی ازدری راد دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از مشهد

۵ـ آقای رضا تقی پور از شیراز

۶ـ آقای محمود تدین دانش‌آموز سال دوم ریاضی فیزیک از ساری (دبیرستان دکتر بهشتی)

۷ـ آقای عبداله شعبانی از مراغه

۸ـ آقای امیرمنصور خان محمد از تهران

۹ـ آقای رضا سالم از دبیرستان کمال تهران

۱۰ـ آقای علی مسگری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از گرگان (دبیرستان شهید بهشتی)

۱۱ـ آقای رضا بردباری دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از شیراز

۱۲ـ آقای محمد بینشمازدانش‌آموزسال دوم ریاضی‌فیزیک از تهران

۱۳ـ آقای علی مقدم دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقهٔ ۱۱ تهران (دبیرستان شهید مفتح)

۱۴ـ آقای علی نخودچی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک ازمشهد (دبیرستان شهید جباریان)

۱۵ـ آقای علی نصیری امینی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از منطقه ۷ تهران (دبیرستان صالح)

۱۶ـ آقای میثم نصیری دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۷ـ آقای محمدرضا ضرابی از تهران

۱۸ـ آقای شبگیر حسنی دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از تهران

۱۹ـ آقای عبداله تهقایی (آرش) دانش‌آموز سال سوم ریاضی فیزیک از آمل

۲۰ـ آقای علی قاسمی دانش‌آموز سال اول از مشهد مقدس

۲۱ـ آقایان علی‌هزاری و علی‌جلوه‌دار سال سوم ریاضی از تهران

در پیرامون منظومهٔ شمسی

(یک معمای شگفت‌انگیز)

(دنبالهٔ مطلب شمارهٔ قبل)

● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

توجه داشته باشید که تعداد حروف اسمهای خانه های خاکستری فرد و تعداد حروف اسمهای خانه‌های سفید زوج است. ریاضیدانان می‌گویند که این دو مجموعه خانه، همراه با اسمهای مربوط دارای همپایگی متقابل‌اند؛ بدین معنی که یکی همپایگی زوج دارد و دیگری همپایگی فرد. هربار که سکه‌ای به خانهٔ مجاور حرکت می‌کند، همپایگی آن تغییر می‌یابد.

چنانچه کار گذاشتن سکهٔ پنج ریالی روی ماتریس را از هریک از خانه‌ها شروع و آن‌را به تعداد حروف همان خانه جابه‌جا کنید، بی‌تردید سکه سرانجام روی یک خانهٔ سفید قرار خواهد گرفت. سبب آن است که حالا باید سکه همپایگی زوج خود را حفظ کند و همهٔ خانه‌های خاکستری خالی بماند. از این‌رو می‌توان با اطمینان خاطر از بازیکن خواست که سکهٔ دو ریالی را روی خانهٔ خاکستری Venus بگذارد.

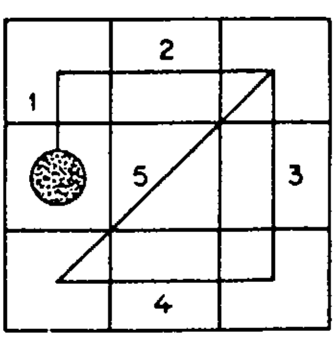
از این مرحله به بعد، سکهٔ پنج ریالی در هر دور از گردش خود به تعداد دفعات فرد حرکت خواهد کرد. از این‌رو تفاوت نمی کند که در هر مرحله هفت بار (یا هر تعداد فرد بار)، به تعداد حروف s-e-v-e-n یا به تعداد حروف هر کلمهٔ دارای حرفهای فرد حرکت کند. حتی اگر تعداد حرفهای تشکیل دهندهٔ نام یکی از ناظران حاضر در بازی فرد باشد، می‌توان به هنگام جابه‌جایی سکه نام او را بر زبان آورد. هربار که سکهٔ پنج ریالی به خانهٔ جدید منتقل می‌شود، همپایگی آن تغییر می‌یابد.

این امر به شما امکان می‌دهد که یک سکهٔ دوریالی را چنان هدایت کنید که در یک خانهٔ خالی دارای همپایگی متقابل با همپایگی سکهٔ پنج ریالی قرار گیرد. پس از هشت حرکت، تنها خانهٔ خالی، خانهٔ Moon خواهد بود و سکهٔ پنج ریالی در خانهٔ Pluto جای خواهد داشت.

اگر بخواهید حقهٔ بازی را برای رسیدن با یک نتیجهٔ نهایی دیگر تکرار کنید، باید یک مجموعه دستورهای جدید بیندیشید. البته با دادن دستورهای مناسب می‌توانید ترتیبی بدهید که سکهٔ پنج ریالی سرانجام در یکی از خانه‌های خاکستری بنشیند. با این حال، دقت کنید که کار حذف خانه‌ها به ترتیبی صورت گیرد که «سفینهٔ فضایی» در حال حرکت، همواره به همهٔ خانه‌های اشغال نشدهٔ باقیمانده دسترسی داشته باشد.

حال به یک مسألهٔ ساده، اما کوچک و اندکی دشوار توجه کنید که به نوع دیگری از حرکت سکه روی ماتریس مربوط می‌شود.

سکه ای را بر خانهٔ Mars بگذارید. سپس با ترسیم یک رشته پاره‌خطهای پیوسته و مستقیم (اندازهٔ طول پاره‌خطها و تعیین جهت حرکت خطها در راستای افقی، عمودی یا قطری دلخواه است.) و انتقال سکه در امتداد آنها ترتیبی بدهید که سکه با کمترین تعداد حرکت از هر هشت خانهٔ دیگر عبور کند. برای مثال، در تصویر می‌بینید که این کار با پنج حرکت امکانپذیر می‌شود. شاید باور نکنید که در صورت داشتن دقت نظر و به کار انداختن فکر خود خواهید توانست آن‌را با چهار حرکت انجام دهید. دشواری حل این مسأله برای اکثر مردم دیوانه کننده است، اما برای یافتن راه حل، نهایت کوشش خود را بکنید و با مراجعه نکردن به «قسمت سوم پاسخها» لذّت اندیشیدن دربارهٔ این معمای ظریف ترکیباتی را از بین نبرید. به یاد داشته باشید که سکه را یک نقطه فرض می‌کنیم و مسیر حرکت را چنان تنظیم می‌کنیم که سکه از مرکز هر یک از خانه‌های مورد نظر بگذرد.



بــردارهــا

(قسمت چهارم)

(ریاضی ۴ نظام جدید و ریاضیات جدید دوم ریاضی)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

◄ ضرب برونی (برداری) دو بردار

حاصل‌ضرب خارجی دوبردار غیر صفر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را برداری مانند: $\vec{W}$ تعریف می‌کنیم هرگاه:

۱. راستای $\vec{W}$ برراستای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ عمود باشد.

۲. جهت $\vec{W}$ طوری باشد که کنج $(\vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{W})$ مستقیم باشد.

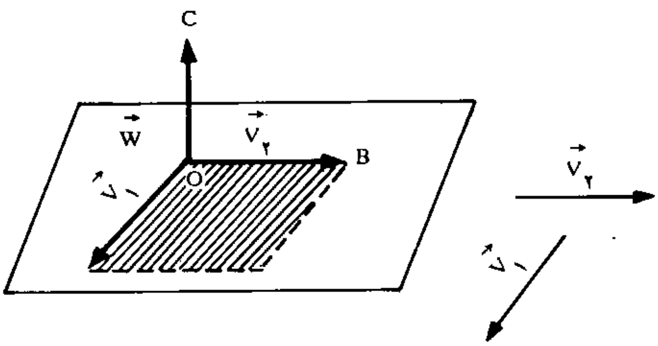
۳. اندازهٔ $\vec{W}$ برابر باشد با:

$$|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin (\vec{V}_1 , \vec{V}_2)|$$

حاصل‌ضرب خارجی دوبردار را حاصل‌ضرب برداری دوبردار نیز نامیده و با یکی از نمادهای $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ یا $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

باتوجه به قسمت (۳) می‌توان گفت اندازهٔ حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مساوی عدد مساحت متوازی الاضلاعی است که روی این دوبردار بنامی‌شود. برای نمایش حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ از نقطهٔ اختیاری O بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را به‌ترتیب مساوی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم، آنگاه از نقطهٔ O خطی عمود برصفحهٔ AOB رسم می‌کنیم و روی این خط بردار $\vec{OC}$ را چنان اختیار می‌کنیم که کنج (O − ABC) یک کنج مستقیم و اندازهٔ بردار $\vec{OC}$ مساوی $|\vec{V}_1|\ |\vec{V}_2|\ \sin (\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$ باشد. بردار $\vec{OC}$ که بدین ترتیب به‌دست می‌آید و آن‌را با $\vec{W}$ نمایش می‌دهیم؛ حاصل‌ضرب برونی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است.



◄ ویژگیهای ضرب برونی دو بردار

بسادگی ثابت می‌شود که حاصل‌ضرب برونی بردارها دارای ویژگیهای زیر است:

(توجه کنید: $\sin (-\alpha) = - \sin \alpha$)

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

$$\forall a \in IR : (a \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (a \vec{V}_2) = a (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{V}_1 = \vec{0} \vee \vec{V}_2 = \vec{0} \vee \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2)$$

◄ حاصل‌ضرب برونی دو بردار برحسب تصویرهای آنها

در دستگاه مختصات قائم o.xyz بردارهای $\vec{V}_1 (x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{V}_2 (x_2 , y_2 , z_2)$ را درنظر می‌گیریم؛ دراین‌صورت داریم:

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

و بنابراین ضرب برونی دو بردار چنین می‌شود:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

اما باتوجه به تعریف ضرب برونی بردارها می‌توان نوشت:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

و $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$

و $\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}$

و $\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$

بنابراین پس از ضرب برونی و استفاده از تساویهای اخیر و اختصار لازم داریم:

$$V_1 \wedge V_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)k$$

ویا: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

که تصویرهای حاصل‌ضرب خارجی دوبردار مفروض برمحورهای قائم مختصات چنین است:

$$X = y_1z_2 - z_1y_2 \text{ و } Y = z_1x_2 - x_1z_2 \text{ و } Z = x_1y_2 - x_2y_1$$

درنتیجه اندازهٔ حاصل‌ضرب برونی دو بردار برحسب تصویرهای آن بردارها به صورت زیر است: $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

برای سادگی می‌توان حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را به‌صورت زیر نیز نشان داد:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

مثال ۱: اندازهٔ بردار $\vec{V} = 2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2$ را بافرض آن که $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2) = \frac{\pi}{6}$ باشد، حساب کنید.

حل:

$$|\vec{V}| = |2\vec{V}_1 \wedge 2\vec{V}_2| = |4\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = 4|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$$|\vec{V}| = 4 \times 4 \times 3 \sin\frac{\pi}{6} = 24 \Rightarrow |\vec{V}| = 24$$

مثال ۲: اگر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ دو بردار مفروض، و $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ و $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2) = \frac{\pi}{4}$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{V} = 3\vec{V}_1 \wedge 4\vec{V}_2$ را حساب کنید.

حل:

$$|\vec{V}| = |3\vec{V}_1 \wedge 4\vec{V}_2| = 3|\vec{V}_1| . 4|\vec{V}_2| \sin\frac{\pi}{4} = 72\sqrt{2}$$

مثال ۳: بردارهای (۳- و ۲ و ۱-) $\vec{V}_1$ و (۱ و ۳- و ۱) $\vec{V}_2$ مفروضند، تصاویر $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ را برمحورهای مختصات و همچنین اندازهٔ بردار $\vec{V}$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 9)\vec{i}$$

$$+ (1 - 3)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} \Rightarrow \vec{V} = -7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow X = -7 \text{ و } Y = -2 \text{ و } Z = 1$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

مثال ۴: دو بردار $\vec{V}_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ مفروضند، بردارهای یکه‌ای همراستا با $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$، پیدا کنید.

حل: داریم:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (-2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$$
$$= 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

اگر $\vec{U}_1$ برداریکه‌ای همراستا با $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\vec{U}_1 = \pm \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{|\vec{V}_1 + \vec{V}_2|}$$

و چون:

$$|\vec V_۱ + \vec V_۲| = \sqrt{۹+۳۶+۴} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

پس:

$$\vec U_۱ = \pm \frac{۱}{۷}(۳\vec i - ۶\vec j + ۲\vec k)$$

همچنین:

$$\vec V_۱ \wedge \vec V_۲ = (۵\vec i - ۲\vec j + ۳\vec k) \wedge (-۲\vec i - ۴\vec j - \vec k)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ ۵ & -۲ & ۳ \\ -۲ & -۴ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= (۲+۱۲)\,\vec i - (-۵+۶)\,\vec j + (-۲۰-۴)\,\vec k$$

$$= ۱۴\,\vec i - \vec j - ۲۴\,\vec k$$

به‌طریق مشابه اگر $\vec U_۲$ برداریکه‌ای همراستا با $\vec V_۱ \wedge \vec V_۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$\vec U_۲ = \pm \frac{\vec V_۱ \wedge \vec V_۲}{|\vec V_۱ \wedge \vec V_۲|}$$

و چون:

$$|\vec V_۱ \wedge \vec V_۲| = \sqrt{۱۴^۲+۱+۲۴^۲} = \sqrt{۱۹۶+۱+۵۷۶} = \sqrt{۷۷۳}$$

پس:

$$\vec U_۲ = \pm \frac{\sqrt{۷۷۳}}{۷۷۳}(۱۴\vec i - \vec j - ۲۴\vec k)$$

مثال ۵: دو بردار $\vec a = ۲\vec i - \vec j + \vec k$ و $\vec b = ۳\vec i + ۴\vec j - ۲\vec k$ مفروضند. برداری را به‌دست آورید که برهر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ عمود بوده و قدر مطلق آن برابر $\sqrt{۲۹}$ باشد.

حل: بردار مطلوب $\vec C$ به‌صورت زیر است:

$$\vec C = \lambda(\vec a \wedge \vec b)$$

اما داریم:

$$\vec a \wedge \vec b = (۲\vec i - \vec j + \vec k) \wedge (۳\vec i + ۴\vec j - ۲\vec k)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{vmatrix} = (۲-۴)\vec i - (-۴-۳)\vec j + (۸+۳)\vec k$$

$$= -۲\vec i + ۷\vec j + ۱۱\vec k$$

پس:

$$|\vec C| = |\lambda|.|\vec a \wedge \vec b| = |\lambda|\sqrt{۴+۴۹+۱۲۱} = |\lambda|\sqrt{۱۷۴}$$

بنابراین داریم:

$$|\lambda|\sqrt{۱۷۴} = \sqrt{۲۹} \Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{۲۹}}{\sqrt{۱۷۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{۶}}{۶} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

پس مسأله دارای دو جواب به‌صورت زیر است:

$$\vec C = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۶}(-۲\vec i + ۷\vec j + ۱۱\vec k)$$

مثال ٦: سه بردار $\vec a = \vec i - \vec j$ و $\vec b = \vec j + \vec k$ و $\vec c = \vec i - \vec k$ مفروضند، مقدار بردار $(\vec a \wedge \vec b).(\vec b.\vec c)$ را حساب کنید.

حل: داریم:

$$\vec a \wedge \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱)\vec i - (۱)\vec j + (۱)\vec k$$

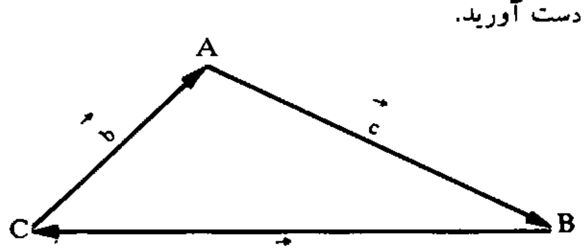
$$\vec b.\vec c = (۰) + (۰) + (-۱) = -۱$$

$$\Rightarrow (\vec a \wedge \vec b).(\vec b.\vec c) = (-\vec i - \vec j + \vec k)(-۱)$$

$$\Rightarrow (\vec a \wedge \vec b).(\vec b.\vec c) = \vec i + \vec j - \vec k$$

$$\Rightarrow |(\vec a \wedge \vec b).(\vec b.\vec c)| = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$$

مثال ۷: در سه‌بر ABC فرمول: $\frac{a}{\sin \hat A} = \frac{b}{\sin \hat B} = \frac{c}{\sin \hat C}$ را به‌دست آورید.



حل: باتوجه به شکل داریم:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \qquad (1)$$

اگرطرفین رابطهٔ (۱) رایکبار در $\vec{AB}$ و باردیگردر $\vec{BC}$ ضرب برداری کنیم، خواهیم داشت:

$$\vec{AB}\wedge(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}) = 0 \text{ یا } \vec{AB}\wedge\vec{BC}+\vec{AB}\wedge\vec{CA}=\vec{0} \qquad (2)$$

و همچنین:

$$\vec{BC}\wedge(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}) = \vec{0} \text{ یا } \vec{BC}\wedge\vec{AB}+\vec{BC}\wedge\vec{CA}=\vec{0} \qquad (3)$$

که از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\vec{AB}\wedge\vec{BC} = -(\vec{AB}\wedge\vec{CA}) = \vec{CA}\wedge\vec{AB} \qquad (4)$$

$$\vec{BC}\wedge\vec{CA} = -(\vec{BC}\wedge\vec{AB}) = \vec{AB}\wedge\vec{BC} \qquad (5)$$

و باتوجه به روابط (۴) و (۵) می‌توان نوشت:

$$\vec{AB}\wedge\vec{BC} = \vec{BC}\wedge\vec{CA} = \vec{CA}\wedge\vec{AB}$$

و یا:

$$\vec{BC}\wedge\vec{BA} = \vec{CA}\wedge\vec{CB} = \vec{AB}\wedge\vec{AC}$$

پس داریم:

$$|\vec{BC}\wedge\vec{BA}| = |\vec{CA}\wedge\vec{CB}| = |\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$$

و باتوجه به زاویه‌های بین بردارها که همه از π کوچکترند نتیجه می‌شود:

$$a \,.\, c \sin\hat{B} = b \,.\, a \sin\hat{C} = c \,.\, b \sin\hat{A}$$

که از آن فرمول: $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۸: مساحت سه‌بری که به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ A و B و C پدید می‌آید را به‌دست آورید، درصورتی که داشته‌باشیم:

$$\vec{OA}\,(1,-1,1),\ \vec{OB}\,(-1,2,1),\ \vec{OC}\,(1,-2,-1)$$

حل: داریم:

$$S = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|$$

و یا:

$$S = \frac{1}{4}\,(\vec{AB}\wedge\vec{AC})^2$$

از طرفی، می‌توان نوشت:

$$\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA} = (-1-1)\vec{i} + (2-(-1))\vec{j} + (1-1)\vec{k}$$
$$= -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC}-\vec{OA} = (1-1)\vec{i} + (-2-(-1))\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$$
$$= -\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-6)\,\vec{i} - (4)\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{AB}\wedge\vec{AC} = -6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}((-6)^2 + (-4)^2 + (2)^2) = \frac{1}{4}(36 + 16 + 4)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{56}{4} \Rightarrow S^2 = 14 \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{14}}$$

تمرین: اگر برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داشته باشیم:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

ثابت کنید:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \vec{c}\wedge\vec{a}$$

(راهنمایی: حل مثال ۷ را مشاهده کنید.)

تمرین: نقاط L و M و N به‌ترتیب روی اضلاع AB و BC و CA از سه‌بر ABC داده شده‌اند و داریم:

$$\vec{AL} = \frac{1}{5}\vec{AB},\ \vec{BM} = \frac{1}{5}\vec{BC},\ \vec{CN} = \frac{1}{5}\vec{CA}$$

اگر مساحت سه بر ABC را با S و مساحت سه بر LMN را با S′ نشان دهیم نسبت $\dfrac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

(راهنمایی: از حل مثال ۸ و تساویهای زیر استفاده کنید:

$$\vec{LM} = \vec{LB} + \vec{BM} = \frac{4}{5}\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC}$$

$$\vec{LN} = \vec{LA} + \vec{AN} = -\frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC}$$

$$(\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \vec{BC}\wedge\vec{BA} = \vec{CA}\wedge\vec{CB}$$

➤ رابطهٔ بین حاصلضربهای درونی و برونی دو بردار

اگر زاویهٔ بین دو بردار داده شدهٔ $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را φ بگیریم، برابریهای زیر را داریم:

$$\vec{V}_1\ (x_1, y_1, z_1)\ ,\ \vec{V}_2\ (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos\varphi \qquad \text{و}$$

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot |\sin\varphi|$$

و در این‌جا خواهیم داشت:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = |\vec{V}_1|^2 \cdot |\vec{V}_2|^2 = (\vec{V}_1^{\,2}) \cdot (\vec{V}_2^{\,2})$$

و یا:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (\vec{V}_1)^2 \cdot (\vec{V}_2)^2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)^2$$

که بادرنظر گرفتن مؤلفه‌های دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$$

که به اتحاد لاگرانژ معروف است.

مثال ۹: بافرض $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = ۳$ و $|\vec{V}_1| = ۱$ و $|\vec{V}_2| = ۵$، مقدار $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$ را حساب کنید.

حل: باتوجه به اتحاد لاگرانژ داریم:

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)^2 = (۱)^2\ (۵)^2 - (۳)^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow$$

$$|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| = ۴$$

تصویر (2) متعامد یک بردار برروی برداری دیگر

تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ روی بردار $\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ را بانماد $PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1}$ نمایش می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

درحقیقت عدد بالا تصویر متعامد $\vec{V}_1$ روی محوری است که بردار یکهٔ آن $\dfrac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ است.

عبارت $PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1}$ برحسب مؤلفه‌های دو بردار چنین است:

$$PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

مثال: تصویر متعامد بردار $\vec{V}_1 = ۳\vec{i} + ۴\vec{j} - \vec{k}$ را روی بردار $\vec{V}_2 = ۷\vec{i} + ۴\vec{j} - ۴\vec{k}$ پیدا کنید.

حل: داریم:

$$PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|} =$$

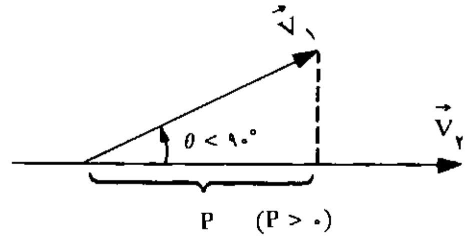
$$\frac{۳(۷) + ۴(۴) + (-۱)(-۴)}{\sqrt{۷^2 + ۴^2 + (-۴)^2}} = \frac{۴۱}{\sqrt{۸۱}} = \frac{۴۱}{۹}$$

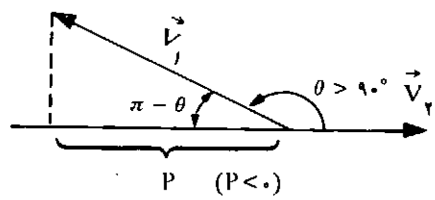
$$\Rightarrow \boxed{PROJ_{\vec{V}_2}^{\vec{V}_1} = \frac{۴۱}{۹}}$$

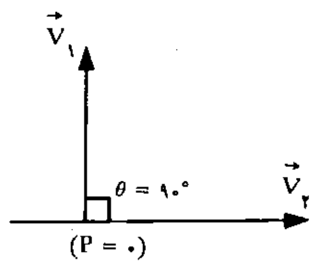
لازم است توضیح دهیم که منظور از تصویر (مؤلفه) بردار $\vec{V}_1$ بر بردار غیرصفر $\vec{V}_2$ و یا در سوی بردار غیر صفر $\vec{V}_2$؛ عددی است

2- project

مانند: $P = |\vec{V}_1| \cos\theta$ که در آن θ زاویهٔ بین $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است. همانطور که در شکلهای زیر مشاهده می‌شود، P می‌تواند عددی مثبت، منفی یا مساوی صفر باشد:







باتوجه به شکلهای بالا می‌توان نوشت:

$$P = |\vec{V}_1| \cos\theta$$

از طرفی داریم:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\ |\vec{V}_2| \cos\theta$$

ویا:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1|\ |\vec{V}_2|}$$

پس خواهیم داشت:

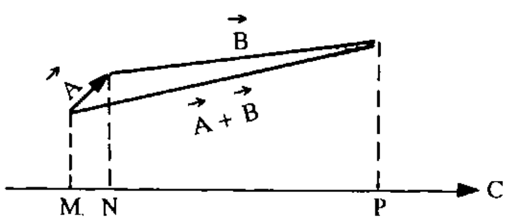
$$p = |\vec{V}_1| \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1|\ |\vec{V}_2|} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

و یا:

$$\text{PROJ}_{\vec{V}_2} \vec{V}_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$$

بنابراین برای یافتن مؤلفهٔ $\vec{V}_1$ در سوی $\vec{V}_2$ کافی است بردار $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را در $\vec{V}_1$ ضرب عددی (اسکالر) کنیم. $\frac{\vec{V}_2}{|\vec{V}_2|}$ را که برداری است به‌طول واحد و در سوی $\vec{V}_2$، بردار سوی $\vec{V}_2$ می‌نامند.

تمرین: باتوجه به شکل زیر:



ثابت کنید:

$$\frac{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|}$$

(**راهنمایی**: از تساوی $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ استفاده کنید.)

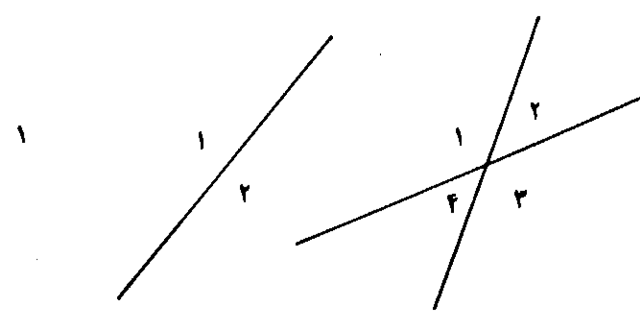
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۳)

خطوط واقع در صفحه

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور — از: Concrete Mathematics by Knot

با n برش مستقیم کارد پیتزابری بر یک پیتزا، شخص می‌تواند چند تکه پیتزا به دست آورد؟ یا به صورت عالمانه‌تر آن: بیشترین تعداد، L_n، نواحی تعریف شده با n خط واقع در صفحه چیست؟ این مسأله ابتدا در ۱۸۲۶، توسط یاکوب اشتینر[1]، ریاضیدان سویسی حل شد.

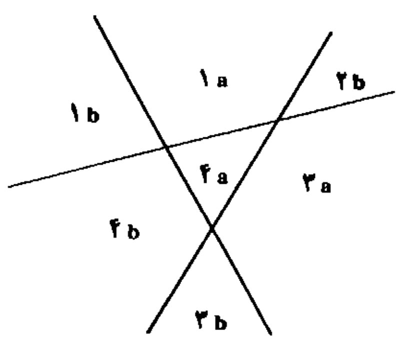
حل: باز هم کار را با توجه به حالات ساده، با شروع از ساده‌ترین آنها، آغاز می‌کنیم. صفحهٔ بدون خط یک ناحیه دارد؛ با یک خط دو ناحیه دارد؛ و با دو خط دارای چهار ناحیه است:



$L_0 = 1$ $L_1 = 2$ $L_2 = 4$

(هر خط از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد.)

خوب، بیندیشیم، البته که $L_n = 2^n$! افزایش خطی تازه، خیلی ساده، تعداد نواحی را دو برابر می‌کند. متأسفانه غلط رفته‌ایم. درصورتی که خط n ام هر یک از نواحی قدیم را به دو ناحیه تقسیم کند به دو برابر شدن نواحی می‌رسیم؛ محققاً، خط دوم می‌تواند یک ناحیهٔ قدیمی را، از آنجا که هر ناحیهٔ قدیمی محدب است، حداکثر به دو ناحیه تقسیم کند. (یک خط مستقیم می‌تواند ناحیه‌ای محدب را به حداکثر دو ناحیهٔ جدید، که خود نیز محدبند تقسیم کند.) اما هنگامی که خط سوم را بیفزاییم (خط ضخیم واقع در ترسیم زیر) بزودی درخواهیم یافت که، بی‌توجه به چگونگی قرار گرفتن دو خط اول، می‌تواند حداکثر سه ناحیهٔ قدیمی را تقسیم کند:



به این ترتیب $L_3 = 4 + 3 = 7$ بهترین هنری است که از ما سر می‌زند.

و پس از اندکی تأمل تعمیم مناسب را درمی‌یابیم. خط n ام (به ازای $n > 0$) تعداد نواحی را به اندازهٔ k افزایش می‌دهد اگر و تنها اگر k ناحیهٔ قدیمی را تقسیم کند، و k ناحیه قدیمی را تقسیم می‌کند اگر و تنها اگر با خطوط پیشین در $k - 1$ محل مختلف برخورد کند. دو خط می‌توانند حداکثر در یک نقطه تلاقی کنند. بنابراین خط تازه می‌تواند $n - 1$ خط قدیم را حداکثر در $n - 1$ نقطهٔ متفاوت قطع کند، و باید داشته باشیم $k \le n$. به این ترتیب حد زبرینمان را مشخص کرده‌ایم.

$$L_n \le L_{n-1} + n \qquad \text{به‌ازای } n > 0$$

از این گذشته، با استفاده از استقرا، بسادگی نشان داده می‌شود که می‌توان به تساوی واقع در این فرمول رسید. به این ترتیب که خط n ام را به چنان طریقی مستقر می‌کنیم که با هیچ یک از خطوط دیگر موازی نباشد (و درنتیجه جمیع آنها را قطع کند)، و چنان که از هیچ یک از نقاط تقاطع موجود نگذرد (و درنتیجه جمیع آنها را در مواقع مختلف

قطع کند)، بنابراین فرمول بازگشتی مورد نظر عبارت است از:

$$L_0 = 1 \;;$$

$$L_n = L_{n-1} + n \qquad \text{به‌ازای } n > 0 \qquad (1.1)$$

مقادیر مشخص L_1، L_2 و L_3 در این مورد به‌طور کامل بررسی شده‌اند و بنابراین آنها را به کار می‌گیریم.

اکنون به جوابی بسته‌ــ صورت نیاز داریم. در این مورد می‌توانیم بار دیگر به بازیچهٔ گمانه‌زنی بپردازیم، اما ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۱، ۱۶، ... آشنا به نظر نمی‌رسند؛ بنابراین روشی دیگر در پیش می‌گیریم. اغلب یک فرمول بازگشتی را با «فصل کردن» یا «باز کردن» آن به طریق زیر، یعنی از ابتدا تا انتها، درک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\;\;\vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + S_n \qquad \text{با} \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر، L_n یکی بیش از S_n مجموع n عدد صحیح و مثبت اولیه است.

اندازهٔ S_n گاه‌گاه دیدار می‌نماید، و بنابراین ارزش این را دارد که جدول مقادیر اولیهٔ آن را تشکیل دهیم. در این صورت می‌توانیم چنین اعدادی را، چون بار دیگر به آنها برخورد کنیم، بآسانی به‌جا بیاوریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
S_n	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	۷۸	۹۱	۱۰۵

این مقادیر به *اعداد مثلثی*[۲] نیز موسومند، زیرا S_n تعداد سنجاقهای ته‌گرد واقع در یک جدول n سطری مثلث شکل است. به‌طور مثال، جدول چهار سطری معمولی ∴∵ $S_4 = 10$ سنجاق دارد.

در محاسبهٔ S_n می‌توانیم از حیله‌ای که، بنا به گزارشها، گوس در ۱۷۸۶، هنگامی که نه ساله بوده به‌کار برده است، استفاده کنیم:

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ +S_n = & n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

در این مورد صرفاً S_n را به وارونش می‌افزاییم، و به این ترتیب جمع هر یک از n ستون واقع در سمت راست، $n+1$ می‌شود. و با ساده کردن،

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{به‌ازای } n \ge 0 \qquad (2.1)$$

بسیار خوب، به جوابمان رسیدیم:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \qquad \text{به‌ازای } n \ge 0 \qquad (3.1)$$

به‌عنوان متخصص، ممکن است که از این استخراج رضایت حاصل کرده باشیم و آن را اثبات در نظر بگیریم، گرچه هنگامی که عمل بازکردن و برگرداندن را انجام می‌دادیم کمی سهل‌انگاری کرده‌ایم. اما دانشجویان باید مبناهای دقیقتری را درنظر بگیرند؛ بنابراین بد نیست که با استفاده از استقرا اثبات دقیقی را بنا کنیم. در این صورت مرحلهٔ استقرائی کلیدی مورد نیاز عبارت است از:

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\tfrac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1$$

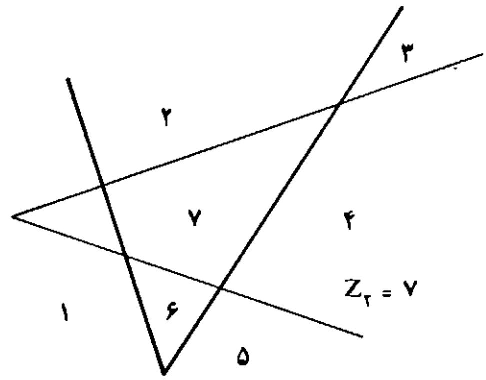
اکنون شکی در مورد بستهٔ (۳.۱) وجود ندارد.

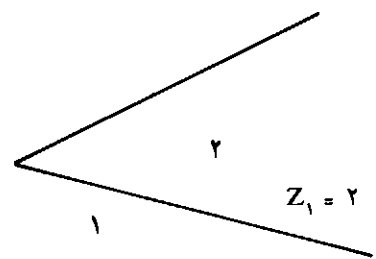
درضمن در مورد «صور بسته»، بدون این‌که مقصودمان را از معنی آن صریحاً بیان کرده باشیم، صحبت کرده‌ایم. معمولاً معنی آن تا اندازه‌ای واضح است. بازگشتیهایی چون (۱.۱) درصورت بسته نیستندــ کمیتی را برحسب خودش بیان می‌کنند؛ اما پاسخهایی چون (۳.۱) هستند. مجموعهایی چون $1+2+\ldots+n$ درصورت بسته نیستندــ آنها با به‌کار بردن «...» کلک می‌زنند؛ اما عباراتی چون $n(n+1)/2$ هستند. می‌توانیم تعریفی تقریبی به‌صورت زیر بدهیم: عبارتی در مورد مقدار $f(n)$ درصورت بسته است اگر بتوانیم آن را حداکثر با استفاده از تعداد ثابتی از اعمال استاندارد «خوش تعریف[۳]»، مستقل از n محاسبه کنیم. به‌عنوان نمونه، $2^n - 1$ و $n(n+1)/2$ صور بسته‌اند زیرا تنها شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، نما، در طرقی صریحند.

تعداد کل صور بستهٔ ساده محدود است، و بازگشتیهایی موجودند که صور بستهٔ ساده ندارند. هنگامی که چنین بازگشتیهایی، به‌علت این که مکرر رخ می‌دهند، مهم جلوه کنند، اعمال جدیدی به مقدوراتمان می‌افزاییم؛ این‌کار می‌تواند به مقدار زیادی حوزهٔ مسایل قابل حل در صورت بستهٔ «ساده» را توسیع دهد. به‌عنوان مثال، ثابت شده است که حاصلضرب n عدد صحیح اولیه، $n!$، آن‌قدر اهمیت دارد که اکنون آن را عملی مبنایی درنظر بگیریم. بنابراین فرمول «$n!$» در صورت بسته است، گرچه معادلش «$1.2.\ldots.n$» نیست.

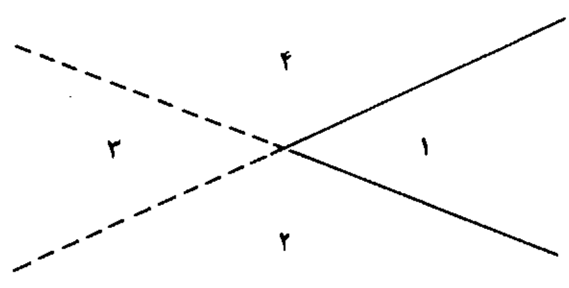
و اینک، تغییر مختصری در مسألهٔ خطوط واقع در صفحه: فرض می‌کنیم که به‌جای خطوط مستقیم از خطوط خمیده، هر یک شامل یک «پیچ»، استفاده کنیم. در این صورت، Z_n، بیشترین تعداد نواحی مشخص با n خط از چنین خطوط خمیده‌ای واقع در صفحه چیست؟

ممکن است انتظار داشته باشیم که بزرگی Z_n دو برابر L_n، یا شاید سه برابر آن باشد. بررسی می‌کنیم:





از حالات سادهٔ فوق، و بعد از پاره‌ای تأمل، درمی‌یابیم که هر خط خمیده مانند دو خط مستقیم است جز اینکه چون «دو» خط مورد بحث از نقطهٔ تقاطعشان به بعد امتداد نمی‌یابند ناحیه‌ها از بین می‌روند.



نواحی ۲، ۳ و ۴ متمایز با دو خط، چون خط خمیده‌ای موجود باشد به ناحیه‌ای منفرد تبدیل می‌شوند، و به این ترتیب، دو ناحیه را از دست می‌دهیم. اما، اگر کارها را به درستی ترتیب دهیم ــ نقطهٔ پیچی باید «ماورای» تقاطعات با خطوط دیگر قرار گیرد ــ کل زیانمان همین می‌شود؛ یعنی، به‌ازای هر خط تنها دو ناحیه را از دست می‌دهیم. به‌این ترتیب:

$$Z_n = L_{2n} - 2n = 2n(2n+1)/2 + 1 - 2n$$

$$= 2n^2 - n + 1 \qquad n \geq 0 \text{ به‌ازای } \qquad (۴.۱)$$

با مقایسهٔ صور بستهٔ (۳.۱) و (۴.۱)، درمی‌یابیم که به‌ازای n های بزرگ،

$$L_n \sim \frac{1}{2}n^2$$
$$Z_n \sim 2n^2$$

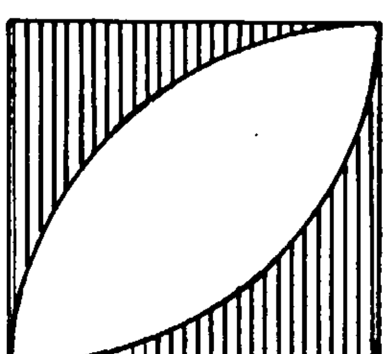
و به این ترتیب با خطوط خمیده چهار برابر تعدادی که با خطوط مستقیم ناحیه به‌دست می‌آید ناحیه حاصل می‌کنیم.

یادداشتها:

1. Jacob Steiner
2. Triangular numbers
3. Well - known

تفریح اندیشه ۳

کمانهایی که در شکل مشاهده می‌کنید، هر یک ربعی از یک دایره هستند. مساحت سطح هاشور خورده را بیابید.



S

جواب در صفحهٔ ۸۸

صورت قطبی (مثلثاتی) و نمایش هندسی اعداد مختلط

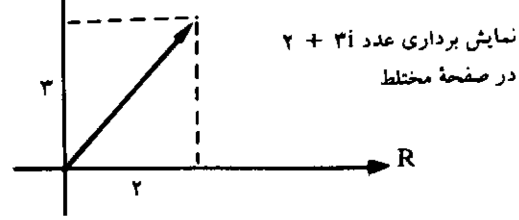
جبر و احتمال سوّم ریاضی نظام جدید

● روح‌الله جهانی‌پور

۲§. نمایش مثلثاتی و تعبیر هندسی

دیدیم که هر عدد مختلط را می‌توان به صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی نشان داد. از جبر دبیرستانی می‌دانیم که بین نقاط صفحهٔ دکارتی و زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک برقرار است؛ یعنی به ازای هر زوج از این نوع یک نقطه از صفحهٔ دکارتی و به ازای هر نقطه زوجی از اعداد حقیقی را به دست می‌آوریم. بنابراین اعداد مختلط را می‌توانیم برروی صفحه‌ای موسوم به صفحهٔ مختلط نشان دهیم. این صفحه همان صفحهٔ دکارتی IR^2 است منتها به جای محور x، محور حقیقی و به جای محور y، محور موهومی را داریم. ولی تعبیر دیگری نیز از نقاط صفحه یا زوج مرتبها آموخته‌ایم و آن این‌که هر زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش یک بردار است، برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطهٔ متناظر با آن زوج مرتب در صفحه است. بنابراین مثلاً عدد مختلط ۳i + ۲ را که متناظر با زوج مرتب (۳ و ۲) است را می‌توان با برداری که ابتدای آن‌مبدأ (۰ و ۰) وانتهای آن‌نقطهٔ (۳ و ۲)است، نشان داد. (شکل ۱)

شکل (۱)



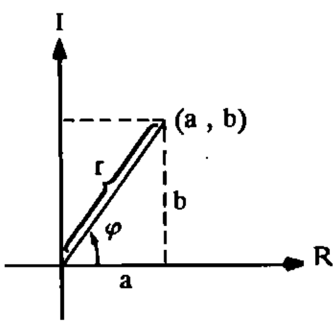
حال فرض کنید $z = (a , b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، طول و عرض نقطهٔ متناظر با این عدد مختلط در صفحه به ترتیب a و b می‌باشند. برداری را که مبدأ را به (a , b) متصل می‌کند رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم φ زاویهٔ بین این بردار و جهت مثبت محور حقیقی در جهت مثلثاتی، یعنی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول بردار مذکور به راحتی به دست می‌آید و برابر است با $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. لذا تعبیر هندسی قدر مطلق عدد مختلط z همان طول بردار نمایش این عدد در صفحهٔ مختلط است، به کمک روابط هندسی داریم :

$$a = r\cos\varphi \quad \text{و} \quad b = r\sin\varphi$$

لذا z را می‌توان به این صورت نشان داد :

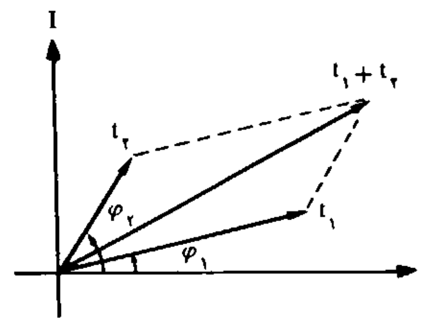
$$t = a + bi = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

شکل (۲)



این شکل نمایش عددهای مختلط را نمایش مثلثاتی می‌نامیم. با این طرز نماش اعداد مختلط یعنی به صورت بردار در صفحه، جمع دو عدد مختلط به صورت جمع برداری دو بردار درمی‌آید و برای به دست آوردن مجموع دو عدد مختلط می‌توان از قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع دو بردار استفاده نمود. این روش در شکل ۳ نشان داده شده است. کافی است ابتدای بردار دوم را بر انتهای بردار اول منطبق نموده، از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم متصل کنیم. بردار حاصل مجموع دو عدد مختلط مفروض را به دست می‌دهد.

شکل (۳)



برای عدد مختلط $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

زاویهٔ φ را آرگومان یا آوند z می‌نامیم و با $\varphi = \operatorname{Arg} z$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که با قرار دادن فوق مبنی بر این‌که φ زاویهٔ بردار z با قسمت مثبت محور حقیقی در جهت مثلثاتی است، داریم $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ و آن را زاویهٔ اصلی یا آرگومان اصلی z می‌نامیم.

حال ببینیم در این نمایش ضرب و تقسیم دو عدد مختلط به چه صورت درمی‌آیند. گیریم

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

دو عدد مختلط دلخواه با آرگومانهای φ_1 و φ_2 باشند. آنگاه طبق فرمول ضرب دو عدد مختلط داریم:

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\right.$$
$$\left. + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

یعنی؛ آرگومان حاصل ضرب برابر است با مجموع آرگومانهای دو عدد مختلط مفروض و قدر مطلق آن برابر حاصل ضرب قدر مطلقهای z_1 و z_2 است و به این ترتیب مطلبی که قبلاً تحقیق کرده بودیم، مجدداً ثابت می‌شود؛ یعنی:

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

بویژه اگر $z_1 = z_2$، آنگاه $r_1 = r_2$ و $\varphi_1 = \varphi_2$، لذا

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

اگر این مطلب را تعمیم دهیم، براحتی می‌توان به استقرا ثابت کرد که برای هر $n \geq 2$:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

این فرمول به فرمول دو موآور موسوم است.

حال فرض کنید $z \neq 0$ یک عدد مختلط دلخواه و

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

آنگاه

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}(r\cos\varphi\,,\ -r\sin\varphi)$$
$$= \frac{1}{r}(\cos\varphi\,,\ -i\sin\varphi)$$

بنابراین برای z_1 و z_2 فوق داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\right.$$
$$\left. + i(-\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

تبصرهٔ ۱: گفتیم که $\operatorname{Arg} z$ یعنی؛ آرگومان اصلی z بین ۰ و 2π است. لیکن می‌دانیم که اگر برداری را به اندازهٔ 2π رادیان یا به طور کلی $2k\pi$ رادیان که $k \in Z$ دوران دهیم بر روی خود منطبق می‌شود و به این ترتیب با دوران هر بردار مختلط آرگومانهای متفاوت آن را به دست می‌آوریم. هر آرگومان دلخواهی از z غیر از آرگومان اصلی آن را با $\arg z$ نشان می‌دهیم. به طور دقیقتر

$$\arg z = \{\varphi : \varphi = \operatorname{Arg} t + 2k\pi\ ;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

نکته، این است که روابط بالا مربوط به z_1z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ برای آرگومانهای دلخواه برقرارند و ممکن است به ازای آرگومان اصلی برقرار نباشند. در واقع داریم:

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

و

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

در این‌جا یک نمادگذاری را معرفی می‌کنیم که هر چند منشأ ریاضی دقیقی دارد لیکن بهتر است فعلاً فقط به صورت یک نماد پذیرفته شود. عبارت $\cos\varphi + i\sin\varphi$ را به صورت $e^{i\varphi}$ نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر عدد مختلط z، داریم:

$$z = re^{i\varphi}\quad,\quad r = |z|\quad,\quad \varphi = \operatorname{Arg} z$$

به این ترتیب روابط ضرب و تقسیم در بالا به این صورت درمی‌آیند:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i\varphi_1}.e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

بنابراین برای این نمایش، قانون نماها برقرار است.

مطلب را با ارائه چند مثال ادامه می‌دهیم.

مثال ۱ :ثابت کنید اگر $z \neq 1$، آنگاه

$$1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

حل : قرار می‌دهیم :

$$S=1+z+z^2+\ldots+z^n$$

حال دو طرف را در z ضرب می‌کنیم :

$$zS=z+z^2+\ldots+z^{n+1}=S+z^{n+1}-1$$

بنابراین :

$$1-z^{n+1}=S(1-z) \Rightarrow S=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

مثال ۲ : فرمولی برای مجموع

$A=1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$ بیابید.

حل : در فرمول مثال ۱ ، قرار می‌دهیم :

$z=\cos\varphi+i\sin\varphi$

و از فرمول دو موآور استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که اگر $\varphi=2k\pi$ ، $k\in Z$، آنگاه $A=n+1$، بنابراین فرض می‌کنیم $\varphi\neq 2k\pi$ یا $z\neq 1$. آنگاه

$$\frac{1-\left(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi\right)}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$1+\sum_{k=1}^{n}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$$

حال بخشهای حقیقی دو طرف را برابر هم قرار می‌دهیم. قسمت حقیقی طرف راست همان A است. بنابراین باید بخش حقیقی طرف چپ را به دست آوریم. اما طرف چپ برابر است با:

$$\frac{1}{2-2\cos\varphi}\{[(1-\cos(n+1)\varphi)+i\sin(n+1)\varphi].$$
$$[(1-\cos\varphi)-i\sin\varphi]\}$$

بنابراین :

$$\mathrm{Re}(\text{چپ})=\frac{1}{2(1-\cos\varphi)}(1-\cos\varphi-\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi)$$

$$=\frac{2}{2\times 2\sin\varphi/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)$$

$$=\frac{-2}{2\sin\varphi/2}2\cos\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi n}{2}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{2\sin\varphi/2}=-\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}}{\sin\varphi/2}$$

مثال ۳ : هر یک از اعداد زیر را به صورت نمایی نشان دهید :

(الف) $a>0$ و $z=a$ ، داریم :

$|z|a \quad , \quad \mathrm{Arg}\, z=0 \Longrightarrow z=ae^{i0}$

(ب) $a<0$ و $z=a$ ، داریم :

$$|z|=-a \quad , \quad \mathrm{Arg} z=\mathrm{Arc}\cos\frac{a}{|z|}=\mathrm{Arc}\cos(-1)=\pi$$

پس : $z=-ae^{\pi i}$.

(ج) $z=1+i$ ، داریم :

$$|z|=\sqrt{2}\,,\ \mathrm{Arg}\, z=\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(د) $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، آنگاه

$$|z|=1 \ , \ \cos\varphi=\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \Longrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

مثال ۴ : ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی $z\neq 0$ داریم :

$$\mathrm{Arg}\frac{1}{z}=\begin{cases}\mathrm{Arg}\, z=0 & z\in\mathbb{R}\,,\ z>0\\ 2\pi-\mathrm{Arg}\, z & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

حل :اگر $z\in\mathbb{R}$ و $z>0$، آنگاه طبق مثال ۳ ، $\mathrm{Arg}\, z=0$ و چون $\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ و $\frac{1}{z}>0$ بنابراین $\mathrm{Arg}\frac{1}{z}=0$. اگر z عدد حقیقی مثبت نباشد، آنگاه

$$0<\mathrm{Arg}\, z<2\pi \quad \text{و} \quad 0<\mathrm{Arg}\frac{1}{z}<2\pi$$

از طرفی

$$\mathrm{Arg}\, z+\mathrm{Arg}\frac{1}{z}\in\arg 1=\{2k\pi \ : \ k\in Z\}$$

بنابراین $k_\circ \in Z$ موجود است که

$$\operatorname{Arg}\frac{۱}{z} = ۲k_\circ\pi - \operatorname{Arg} z$$

اما

$$\circ < \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}\frac{۱}{z} = ۲k_\circ\pi < ۴\pi \Rightarrow k_\circ = ۱$$

بنابراین $\operatorname{Arg}\frac{۱}{z} = ۲\pi - \operatorname{Arg} z$.

۳§. ریشهٔ عددهای مختلط

در مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توانیم ریشهٔ n ام مثبت عددهای حقیقی را گه‌گاه همراه با شرایط اضافی به دست آوریم. مثلاً اگر n زوج باشد، باید x در $\sqrt[n]{x}$ در شرط $x \geq \circ$ صدق کند. در هر صورت ریشه n ام یک عدد دارای این ویژگی است که اگر آن را به توان n برسانیم خود عدد به دست می‌آید. همین ویژگی را می‌توان تعریف توان $\frac{۱}{n}$ یا ریشهٔ n ام عدد مختلط z نیز دانست بنابراین $\sqrt[n]{z}$ یا $z^{\frac{۱}{n}}$ را (البته بین این دو نماد تفاوت ظریفی وجود دارد.) به صورت عدد مختلط w تعریف می‌کنیم، طوری که :

$$w^n = z$$

فرض کنیم :

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

برای یافتن w کافی است ρ و θ را تعیین کنیم. بنابر فرمول دوموآور داریم:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

حال دو عدد مختلط داریم که با هم مساویند، در نتیجه :

$$\rho^n = r \quad و \quad \cos n\theta = \cos\varphi \quad و \quad \sin n\varphi = \sin\varphi$$

از مجموع معادلات فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad r > \circ$$

و

$$n\theta = \varphi + ۲k\pi \quad و \quad k = \circ, ۱, ۲, \ldots, n-۱$$

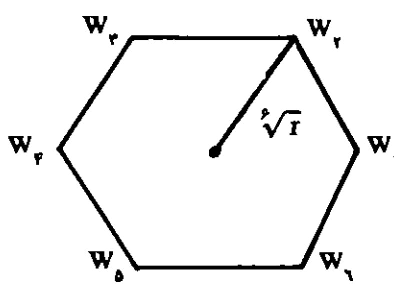
بنابراین تفاوت بسیار عمده‌ای که بین ریشهٔ n ام مختلط با حقیقی وجود دارد این است که هر عدد مختلط، n تا ریشهٔ n ام دارد، که به ازای $k = \circ$ تا $k = n - ۱$ از بالا حاصل می‌شوند و به صورت

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + ۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + ۲k\pi}{n}\right)\right)$$

هستند. اگر بار دیگر به تعبیر هندسی اعداد مختلط به صورت بردار بازگردیم، مشاهده می‌کنیم که این w_k ها بردارهایی با طول ثابت $\sqrt[n]{r}$ و زوایایی هستند که هریک به اندازهٔ ثابت $\frac{۲\pi}{n}$ با هم اختلاف زاویه دارند. به عبارت دیگر نقاط انتهایی این بردارها رؤوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع $\rho = \sqrt[n]{r}$ هستند. به ازای $n = ۶$، این شش ضلعی در شکل ۴ رسم شده است.

(شکل ۴)

ریشه‌های ۶ ام z روی یک ۶ ضلعی منتظم



مثال ۵ : ریشه‌های n ام واحد را به دست آورید.

حل : به ازای $z = ۱$، داریم :

$$r = ۱ \quad و \quad \varphi = \circ$$

بنابراین طبق فرمول فوق داریم :

$$w_k = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n}$$
$$(K = \circ, ۱, ۲, \ldots, n-۱)$$

مثال ۶ : معادلهٔ $z^۳ + ۱ = \circ$ را حل کنید و ریشه‌های آن را به صورت هندسی نمایش دهید.

حل : حل این معادله یعنی یافتن اعداد مختلط z به طوری که

$$z^۳ = -۱$$

یعنی یافتن ریشه‌های سوم عدد ۱- . فرم مثلثاتی ۱- به صورت زیر است:

$$-۱ = \cos\pi + i\sin\pi$$

بنابراین به ازای $r = ۱$ و $\varphi = \pi$ و $n = ۳$ در فرمول ریشهٔ n ام داریم :

$$w_k = \cos\frac{\pi + ۲k\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi + ۲k\pi}{۳} \quad k = \circ, ۱, ۲$$

بنابراین :

$$k=0 \Rightarrow w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1 \Rightarrow w_2=-1$$

$$k=2 \Rightarrow w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

این ریشه‌ها را در شکل ۵ نشان داده‌ایم. اینها رؤوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد هستند.

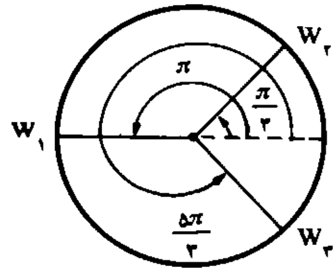
مثال ۷: محاسبه کنید:

(الف) $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

(ب) $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

(ج) $e^{2k\pi i}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1 \qquad k\in Z$

شکل (۵).



مثال ۸: با توجه به این‌که اگر ریشه‌های معادلهٔ چند جمله‌ای

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0=0$$

را به ترتیب $z_1, \ldots, z_n$ بنامیم آنگاه

$z_1+z_2+\ldots+z_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ، ثابت کنید :

(الف) $1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$

(ب) $\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$

حل: ریشه‌های n ام واحد در واقع ریشه‌های معادلهٔ

$$z^n-1=0$$

هستند که برای آن مطابق نمادگذاری بالا داریم :

$$a_{n-1}=0 \quad \text{و} \quad a_n=1$$

از طرفی ریشه‌های nام واحد را قبلاً یافته بودیم. اینها عبارت بودند از:

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=0,1,\ldots,n-1$$

بنابراین مطابق مطلب فوق

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=0$$

یا:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

پس (الف) و (ب) با مساوی صفر قرار دادن دو مجموع فوق به دست می‌آیند.

۴ §. کاربردهای هندسی

مجدداً باز می‌گردیم به تعبیر اعداد مختلط به عنوان نقاط صفحه. این تعبیر ایدهٔ نمایش جبری اشکال هندسی گوناگون توسط روابط متضمن اعداد مختلط را در ذهن تقویت می‌کند. پیش از این قدر مطلق یک عدد مختلط را، فاصلهٔ نقطهٔ نمایش دهندهٔ آن عدد در صفحه تا مبدأ تعریف کردیم. حال اگر $z_1=(a_1,b_1)$ و $z_2=(a_2,b_2)$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$|z_2-z_1|=|(a_2-a_1,\ b_2-b_1)|=\left[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

که همان فرمول آشنای فاصلهٔ دو نقطه در صفحه است. این مطلب اهمیت قدرمطلق را از نظر نمایش جبری مذکور در فوق نشان می‌دهد. مثلاً فرض کنید بخواهیم دایره را به این طریق نشان دهیم. خوب! دایره مجموعهٔ نقاطی است که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت موسوم به مرکز برابر مقدار ثابتی موسوم به شعاع است. اگر این نقطهٔ ثابت را z_0 بنامیم، و شعاع را R آنگاه دایرهٔ C به مرکز z_0 و شعاع R ، عبارت است از:

$$C=\{z\in C:\ |z-z_0|=R\}$$

به عنوان مثال دیگر، می‌خواهیم معادلهٔ بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات را بیابیم. اگر محور اصلی این بیضی محور x ها و z_0 یک کانون آن باشد، $-z_0$ کانون دیگر آن خواهد بود. بنابراین طبق تعریف بیضی، این بیضی دارای معادلهٔ

$$|z-z_0|+|z+z_0|=a=\text{ثابت}$$

است. سعی کنید مثالهای دیگری از این دست را بررسی کنید.

جواب نامه‌ها

آقای فریدون عبدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (کامیاران)

ضمن تشکر از مقالهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مقالات و مسائلی را ارسال کنید که مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان باشد.

☐ آقای فرزاد نصیری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در شماره‌های آتی مجله استفاده کنیم.

☐ آقای سعید اشرفی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (ساوه)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم.

☐ خانم نیکتا محتاج؛ دانش آموز رشته ریاضی (تهران):

از نامهٔ محبت آمیز شما متشکریم. در مورد کتابهای کمک درسی ریاضی می توانید به انتهای مجلات ریاضی برهان قسمت معرفی کتاب رجوع کنید. ضمناً به عرض می‌رسانیم که مجلهٔ ریاضی برهان از پاسخ دادن به سؤالات و مسایل خصوصی معذور است. از مسألهٔ ارسالی حل شده شما در صورت لزوم، در جای مناسب استفاده خواهد شد.

☐ آقای حمید جلالی فراهانی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مقالهٔ ارسالی شما تحت عنوان «عددهای فیناغورثی» متشکریم. در صورت امکان، در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد. در ضمن به عرض می رسانیم که اگر k و u و v اعداد دلخواه صحیح باشند، تمام اعداد فیثاغورثی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$a = 2kuv\ ,\ \ b = k(u^2 - v^2)\ ,\ \ c = k(u^2 + v^2)$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

روابطی که شما به دست آورده‌اید، حالت خاصی از روابط اخیر می‌باشند.

☐ آقای علیرضا سبزعلیزاده؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

☐ آقای علی انگوتی؛ دیپلمه ریاضی (میانه):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

☐ آقای سیاوش صادقی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده می کنیم.

☐ آقای عباس نیرومندی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (مرودشت):

از مطلب ارسالی شما متشکریم. در صورت امکان از آن استفاده خواهیم کرد.

☐ آقای انلدار آبیار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (ارومیه):

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت امکان از آنها استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای محمد رضا نیکسار؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بندر انزلی):**

از ارسال سرگرمیهای ریاضی و مسایل حل شدهٔ شما متشکریم. از آنها در شماره های آینده استفاده می کنیم.

❑ **خانم شبنم افسری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):**

ضمن تشکر از ارسال حل مسایل برهان به عرض می‌رسانیم که ارسال حل مسایل برهان لزومی ندارد و فقط ارسال حل مسایل مسابقه‌ای قبل از موعد مقرر مورد نظر است. بنابراین سعی کنید حل مسایل مسابقه‌ای را در زمان مقرر ارسال دارید تا پس از بررسی در صورت صحیح بودن جواب، جایزه‌ای به رسم یادبود به شما تعلق بگیرد و نام شما نیز در مجله ذکر شود.

❑ **آقای مهدی رسولی؛ دانشجوی رشته پتروشیمی (اراک):**

ضمن تشکر و قدردانی متقابل از شما به عرض می‌رسانیم که از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما که برخی از آنان در سطح دانشگاه مطرح است، برای دانش‌آموزان دبیرستان انتخاب کرده، در شماره‌های آینده در صورت لزوم و در جای مناسب می‌آوریم.

❑ **آقای ابراهیم کریمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز):**

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در قسمت مسایل برای حل، استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای نادر صادقی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (شاهین دژ):**

از مسایل و تستها و مطلب ارسالی شما تحت عنوان « بررسی خاصیتهای یک به یکی و پوشایی در توابع کثیرالجمله» متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای ابوالفضل کریمایی (شهریار):**

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای مجید بالو؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آمل):**

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای سعید چهرازی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):**

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در قسمت مسایل برای حل، از آن استفاده خواهیم کرد.

❑ **آقای مهدی وحیدی اربابی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران):**

از مطلب ارسالی شما تحت عنوان «محاسبهٔ عدد پی تا ۲۹ میلیون رقم اعشار» متشکریم. از آن در جای مناسب استفاده می کنیم.

❑ **آقای محسن رفیعی؛ دانش آموز رشته ریاضی (اصفهان):**

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده می کنیم.

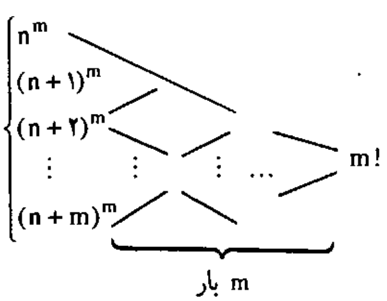
❑ **آقای حسین موسوی؛ دانش‌آموز مرکز آموزش راهنمایی علامه حلی (تهران):**

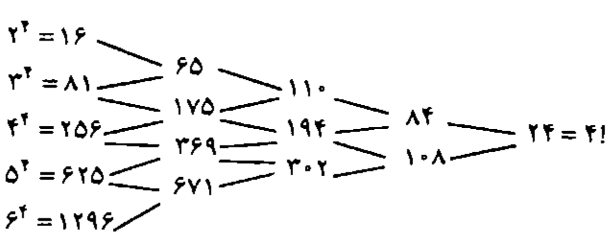
از شما برای ارسال مطلبی مربوط به « روش تفاضلات متناهی برای یافتن $m!$ » متشکریم. برای اطلاع خوانندگان در این جا خلاصه‌ای از آن را می آوریم:

اگر از عدد صحیح n تا $(n+m)$ را به‌طور جداگانه به توان m برسانیم و سپس به‌طور متناوب اختلاف آنها را تا آنجا که تنها یک عدد باقی بماند، به دست آوریم، عدد به دست آمده $m!$ خواهد بود. قابل ذکر است که این اختلاف تناوبی m بار می‌باشد. به طور مثال داریم:

$n=۲\ ,\ m=۴$

ودر حالت کلی خواهیم داشت:





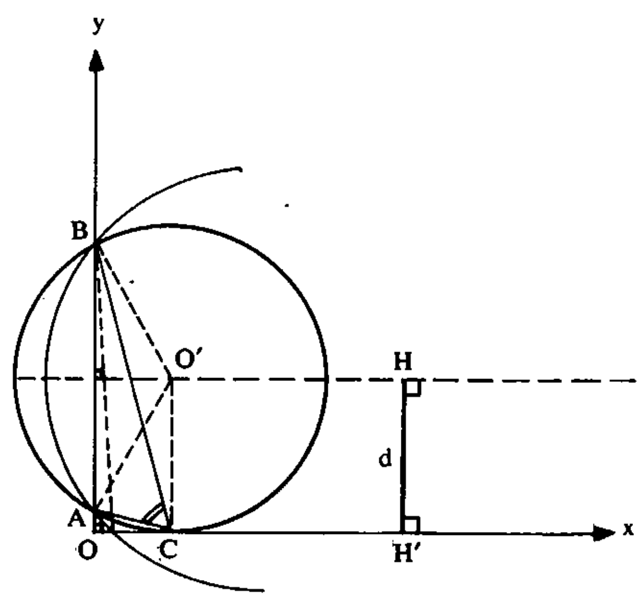
حل مسائل هندسه
مسابقه ای برهان ۱۳

حل۱ـ راه حل اوّل: از آقای عبداله شعبانی از شهرستان مراغه

با فرض $OA = a$ و $OB = b$ نقطهٔ C را روی نیم خط Ox اختیار کرده از C به A و B وصل می‌کنیم و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌نماییم. مرکز این دایره بر عمود منصف پاره‌خط AB واقع است و زاویهٔ ACB زاویه‌ای محاطی از این دایره است. این زاویه درصورتی کمترین مقدار خود را دارا است که وتر AB متعلق به کوچکترین دایرهٔ گذرنده از A و B و شامل C باشد. در مثلث ABC طبق رابطهٔ سینوسها می‌توان نوشت: (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ACB):

$$\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = 2R$$

$$\Rightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{AB}{2R} = \frac{b-a}{2R}$$



با توجه به اینکه ACB زاویه‌ای حاده است، درصورتی این زاویه بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که $\sin A\hat{C}B$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و با توجه به اینکه $b-a$ مقدار ثابتی است، $\sin A\hat{C}B$ در صورتی Max است که R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ACB حداقل مقدار ممکن را داشته باشد. امّا کمترین مقدار R برابر است با:

$$R_{Min} = HH' = \frac{OA+OB}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2R = a+b$$

پس:

$$\operatorname{Max} \sin A\hat{C}B = \frac{b-a}{b+a} \Rightarrow \operatorname{Max} A\hat{C}B = \operatorname{Arcsin}\frac{b-a}{b+a}$$

در این صورت اگر مرکز دایرهٔ به شعاع می‌نیمم را O' بنامیم داریم $O'A = O'B = O'C = d$ بنابراین برای حل مسأله به مرکزهای دو نقطهٔ A و B و به شعاع $d = \frac{a+b}{2}$ دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O' قطع کنند از O' عمود OC را بر نیم خط Ox رسم می‌کنیم. نقطهٔ C، نقطهٔ جواب مسأله است یعنی زاویه ACB بیشترین مقدار ممکن را دارا است. واضح است که در این صورت دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ C بر Ox مماس است و $OC^2 = OA.OB$ یا $OC = \sqrt{ab}$ است.

راه حل دوم: از آقای امین سعید فر دانش‌آموز سال چهارم ریاضی فیزیک از تهران

فرض می‌کنیم $A\hat{C}B = \alpha$ ، $O\hat{C}B = \beta$ و $O\hat{C}A = \gamma$ باشد می‌خواهیم زاویهٔ α بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد با توجه به اینکه α زاویه‌ای حاده است داریم:

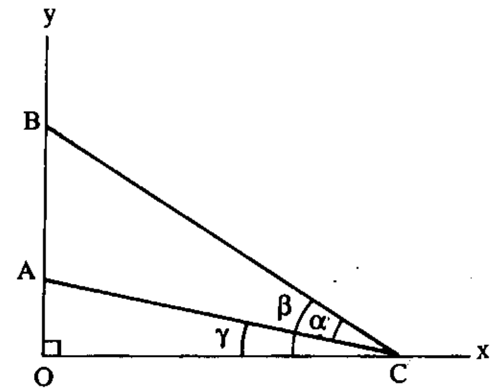
$$\alpha = \beta - \gamma \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta-\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

امّا با فرض $OA = a$ و $OB = b$ و $OC = x$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{x}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{x}$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}} = \frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$



برای آنکه زاویهٔ حادهٔ α ماگزیمم باشد، باید $tg\alpha$ ماگزیمم باشد و برای اینکه $tg\alpha$ حداکثر مقدار خود را داشته باشد، باید $x+\frac{ab}{x}$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. امّا در عبارت $x+\frac{ab}{x}$ حاصلضرب دو مقدار x و $\frac{ab}{x}$ مقدار ثابتی است. $(x\times\frac{ab}{x}=ab)$. بنابراین وقتی $x+\frac{ab}{x}$ کمترین مقدار خود را دارا است، که دو مقدار x و $\frac{ab}{x}$ برابر باشند یعنی $x=\frac{ab}{x}$ و یا $x^{2}=ab$ و یا $x=\sqrt{ab}$ باشد.

به این ترتیب با محاسبهٔ مقدار x جای نقطهٔ C روی نیم خط Ox را می‌توان مشخص نمود (به وسیلهٔ محاسبه و یا ترسیم).

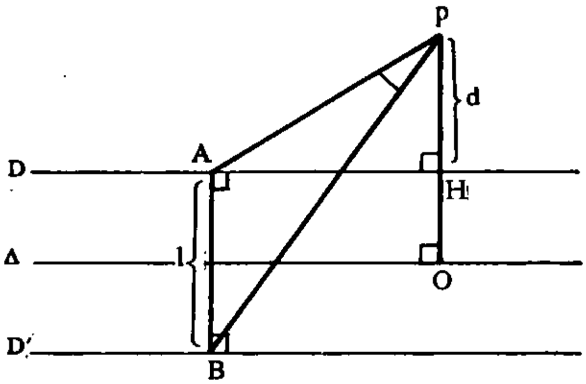
نکته ـ اگر حاصل ضرب چند کمیت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن کمیتها وقتی کمترین مقدار خود را دارا است که آن کمیتها با هم برابر باشند.

حل مسأله ۲ ـ از آقای عبداله شعبانی از شهرستان مراغه.

مانند مسأله اول نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PAB بر عمود منصف پاره خط AB واقع است. و درصورتی زاویهٔ APB بیشترین مقدار ممکن را دارا است که وتر AB متعلق به کوچکترین دایرهٔ گذرنده بر A و B و شامل P باشد. و این در صورتی است که نقطهٔ O بر خط متساوی‌الفاصله از دو خط D و D' واقع باشد. زیرا با فرض $AB=l$ و $PH=d$ داریم:

$$\Delta APB: \frac{AB}{\sin A\hat{P}B}=2R \quad (\text{R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث APB})$$

$$\Rightarrow \sin A\hat{P}B=\frac{AB}{2R}$$



با توجه به اینکه AB مقدار ثابتی است، زاویهٔ P وقتی حداکثر مقدار خود را دارد که R کمترین مقدار خود را داشته باشد. امّا R درصورتی کمترین مقدار خود را دارد که PO عمود بر خط Δ (خط Δ که موازی و متساوی‌الفاصله از دو خط D و D' است مکان هندسی مرکز دایره هایی است که بر دو نقطهٔ A و B در این مسأله می‌گذرند) باشد یعنی:

$$R=PO=PH+HO=d+\frac{l}{2}=\frac{2d+l}{2}$$

که از آنجا:

$$\text{Max}\sin A\hat{P}B=\frac{l}{2d+l}\Rightarrow \text{Max}\,A\hat{P}B=\text{Arc}\sin\frac{l}{2d+l}$$

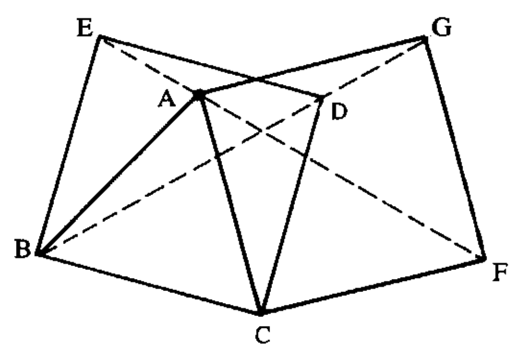
بنابراین برای حل مسأله، خط Δ را که متساوی‌الفاصله از دو خط موازی D و D' است رسم می‌کنیم. از نقطهٔ P عمود PO را بر خط Δ فرود می‌آوریم. به مرکز O و به شعاع PO دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط D و D' را در نقاط A و B قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی ـ مهدی قمصری
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

❑ مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. روی ضلع BC و در طرفی که مثلث واقع است، مربع $BCDE$ و روی ضلع AC و در خارج مثلث، مربع $ACFG$ را می‌سازیم. ثابت کنید که سه نقطهٔ E و A و F روی یک خط راست قرار دارند، همچنین سه نقطهٔ B و D و G بر یک استقامت‌اند.



۲ ـ الف) O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D را نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم $(D \neq A)$. ثابت کنید:

$$DB = DC = DO$$

ب) ثابت کنید، اگر $ABCD$، یک چهارضلعی محاطی باشد، آن‌وقت نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 به ترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC، رأسهای یک مستطیل‌اند. از مسائل المپیادهای ریاضی کشور آلمان

۳ ـ ثابت کنید: اگر داشته باشیم $\begin{cases} p \vee q \equiv p \vee r \\ p \wedge q \equiv p \wedge r \end{cases}$ در این صورت $q \equiv r$.

۴ ـ ثابت کنید: اگر $(A - B) = (A \cap B)$ در این صورت $A \subseteq B$.

۵ ـ دستگاه را حل کنید.

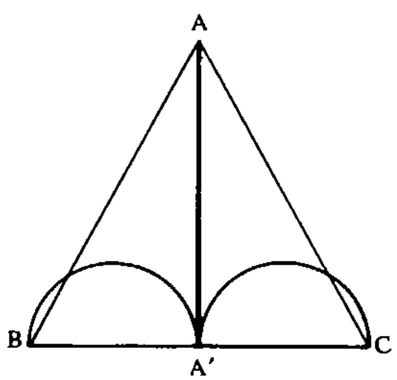
$$\begin{cases} \frac{2}{2x-3} + \frac{1}{y-2} = 7 \\ \frac{2}{y-2} + \frac{2}{z-1} = 10 \\ \frac{4}{z-1} + \frac{1}{2x-3} = 7 \end{cases}$$

۶ ـ اگر $x, y, z > 0$ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2(y+z) = 16 \\ y^2(z+x) = 16 \\ z^2(x+y) = 16 \end{cases}$$

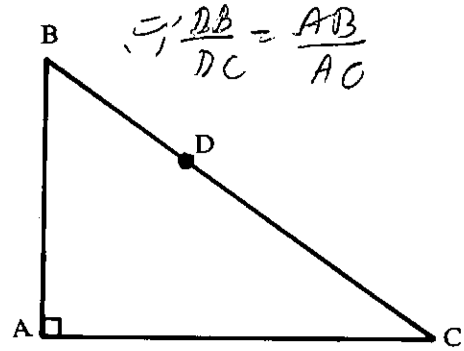
❑ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ در مثلث متساوی الاضلاع ABC، میانهٔ AA' را رسم می‌کنیم. دایره‌های به قطر BA' و $A'C$ را رسم می‌نمائیم. شعاع دایره‌ای به مرکز A را بیابید که براین دو دایره مماس باشد.



۲ ـ نقطه‌ای روی وتر مثلث قائم‌الزاویه که از اضلاع زاویهٔ قائمه به یک فاصله است، وتر را به دو قطعه به طولهای ۳۰ cm و ۴۰ cm تقسیم می‌کند. طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را به دست آورید.

فرستنده: خانم شبنم افسری از دبیرستان نمونهٔ مردمی فرزانگان منطقه ۱۴ تهران.



۳ ـ ثابت کنید: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت،

$$n[(A\times B)-(B\times A)]=n(A)\times n(B)-[n(A\cap B)]^{2}$$

۴ ـ هرگاه داشته باشیم، $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^{2} \mid x^{2}-y^{2}=1\}$، ثابت کنید رابطهٔ R تابع نیست.

۵ ـ اگر f یک تابع و g رابطه باشد ثابت کنید $(f\cap g)$ تابع است.

۶ ـ اگر y مجهول باشد، حدود x را چنان بیابید تا معادله زیر جواب حقیقی داشته باشد.

$$5x^{2}-12xy+4y^{2}+54x-4y-139=0$$

۷ ـ از مبدأ مختصات عمود OH را بر خط $2x+y-5=0$ رسم نمودیم، مختصات نقطه H کدام است؟

۸ ـ اگر $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار عبارت $\sin^{4}x+\cos^{4}x$ را محاسبه کنید.

فرستنده: آقای ابراهیم کریمی دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز)

۹ ـ ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید که تساوی زیر همواره برقرار باشد.

$$\frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{c}{\sin x+\cos x}$$

فرستنده: آقای علیرضا سبزعلیزاده دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

۱۰ ـ اگر در مثلثی رابطهٔ $(a^{2}-b^{2})c^{2}-b^{2}(a^{2}-c^{2})=c^{4}-b^{4}$ برقرار باشد، زاویهٔ $\hat{A}$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای علی انگوتی دیپلمه ریاضی (میانه)

۱۱ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin(\pi\log x)+\cos(\pi\log x)=1$$

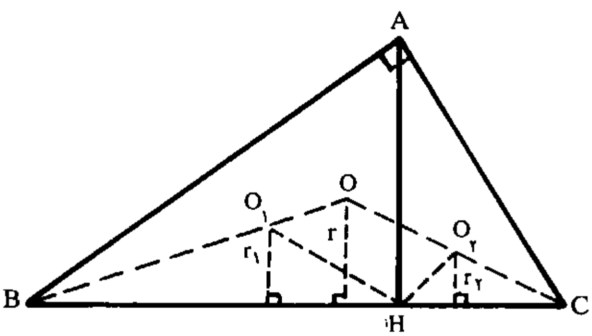
فرستنده: آقای سعید اشرفی دانش‌آموز رشته ریاضی (ساوه)

مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و r_1 و r_2 شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثهای ABH و ACH باشند، ثابت کنید:

$$r^{2}=r_{1}^{2}+r_{2}^{2}$$

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی از تهران.



۲ ـ در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ است:

الف) ثابت کنید $r_a-r=3R$

ب) ثابت کنید $\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

پ) اگر اندازه ضلع a و اندازهٔ مساحت این مثلث معلوم باشد، مثلث را رسم کنید.

۳ ـ اگر در فضای برداری V، بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی باشند و داشته باشیم $u_1=V_1-V_3$ و $u_2=2V_1+V_2-2V_3$ و $u_3=-V_1-V_2+V_3$ نشان دهید که بردارهای u_1 و u_2 و u_3 وابستهٔ خطی‌اند.

۴ ـ سه مکعب را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که اولاً حداقل ۲ عدد از اعداد ظاهر شده مثل هم باشند، ثانیاً احتمال آن که اعداد مثل هم نباشند.

۵ ـ ۲ عددی حقیقی به تصادف از بازهٔ (۲ و ۱) انتخاب می‌کنیم مطلوب است احتمال آن که مجموع دو عدد بین ۳ و ۴ باشند.

۶ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\cos x = \cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$

فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

۷ ـ درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$b\cos^2\frac{\hat{C}}{2}+c\ \ \cos\frac{\hat{B}}{2}=P$$

فرستنده: آقای مسعود فلاح دانش‌آموز رشته ریاضی (اصفهان)

۸ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\cos 3x+2\cos 2x+7\cos x=10$$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۹ ـ a و b و c و d را چنان بیابید تا عبارت زیر مکعب کامل شود.

$$8x^6+12x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx^{-1}$$

۱۰ ـ نماد [ ]، علامت جزء صحیح است.

$$\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2-7}{x^2+1}\right]\right\}=?$$

۱۱ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا فاکتوریل اعداد از ۱ تا ۲۷ را حساب کرده و در خروجی عدد و فاکتوریل آن را با پیغام مناسب چاپ کند.

۱۲ ـ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا دو عدد M و N را از روی ورودی بخواند و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد را به دست آورده، همراه با دو عدد در خروجی چاپ کند.

مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردار $\vec{V}$ را چنان تعیین کنید که بر بردارهای $\vec{u_1}=2\vec{i}+1\vec{j}-4\vec{k}$ و $\vec{u_2}(-1,2,1)$ عمود باشد، با محور yها زاویهٔ منفرجه بسازد و اندازه‌اش مساوی $5\sqrt{3}$ باشد.

۲ ـ نقاط $A(3,0,0)$ و $B(0,4,0)$ و $C(0,0,2)$ رأسهای مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بر میانهٔ AA' از این مثلث می‌گذرد و با صفحهٔ $P: x+2y-2z=5$ زاویهٔ $\text{Arc}\ \cos\frac{2}{3}$ می‌سازد.

۳ ـ دو نقطهٔ $A(2,-1,0)$ و $B(-1,1,4)$ مفروضند. نقاط M و M' را روی خط AB چنان بیابید که $(MM'AB)$ یک تقسیم توافقی با نسبت توافقی ۲ باشد. سپس معادلهٔ کرهٔ به قطر MM' را بنویسید.

۴ ـ معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط $D:(x=t, y=t, z=2t-1)$، روی صفحهٔ $P: 2x-y+z-5=0$ را به دست آورید.

۵ ـ درستی استنتاج زیر را بررسی کنید.

$$(p\vee \sim q)\Rightarrow \sim r$$
$$q\Rightarrow s$$
$$p\vee \sim s$$
$$\therefore u\Rightarrow \sim r$$

۶ ـ اولاً ثابت کنید در هر میدان مقسوم‌علیه صفر وجود ندارد ثانیاً اگر در میدان F، x و y اعضای ناصفر از F بوده و داشته باشیم، $x^{-1}+y=-1$ و $x+y^{-1}=1$ در این صورت، $x+y=0$

۷ ـ به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$، 8^n-1 بر ۷ بخش‌پذیر است.

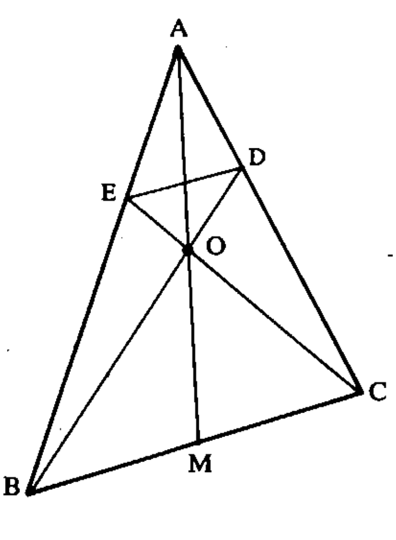
۸ ـ مطلوب است محاسبهٔ $\int\frac{dx}{(x\,tgx+1)^2}$

۹ ـ مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}} \qquad \cos x>0$$

مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ در مثلث ABC رئوس B و C را به نقطهٔ O وسط میانه AM وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد BO و CO با اضلاع AC و AB را به ترتیب D و E می‌نامیم. ثابت کنید که DE∥BC است و اندازهٔ نسبت $\frac{DE}{BC}$ را محاسبه کنید.



۲ ـ محیط یک لوزی ۲۰ سانتی‌متر و مجموع قطرهای آن ۱۴ سانتی‌متر است. مساحت لوزی را بیابید.

فرستنده: آقای علی‌لاری از دبیرستان کمال (تهران)

۳ ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ زیر باشند:

$$x^2+3x-3=0$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1)}$$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۴ ـ اگر $a^2+b^2+8=4a+4b$ باشد، حاصل عبارت $p=\frac{a^2+b^2}{a+b}$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای سیدمحمد شعاری شعار دانش‌آموز رشته ریاضی (رشت)

۵ ـ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ باشد.

فرستنده: خانم الهه شهپری دانش‌آموز رشته ریاضی (خراسان)

۶ ـ ثابت کنید اگر در یک تصاعد عددی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ باشد، آنگاه $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ است.

۷ ـ ثابت کنید: $(\log_{12}19)^{-1}+(\log_{28}19)^{-1}>2$

۸ ـ اگر $\log_a 27=b$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{a}$ را حساب کنید.

فرستنده مسایل ۶ و ۷ و ۸: خانم لاله تراب نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

۹ ـ به فرض آن‌که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$ و $\cos\hat{A}=\cos\hat{B}\ \cos\hat{C}$ باشد، ثابت کنید:

$$\cot g\hat{B}\ \cot g\hat{C}=\frac{1}{2}$$

فرستنده: خانم لاله تراب نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

۱۰ ـ تحقیق کنید عبارت زیر به x بستگی ندارد.

$$A=\frac{\cot g^2x}{1+\cot g^2x}+\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\quad (x\neq\frac{k\pi}{2})$$

فرستنده: آقای علی انگوتی دیپلمه ریاضی (میانه)

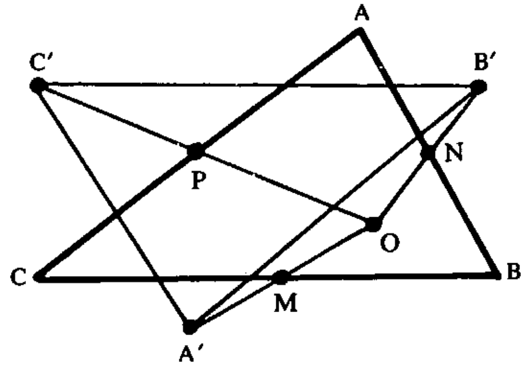
۱۱ ـ معادله زیر را حل کنید.

$$8\cos x\ \cos 2x\ \cos 4x=1$$

فرستنده: آقای سعید چهرازی دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ مثلث ABC و نقطهٔ O در صفحه آن داده شده‌اند. قرینهٔ نقطهٔ O را نسبت به نقاط M و N و P که به ترتیب وسط اضلاع BC و AC و AB می‌باشند، نقطه‌های ′A و ′B و ′C می‌نامیم.



الف) ثابت کنید که اضلاع مثلث ′A′B′C با اضلاع متناظر از مثلث ABC موازی و مساوی است.

ب) ثابت کنید که چهار ضلعیهای ′ABA′B و ′BCB′C و ′ACA′C متوازی الاضلاع‌اند و از آنجا نتیجه بگیرید که خطهای ′AA′ ، BB و ′CC از یک نقطه مانند Q می‌گذرند. جای نقطهٔ Q بر روی این پاره‌خطها را مشخص سازید.

۲ ـ اگر $|\vec{a}|=5k+1$ ، $|\vec{b}|=3k-2$ ، $(\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$ و $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=35$ باشد، مقدار k را تعیین کنید. اگر $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$ باشد، مسأله چگونه است؟

۳ ـ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)=?$$

۴ ـ پیوستگی تابع f با قانون زیر را در نقطه‌ای به طول $x_0=-1$ بررسی کنید.

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2+1} & x\neq -1\\ \frac{1}{3} & x=-1\end{cases}$$

۵ ـ برای تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ ، ثابت کنید:

$$yy''+y'^2=3(y^2-1)^2$$

فرستنده مسایل ۳ و ۴ و ۵: شهرزاد توفیقیان دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۶ــ مشتق n ام تابع با ضابطهٔ $y = a'\sin mx$ را حساب کنید.

فرستنده: آقای علیرضا فاضلی دانش‌آموز رشته ریاضی (رامسر)

۷ــ نقطه‌ای بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y = x^2 + 3x$ تعیین کنید که خط مماس در آن نقطه با خط Δ به معادلهٔ $x + 2y = 1$ زاویهٔ $45°$ بسازد.

۸ــ فاصلهٔ مرکزتقارن منحنی تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3x^2 + 1$ را از مجانب افقی منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1-4x}{2x+4}$ بیابید.

۹ــ حداقل و حداکثر عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \cos\alpha(2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$$

فرستنده: آقای همایون نادرشاهی دانش‌آموز رشته ریاضی (کرمانشاه)

۱۰ــ ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{8}$$

۱۱ــ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$tg\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

فرستنده مسایل ۱۰ و ۱۱: خانم نیکتا محتاج دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

□ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ــ نقاط $A(4,3)$ و $B(3,-4)$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی هستند، طول ارتفاع BH از این مثلث را حساب کنید.

۲ــ اگر $F(x) = 3tg^7 5x$ باشد، $F'(\frac{-\pi}{4})$ را حساب کنید.

۳ــ معادلهٔ خط مماس برمنحنی تابع با ضابطهٔ $y = 3\cos x + 2\sin x$ را در محل تلاقی منحنی با محور yها بنویسید.

۴ــ تابع با ضابطهٔ $y = x^3 + px + q$ مفروض است، مقادیر p و q را چنان تعیین کنید که منحنی تابع روی محور yها با خط $y = -3x - 2$ مماس باشد.

۵ــ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $C(-4,4)$ مرکز آن بوده و با دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2x = 0$ مماس خارج باشد.

۶ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $y - mx - 1 = 0$ بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1-x}{-x-1}$ مماس باشد.

۷ــ معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کرده و جوابهای عمومی آنها را بنویسید.

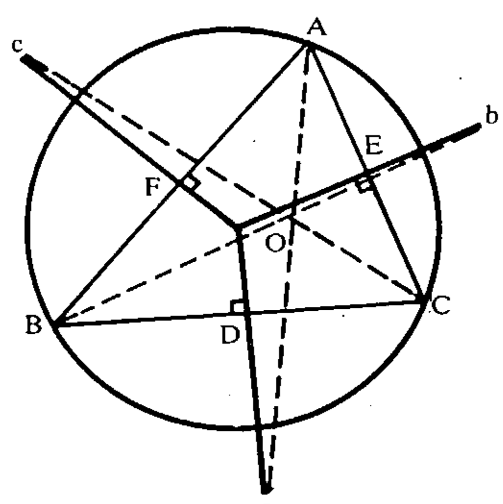
(الف) $4\sin^2 x + 2\sin 2x + 12\cos^2 x = 10$

(ب) $\cos x \sin 2x = \sin x$

۸ــ در مثلث $A\hat{B}C$ رابطهٔ $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \frac{a+b}{4R}$ برقرار است، تحقیق کنید مثلث متساوی‌الساقین است (R شعاع دایره محیطی است).

مسائل مسابقه‌ای

از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمودهای OD، OE و OF را به ترتیب بر اضلاع BC ، CA و AB فرود می‌آوریم. سپس روی نیمخطهای به مبدأOی OD، OE و OF و به طرف خارج مثلث پاره‌خطهای $Da = Eb = Fc$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای Aa و Bb و Cc متقارند.

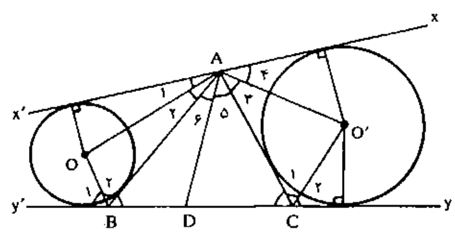


حل مسائل برهان شمارهٔ ۱۴

◆ حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ــ نقطه O محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ $x'AB$ و ABy' است، همچنین نقطه محل تلاقی O' نیمسازهای دو زاویهٔ xAC و ACy می‌باشد پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{A}_۳ = \hat{A}_۴$ و $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = ۶۰^\circ$ می‌باشد (چون $A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۶۰^\circ$).
از طرفی $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ است. بنابراین:

$$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ + \hat{A}_۴ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}_۲ + ۲\hat{A}_۳ = ۱۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۶۰^\circ - \hat{A}_۳ \qquad (۱)$$



حال خط AD را از رأس A داخل مثلث چنان رسم می‌کنیم که $\hat{A}_۵ = D\hat{A}C = \hat{A}_۳$ باشد. در این صورت زاویهٔ $\hat{A}_۶ = \hat{A}_۲$ خواهد بود زیرا:

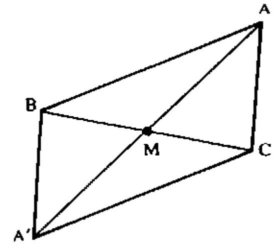
$$\hat{A}_۶ = B\hat{A}C - \hat{A}_۵ = ۶۰^\circ - \hat{A}_۵ = ۶۰^\circ - \hat{A}_۳ \quad (۲)$$
$$(۱)و(۲) \Rightarrow \hat{A}_۶ = \hat{A}_۲$$

در نتیجه دومثلث $AO'C$ و ACD همچنین در مثلث AOB و ABD به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین برابرند.
($AC = AC, \hat{A}_۳ = \hat{A}_۵$ ، $\hat{C}_۱ = A\hat{C}B = ۶۰^\circ$ و ...). از تساوی این مثلثها نتیجه می‌شود $O'C = CD$ و $OB = BD$. از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$OB + O'C = BD + CD = BC = C^{te}$$

(حل از آقای محمدمعصومی از اراک)

۲ ــ حل اولاً: مثلث ABC را در نظر گرفته، میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به رئوس B و C وصل می‌کنیم چهار ضلعی $ABA'C$ که اقطارش منصف یکدیگرند متوازی الاضلاع است. پس $AB = A'C$ و $BA' = AC$ است.

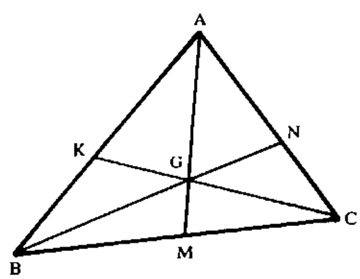


در مثلث ABA' می‌توان نوشت:

$$|AB - BA'| < AA' < AB + BA' \Rightarrow$$
$$|AB - AC| < ۲AM < AB + AC$$
$$\Rightarrow \frac{|AB - AC|}{۲} < AM < \frac{AB + AC}{۲} \text{ یا } \frac{|b - c|}{۲} < m_a < \frac{b + c}{۲}$$

حل ثانیاً ــ میانه‌های AM و BN و CK از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطه تقاطع آنها را G می‌نامیم. بنا به رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$m_a < \frac{b + c}{۲} \ , \ m_b < \frac{a + c}{۲} \ , \ m_c < \frac{a + b}{۲} \Rightarrow$$
$$m_a + m_b + m_c < a + b + c \Rightarrow m_a + m_b + m_c < ۲p (۱)$$



از طرفی در مثلثهای GBC و GAB و GAC می‌توان نوشت:

$$BC < BG + GC \text{ یا } a < \frac{۲}{۳}m_b + \frac{۲}{۳}m_c \text{ و } b < \frac{۲}{۳}m_a + \frac{۲}{۳}m_c$$
$$\text{و } \ c < \frac{۲}{۳}m_a + \frac{۲}{۳}m_b \Rightarrow a + b + c =$$
$$۲p < \frac{۴}{۳}(m_a + m_b + m_c)$$
$$\Rightarrow \frac{۳p}{۲} < m_a + m_b + m_c \qquad (۲)$$
$$(۱)و(۲) \Rightarrow \boxed{\frac{۳p}{۲} < m_a + m_b + m_c < ۲p}$$

۳ ــ برای اثبات این که گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$ همواره ارزش درست دارد، دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر $p \equiv F$ در این حالت ترکیب شرطی فوق به انتفای مقدم همواره ارزش درست داشته و حکم به اثبات می‌رسد.

II) اگر $p \equiv T$ در این حالت گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ همواره ارزش درست داشته و در نتیجه ترکیب شرطی $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ در حالتی که مقدم و تالی هر دو ارزش درست دارند، همواره ارزش درست خواهد داشت.

۴ ــ طبق فرض گزارهٔ $[p \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow p)]$ ارزش درست دارد لذا باید همواره، $p \equiv (r \Leftrightarrow p)$ که اگر $p \equiv T$ نتیجه می‌گیریم برای آنکه $(r \Leftrightarrow p)$ نیز درست باشد باید $r \equiv T$ و اگر $p \equiv F$ باید $(r \Leftrightarrow p) = F$ که باز نتیجه می‌شود $r \equiv T$ یعنی در هر حالت می‌بایست $r \equiv T$ یا $\sim r \equiv F$ پس، $(\sim r \Rightarrow \sim p)$ به انتفای مقدم ارزش درست داشته و با توجه به فرض نادرست بودن $(s \vee q)$ در مسأله و اینکه $q \equiv F$ یا $\sim q \equiv T$ در کلّ نتیجه می‌شود $(\sim r \Rightarrow \sim p) \Leftrightarrow \sim q$ ارزش نادرست دارد.

۵ ــ الف ــ با فرض اینکه $A \subseteq B$ می‌خواهیم ثابت کنیم $P(A) \subseteq P(B)$ که $P(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های Aاست.

$$\left[\text{فرض کنیم} \quad X \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} X \subseteq B \right.$$
$$\left. \Rightarrow X \in P(B) \right] \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

ب ــ می‌خواهیم ثابت کنیم

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$\left[\text{فرض کنیم} \quad X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq (A \cap B) \right.$$
$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$$
$$\left. \Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B) \right]$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

(توجه دارید که در اثبات مسألهٔ فوق $P(A)$ و $P(B)$ مجموعه‌هایی هستند که اعضای آنها به ترتیب زیر مجموعه‌های A و B بوده و خود، مجموعه می‌باشند و x مجموعه‌ای دلخواه می‌باشد.)

۶ ــ

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C')$$
$$= (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$$

۷ ــ

$$\frac{۲}{۲(\sqrt[۳]{۲} + ۱) + \sqrt[۳]{۴}} = \frac{۲}{۲\sqrt[۳]{۲} + ۲ + \sqrt[۳]{۴}}$$
$$= \frac{۲}{\sqrt[۳]{۱۶} + \sqrt[۳]{۴} + ۲} \begin{cases} a=۲ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{\sqrt[۳]{a^۲} + \sqrt[۳]{b^۲} + \sqrt[۳]{ab}}$$

برای گویا کردن این کسر صورت و مخرج را در $\sqrt[۳]{a} - \sqrt[۳]{b}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{۲}{\sqrt[۳]{۱۶} + \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۸}} \times \frac{\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}} = \frac{۲(\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲})}{۴ - ۲} = \sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}$$

۸ ــ

$$(x - ۱)m^۲ - (۳x - ۵)m + (۲x - ۶) = ۰$$
$$m^۲x - m^۲ - ۳mx + ۵m + ۲x - ۶ = ۰$$
$$(m^۲ - ۳m + ۲)x = m^۲ - ۵m + ۶$$
$$(m - ۱)(m - ۲)x = (m - ۲)(m - ۳)$$

الف) اگر $m = ۱ \Rightarrow ۰ \times x = ۲ \Rightarrow$
معادله غیرممکن است و جواب ندارد.

ب) اگر $m = ۲ \Rightarrow ۰ \times x = ۰$
معادله به اتحاد تبدیل شده است و بی‌شمار جواب دارد.

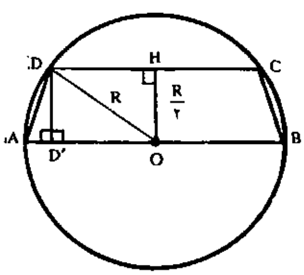
ج) اگر $m \neq ۱ \ , \ m \neq ۲ \Rightarrow x = \frac{m - ۳}{m - ۱}$ جواب معادله.

◆ حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ــ از O به D وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD داریم:

$$HD^۲ = OD^۲ - OH^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۴} = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow$$

$$HD = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = 2HD = R\sqrt{3}.$$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' داریم:

$$AD' = AO - OD' = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$ و
$$DO' = OH = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AD'^2 + DD'^2 = R^2(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{R^2}{4} = R^2(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow$$

اندازهٔ هر ساق ذوزنقه $AD = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = BC$

پس: محیط ذوزنقه $= 2R + 2R\sqrt{2 - \sqrt{3}} + R\sqrt{3}$
$$= R(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}})$$

مساحت ذوزنقه $= \frac{1}{2}OH(AB + CD) = \frac{1}{2} \times \frac{R}{2}(2R + R\sqrt{3})$
$$= \frac{R^2}{4}(2 + \sqrt{3})$$

۲ ـ اگر (O', x) یکی از این دایره‌ها باشد، از O به O' وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع AB و OO' را H می‌نامیم واضح است که OO' عمود منصف پاره‌خط AB است. مثلث AOO' در رأس A قائم‌الزاویه است و داریم:

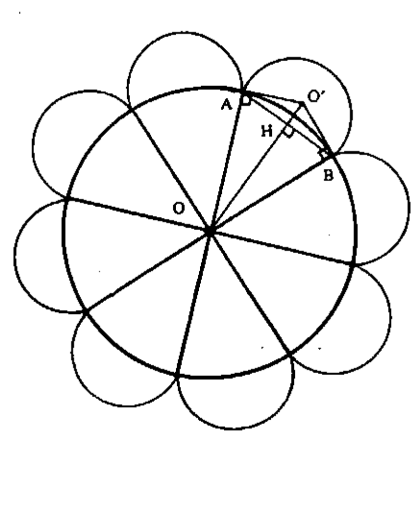
$$AB = C_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow AH = \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$OO' = \sqrt{R^2 + x^2}\ ,\ \Delta OO'A: OO'.AH = O'A.OA$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 + x^2}.\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} = Rx \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$\Rightarrow$ طول قوس یک دایره $= \frac{5}{8} \times 2\pi x = \frac{5}{8}\pi R\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})$

$\Rightarrow$ محیط شکل مورد نظر $= 5\pi R\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})$



۳ ـ روش اول:

فرض کنیم $(x_1, y) \wedge (x_2, y) \in (f_1 \cap ... \cap f_n) \Rightarrow$

$$[(x_1, y) \wedge (x_2, y) \in f_1] \wedge [(x_1, y) \wedge (x_2, y) \in f_2] \wedge ... \wedge [(x_1, y) \wedge (x_2, y) \in f_n]$$

$$\xrightarrow{f_i \text{ ها یک به یک هستند}} (x_1 = x_2) \wedge (x_1 = x_2) \wedge ... \wedge (x_1 = x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

روش دوم: با توجه به این که اشتراک دو تابع و درنتیجه اشتراک چند تابع حقیقی همواره تابع است و با توجه به رابطهٔ $(f \cap g)^{-1} = f^{-1} \cap g^{-1}$ و تعمیم آن و با توجه به قضیهٔ کتاب کافی است ثابت کنیم وارون $(f_1 \cap ... \cap f_n)$ تابع است (شرط لازم و کافی برای آنکه تابعی یک به یک باشد آن است که وارون آن تابع باشد)

$$(f_1 \cap f_2 \cap ... \cap f_n)^{-1} = f_1^{-1} \cap f_2^{-1} \cap ... \cap f_n^{-1}$$

چون f_1 و ... و f_n توابعی یک به یک هستند پس وارون آنها تابع است و اشتراک چند تابع نیز تابع است و حکم ثابت می‌شود.

۴ ـ اگر

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

و

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

در این صورت تعریف می‌کنیم: $f: B \to A$ که به راحتی می‌توان ثابت کرد

$$f(x) = a + (b - a)x$$

f تابعی یک به یک و پوشا می‌باشد (دوسویی). بنابراین بین دو مجموعهٔ A و B یک تناظر یک به یک برقرار است.

(اثبات دوسویی بودن تابع فوق به عهده خواننده)

۵ ـ چون $ad - bc = 0$ پس $ad = bc$ از طرفی:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{ad = bc}{\Rightarrow} A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(a + d)A = (a + d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow A^2 = (a + d)A$$

۶ ـ برای اثبات این که هر گروه ۴ عضوی باید حتماً آبلی باشد از جدول استفاده می‌کنیم و برای تکمیل جدول به نکات زیر توجه می‌کنیم:

I) چون گروه $(G, *)$، ۴ عضوی فرض شده پس طبق تعریف گروه حتماً باید $e \in G$ و بنابراین $G = \{e, a, b, c\}$

II) چون در هر گروه طبق قضیه عضو خنثی از چپ و راست خنثی بوده و منحصر به فرد است و نیز عضو متقابل منحصر به فرد است و قانون حذف برقرار است لذا در هر سطر یا ستون جدول هر عضو گروه بیش از یک بار نمی‌تواند واقع شده باشد، (مثلاً اگر $a * b = c$ و $a * c = c$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم $a * c = a * b$ و طبق قانون حذف $b = c$ که با متمایز بودن اعضاء تناقض دارد)

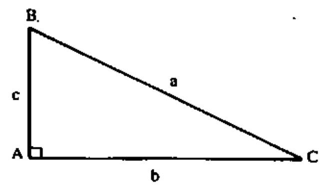
با توجه به نکات فوق اگر بخواهیم جدول را تشکیل دهیم فقط به صورت زیر می‌تواند جدول مرتب شود که از روی جدول مشاهده می‌شود گروه یک گروه آبلی خواهد بود.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	c	a	b

۷ ـ

$$\begin{cases} a = 13 \\ a + b + c = 30 \end{cases}$$
$$\Rightarrow b + c = 30 - a$$

$$\boxed{b + c = 17}$$



زیرا مثلث قائم‌الزاویه است: $b^2 + c^2 = a^2$

$$\Rightarrow (b + c)^2 - 2bc = (13)^2$$
$$(17)^2 - 2bc = 169 \Rightarrow 289 - 2bc = 169$$
$$\Rightarrow \boxed{bc = 60}$$

مجموع دو عدد $S = 17$ و حاصل‌ضرب دو عدد $P = 60$

$$x^2 - Sx + p = 0$$

$$x^2 - 17x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{matrix} 12 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 12}\ ,\ \boxed{c = 5}$$

۸ ـ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

فرض می‌کنیم:

$$x^2 = y$$
$$\Rightarrow ay^2 + by + c = 0$$

معادله y باید دو ریشه مثبت داشته تا معادله x بتواند چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد که تصاعد عددی بسازند.

اگر معادله (y) دو جواب مثبت داشته باشد. آنها را y_1 و y_2 می‌نامیم و $y_1 < y_2$ پس ریشه‌های معادله x عبارتند از:

$$-\sqrt{y_2}\ ,\ -\sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_2}$$

چون باید این چهار عدد تصاعد عددی بسازند، سه جمله متوالی آن را در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$2\sqrt{y_1} = \sqrt{y_2} - \sqrt{y_1} \text{ و } -\sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_1}\ ,\ \sqrt{y_2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{y_2} = 3\sqrt{y_1} \Rightarrow y_2 = 9y_1$$

نتیجه: اگر ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ تصاعد عددی بسازند، یک ریشه معادله $ay^2 + by + c = 0$ باید (۹) برابر ریشه دیگر باشد.

$$y_2 = 9y_1\ ,\ y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow y_1 + 9y_1 = -\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow y_1 = \frac{-b}{10a}\ ,\ y_2 = \frac{-9b}{10a}$$

از طرفی داریم: $y_1.y_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{-b}{10a} \times \frac{-9b}{10a} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{9b^2}{100a^2} = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{9b^2}{100a} = \frac{c}{1} \Rightarrow \boxed{9b^2 = 100ac}$$

۹ ـ داریم:

$$\frac{tg\alpha + \sin\alpha}{\cot g\alpha + \cos\alpha} = \frac{tg\alpha + tg\alpha\cos\alpha}{\cot g\alpha + \cot g\alpha\sin\alpha} = \frac{tg\alpha(1 + \cos\alpha)}{\cot g\alpha(1 + \sin\alpha)}$$

$$= \frac{tg\alpha(1 + \cos\alpha)}{\frac{1}{tg\alpha}(1 + \sin\alpha)} = tg^2\alpha\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)$$

می‌دانیم $tg^2\alpha \geq 0$ و $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ و $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$، پس خواهیم داشت:

$$tg^2\alpha > 0\ ,\ \sin\alpha + 1 \geq 0 \text{ و}$$
$$\cos\alpha + 1 \geq 0 \Rightarrow tg^2\alpha\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}\right) > 0$$

۱۰ ـ داریم:

$$A = \cos\alpha(2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$$
$$= \cos\alpha(2(1 - \cos^2\alpha) - 2\cos^2\alpha + 1)$$
$$= \cos\alpha(2 - 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1)$$

$$= \cos\alpha(3 - 4\cos^2\alpha) = 3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha = -\cos 3\alpha$$

$$\Rightarrow A = \cos(\pi - 3\alpha) - 1 \le \cos(\pi - 3\alpha) \le 1 \Rightarrow -1 \le A \le 1$$

۱۱ ــ داریم:

$$\text{طرف اول} = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 2\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 10^\circ}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\cos 10^\circ \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}\right) = 4\left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right)$$

$$= 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$$

۱۲ ــ با توجه به اتحاد مثلثاتی، $tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$ داریم:

$$tg_x^{73} tg_{2x}^{73} + 1 = 0 \Rightarrow tg_x^{73} tg_{2x}^{73} = -1$$

از طرفین معادله ریشهٔ ۷۳ام می‌گیریم:

$$tgx \; tg2x = -1 \Rightarrow tgx\left(\frac{2tgx}{1 - tg^2 x}\right) = -1$$

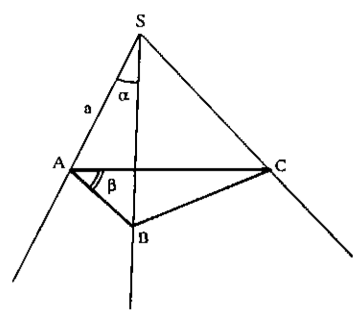
$$\Rightarrow 2tg^2 x = tg^2 x - 1 \Rightarrow tg^2 x = -1$$

معادله اخیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد و در نتیجه معادله مورد نظر در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ جواب حقیقی ندارد.

◆ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ــ (حل از آقایان: علی صبحی‌پور و علیرضا رمضانی فر)

روی یال Sx پاره‌خط $SA = a$ را اختیار می‌کنیم و در نقطهٔ A صفحه‌ای عمود بر یال Sx رسم می‌کنیم تا یالهای Sy و Sz را به ترتیب در نقاط B ، C قطع کند. نقاط A و B و C را به هم وصل می‌کنیم زاویهٔ $B\hat{A}C = \beta$ زاویهٔ مسطحهٔ یک فرجه از کنج منتظم داده شده است. و مثلثهای SAB ، SAC در رأس A قائم‌الزاویه‌اند.



چون بنا به فرض $A\hat{S}B = A\hat{S}C = B\hat{S}C = \alpha$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases} SC = SB = \frac{A}{\cos\alpha} \\ AB = AC = a\,tg\alpha \end{cases}$$

$$\Delta SBC: BC^2 = SC^2 + SB^2 - 2SB.SC \; \cos\alpha \Rightarrow$$

$$BC^2 = 2SC^2 - 2SC^2\cos\alpha = 2SC^2(1 - \cos\alpha) \; (1)$$

$$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\beta \Rightarrow$$

$$BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\beta = 2AB^2(1 - \cos\beta) \; (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 2SC^2(1 - \cos\alpha) = 2AB^2(1 - \cos\beta)$$

با جایگزینی SC و AB برحسب a و نسبتهای زاویهٔ α داریم:

$$\frac{a^2}{\cos^2\alpha}(1 - \cos\alpha) = a^2 tg^2\alpha(1 - \cos\beta) \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos\beta}$$

$$\Rightarrow (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos\beta} \Rightarrow 1 - \cos\beta = \frac{1}{1 + \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

۲ ــ می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه به رأس A داریم:

$$S = p(p - a) = (p - b)(p - c)$$

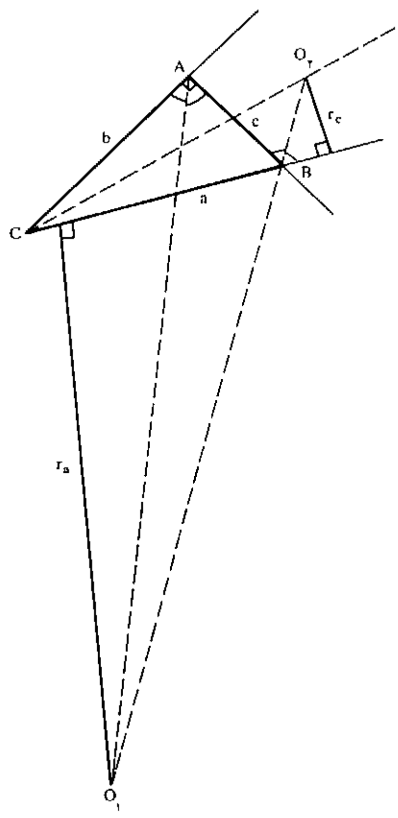
از طرفی $r_a = \frac{S}{p - a}$ پس:

$$r_a = \frac{p(p - a)}{p - a} = p \Rightarrow \boxed{r_a = P}$$

لذا:

$$r_c = \frac{S}{p - c} = \frac{(p - b)(p - c)}{p - c} = p - b$$

$$\Rightarrow r_c = 6 - 3 = 3$$



۳ ــ می‌دانیم که وقتی در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۱۲۰° است $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ است. از طرفی داریم:

$$d_b = \frac{2}{a + c}\sqrt{acp(p - c)}$$

$$d_c = \frac{2}{a + b}\sqrt{abp(p - c)}$$

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

$$d_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}$$

این مقادیر را در رابطهٔ $d_b d_c = 3Rda$ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{4\sqrt{p^2 a^2 bc(p - b)(p - c)}}{(a + c)(a + b)} =$$

$$\frac{3abc}{4\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}} \times \frac{2\sqrt{pbc(p - a)}}{b + c}$$

اما

$$(a + c)(a + b) = a^2 + a(b + c) =$$

$$b^2 + c^2 + bc + a(b + c) + bc$$

$$= (b + c)^2 + a(b + c) = (b + c)(a + b + c) = 2p(b + c)$$

پس

$$\frac{4pa\sqrt{bc(p - b)(p - c)}}{2p(b + c)} = \frac{3abc\sqrt{bc}}{2(b + c)\sqrt{(p - b)(p - c)}}$$

$$4(p - b)(p - c) = 3bc \Rightarrow 4\left(\frac{a + c - b}{2}\right)\left(\frac{a + b - c}{2}\right) = 3bc$$

$$a^2 - c^2 - b^2 + 2bc = 3bc \Rightarrow$$

$$b^2 + c^2 + bc - c^2 - b^2 + 2bc = 3bc$$

$$\Rightarrow \boxed{3bc = 3bc}$$

حل ب) در هر مثلث داریم:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \Rightarrow m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ $8(m_b^2 + m_c^2) - 4m_a^2 = 9a^2$ داریم:

$$8\left[\frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)\right] -$$

$$(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 9a^2$$

$$4a^2 + 4c^2 - 2b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 2c^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2 = 9a^2$$

$$\Rightarrow 9a^2 = 9a^2$$

بنابراین رابطهٔ (ب) در هر مثلثی برقرار است.

۴ ــ ابتدا یک ترکیب خطی از بردارهای داده شده تشکیل و مساوی با بردار صفر قرار می‌دهیم:

$$x\underbrace{(V_1 - V_2 - V_3)}_{u_1} + y\underbrace{(aV_1 + bV + V_3)}_{u_2} +$$

$$z\underbrace{(V_1 - 2aV_2 + bV_3)}_{u_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x + ay + z)V_1 + (-x + by - 2az)V_2 +$$

$$(-x + y + bz)V_3 = \vec{0}$$

چون طبق فرض بردارهای V_1 و V_2 و V_3 مستقل خطی هستند بنابراین باید ضرایب این ترکیب خطی همگی صفر باشند، که دستگاهی با سه معادله و سه مجهول حاصل می‌شود که اگر بخواهیم بردارهای u_1 و u_2 و u_3 مستقل خطی باشند از حل آن دستگاه باید به جواب $x = y = z = 0$ برسیم یعنی:

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 & (1) \\ -x + by - 2az = 0 & (2) \\ -x + y + bz = 0 & (3) \end{cases}$$

$$۲ \text{ و } ۱ \Rightarrow (a + b)y + (1 - 2a)z = 0 \leftarrow \text{ ضرب در } -(a + 1)$$

$$۳ \text{ و } ۱ \Rightarrow (a + 1)y + (1 + b)z = 0 \leftarrow \text{ ضرب در } (a + b)$$

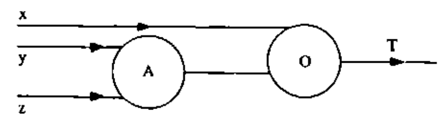
$$\Rightarrow (b^2 + 2a^2 + b + 2a + ab - 1)z = 0$$

شرط این که $z = 0$ آن است که ضریب آن مخالف صفر باشد، پس، $(b^2 + 2a^2 + b + 2a + ab - 1) \neq 0$ که همان رابطهٔ بین a و b است.

۵ ــ اگر فرض کنیم $A = xyz + xyz' + xy'z + x'yz$ در این

صورت عبارت بولی داده شده یعنی T به شکل $T = A + xy'z'$ ظاهر می‌شود و چون داریم:

$$A = \overbrace{(xyz + xyz + xyz)}^{xyz} + xyz' + xy'z + x'yz$$
$$= xy\underbrace{(z+z')}_{1} + xz\underbrace{(y+y')}_{1} + yz\underbrace{(x+x')}_{1}$$
$$= xy + xz + yz$$
$$\Rightarrow T = xy + xz + yz + xy'z'$$
$$= x(y + y'z') + xz + yz = x(y+z') + xz + yz$$
$$= xy + xz' + xz + yz = xy + x\underbrace{(z'+z)}_{1} + yz$$
$$= \underbrace{xy + x}_{x} + yz = x + yz$$



۶ ـ الف) کلمهٔ کمال‌الملک دارای ۹ حرف است که عبارتند از ۲حرف (ک)، ۲ حرف (م)، ۲حرف (الف) و ۳ حرف (ل) که کل حالتهای ممکن در کنار هم قرار گرفتن این ۹ حرف عبارت است از $\frac{9!}{2!\times 2!\times 2!\times 3!}$ که همان $n(S)$ می‌باشد حال اگر ۳ حرف (ل) را یک حرف فرض کنیم با ۶ حرف دیگر روی هم ۷ حرف شده و حالتهای ممکن که می‌توانند این ۳ حرف همواره کنار هم باشند عبارت است از $\frac{7!}{2!\times 2!\times 2!}$ که همان $n(A)$ می‌باشد پس:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3!\times 7!}{9!}$$

ب) فضای نمونه تغییر نمی‌کند و مانند قسمت الف می‌باشد اما برای این که ۳ حرف بین ۲ حرف (ک) واقع شود ۷ حالت متمایز ایجاد می‌شود که عبارتند از:

I) ۳حرف (ل) بین آنها قرار بگیرند $\rightarrow (3^2)\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 30$

توضیح این که ۳ حرف (ل) و ۲ حرف (ک) را یک حرف فرض کرده و با ۴ حرف دیگر جمعاً ۵ حرف شده که چون ۲ حرف (م) و ۲ حرف (ا) تکراری هستند $\frac{5!}{2!\times 2!}$ جابجایی دارند.

II) ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (م) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!} = 180$

توضیح اینکه ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (م) در بین ۲ حرف (ک) $\frac{3!}{2!}$ حالت جایگشت داشته و فقط ۲ حرف (الف) تکراری غیر از آنها داریم که $\frac{5!}{2!}$ از آنجا حاصل شده.

III) ۲ حرف (ل) و ۱ حرف (الف) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!} = 180$

IV) ۲ حرف (م) و ۱ حرف (ل) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 90$

V) ۲ حرف (الف) و ۱ حرف (ل) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{2!\times 2!} = 90$

VI) ۲ حرف (الف) و ۱ حرف (م) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!} = 60$

VII) ۲ حرف (م) و ۱ حرف (الف) $\rightarrow \frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!} = 60$

توضیح اینکه در دو حالت آخر مثلاً در حالت VII یکی از حالتها به صورت (ل «ک م م ا ک» ل ا ل) می‌باشد که اگر ۲ حرف (ک) و ۳ حرف ما بین آنها را یک حرف فرض کرده، با ۴ حرف باقی مانده ۵ حرف تشکیل می‌دهند که !۵ جابجایی داشته و چون حرف (ل) ۳ بار تکرار شده تعداد جایگشتها عبارت است از $\frac{5!}{3!}$

VIII) ۱حرف (ل) و ۱حرف (م) و ۱حرف (الف) $\rightarrow \frac{5!}{2!}\times 3! = 360$

تعداد کل حالتها در ۸ حالت ذکر شده یعنی $n(A) = 1050$ و $n(S)$ پس از ساده کردن عبارت است از:

$$n(S) = \frac{9!}{2!\times 2!\times 2!\times 3!} = 7560$$

پس:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1050}{7560} = \frac{105}{756}$$

۷ ـ m کتاب تاریخ متمایز و n کتاب جغرافیای متمایز داریم. با توجه به صورت مسأله واضح است که تعداد کتابهای جغرافیا حداکثر می‌تواند یک واحد از تعداد کتابهای تاریخ بیشتر باشد و در بقیه حالتها یا با آن مساوی یا از آنها کمتر می‌باشند. این شرط را نیز با حل مسئله استخراج می‌کنیم:

می‌دانیم چون هیچ یک از کتابهای جغرافیا نباید در کنار یکدیگر باشند بدیهی به نظر می‌رسد که جای این کتابها باید لابه‌لای کتابهای تاریخ باشند یعنی حتی می‌توان بین دو کتاب جغرافیا مثلاً ۲ یا بیشتر کتاب تاریخ قرار داد. برای این منظور ابتدا کتابهای تاریخ را در کنار یکدیگر با ترتیب قرار می‌دهیم تا مکان قرار گرفتن کتابهای جغرافیا مشخص شود.

$m!$ = تعداد حالتهای قرار گرفتن کتابهای تاریخ در کنار یکدیگر

مکان قرار گرفتن کتابهای جغرافیا را لابه‌لای کتابهای تاریخ در نظر می‌گیریم. بنابراین $m+1$ مکان خالی برای قراردادن کتابهای جغرافیا داریم. برای قرار دادن کتابهای جغرافیا در این $m+1$ مکان می‌توان n مکان از این $m+1$ مکان خالی را با جایگشت انتخاب کرد.

$(m+1)_n$ = تعداد مکان‌های قرار دادن کتابهای جغرافیا

واضح است که همواره باید $m+1 \geq n$ درنتیجه بنا به اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کل حالتها} = m!\times(m+1)_n = m!\times\frac{(m+1)!}{(m+1-n)!} = \frac{m!\times(m+1)!}{(m+1-n)!}$$

برای توضیح بیشتر مثلاً ۲ کتاب متمایز جغرافیا و ۳ کتاب متمایز تاریخ را می‌توان بنا به خواسته مسأله به صورت‌های زیر در کنار یکدیگر قرار داد.

(I) ث ج ت ج ت — تعداد جایگشتها $= 2!\times 3!$

(II) ث ت ج ت ج — » » $= 2!\times 3!$

(III) ث ج ت ت ج — » » $= 2!\times 3!$

(IV) ج ث ت ت ج — » » $= 2!\times 3!$

(V) ج ث ج ت ث — » » $= 2!\times 3!$

(VI) ج ث ت ج ث — » » $= 2!\times 3!$

$6\times 2!\times 3! = 72$ = تعداد کل حالتها

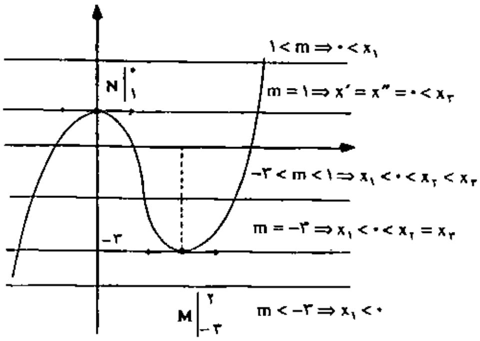
حل: بنا به فرمول داریم $m = 3$ و $n = 2$ درنتیجه

$$\text{تعداد کل حالتها} = \frac{3!\times 4!}{2!} = 72$$

۸ ـ

$$x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$$
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = m \\ y = m \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	−3	↗	$+\infty$



۹ ـ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$y^2 = \frac{1}{\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{y^2}$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$-2\sin 2x = \frac{-2y'}{y^3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{y'}{y^3} \Rightarrow y' = y^3\sin 2x$$

$$y'' = 3y'y^2\sin 2x + 2y^3\cos 2x$$

$$y'' = 3(y^3\sin 2x)(y^2\sin 2x) + 2y^3(\cos 2x)$$

$$y'' = 3y^5(\sin^2 2x) + 2y^3(\frac{1}{y^2})$$

$$y'' = 3y^5(1-\cos^2 2x) + 2y$$

$$y'' = 3y^5(1-\frac{1}{y^4}) + 2y$$

$$y'' = 3y^5(\frac{y^4-1}{y^4}) + 2y$$

$$y'' = 3y^5 - 3y + 2y \Rightarrow y'' + y = 3y^5$$

۱۰ ـ داریم:

$$f(12^\circ) = \sin 12^\circ + \cos 12^\circ + \sin 36^\circ + \cos 36^\circ$$
$$= (\sin 12^\circ + \sin 36^\circ) + (\cos 12^\circ + \cos 36^\circ)$$
$$= 2\sin\frac{12^\circ+36^\circ}{2}\cos\frac{12^\circ-36^\circ}{2} + 2\cos\frac{12^\circ+36^\circ}{2}\cos\frac{12^\circ-36^\circ}{2}$$
$$= 2\sin 24^\circ\cos 12^\circ + 2\cos 24^\circ\cos 12^\circ$$
$$= 2\cos 12^\circ(\sin 24^\circ + \cos 24^\circ)$$
$$= 2\cos 12^\circ\left(\sqrt{2}\cos(24^\circ - 45^\circ)\right) = 2\sqrt{2}\cos 12^\circ\cos 21^\circ$$

۱۱ ـ داریم:

$$x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y$$
$$\sin x\sin y = 1 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - y)\sin y = 1$$
$$\Rightarrow \cos y\ \sin y = 1 \Rightarrow 2\sin y\ \cos y = 2 \Rightarrow \sin 2y = 2$$

چون $-1 \leq \sin 2y \leq 1$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ اخیر و در نتیجه دستگاه مورد نظر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد و همچنین در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ نیز جواب حقیقی ندارد.

۱۲ ـ می‌دانیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$
$$\Rightarrow b = 2R\sin\hat{B} \text{ و } c = 2R\sin\hat{C}$$

پس خواهیم داشت:

$$b + c = 2R\sin\hat{B} + 2R\sin\hat{C} = 4R\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B}+\sin\hat{C}=2\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

از طرفی می‌دانیم، در هر مثلث رابطهٔ $\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\cos\frac{\hat{A}}{2}$ برقرار است، پس:

$$2\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2\cos\frac{\hat{A}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=1$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=\cos(0)\Rightarrow\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=0\Rightarrow\hat{B}-\hat{C}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{B}=\hat{C}}$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۳ ـ داریم:

$$15tg^2x+8\cos 2x=9\Rightarrow 15\left(\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)+8\cos 2x=9$$

$$\overset{(1+\cos 2x\neq 0)}{\Rightarrow}\quad 15-15\cos 2x+8\cos 2x+8\cos^2 2x$$

$$=9+9\cos 2x$$

$$\Rightarrow\quad 8\cos^2 2x-16\cos 2x+6=0$$

$$\Rightarrow\quad 4\cos^2 2x-8\cos 2x+3=0$$

$$\Rightarrow\quad (2\cos 2x-1)(2\cos 2x-3)=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\cos 2x-1=0 \text{ یا } 2\cos 2x-3=0$$

$$\Rightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}\ \text{ یا }\ \cos 2x=\frac{3}{2}>1\ \text{(قابل قبول نیست)}$$

$$\Rightarrow\quad\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

جواب عمومی معادله: $\Rightarrow\quad\boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}}$

۱۴ ـ داریم:

$$\sin^3x+\cos^3x=1$$

$$\Rightarrow\quad\sin^3x+\cos^3x=\sin^2x+\cos^2x$$

$$\Rightarrow\quad\sin^3x-\sin^2x+\cos^3x-\cos^2=0$$

$$\Rightarrow\quad\sin^2x(\sin x-1)+\cos^2x(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad(1-\cos^2x)(\sin x-1)+$$
$$(1-\sin^2x)(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad(1-\cos x)(1+\cos x)(\sin x-1)+$$
$$(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad(1-\cos x)(\sin x-1)(1+\cos x+1+\sin x)=0$$

$$\Rightarrow\quad 1-\cos x=0 \text{ یا } \sin x-1=0 \text{ یا } \cos x+\sin x+2=0$$

$$1-\cos x=0\Rightarrow\cos x=1=\cos(0)\Rightarrow\boxed{x=2k\pi}$$

$$\text{یا }\sin x-1=0\Rightarrow\sin x=1=\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

می‌دانیم: $-\sqrt{2}\le\cos x+\sin x\le\sqrt{2}$ ، بنابراین تساوی $\cos x+\sin x=-2$ قابل قبول نیست.

۱۵ ـ در این برنامه فرض بر این است که از عملکرد توان در BASIC استفاده شود.

```
LET A = 1
INPUT "ENTER NUMBERS FOR X & N "; X, N
FOR I = 1 TO N
  LET A = A * X
NEXT
FOR I = -1 TO N STEP -1
  LET A = A * 1 / X
NEXT
PRINT X; "^"; N; "="; A
```

خروجی برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR X & N ? 2,10
 2 ^ 10 = 1024

ENTER NUMBERS FOR X & N ? 4,-2
 4 ^-2 = .0625
```

۱۶ـ

```
INPUT "ENTER NUMBERS FOR X & N"; X, N
IF X < 0 OR N < 0 OR N <> INT(N) THEN PRINT "ERROR IN INPUT DATA": GOTO 10
LET Y = 0
FOR I = 1 TO N
  LET Y = SQR(Y + X)
NEXT
PRINT "SQR("; X; "+SQR("; X; "+SQR("; X; "+...)))="; Y
END
```

خروجی برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR X & N? 4,7
SQR( 4 +SQR( 4 +SQR( 4 +...)))= 2.561521
```

۱۷ ـ روش اول

ـ بسط دو جمله‌ای $(x+y)^N$ با استفاده از سابروتین

```
INPUT "ENTER A NUMBER FOR N"; N
PRINT "(X+Y)^"; N; "=";
PRINT "X^"; N; "+";
LET K = N: GOSUB 200: NFACT = FACT
FOR T = 1 TO N - 1
  LET K = T: GOSUB 200: KFACT = FACT
  LET K = N - T: GOSUB 200: NKFACT = FACT
  LET A = NFACT / (KFACT * NKFACT)
  PRINT A; "X^"; N - T; ".Y^"; T; "+";
NEXT T
PRINT "Y^"; N
END
REM /*** SUBROUTINE SECTION ***/
LET FACT = 1
FOR I = 1 TO K
  LET FACT = FACT * I
NEXT I
RETURN
END
```

خروجی برنامه:

```
ENTER A NUMBER FOR N? 3
(X+Y)^ 3 =X^ 3 + 3 X^ 2 .Y^ 1 + 3 X^ 1 .Y^ 2 +Y^ 3
```

۱۷ ـ روش دوم

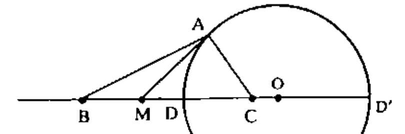
ـ برنامه بسط دوجمله‌ای $(x+y)^N$

```
INPUT "ENTER A NUMBER FOR N"; N
PRINT "(X+Y)^"; N; "=";
PRINT "X^"; N;
LET A = 1
FOR I = 1 TO N - 1
  LET A = ((N - I + 1) * A) / I
  PRINT "+"; A; "X^"; N - I; ".Y^"; I;
NEXT
PRINT "+Y^"; N
END
```

◆ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ می‌دانیم که $BCDD'$ تقسیم توافقی و نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC است. پس:

$$MB^2 = MC^2 = MD.MD' \qquad (1)$$



از طرفی MA بر دایرهٔ O مماس است پس:

$$MA^2 = MD.MD' \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $MB^2 = MC^2 = MA^2$ و یا $MA = MB = MC$. بنابراین مثلث ABC که میانه وارد بر BC نصف آن است در رأس A قائم‌الزاویه است.

۲ ـ نقاط برخورد این کره با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$A: y=0\ ,\ z=0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow A(1+\sqrt{5}\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

$$B: x=0\ ,\ z=0 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow B(0\ ,\ 2\ ,\ 0)$$

$$C: x=0\ ,\ y=0 \Rightarrow z = -2 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow C(0\ ,\ 0\ ,\ -2+2\sqrt{2})$$

$$\vec{AB}(-1-\sqrt{5}\ ,\ 2\ ,\ 0) \text{ و } \vec{AC}(-1-\sqrt{5}\ ,\ 0\ ,\ -2+2\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC}\left(-4+4\sqrt{2}, (1+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-2), 2(1+\sqrt{5})\right)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right|$$

$$= \sqrt{16(-1+\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{5})^2(2\sqrt{2}-2)^2 + 4(1+\sqrt{5})^2}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = 4\sqrt{9 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = 2\sqrt{9 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}$$

۳ ـ معادلهٔ دو صفحهٔ مصور خط D را پیدا می‌کنیم.

$$D: \begin{cases} x = t-1 & \Rightarrow t = x+1 \\ y = 3-2t & \Rightarrow y = 3 - 2(x+1) \Rightarrow \boxed{2x + y - 1 = 0} \\ z = 3t + 4 & \Rightarrow z = 3(x+1) + 4 \Rightarrow \boxed{3x - z + 7 = 0} \end{cases}$$

$$\alpha(2x + y - 1) + \beta(3x - z + 7) = 0$$

$$\boxed{(2\alpha + 3\beta)x + \alpha y - \beta z - \alpha + 7\beta = 0}$$

معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر خط D .

$$P: 2x - y - 2z = 3 \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{\text{دسته صفحه}}(2\alpha + 3\beta, \alpha, -\beta) \text{ و } \vec{V}_P(2, -1, -2)$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{V'}) = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\Rightarrow \cos 60^\circ = \pm \frac{2(2\alpha + 3\beta) - \alpha + 2\beta}{\sqrt{(2\alpha + 3\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2}\ .\ \sqrt{4+1+4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{3\alpha + 8\beta}{3\sqrt{5\alpha^2 + 10\beta^2 + 12\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow 45\alpha^2 + 90\beta^2 + 108\alpha\beta = 36\alpha^2 + 256\beta^2 + 192\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 84\alpha\beta - 166\beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{42\beta \pm \sqrt{3258\beta^2}}{9}$$

$$\alpha = \beta\left(\frac{14 \pm \sqrt{362}}{3}\right) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته صفحه}}$$

با قرار دادن α بر حسب β در معادلهٔ دسته صفحه و حذف β معادلهٔ دو صفحه جواب مسأله به دست می‌آید.

۴ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$$

۵ ـ چون a پوچ توان از مرتبهٔ ۳ است پس $a^3 = \bar{0}$ بنابراین:

$$1 - a^3 = 1 - \bar{0} = 1 \qquad (1)$$

$$(1 - a^3) = (1-a)(a^2 + a + 1) \text{ از طرفی} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (1-a)(a^2 + a + 1) = 1$$

$$\Rightarrow (1-a)^{-1} = (a^2 + a + 1) = 1$$

(توضیح این که «یک حلقه» با هر عضو حلقه مانند a خاصیت جابجایی دارد و کلیهٔ اتحادهای جبری برای آنها برقرار بوده و نیز از این مطلب استفاده شد که اگر $ab = 1$ در این صورت، $b = a^{-1}$.)

۶ ـ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n . قبل از بیان اثبات به این نکته توجه می‌کنیم که اگر به تعداد اعضای یک مجموعه، یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه‌های آن دو برابر می‌شود، زیرا از تمام زیرمجموعه‌های قبل و اضافه کردن آن عضو جدید به هر یک از آنها یک مجموعهٔ جدید تولید می‌شود، مثلاً، اگر $A = \{2,4\}$ در این صورت زیرمجموعه‌های A عبارتند از $\{2\}$، $\{4\}$، $\{2,4\}$، $\{\ \}$ حال اگر عضو جدیدی مانند ۶ به A اضافه کنیم خواهیم داشت، $B = \{2,4,6\}$ که زیر مجموعه‌های آن عبارتند از:

$$\underbrace{\{\ \}, \{2,4\}, \{4\}, \{2\}}_{\text{زیر مجموعه‌های A}}, \{6\}, \{2,4,6\}, \{4,6\}, \{2,6\}$$

که تعداد آنها ۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است.

$n = 1 \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ یک عضوی $= 2^1 = 2$

$A = \{a\} \Rightarrow$ زیر مجموعه‌های A : $\{a\}, \{\ \}$

$n = k \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی =

فرض استقراء 2^k

$n = k+1 \rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

حکم استقراء $= 2^{k+1}$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی $\Rightarrow$ طبق مطالب فوق

$\times 2$ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ k عضوی =

حکم ثابت شد $= 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

۷ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم $A = \overline{xyxy}$ مربع کامل نیست.

$$A = 100\overline{xy} + \overline{xy} = 101\overline{xy}$$

حال اگر A بتواند مربع کامل باشد باید عوامل اول در آن توانهای زوج داشته باشند و چون ۱۰۱ اول است لذا A باید بر 101^2 بخش‌پذیر باشد و این غیرممکن است زیرا 101^2 پنج رقمی است.

۸ ـ برای آن که ثابت کنیم a^n و a^{n+4} رقم یکان برابر دارند کافی است ثابت کنیم $A = (a^{n+4} - a^n)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است (رقم یکان آن صفر است) و برای این منظور با توجه به این که $(2,5) = 1$ کافی است ثابت کنیم A بر ۲ و بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$A = a^{n+4} - a^n = a^n(a^4 - 1) = a^n(a^2-1)(a^2+1)$$

$$= a^n(a-1)(a+1)(a^2+1)$$

I) اگر a زوج باشد a^n نیز زوج بوده پس A بر ۲ بخش‌پذیر است و اگر a فرد باشد $(a-1)$ و $(a+1)$ زوج بوده و A بر ۲ بخش‌پذیر خواهد بود.

II) برای بخش‌پذیری بر ۵ می‌گوییم، اگر a بر ۵ بخش‌پذیر باشد a^n بر ۵ بخش‌پذیر بوده و اگر a بر ۵ بخش‌پذیر نباشد در این صورت یکی از اعداد $a^2 - 1$ و $a^2 + 1$ بر ۵ بخش‌پذیر خواهد بود.

$$\text{اگر a مضرب ۵ نباشد} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a = 5k+1 \\ a = 5k-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - 1 = 5m \\ \left.\begin{array}{l} a = 5k+2 \\ a = 5k-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + 1 = 5n \end{cases}$$

۹ ـ به استقراء می‌توان ثابت کرد که اگر A ماتریسی $n \times n$ و C ماتریسی $n \times n$ وارون‌پذیر باشند در این صورت $(CAC^{-1})^n = CA^nC^{-1}$ حال طبق فرض $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x - 1$ و M وارون‌پذیر و D هم مرتبهٔ M است لذا داریم:

$$f(MDM^{-1}) = (MDM^{-1})^5 - 3(MDM^{-1})^2 + 7(MDM^{-1}) - I$$

$$= MD^5M^{-1} - 3MD^2M^{-1} + 7MDM^{-1} - MIM^{-1}$$

$$= MD^5M^{-1} + M(-3D^2)M^{-1} + M(7D)M^{-1} - MIM^{-1}$$

$$= M(D^5 - 3D^2 + 7D - I)M^{-1} = Mf(D)M^{-1}$$

۱۰ ـ

$$y^2 + x^4 = a^2x^2$$

$$y^2 = a^2x^2 - x^4$$

$$y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

$$y = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$$

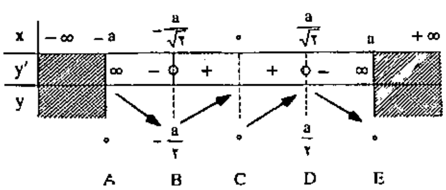
ابتدا منحنی تابع به معادله $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ شکل را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

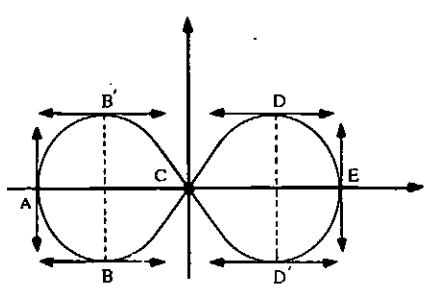
$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad a > 0$$

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow D_f = [-a, +a]$$

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$a^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}} \in D_f$$





۱۱ ـ

$$y = \frac{\sin 2x}{1 - \sin x} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

(منحنی انفصال مضاعف دارد.) ریشه مضاعف

$$1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \frac{2\cos 2x(1 - \sin x) + \cos x \sin 2x}{V^2} = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x)(1 - \sin x) + 2\cos^2 x \sin x = 0$$

$\Rightarrow \sin^3 x - 2\sin x + 1 = 0$

مجموع ضرایب صفر است. معادله را بر $(1-\sin x)$ تقسیم می‌کنیم:

$\Rightarrow (\sin x - 1)(\sin^2 x - \sin x - 1) = 0$

$\sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}},$

$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \# -0/6$

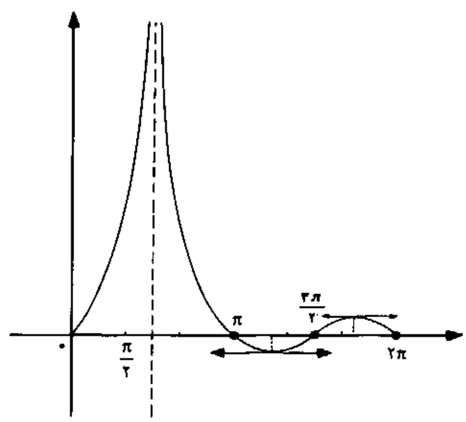
$= \sin(-\alpha)$

$\alpha \# 40^\circ, \begin{cases} x = \pi + \alpha \\ x = 2\pi - \alpha \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi-\alpha$	2π
y'	$+$	$\|$ $-$	$-$	0 $+$	$+$	0 $-$	
y	$0 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-0/6 \nearrow$	$0 \nearrow$	$0/6 \searrow$	0

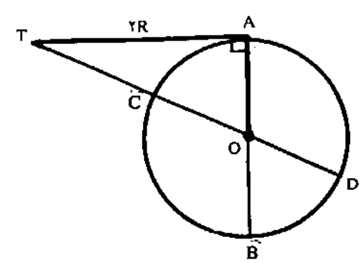


◆ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ بنا به روابط طولی در دایره داریم:

$TC.TD = TA^2 = 4R^2$

امّا $TD - TC = CD = 2R$ پس:



$(TD+TC)^2 = (TC-TD)^2 + 4TC.TD$

$\Rightarrow TD + TC = 4R^2 + 4\times 4R^2 = 20R^2$

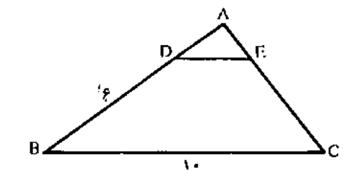
$\Rightarrow TD + TC = 2R\sqrt{5}$

$\Rightarrow \begin{cases} TD + TC = 2R\sqrt{5} \\ TD - TC = 2R \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{TD = R(\sqrt{5}+1)}\ ,\ \boxed{TC = R(\sqrt{5}-1)}$

۲ ـ اولاً بنابه قضیهٔ تالس داریم:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{\frac{a}{5}}{6} = \frac{\frac{a}{10}+\frac{1}{2}}{\frac{2a}{5}+\frac{1}{2}}$



$\Rightarrow \frac{2a^2}{25} + \frac{a}{10} = \frac{3a}{5} + 3 \Rightarrow 4a^2 - 25a - 150 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{25 \pm 55}{8} \Rightarrow a = 10\ ,\ a = \frac{-15}{4}$

ثانیاً: $a = 10 \Rightarrow AD = 2, AE = 1/5, EC = 4/5$

$\Rightarrow AB = 2+6 = 8, AC = 1/5 + 4/5 = 6, BC = 10$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 64 + 36 = 100$

$\Rightarrow 100 = 100$

پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. درنتیجه مثلث ADE نیز قائم‌الزاویه در رأس A می‌باشد.

ثالثاً: برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ BCED داریم:

$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{1}{2}\times 6 \times 8 - \frac{1}{2}\times 2 \times 1/5$

$\Rightarrow S_{BCED} = 24 - 1/5 = 22/5$

۳ ـ

$6m^2x - 2m^4 = 54x \Rightarrow 6m^2x - 54x = 2m^4$

$\Rightarrow (6m^2 - 54)x = 2m^4 \Rightarrow x = \frac{2m^4}{6m^2 - 54}$

اگر مخرج کسر صفر شود معادله ریشهٔ حقیقی ندارد:

$6m^2 - 54 = 0$

$6m^2 = 54 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

۴ ـ داریم:

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2(x_1x_2)}{(x_1x_2)^2} =$

$\frac{2^2 - 2(-2)}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2$

$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3(x_1x_2)(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3} =$

$= \frac{2^3 - 3(-2)(2)}{(-2)^3} = \frac{8+12}{-8} = \frac{20}{-8} = \frac{-5}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}\right) = 2\left(\frac{-5}{2}\right) = -5$

۵ ـ طرف اول معادله همواره مثبت است، بنابراین وقتی معادله جواب حقیقی دارد که تمام عبارتها برابر صفر باشند:

$\sqrt{(2x - 2x^5)^{72}} = 0\ ,\ (x - x^{73})^{72} = 0,$

$|x^3 + 3x^2 + 2x| = 0$

$2x - 2x^5 = 0 \Rightarrow 2x(1 - x^4) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ یا $1 - x^4 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ یا $x^4 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = \pm 1}$

و $x - x^{73} = 0 \Rightarrow x(1 - x^{72}) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x^{72} = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = \pm 1}$

و $x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$\Rightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ یا $\boxed{x = -1}$ یا $\boxed{x = -2}$

از اشتراک مجموعه جوابهای معادلات نتیجه می‌شود که معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد: $x = 0$ یا $x = -1$ (ریشه‌های حقیقی معادله)

۶ ـ $2x^2 - 4mx + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2mx + 1 = 0$

اگر معادله ریشه حقیقی نداشته باشد، داریم:

$\Delta' = m^2 - 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$

۷ ـ $(5x^{32} - 5)(2 - 2x^{16}) \geq 0$

$5(-2)(x^{16} - 1)(x^{32} - 1) \geq 0$

$\Rightarrow -10(x^{16} - 1)(x^{16} - 1)(x^{16} + 1) \geq 0$

$-10(x^{16} - 1)^2(x^{16} + 1) \geq 0$

عبارتهای $x^{16} + 1$ و $(x^{16} - 1)^2$ همواره مثبت می‌باشند. بنابراین داریم:

$x^{16} - 1 = 0 \Rightarrow x^{16} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\{-1, 1\} =$ مجموعه جواب

۸ ـ داریم:

$\begin{cases} 18x^2 + 24x + 6 > 0 \\ 24x - 12x^2 < 0 \\ 0 < x + 1 < 3 \end{cases}$

نامعادلات دستگاه اخیر را ساده می‌کنیم:

$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 > 0 \\ -x^2 + 2x < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0 \\ -x(x-2) < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

$(3x+1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ یا $x = -1$

$-x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 2$

x	$-\infty$	-1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$+\infty$
$(3x+1)(x+1)$	$+$	0	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$-x(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	0	$-$
با شرط $-1<x<2$			جواب $-\frac{1}{3}<x<0$			

بنابراین با شرط $-1 < x < 2$ مجموعه جواب مشترک چنین است:

$\left\{x \middle| -\frac{1}{3} < x < 0\right\} =$ مجموعه جواب مشترک

۹ ـ سه عدد متوالی را به $x-1$ و x و $x+1$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$(x-1) + x + (x+1) = (x-1)x(x+1) \Rightarrow 3x = x^3 - x$

$\Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = \pm 2$

$x = 2:\ 1,\ 2,\ 3 .\quad x = -2:\ -3,\ -2,\ -1 .$

$x = 0:\ -1,\ 0,\ 1$

بنابراین سه عدد متوالی طبیعی ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند و معدل آنان چنین است:

$\frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2 =$ معدل

۱۰ ـ (جملهٔ عمومی تصاعد) $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$

$n = 1:\ a_1 = \frac{1}{2^{1-2}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$ و

$$n=2:\ a_2=\frac{1}{2^{2-2}}=\frac{1}{2^0}=\frac{1}{1}=1$$

$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ (قدر نسبت)

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$\Rightarrow$ $\boxed{S=4}$ (حد مجموع جملات تصاعد)

۱۱ ـ جملهٔ عمومی تصاعد حسابی:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=2:\ a_2=a_1+d=23\\ n=5:\ a_5=a_1+4d=38\end{cases}\Rightarrow$$

$$4d-d=38-23$$

$$3d=15$$

$\boxed{d=5}$ (قدر نسبت)

$a_1=23-d=23-5=18\Rightarrow$ $\boxed{a_1=18}$ (جملهٔ اول)

$$a_{20}=a_1+19d=18+19\times5=18+95=113$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_{20}=113}$ (جملهٔ بیستم)

۱۲ ـ با فرض $\log 7=a$ داریم:

$$\log^{2k}\sqrt{4900}=\frac{1}{2k}\log 4900=\frac{1}{2k}(\log 49+\log 100)$$

$$=\frac{1}{2k}(2\log 7+2)=\frac{2k+2}{2k}=\frac{k+1}{k}$$

۱۳ ـ داریم:

ظرف اول معادله $=\log\left(\sin 30^\circ \log_9(9)^{20}\right)^x$

$$+\log\left(\cos 6^\circ \log_8(8)^{10}\right)^x$$

$$=\log\left(\sin 60^\circ\right)^x+\log\left(\cos 60^\circ\right)^x$$

$$=\log\left(\sin 60^\circ\cos 60^\circ\right)^x=\log\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x$$

$$\Rightarrow\log\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x=\log\left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x=\left(\frac{3\sqrt{3}}{64}\right)^{x-1}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3x-3}\Rightarrow x=3x-3$$

$$\Rightarrow 2x=3\Rightarrow\boxed{x=\frac{3}{2}}$$

۱۴ ـ داریم: $(\log 2=0/301)$

$$\log 8^{10}=\log(2^3)^{10}=\log 2^{30}=30\log 2=30(0/301)$$

$\Rightarrow\log 8^{10}=9/03\Rightarrow$ تعداد ارقام عدد 8^{10}

$=1+$ مفسر $=1+9=10$

بنابراین عدد 8^{10} یک عدد ده رقمی است.

۱۵ ـ با فرض $y=\sin x+\cos x$ داریم:

$$y^2=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{y^2-1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$y^2-1=\frac{1}{3}\Rightarrow y^2=\frac{4}{3}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\Rightarrow\boxed{y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

۱۶ ـ با استفاده از اتحاد:

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$

خواهیم داشت:

$$P=(\cos\theta+\sin\theta)^4-(\cos\theta-\sin\theta)^4$$

$$=\left((\cos\theta+\sin\theta)^2-(\cos\theta-\sin\theta)^2\right)$$
$$\left((\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2\right)$$

$$=(1+2\sin\theta\cos\theta-1+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$(1+2\sin\theta\cos\theta+1-2\sin\theta\cos\theta)$$

$$=(4\sin\theta\cos\theta)(2)=4(2\sin\theta\cos\theta)=4\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow P=4\sin 2\theta\ ,\ \theta=\frac{\pi}{8}:P=4\sin 2(\frac{\pi}{8})=4\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow P=4\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{P=2\sqrt{2}}$$

۱۷ ـ با توجه به اتحاد مثلثاتی:

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$$

داریم:

$$\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}x\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\right)=\frac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}=-1$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}^2x-1\Rightarrow\operatorname{tg}^2x=-1$$

معادلهٔ اخیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. بنابراین معادله مورد نظر در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ دارای جواب نیست.

◆ حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ با استفاده از توزیع‌پذیری ضرب درونی نسبت به جمع بردارها داریم:

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=16\Rightarrow\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=16\Rightarrow$$

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}=16\Rightarrow 25+\vec{a}.\vec{b}=16\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-9$$

$$|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=-9\Rightarrow 5|\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=-9\Rightarrow$$

$$-\frac{5}{2}|\vec{b}|=-9\Rightarrow\boxed{|\vec{b}|=\frac{18}{5}}$$

۲ ـ مساحت صفحهٔ قطری در مکعب به یال a، برابر $a^2\sqrt{2}$ است. پس:

$a^2\sqrt{2}=9\sqrt{2}\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$ اندازهٔ یال مکعب

$\Rightarrow V=a^3=3^3=27$ حجم مکعب

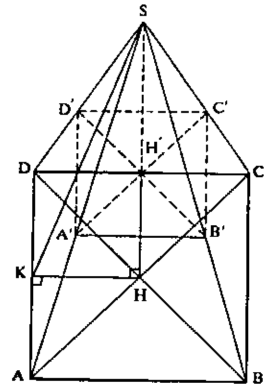
۳ ـ برای محاسبهٔ حجم این هرم، اندازهٔ ضلع قاعده و ارتفاع آن را به دست می‌آوریم می‌دانیم که:

قطر مربع به ضلع a $=a\sqrt{2}\Rightarrow 16\sqrt{2}=a\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{a=16}$

$$\Rightarrow HK=\frac{16}{2}=8\ ,$$

$$SK=10\Rightarrow SH=\sqrt{SK^2-HK^2}=\sqrt{100-64}=6$$

$\Rightarrow SH=h=6$ اندازهٔ ارتفاع هرم



$V=\frac{1}{3}$ سطح قاعده × ارتفاع $\Rightarrow V=\frac{1}{3}(16^2)(6)$ (حجم هرم)

$=512$ واحد حجم

اگر نقطهٔ تقاطع صفحه‌ای که موازی قاعده و به فاصله $\frac{1}{4}$ ارتفاع از قاعده (در نتیجه $\frac{3}{4}$ ارتفاع از رأس هرم) رسم می‌شود با ارتفاع SH را H'، و مقطع این صفحه با هرم را A'B'C'D' بنامیم می‌دانیم که: $\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V_{SABCD}}=(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$ پس داریم:

$$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{512}=\frac{27}{64}\Rightarrow V_{SA'B'C'D'}=216$$

حجم هرم ناقص بالایی $296=216-512=$ هرم ناقص $V\Rightarrow$

۴ ـ داریم:

$$D:4x-2y+3=0$$

$D':6y-12x-12=0$ یا $D':4x-2y+4=0$

فاصلهٔ دو خط موازی D و D' چنین است:

$$d=\frac{|4-3|}{\sqrt{16+4}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\Rightarrow d=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

(طول یک ضلع مربع)

بنابراین داریم:

$$R^2=2d^2=2\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{10}\Rightarrow R\frac{\sqrt{10}}{10}$$

(طول قطر مربع)

۵ـ داریم:

$$m_{AB}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-3}{4-5}=\frac{1}{-1}=-1$$

$\operatorname{tg}\alpha=-1=\operatorname{tg}135^\circ\Rightarrow\alpha=135^\circ$ یا $\boxed{\alpha=\frac{3\pi}{4}}$

۶ ـ می‌دانیم، شرایط پیوستگی چنین است:

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=\lim_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0)$$

بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to0^+}(\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}-4)=\lim_{x\to0^+}(\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}-4)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{a^2x^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2}{\frac{b^2x^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right)^2}-4\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{a^2x^2}{4}(1)}{\frac{b^2x^2}{4}(1)}-4\right)$$

$=\frac{a^2}{b^2}-4$ (حد راست)

$\lim_{x\to0^-}(\frac{x^3-a^3}{x-a}-1)=\frac{-a^3}{-a}-1\overset{(a\neq0)}{=}a^2-1$ (حد چپ)

$F(0)=0$ (مقدار تابع) $\Rightarrow\begin{cases}a^2-1=0\Rightarrow\boxed{a=\pm1}\\ \frac{a^2}{b^2}-4=0\Rightarrow b^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{b=\pm\frac{1}{2}}\end{cases}$

۷ ـ داریم:

$y=\frac{1}{ax+b}\Rightarrow y'=\frac{-a}{(ax+b)^2}$ (مشتق اول)

$\Rightarrow y''=\frac{2a^2}{(ax+b)^3}=\frac{(-1)^2 2!a^2}{(ax+b)^{2+1}}$ مشتق (دوم)

(مشتق سوم) $\Rightarrow y''' = \frac{(-1)^3 3\times 2a^3}{(ax+b)^{3+1}} = \frac{(-1)^3 3!a^3}{(ax+b)^{3+1}}$

$\Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^4 4\times 3\times 2a^4}{(ax+b)^{4+1}} = \frac{(-1)^4 4!a^4}{(ax+b)^{4+1}}$

(مشتق چهارم)

(مشتق پنجم) $\Rightarrow y^{(5)} = \frac{(-1)^5 5!a^5}{(ax+b)^{5+1}}$

و بالاخره مشتق nام برابر است با:

$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$, داریم:

$(n! = n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1)$

۸ ـ نقطهٔ تقاطع خط با محور طولها چنین است:

$y=0: x+y+2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2, A(-2,0)$

می‌دانیم ضریب زاویهٔ خط مماس چنین است:

$m=F'(-2)$

پس داریم:

$F(x)=\sqrt[5]{x^3+9} \Rightarrow F'(x)=\frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3+9)^4}} \Rightarrow m=F'(-2)$

$=\frac{3(-2)^2}{5\sqrt[5]{(-8+9)^4}} \Rightarrow \boxed{m=\frac{12}{5}}$ (ضریب زاویهٔ خط مماس)

۹ ـ در حالت کلی داریم:

$c-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin kx + b\cos kx + c \le c+\sqrt{a^2+b^2}$

پس برای عبارت $A=4\sin x-2\sqrt{5}\cos x+3$ خواهیم داشت:

$3-\sqrt{16+20} \le 4\sin x - 2\sqrt{5}\cos x+3 \le 3+\sqrt{16+20}$

$3-6\le A\le 3+6$

$-3\le A\le 9$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار عبارت A به ترتیب ۳- و ۹ می‌باشد.

۱۰ ـ معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$(\sin x-\cos x)+(\sin^2 x-\cos^2 x)+(\sin^3 x-\cos^3 x)+(\sin^4 x-\cos^4 x)=0$

و یا:

$(\sin x-\cos x)\ [1+\sin x+\cos x+\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin x+\cos x)]=0$

و یا:

$(\sin x-\cos x)\ (2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+2)=0$

بنابراین داریم:

$\sin x-\cos x=0$ یا $2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+2=0$

$\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow tgx=1\Rightarrow \boxed{x_1=k\pi+\frac{\pi}{4}}$

معادلهٔ دوم یک معادلهٔ کلاسیک است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$2\cos^2(x-\frac{\pi}{4})+4\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+3=0$

$\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x_2=2k\pi+\pi}$ یا $\boxed{x_3=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر سه دسته جواب عمومی دارد.

۱۱ ـ داریم:

$A=\sin^2 18^\circ+\sin^2 54^\circ$

$2A=2\sin^2 18^\circ+2\sin^2 54^\circ$, $\alpha=18^\circ$, $\beta=54^\circ$

$2A=2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1-\cos2\alpha+1-\cos2\beta$

$2-2A=\cos2\alpha+\cos2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

با توجه به:

$\alpha+\beta=72^\circ$, $\alpha-\beta=36^\circ$, $\cos(-x)=\cos x$

خواهیم داشت:

$\Rightarrow 2-2A=2\cos72^\circ\cos36^\circ\Rightarrow 1-A=\cos72^\circ\cos36^\circ$

همچنین می‌دانیم:

$\cos72^\circ=\sin(90^\circ-72^\circ)=\sin18^\circ$

پس می‌توان نوشت:

$1-A=\sin18^\circ\cos36^\circ=\frac{2\sin18^\circ\cos36^\circ\cos18^\circ}{2\cos18^\circ}$

$=\frac{2\sin18^\circ\cos18^\circ\cos36^\circ}{2\cos18^\circ}$

$=\frac{\sin36^\circ\cos36^\circ}{2\cos18^\circ}=\frac{\sin72^\circ}{4\cos18^\circ}\Rightarrow 1-A=\frac{\cos18^\circ}{4\cos18^\circ}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1-A=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{A=\frac{3}{4}}$

۱۲ ـ فرض می‌کنیم:

$Arc\cos(1-2t^2)=\alpha$, $Arc\sin t^2=\beta$

پس داریم:

$\cos\alpha=1-2t^2$, $\sin\beta=t^2$, $\alpha=2\beta$

از طرفی می‌دانیم:

$\Rightarrow\cos2\beta=1-2\sin^2\beta$

بنابراین خواهیم داشت:

$\cos\alpha=\cos2\beta\Rightarrow1-2t^2=1-2t^4$

$\Rightarrow t^4-t^2=0\Rightarrow t^2(t^2-1)=0$

$\Rightarrow t^2=0\Rightarrow\boxed{t=0}$

یا $t^2-1=0\Rightarrow t^2=1\Rightarrow\boxed{t=\pm1}$

◆ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یعنی $y=x$ با خطوط $6x+2y=40$ و $kx+y=2$ متقاطع است. بنابراین داریم:

$\begin{cases}y=x\\6x+2y=40\end{cases}\Rightarrow6x+2x=40\Rightarrow8x=40$

نقطهٔ تقاطع: $\Rightarrow x=5$, $y=5$ $\Rightarrow A(5,5)$

$A\begin{vmatrix}x=5\\y=5\end{vmatrix}$: $kx+y=2\Rightarrow5k+5=2$

$\Rightarrow5k=-3\Rightarrow\boxed{k=-\frac{3}{5}}$

۲ ـ داریم:

$x=0: y=2\sin x-\cos3x\Rightarrow y=-1,\ \boxed{A(0,-1)}$

نقطهٔ تلاقی:

$y'=2\cos x+3\sin3x\Rightarrow m=2\cos(0)+3\sin3(0)$

$\Rightarrow\boxed{m=2}$, $y-y_A=m(x-x_A)$

$\Rightarrow y+1=2(x-0)\Rightarrow\boxed{y=2x-1}$ (معادله خط مماس)

۳ ـ داریم: $y=x+1$ و $y=x^3+ax+b$ خط و منحنی روی محور yها بر هم مماس می‌باشند. از آنجا که نقطهٔ تماس متعلق به هر دو نمودار می‌باشد، مختصات آن در هر دو معادله صدق می‌کند:

نقطه تماس: $x=0: y=(0)+1=1\Rightarrow A(0,1)$

$x=0: y=(0)^3+a(0)+b=1\Rightarrow\boxed{b=1}$

$y=x+1\Rightarrow\boxed{m=1}$:ضریب زاویه خط مماس

$y'=3x^2+a\Rightarrow m=3(0)^2+a=1\Rightarrow\boxed{a=1}$

۴ ـ داریم:

$9x^2-16y^2=64y+18x-89$

$\Rightarrow9x^2-18x-16y^2-64y=-89$

$\Rightarrow9(x^2-2x)-16(y^2+4y)=-89$

$\Rightarrow9(x^2-2x+1)-9-16(y^2+4y+4)+64=-89$

$\Rightarrow9(x-1)^2-16(y+2)^2=-144$

$\Rightarrow16(y+2)^2-9(x-1)^2=144$

$\Rightarrow\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$ (هذلولی قائم)

مرکز هذلولی: $C(\alpha=1\ ,\ \beta=-2)$

$a=3$, $b=4$ $\Rightarrow c^2=a^2+b^2=3^2+4^2$

$\Rightarrow c^2=25\Rightarrow c=5$

$A\begin{vmatrix}\alpha\\\beta+a\end{vmatrix}\Rightarrow A\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$, $A'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta-a\end{vmatrix}\Rightarrow A'\begin{vmatrix}1\\-5\end{vmatrix}$

$F\begin{vmatrix}\alpha\\\beta+c\end{vmatrix}\Rightarrow F\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$, $F'\begin{vmatrix}\alpha\\\beta-c\end{vmatrix}\Rightarrow F'\begin{vmatrix}1\\-7\end{vmatrix}$

۵ ـ داریم:

$f(x)=72\cos7x\sin3x=$

$\frac{72}{2}(\sin(3x+7x)+\sin(3x-7x))$

$=36(\sin10x-\sin4x)$

$\Rightarrow F(x)=36(-\frac{\cos10x}{10}+\frac{\cos4x}{4})+c$

$\Rightarrow F(x)=-\frac{18}{5}\cos10x+9\cos4x+c$

۶ ـ

$1)tg(\frac{\pi}{2}-2x)-\cot g(\frac{3\pi}{4}-x)=0$

$\Rightarrow\cot g2x=\cot g(\frac{3\pi}{4}-x)\Rightarrow2x=k\pi+\frac{3\pi}{4}-x$

$\Rightarrow3x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}$

$2)\cos(\frac{\pi}{2}-2x)-\cot g(\frac{\pi}{2}-x)=0$

$\sin2x=tgx\Rightarrow2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\xrightarrow{(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})}2\sin x\cos^2x-\sin x=0$

$\Rightarrow\sin x(2\cos^2x-1)=0$

$\Rightarrow\sin x\cos2x=0\Rightarrow\sin x=0$ یا $\cos2x=0$

$\sin x=0\Rightarrow\boxed{x=k\pi}$ یا $\cos2x=0\Rightarrow2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$

$3)4\sin^2x+2\sin2x+12\cos^2x=10$

$\Rightarrow2\sin^2x+\sin2x+6\cos^2x=5$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$$

اگر طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم و از اتحاد $1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$ نیز استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$2tg^2x + 2tgx + 6 = 5(1+tg^2x)$$

$$\Rightarrow 3tg^2x - 2tgx - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} tgx = 1 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{4}} \\ \text{یا} \\ tgx = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$tgx = tg\alpha \quad (\alpha = Arctg(-\frac{1}{3})) \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{x = k\pi - Arctg(\frac{1}{3})}$$

۷ ـ داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \ , \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow 2\cos\hat{A} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\hat{A} = \cos 60^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 60^\circ}$$

همچنین داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin\hat{A} \ , \ R = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = 2(\sqrt{3})\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

جوابهای تفریح اندیشه

* **جواب ۱:** ۳۶۱/۶=

* **جواب ۲:** بله، جعبه‌های مشخص شده را آن‌طور که نشان داده شده است جابه‌جا کنید.

۸	۶	۲	۵	۱۰	۱	۳	۷	۹	۴
۸	۶	۲	۳	۷	۹	۴	۵	۱۰	۱
۸	۶	۷	۹	۴	۵	۱۰	۱	۲	۳
۸	۶	۷	۹	۱۰	۱	۲	۳	۴	۵
۸	۹	۱۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

* **جواب ۳:** $(\frac{S^2}{2})(4-\pi)$. هر یک از قسمتهای هاشور خورده مساحتی دارد معادل سطح مربع منهای سطح یک ربع از دایره یا $S^2 - (\frac{\pi S^2}{4})$. مساحت دو تا از این ربع دایره‌ها جمع مساحت قسمتهای هاشور خورده را به‌دست می‌دهد.

Borhan
Vol. 5 No. 1
Serial numbers: 15 Autumn 1995

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. Conditions of perpendicular and tangent lines to a conic section. — S. Jafari
2. Topic of Symmetry — A. Ghandehari
3. Short articles of authentic mathematics Jornals. — G. R. Yassipour
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. Recursive problems. — G. R. Yassipour
5. Locus (VI). — M. H. Rostami
6. Several basic concept in set theory — Sh. sadr
7. Answers to letters.
8. Problems.
9. "Concrete" justification in side "proof" — Dr. A. Sharafeddin
10. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
11. Proving of validity of elementary quantification laws.
12. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
13. Vectors (IV) — S. M. R. Hashemi Mosavi
14. Vector space (part one) — H. R. Amiri
15. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
16. A brief history of mathematics magazins in Iran.
17. geometrical representation of complex numbers — R. jahanipoor
18. lines and orthogonal planes — P. Shahriari
19. About the solar system. — H. Nasirnia

مسأله نیزه

از غیاث‌الدین جمشید کاشانی

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دانی عالی مقام و محاسبی ماهر و منجمی زبردست و مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می‌توان او را از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی دانست. تاریخ تولدش دقیق معلوم نیست ولی می‌دانیم که او از حدود سال ۸۰۸ هجری قمری تا پایان عمرش یعنی سال ۸۳۲، فعالیت علمی داشته است. وی در ۱۹ رمضان سال ۸۳۲ در خارج شهر سمرقند درگذشت. وی در محاسبهٔ جذر و کعب پیشقدم بوده و مخترع کسرهای اعشاری می‌باشد. شاهکار او ساختن رصدخانه سمرقند بود. طریقهٔ محاسبهٔ حجم گنبدهای مُجوّف که از فرمولهای مشکل ریاضی است از کارهای او می‌باشد.

این ریاضی‌دان مسلمان دو رسالهٔ مهم دارد: «مفتاح‌الحساب» و «رسالةالمحیطیه». وی در «رسالةالمحیطیه» مقدار عدد π را تا ۱۷ رقم اعشار محاسبه کرده است که دقیق‌ترین مقدار π تا آن زمان است. مسألهٔ زیر یکی از مسائلی است که او طرح و حل نموده است.

مسأله: نیزه‌ای به طور عمودی در آب قرار گرفته و به اندازهٔ ۳ آرش* از آب بیرون است. باد نیزه را منحرف کرده و آن را در آب، به این ترتیب غرق کرد که رأس آن بر آب قرار گرفت و پای آن برجای سابق خود باقی ماند. فاصلهٔ بین موقعیت اول و دومِ آن، برابر ۵ آرش است، ارتفاع نیزه را محاسبه‌کنید.

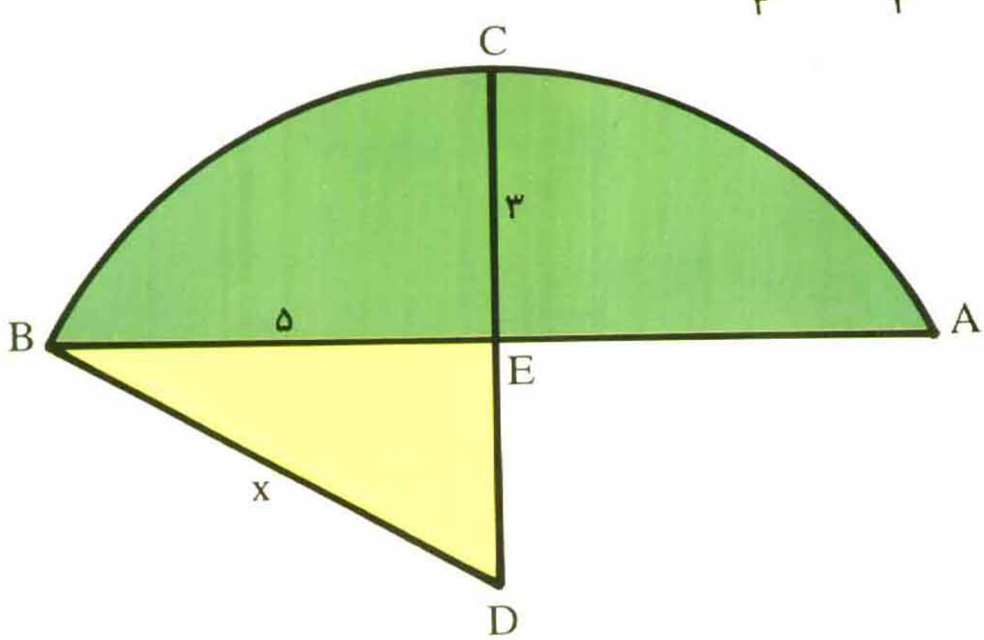
حل: از مثلث قائم‌الزاویهٔ BED (مطابق شکل) به دست می‌آید:

$$(x - ۳)^۲ + ۵^۲ = x^۲$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ + ۲۵ = x^۲$$

$$۶x = ۳۴ \Rightarrow ۳x = ۱۷$$

$$x = \frac{۱۷}{۳} = ۵\frac{۲}{۳} \quad \text{(آرش)}$$



---

* آرَش: واحد اندازه‌گیری طول در قدیم بوده که معادل از آرنج تا سر انگشت است. به آن راع نیز می‌گویند.

مجلهٔ ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۶



سال پنجم، زمستان ۱۳۷۴ شمارهٔ دوم، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی ❑ سردبیر: حمیدرضا امیری
❑ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❑ حمیدرضا امیری ❑ محمدهاشم رستمی ❑ احمد قندهاری ❑ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
❑ غلامرضا یاسی‌پور (باتشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و باتشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)
❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح و صفحه آرا: احمد پیرحسینلو ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

۱ حرف اوّل ■ ۲ شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۶)/ پرویز شهریاری ■ ۸ فضای برداری (قسمت دوم) سال سوم ریاضی نظام قدیم و پیش‌دانشگاهی/ حمیدرضا امیری ■ ۱۳ تاریخچه مجلات ریاضی در ایران (۱۵) ■ ۱۶ حد (قسمت اول) سال سوم نظام جدید و چهارم نظام قدیم/ احمد قندهاری ■ ۲۳ طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به‌روشهای مقدماتی (۱۴) / غلامرضا یاسی‌پور ■ ۲۶ مکان هندسی (قسمت هفتم) اول تا چهارم دبیرستان، نظام جدید و قدیم/ محمدهاشم رستمی ■ ۳۲ آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۲) اول تا چهارم دبیرستان، نظام جدید و قدیم/ حمیدرضا امیری ■ ۳۷ ریاضیات گسسته سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی /غلامرضا یاسی‌پور ■ ۴۱ مبانی کامپیوتر و ...، سوم ریاضی نظام جدید و قدیم /حسین ابراهیم‌زاده قلزم ■ ۴۸ مسائل مسابقه‌ای ■ ۴۹ توان (نما) سال اول نظام جدید و قدیم/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ■ ۵۶ مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبرجهان (۱۴)/ غلامرضایاسی‌پور ■ ۶۱ ریاضیات کاربردی /پرویز شهریاری ■ ۷۱ جواب نامه‌ها ■ ۷۳ معرفی کتاب ■ ۷۵ حل مسائل مسابقه‌ای برهانِ ۱۴ ■ ۷۶ مسائل برای حل ■ ۸۱ حل مسائل برهانِ شمارهٔ ۱۵ ■

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل‌مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن. ۴ـ طرح‌معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.**
- **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**
- **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**
- **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

از خدا جوییم توفیق ادب
بی‌ادب محروم‌ماند از لطف‌ربّ
بی‌ادب تنها نه خود را داشت بد
بلکه آتش بر همه آفاق زد

بار دیگر توفیق رفیق راه شد و حضرت حق (جلّ جلاله) ما را به ضیافتی دلنشین دعوت فرمودند، ضیافتی در دولت‌سرای دوست که حضرتش خود میزبان و میهماندار است. امیدواریم طاعات و عبادات شما عزیزان مورد قبول درگاه حق قرار گرفته باشد و در ماههای بعد نیز با بهره‌گیری از برکات ماه مبارک رمضان با عقیده‌ای صحیح و اخلاقی الهی و عملهای صالح زندگی کنید.

یکی از مهمترین نتایجی که از ماه مبارک به دست می‌آید تسلط بر نفس است که اگر بتوانیم نفس را مهار کنیم، به لطف پروردگار کم کم معنای واقعی انسانیت و نزدیک شدن به حریم پروردگار را در خواهیم یافت.

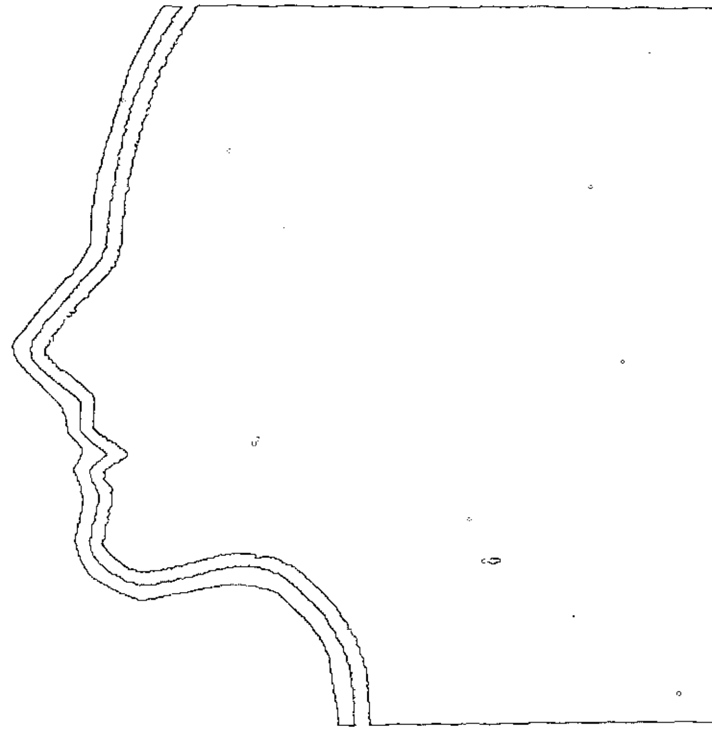
امیدواریم با پشتوانه‌های معنویی که از ماه مبارک رمضان به دست آورده‌اید سال ۷۵ را به خوبی آغاز کنید و سازنده‌تر از پیش حرکت کنید؛ پس در آستانهٔ ورود به سال جدید، از همین حالا سال نو را به همهٔ شما دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجله تبریک و تهنیت عرض می‌کنیم.

در شمارهٔ آیندهٔ مجله، یعنی شمارهٔ ۱۷ تغییراتی در قسمتِ «مسائل برای حل» صورت گرفته است که توصیه می‌کنیم حرف اول را در شمارهٔ آینده حتماً مطالعه نمایید.

سعی کنید ارتباط و مکاتبه را با مجلهٔ خودتان حفظ کرده تا از نظرات، پیشنهادات و انتقادات شما بهره‌مند گردیم.

والسلام ـ سردبیر

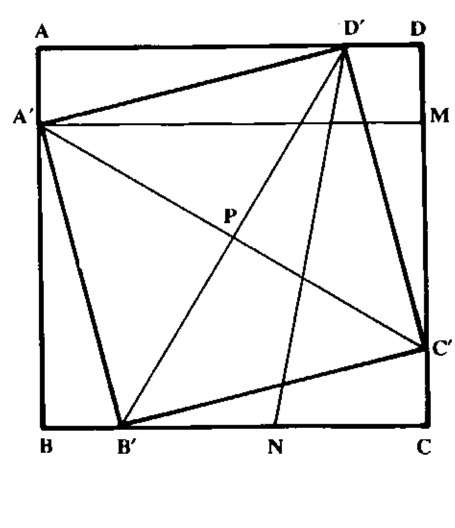
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۶)



O پرویز شهریاری

در شمارهٔ سوم سال اول برهان (تابستان ۱۳۷۱)، در صفحهٔ ۱۰، ضمن آوردن مسأله‌ای از هندسه، دیدیم که چگونه ممکن است، شکل ما را فریب دهد. درواقع، شکل هندسی، می‌تواند از دو طریق در برابر ما دام بگسترد: ۱) در موردی که شکل را اشتباه و بی‌دقت رسم کنیم، و ۲) وقتی که شکل را تنها در حالتی خاص درنظر بگیریم و یا حالت خاصی از آن را از یاد ببریم. در اینجا دو نمونهٔ جالب دیگر می‌آوریم.

مثال ۱۲. مستطیل A′B′C′D′ را در مربع ABCD محاط کرده‌ایم، به نحوی که هر رأس آن روی یکی از ضلعهای مربع ABCD باشد. ثابت کنید، A′B′C′D′ هم، یک مربع است.



* شکل ۱

درواقع، اگر ثابت کنیم، قطرهای مستطیل محاطی (که در نقطهٔ P به هم رسیده‌اند) برهم عمودند، آن وقت مربع بودن این مستطیل روشن می‌شود.

عمودهای A′M و D′N را، به ترتیب، بر ضلعهای CD و BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم الزاویهٔ A′C′M و D′B′N با هم برابرند، زیرا وترهای این دو مثلث، قطرهای مستطیل محاطی‌اند و در مستطیل، دو قطر طولهایی برابر دارند؛ ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ A′M و D′N نیز با هم برابرند (هرکدام برابر ضلع مربع ABCD هستند). از برابری این دو مثلث، نتیجه می‌شود:

$$A'\hat{C'}M = D'\hat{B'}N$$

از اینجا، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$A'\hat{C'}C + D'\hat{B'}N = ۱۸۰°$$

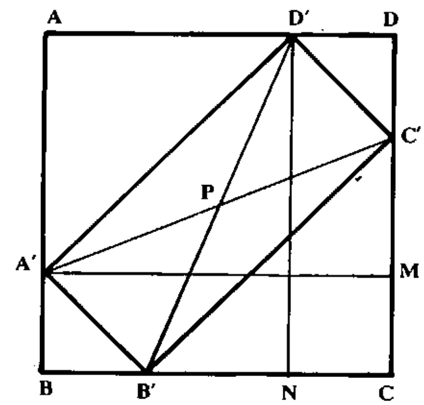
یعنی B′CC′P، یک چهار ضلعی محاطی است و باید داشته باشیم:

$$C'\hat{P}B + B'\hat{C}C' = ۱۸۰°$$

ولی $B'\hat{C}C'$ زاویه‌ای قائمه است، پس زاویهٔ C′PB′ هم قائمه می‌شود؛ یعنی قطرهای مستطیل A′B′C′D′ در نقطهٔ P برهم عمودند. قضیه ثابت و مسأله حل شد.

دوباره در استدلال دقت کنید. هیچ اشتباهی در استدلالها نیست! اشتباه در اینجاست که شکل را در یکی از حالتهای ممکن رسم کرده‌ایم. به شکل ۲ توجه کنید: مستطیل

محاطی را طوری رسم کرده‌ایم که ضلعهای آن موازی با قطرهای مربع ABCD باشند. چه تفاوتی با شکل ۱ دارد؟ در اینجا هم، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ A′MC′ و D′B′M با هم برابرند و درنتیجه، دو زاویهٔ D′B′C و A′C′C با هم برابرند؛ ولی اینها دو زاویهٔ روبه‌رو در چهارضلعی PB′CC′ هستند و از برابری آنها، نمی‌توان محاطی بودن چهار ضلعی PB′CC′ را نتیجه گرفت. مطلب روشن است: اگر مستطیل محاط در مربع، ضلعهای موازی با قطرهای مربع نداشته باشد، خود یک مربع است، ولی اگر ضلعهای مستطیل محاطی موازی قطرهای مربع باشند (به شرطی که رأسهای مستطیل در وسط ضلعهای مربع قرار نگیرند)، مستطیلی با طول و عرض نابرابر است.



* شکل ۲

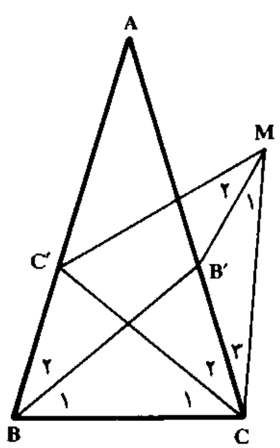
اکنون به یک مسألهٔ کم و بیش تاریخی می‌پردازیم. نیمسازها، در ردیف ارتفاعها و میانه‌ها، از عنصرهای اصلی یک مثلث‌اند. با وجود این، مسأله‌هایی که در رابطه با نیمسازها طرح می‌شوند، دشوارتر از مسأله‌های مربوط به عنصرهای دیگر، از آب درمی‌آیند. به طور مثال با در دست داشتن سه ارتفاع یا سه میانهٔ یک مثلث، می‌توان بسادگی مثلث را رسم کرد، در حالی که رسم مثلث، با معلوم بودن طول سه نیمساز آن، با دشواری مواجه می‌شود. اگر فرصتی دست داد، دربارهٔ این دشواری و علت آن، صحبت خواهیم کرد. در اینجا، به مسألهٔ مشهور دیگری از نیمسازها می‌پردازیم. می‌دانیم، در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای وارد به دو ساق، باهم برابرند، ولی آیا عکس این قضیه هم درست است؟ یعنی، اگر در مثلثی، دو نیمساز داخلی باهم برابر باشند، آیا مثلث متساوی‌الساقین است؟ به زبان دیگر، آیا می‌توان گفت: شرط لازم و کافی، برای متساوی‌الساقین بودن مثلث، این است که دو نیمساز داخلی آن برابر باشند؟

این مسأله، از همان دوران شکوفایی ریاضیات در یونان باستان مطرح شده بود، ولی روش هندسی حل آن به‌دست نمی‌آمد. بظاهر، نخستین کسی که این مسأله را حل کرد، ژاکوب شتینر (Shteiner) ریاضیدان‌سویسی (۱۷۹۶ ـ ۱۸۶۳ میلادی) بود که بیشتر در زمینهٔ هندسه کار می‌کرد و در سال ۱۸۴۰ میلادی توانست راه حلی کم و بیش پیچیده و طولانی برای این مسأله پیدا کند. چهل سال بعد، در سال ۱۸۸۰ میلادی، یک مهندس فرانسوی به نام دسکوب، روش دیگری که خیلی ساده‌تر و براساس برهان خُلف بود، برای حل مسأله پیدا کرد. این روش را، که بسیار جالب است، در اینجا می‌آوریم.

BB′ و CC′ نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC هستند و می‌دانیم:

$|BB'| = |CC'|$

باید ثابت کنیم، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



* شکل ۳

از C′ و B′ ، خطهای راستی، به ترتیب، موازی با (BB′) و (BC′) رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ M به هم برسند. چهار ضلعی BB′MC′ متوازی‌الاضلاع است و، بنابراین

$\hat{M}_2 = \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$

اکنون فرض می‌کنیم، مثلث ABC ، متساوی‌الساقین نباشد و داشته باشیم $\hat{B} > \hat{C}$.

مثلث $MC'C$ متساوی‌الساقین است، زیرا

$$|MC'| = |BB'| = |CC'|$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_3$$

ولی $\hat{M}_2 = \frac{1}{2}\hat{B}$ و $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}\hat{C}$، پس

$$\hat{M}_1 + \frac{1}{2}\hat{B} = \hat{C}_3 + \frac{1}{2}\hat{C}$$

چون فرض کردیم $\hat{B} > \hat{C}$، پس باید داشته باشیم:

$$\hat{M}_1 < \hat{C}_3 \Rightarrow |B'C| < |B'M|$$

و چون $|B'M| = |BC'|$ (ضلعهای روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع $BB'MC'$)، پس

$$|B'C| < |BC'|$$

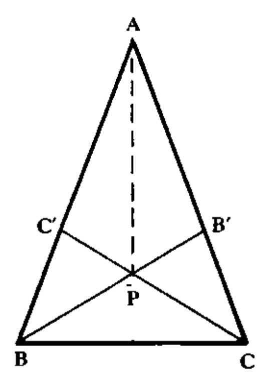
در دو مثلث BCC' و BCB' داریم

$$|BC| = |BC|, |BB'| = |CC'|,$$
$$|B'C| < |BC'|$$

بنابراین $\hat{B}_1 < \hat{C}_1$ یا، اگر دو طرف نابرابری را دو برابر کنیم: $\hat{B} < \hat{C}$.

به این ترتیب، با فرض $\hat{B} > \hat{C}$، به نتیجهٔ $\hat{B} < \hat{C}$ رسیدیم. با روشی مشابه، می‌توان ثابت کرد که با فرض $\hat{B} < \hat{C}$ به نتیجهٔ $\hat{B} > \hat{C}$ می‌رسیم، یعنی در هر دو حالت $\hat{B} > \hat{C}$ و $\hat{B} < \hat{C}$ مواجه با تناقض می‌شویم. تنها یک راه می‌ماند: $\hat{B} = \hat{C}$؛ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

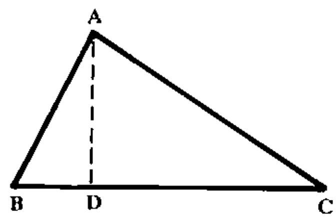
برای این مسأله، راه حل سادهٔ دیگری وجود دارد که، درضمن، موجب اثبات قضیهٔ کلی‌تری می‌شود.

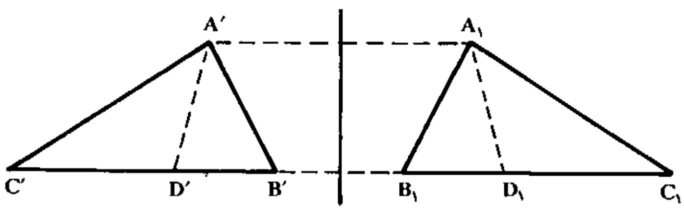


* شکل ۴

اگر نقطهٔ برخورد نیمسازهای BB' و CC' را P بنامیم، روشن است که AP نیمساز زاویهٔ A می شود (سه نیمساز داخلی هر مثلث، از یک نقطه می‌گذرند): اگر بتوانیم برابری‌دو مثلث ABB' و $AC'C$ را ثابت کنیم، متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC ثابت می‌شود. این دو مثلث، در زاویهٔ A و نیمساز همین زاویه مشترک‌اند و، درضمن، قاعده‌هایی برابر دارند. بنابراین، برای حل مسأله، باید این قضیه را ثابت کنیم:

اگر در دو مثلث، یک ضلع، زاویهٔ روبه‌روی آن ضلع و نیمساز داخلی همین زاویه، برابر باشند، آن وقت، این دو مثلث برابرند.

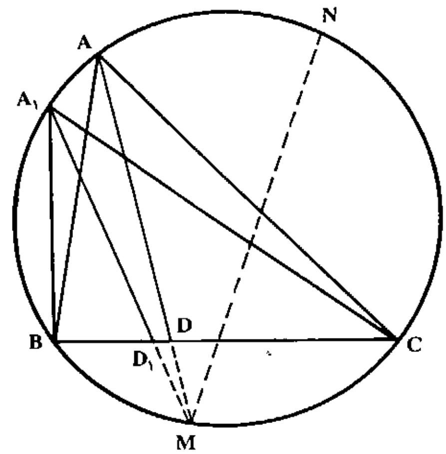




* شکل ۵

دو مثلث را هم‌جهت در نظر می‌گیریم. این فرض، لطمه‌ای به کلی بودن قضیه نمی‌زند. درواقع، اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌جهت نباشند (شکل ۵)، می‌توان به‌جای مثلث $A'B'C'$، مثلث $A_1B_1C_1$ را، که قرینهٔ محوری مثلث $A'B'C'$ نسبت به محور عمود بر $B'C'$ است، انتخاب کرد.

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ را طوری روی مثلث ABC قرار دهیم که B_1 بر B و C_1 بر C قرار گیرند و A_1 در همان نیم‌صفحهٔ شامل A باشد، آن وقت، اگر A_1 بر A قرار گیرد، قضیه ثابت شده است. فرض می‌کنیم، A_1 بر A واقع نشود و در نقطه‌ای روی کمان BA باشد (چون دو زاویهٔ A و A_1 برابرند، نقطهٔ A_1 روی کمان دایره واقع می‌شود؛ درضمن، اگر A_1 را روی کمان AN هم بگیریم، روش استدلال تغییر نمی‌کند).



* شکل ۶

شرطها را مرور کنیم: در دو مثلث ABC و A_1BC، قاعدهٔ BC مشترک، دو زاویهٔ A و A_1 و، همچنین، طولهای دو نیمساز AD و A_1D_1 برابرند.

امتدادهای AD و A_1D_1 از نقطهٔ M، وسط کمان BC می‌گذرند. می‌دانیم وتر کوچکتر، متعلق به کمان کوچکتر است، یعنی

$$|A_1D_1| + |D_1M| < |AD| + |DM|$$

چون، نیمسازهای AD و A_1D_1، طولهایی برابر دارند، پس باید داشته باشیم:

$$|D_1M| < |DM|$$

و این ممکن نیست، زیرا قطر NM بر وتر BC عمود است و وضع دو مایل MD و MD_1 طوری است که باید داشته باشیم: $|D_1M| > |DM|$. وجود این تناقض به معنای آن است که A_1 بر A قرار می‌گیرد و دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ قابل انطباق بر یکدیگرند.

در اینجا به دو نتیجهٔ اصلی توجه کنیم:

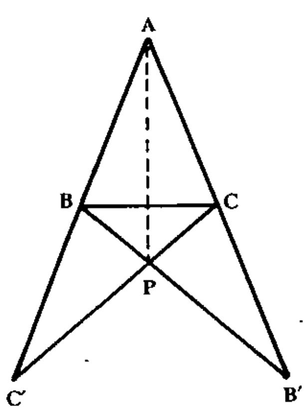
۱) معیار تازه‌ای، برای برابری دو مثلث به‌دست آوردیم: **شرط لازم و کافی، برای برابری دو مثلث این است که، در یک ضلع، زاویهٔ روبه‌رو بـه آن ضلع و نیـمـساز داخلی همان زاویه برابر باشند.**

۲) در اثبات قضیه، از نیمساز بودن پاره‌خطهای راست BB' و CC' استفاده نکردیم، بنابراین، مسألهٔ اصلی را می‌توان به این صورت تعمیم داد: **اگر در مثلث ABC، پاره‌خطهای راست BB' و CC' روی نیـمـساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC یکدیگـر را قطع کـرده باشنـد، آن وقت، برابر طولهـای پاره خطهـای راست BB' و CC'، به مـعنای متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC است.**

اکنون ممکن است این پرسش پیش آید که آیا برابر بودن طول نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C، این بار هم به معنای متـساوی‌السـاقین بودن مـثلث ABC است؟ بظاهر، باید، پاسخ مثبت باشد. به شکل ۷ توجه کنید؛ دو مثلث ABB' و ACC' با هم برابرند، زیرا در زاویهٔ A و نیـمـساز AP از همـین زاویه مشترک‌اند (می‌دانیم، نیمساز داخلی زاویهٔ A، از نقطهٔ برخورد نیمسازهای خارجی‌دو زاویهٔ B و C می‌گذرد) و ضلع روبه‌روی به زاویهٔ A در دو مـثلث (یـعنی BB' و CC') طولهـایی برابر دارند، بنابراین، بنابر معیار تازه‌ای که در مـورد برابری دو مثلث پیدا کردیم، این دو مثلث برابر می‌شوند و داریم:

$$|AB| = |AC|$$

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



* شکل ۷

به این استـدلال که روی شکل ۷ (یعنی مُدلی که برای مسـأله ساختـه‌ایم) انجام دادیم، هیچ ایرادی نمـی‌توان گرفت. با وجود این، به کمک مثلثات و اندکی مـحاسبه، می‌توان ثابت کرد (صـفحـهٔ ۲۵۵ از کـتاب «مـسابقه‌هـا، کنکورها و المـپیادهای ریاضی» را ببـینیـد) که، **اگـر دو نیـمـساز خـارجی دو زاویهٔ مـثلث، طولهـایی برابر داشتـه باشند، مـمکن است مـثلث متـساوی‌الساقیـن نبـاشد.** مثلاً اگر مـثلثی با این زاویه‌ها رسم کنیم:

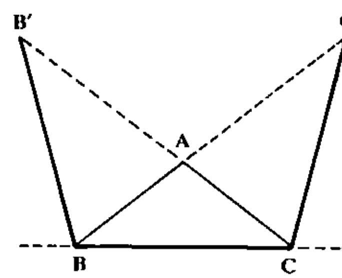
$$\hat{A} = ۳۶°, \hat{B} = ۱۳۲°, \hat{C} = ۱۲°$$

آن وقت، نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C ، طولهایی برابر پیدا می‌کنند، در حالی که مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست (چنین مثلثهایی را، شبه متساوی‌الساقین می‌نامند).

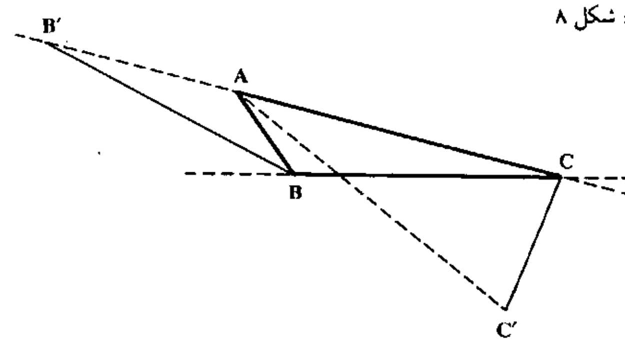
اشکال در کجاست؟ چه اشتباهی رخ داده است؟

درواقع، در رسم شکل (یعنی در ساختن مُدل) تنها به یکی از حالتهای ممکن توجه کرده‌ایم.

به شکلهای ۸ و ۹ توجه کنید.



* شکل ۸



* شکل ۹

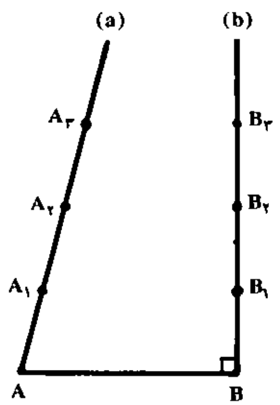
در شکل ۸، هردو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C، در نیم‌صفحهٔ شامل نقطهٔ A ، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند و در شکل ۹، یکی از نیمسازهای خارجی (نیمساز خارجی زاویهٔ B) در نیم‌صفحهٔ شامل نقطهٔ A ، نیمساز دیگر (نیمساز خارجی زاویهٔ C) در نیم‌صفحه‌ای که شامل A نیست، امتداد ضلعها را قطع کرده‌اند. بنابراین، مُدل ما برای حل مسأله، ناقص بود، چون تنها یکی از سه حالت ممکن را در نظر گرفته‌ایم. مسأله وقتی به‌طور کامل حل می‌شود که دو حالت مربوط به شکلهای ۸ و ۹ را هم در نظر بگیریم.

درواقع، در دو حالت شکل ۷ و شکل ۸، با مثلث متساوی‌الساقین و در حالت شکل ۹ با مثلث شبه‌متساوی‌الساقین سر و کار داریم (در مثلث شبه‌متساوی‌الساقین، زاویهٔ A کوچکتر از زاویهٔ ۶۰ درجه است).

مثال بعدی، هم استدلال و هم مُدل شکل، ما را فریب می‌دهد. این مسأله و استدلال سفسطه‌آمیز آن، متعلق به پروکلوس(۴۱۰ ـ ۴۸۵ میلادی)، فیلسوف ذهن‌گرا و نوافلاطونی یونان باستان است.

به شکل ۱۰ توجه کنید: خط راست(a) با پاره‌خط راست AB زاویه‌ای حاده ساخته است و خط راست B بر پاره خط راست AB عمود است. نقطه‌های A_1 و B_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{2}|AB|$$

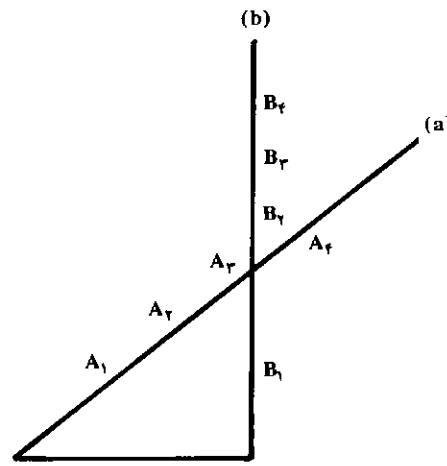


* شکل ۱۰

پاره‌خطهای راست AA_1 و BB_1 نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، زیرا، اگر این دو پاره‌خط راست، یکدیگر را در نقطه‌ای مثل M قطع کنند، آن وقت در مثلث MAB ، طول ضلع AB از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر می‌شود. به همین ترتیب، پاره‌خطهای راست $|A_1A_2| = |B_1B_2| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$ نمی‌توانند نقطهٔ برخوردی مثل N داشته باشند، زیرا طول ضلع A_1B_1 در مثلث NA_1B_1 نمی‌تواند از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد. اگر این استدلال را، ادامه دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که، خطهای راست(a) و (b) ، هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

اشتباه در کجاست؟ نخست این که، شکل ۱۰، یعنی مُدل خود را، طوری رسم کرده‌ایم که نمی‌تواند اشتباه را روشن کند. دوم این که، از این استدلال تنها می‌توان نتیجه گرفت که، پاره‌خطهای مایل و عمود هم‌شماره (AA_1 و BB_1 یا A_1A_2 و B_1B_2 و غیره) یکدیگر را قطع نمی‌کنند و به قول خود

پروکلوس، از این راه نمی‌توان برخورد دو خط راست (a) و (b) را ثابت کرد، ولی به این معنا نیست که (a) و (b) نقطهٔ برخورد ندارند. مثلاً از کجا معلوم است که A_kA_{k+1} و B_nB_{n+1} $(k \neq n)$ یکدیگر را قطع نکنند (شکل ۱۱). به این ترتیب، چیزی را ثابت کرده‌ایم و چیز دیگری را نتیجه گرفته‌ایم.



* شکل ۱۱



برای یک مهماندار هواپیما لازم است که لباسش را هر روز تغییر دهد. چنانچه او به‌ازای هر شلوار سه بلوز و به‌ازای هر بلوز دو روسری داشته باشد، در طی سه سال به چند بلوز احتیاج دارد تا بتواند هر روز از یک لباس متفاوت با روزهای دیگر استفاده کند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



منطق قوانینی را به‌دست می‌دهد که انسان را از اشتباه و لغزش و خطای در معقولات بازمی‌دارد، قوانینی که به‌وسیلهٔ آنها، در معقولات، آنچه را که ممکن است خطا کننده‌ای در آنها خطا کند می‌آزمایند. زیرا در مورد برخی از معقولات هرگز امکان ندارد که اشتباهی پیش آید، و آن همان معقولاتی است که آدمی گویی بنابر فطرت می‌تواند آنها را بشناسد، و دربارهٔ آنها یقین حاصل کند، مانند اینکه کُلّ بزرگتر از جزء است، یا عدد سه فرد است. اما امور دیگری نیز هست که ممکن است در آنها خطایی پیش‌آید و آدمی را در رسیدن به حقیقت به اشتباه بی‌افکند، این‌گونه امور باید با فکر و اندیشه و از طریق قیاس و استدلال فهمیده شود. در این دسته از امور است ــ نه در آن دستهٔ اول ــ که هرکس خواستار دست یافتن به حقیقت یقینی امور مطلوب باشد، به قوانین منطق نیازمند می‌شود.

احصاء العلوم فارابی

ترجمهٔ خدیوجم

موضوعهای منطق آن چیزهاست که قوانین منطق برای آنهاست، و این موضوعها عبارت‌اند از: مَعقُولات، از جهت دلالت الفاظ بر آنها، و اَلفاظ، از لحاظ دلالتشان بر معقولات.

احصاء العلوم فارابی

ترجمهٔ خدیوجم

فضای برداری

(قسمت دوم)

حمیدرضا امیری

ترکیب خطی

استقلال خطی و وابستهٔ خطی

(برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی و پیش‌دانشگاهی نظام جدید)

در شمارهٔ قبل راجع به دستگاهی ریاضی به نام فضای‌برداری صحبت کرده و چهارچوب اصلی این ساختمان ریاضی را بنا کرده و در مورد زیر فضاهای یک فضای برداری نیز مطالبی عنوان کردیم.

حال می‌خواهیم به داخل این ساختمان قدم نهاده و اجزای تشکیل‌دهندهٔ این ساختمان که همان بردارهای فضای برداری می‌باشند را، مورد بررسی قرار داده و خواص بردارهای یک فضای برداری را مطالعه و تجزیه و تحلیل کنیم.

تذکر: از این به بعد به اعضای هر فضای برداری، بردار می‌گوییم، مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$، هر زوج مرتب یک بردار است و یا در فضای برداری ماتریسهای 2×2 هر ماتریس 2×2 یک بردار است.

هرگاه در فضای برداری V، چند بردار را در نظر گرفته، و در هر کدام اسکالری (عددی) ضرب کرده و با هم جمع کنیم اصطلاحاً یک **ترکیب خطی** از آن بردارها بوجود می‌آید که حاصل این جمع نیز برداری است از فضای V، بنابراین: اگر V_1 و V_2 و ... و V_n، بردارهایی از فضای برداری V باشند و α_1 و α_2 و ... و α_n اعداد حقیقی از میدان اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)، باشند در این صورت بردار $(\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_nV_n)\in V$ را ترکیب خطی از n بردار فوق می‌نامند.

مثال: اگر $(1,2)$ و $(\frac{1}{2},5)$ و $(\sqrt{2},-1)$ بردارهایی از فضای برداری $\mathbb{R}^2$ باشند در این صورت ۲ ترکیب خطی از این بردارها به قرار زیر است:

$$-1(1,2)+4(\frac{1}{2},5)+\sqrt{8}(\sqrt{2},-1)$$
$$2(1,2)+\sqrt{2}(\sqrt{2},-1)+\frac{1}{5}(\frac{1}{2},5)$$

قرارداد: اگر در یک ترکیب خطی همهٔ ضرایب (اسکالرها) با هم صفر نباشند و لااقل یکی از آنها مخالف صفر باشد به آن ترکیب خطی یک ترکیب خطی ناصفر می‌گویند واضح است که از چند بردار یک فضای برداری بی‌نهایت ترکیب خطی می‌توان تشکیل داد!

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا چند بردار، در یک فضای برداری، همیشه می‌توانند به کمک یکدیگر و با ایجاد یک بستگی تنگاتنگ، بردار صفر آن فضا را بوجود آورده و به عبارت دیگر آیا همواره یک ترکیب خطی ناصفر از چند بردار یک فضا می‌توان یافت که مساوی، با بردار صفر آن فضا شود؟ مثلاً در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ بردارهای $(1,2)$ و $(-3,2)$ مفروض‌اند می‌خواهیم به سؤال قبل دقیق‌تر پاسخ دهیم یعنی

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا می‌توان ترکیبی خطی و ناصفر از این دو بردار یافت، که مساوی با بردار صفر $\mathbb{R}^2$ که همان $(0,0)$ است، باشد یا خیر؟ برای این منظور ضرایبی دلخواه مانند x و y در نظر گرفته و یک ترکیب خطی دلخواه با آنها تشکیل داده و مساوی با $(0,0)$ قرار می‌دهیم و از آنجا ضرایب x و y را به دست می‌آوریم:

$$x(1,2)+y(2,-3)=(0,0)\Rightarrow (x,2x)+(2y,-3y)=(0,0)$$

$$\Rightarrow {}^{-2}\begin{cases}x+2y=0\\2x-3y=0\end{cases}\Rightarrow -7y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow x=0$$

یعنی تساوی اول در صورتی برقرار است که $x=y=0$

یعنی دو بردار $(1,2)$ و $(2,-3)$ نتوانستند به کمک هم بردار صفر را تولید کنند و مشاهده می‌شود ایجاد بردار صفر به این دو بردار بستگی نداشته و مستقیماً به ضرایب وابسته است. به عبارت دیگر این ضرایب ترکیب خطی هستند که بردار صفر را تولید کردند، نه خود بردارها، به چنین بردارهایی، بردارهای مستقل خطی می‌گویند و در حالت کلی: بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V، **مستقل خطی‌اند**، هرگاه هر ترکیب خطی از این n بردار، که مساوی با بردار صفر شود، صفر بودن همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی را نتیجه دهد و یا به بیان ریاضی:

$$\forall\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\dots+\alpha_nV_n=\overline{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$$

مسألهٔ ۱: آیا بردارهای $(1,2,3)$ و $(0,1,-1)$ و $(-1,0,2)$ در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی‌اند؟

حل: یک ترکیب خطی دلخواه از بردارهای فوق، مساوی با بردار صفر فضای $\mathbb{R}^3$ یعنی $(0,0,0)$ قرار داده و اثبات می‌کنیم ضرایب آن ترکیب خطی فقط باید صفر باشند.

$$x(1,2,3)+y(0,1,-1)+z(-1,0,2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (x,2x,3x)+(0,y,-y)+(-z,0,2z)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\Rightarrow x=z\\2x+y=0\\3x-y+2z=0\end{cases}$$

$$\overset{x=z}{\Rightarrow}3x-y+2x=0\Rightarrow\begin{cases}5x-y=0\\2x+y=0\end{cases}\Rightarrow 7x=0\Rightarrow\boxed{x=0}$$

$$x=0\Rightarrow\boxed{z=0}\Rightarrow\boxed{y=0}$$

پس طبق تعریف بردارهای فوق مستقل خطی‌اند.

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان توسط چند بردار در یک فضای برداری بردار صفر را تولید کرد، به شرط آن که خود بردارها نیز در ایجاد بردار صفر نقش داشته باشند. (همهٔ ضرایب ترکیب خطی با هم صفر نباشند) مثلاً بردارهای $(1,-2)$ و $(-2,4)$ را در نظر می‌گیریم در این صورت اگر قرار دهیم:

$x(1,-2)+y(-2,4)=(0,0)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-2y=0\\-2x+4y=0\end{cases}$$

در دستگاه فوق اگر معادلهٔ اول را در عدد ۲- ضرب کنیم دقیقاً معادلهٔ پایین حاصل می‌شود پس با یک معادله و دو مجهول روبرو هستیم که چنین معادله‌ای دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، ازجمله اگر قرار دهیم $x=2$ خواهیم داشت، $y=1$ پس:

$$2(1,-2)+1(-2,4)=(0,0)$$

به چنین بردارهایی که قادر به تولید بردار صفر فضا هستند بردارهای وابستهٔ خطی می‌گویند و در حالت کلی:

هرگاه بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_n از فضای برداری V مستقل خطی نباشند، وابستهٔ خطی هستند و یا به عبارت دیگر، هرگاه لااقل یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر وجود داشته باشند به شرطی که در بین ضرایب آن ترکیب خطی، لااقل یک ضریب مخالف صفر موجود باشد.

مسألهٔ ۲: در فضای برداری چند جمله‌ایهای از درجه ۳ و کوچکتر از ۳ یعنی،

$$V=\{ax^3+bx^2+cx+d\ |a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$

ثابت کنید بردارهای (x^3+x^2-2x+1)، (x^2+x-2)، $(2x+1)$ و ۵، مستقل خطی‌اند.

فرض کنیم: $\alpha_1(x^3+x^2-2x+1)+\alpha_2(x^2+x-2)+\alpha_3(2x+1)+5\alpha_4\equiv\underbrace{0x^3+0x^2+0x+0}_{\overline{0}}$

$$\Rightarrow\alpha_1x^3+(\alpha_1+\alpha_2)x^2+(-2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x+(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4)\equiv\overline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ -2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+5\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

(با حل دستگاه مشاهده می‌شود که همگی ضرایب باید مساوی با صفر باشند پس بردارها طبق تعریف مستقل خطی‌اند)

تذکر مهم: اگر در یک دستگاه معادلات تعداد مجهولات از تعداد معادلات دستگاه بیشتر باشد همواره دستگاه دارای بی‌نهایت جواب غیرصفر است، به مثال زیر و نحوهٔ حل دستگاه و پیدا کردن جوابهای غیرصفر دقت کنید:

مثال: مطلوب تعیین دو جواب غیرصفر برای دستگاه

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x-y+2z=0\end{cases}$$

حل: یکی از مجهولات را برابر با پارامتر t در نظر می‌گیریم و دو مجهول دیگر را برحسب آن یعنی t محاسبه می‌کنیم.

$$y=t\Rightarrow \overset{\times 2}{\begin{cases}x-z=-t\\ 2x+2z=t\end{cases}}\Rightarrow 4x=-t\Rightarrow \boxed{x=\frac{-t}{4}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{4}-z=-t\Rightarrow \frac{-t}{4}+t=z\Rightarrow \boxed{z=\frac{3t}{4}}$$

و $\boxed{y=t}$. حال اگر به t مقادیر حقیقی غیرصفر نسبت دهیم جوابهای غیرصفر برای دستگاه حاصل می‌شود،

$$t=1\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ y=1\\ z=\frac{3}{4}\end{cases} \quad , \quad t=4\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=4\\ z=3\end{cases}$$

مسألهٔ ۳: در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارهای موجود در یک مجموعه، $(n+1)$ بردار یا بیشتر باشد، همهٔ آنها وابستهٔ خطی‌اند. (در $\mathbb{R}^n$ اگر تعداد بردارها از بُعد فضا یعنی n بیشتر باشد، وابسته خطی خواهند بود.)

حل: با توجه به تذکر و مثال قبل واضح است که اگر مثلاً $(n+1)$ بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم و بخواهیم یک ترکیب خطی از این بردارها، مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ یعنی $(\overbrace{0,0,\dots,0}^{n \text{ تا}})$ قرار دهیم به یک دستگاه با n معادله، (تعداد صفرهای بردار صفر) و $(n+1)$ مجهول (تعداد ضرایب ترکیب خطی) خواهیم رسید که چنین دستگاهی همواره بی‌نهایت جواب غیرصفر داشته و لذا بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه: هر سه بردار در فضای $\mathbb{R}^2$ و یا هر چهار بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۴: ثابت کنید، هر بردار ناصفر در فضای برداری V به تنهایی مستقل خطی است.

حل: فرض کنیم $u\in V$ و $u\neq\vec{0}$ حال نشان می‌دهیم u مستقل خطی است:

فرض کنیم $\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha u=\vec{0}\overset{\text{طبق قضیه}}{\Longrightarrow}\alpha=0\vee u=\vec{0}\overset{u\neq\vec{0}}{\Longrightarrow}\alpha=0$

پس u طبق تعریف مستقل خطی است.

مسألهٔ ۵: ثابت کنید بردار صفر در هر فضای برداری، به تنهایی وابستهٔ خطی است.

حل: کافی است ترکیبی خطی از بردار صفر با ضریبی ناصفر و مساوی با بردار صفر نشان دهیم که با توجه به قضایای کتاب، بدیهی است زیرا:

$$\forall\alpha\neq 0\ ,\ \alpha.\vec{0}=\vec{0}$$

مسألهٔ ۶: نشان دهید اگر برداری مضرب ناصفری از یک بردار دیگر باشد، آن دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

حل: فرض کنیم $u=\alpha V$ و $\alpha\neq 0$، در این صورت داریم:

$$u=\alpha V\Rightarrow u-\alpha V=\vec{0}\ ,\ -\alpha\neq 0$$

چون یک ترکیب خطی ناصفر از دو بردار u و V، مساوی با بردار صفر به دست آمد طبق تعریف این دو بردار وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۷: ثابت کنید، اگر در بین یک مجموعه از برداری هر فضای برداری، چند بردار وابسته خطی وجود داشته باشد، تمامی بردارهای آن مجموعه وابسته خطی خواهند بود.

حل: فرض کنیم V_1 و V_2 و ... و V_n، n بردار از فضای برداری V باشند و فرض کنیم بردارهای V_1 و V_2 و ... و V_p که $(p<n)$، p بردار از این n بردار بوده و وابستهٔ خطی باشند ثابت می‌کنیم تمام n بردار وابستهٔ خطی‌اند.

$$V_1 \text{ تا } V_p\Rightarrow \exists\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\dots+\alpha_p V_p=\vec{0} \qquad (1)$$

وابستهٔ خطی‌اند. $\exists \alpha_i \neq 0 \quad 1 \le i \le p$ و

حال رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1) \Rightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_p V_p + 0.V_{p+1} + \dots + 0.V_n = \vec{0}$$

$$\exists \alpha_i \neq 0 \quad \text{و} \quad (2)$$

رابطهٔ (۲) که همان (۱) است (زیرا فقط $(n-p)$ تا صفر به آن اضافه شده) نشانگر این مطلب است که ترکیبی خطی از n بردار V_1 تا V_n مساوی با بردار صفر شده و اطمینان داریم حداقل یکی از ضرایب این ترکیب خطی (از α_1 تا α_p) مخالف صفر است، پس طبق تعریف، n بردار V_1 تا V_n وابستهٔ خطی‌اند.

نتیجه ۱: اگر در بین مجموعه‌ای از برداری یک فضای برداری دو بردار مضرب ناصفری از هم باشند، تمام بردارهای آن مجموعه وابستهٔ خطی‌اند، زیرا: طبق مسألهٔ ۶ دو بردار که مضرب ناصفر هم باشند وابسته بوده و طبق مسألهٔ ۷، وابستگی خطی از جزء به کل سرایت کرده و تمامی بردارها وابستهٔ خطی خواهند شد.

نتیجه ۲: چون ثابت کردیم بردار صفر در هر فضای برداری وابستهٔ خطی است لذا طبق مسألهٔ ۷، «هر مجموعه از بردارهای یک فضا که شامل بردار صفر باشد، وابستگی خطی خواهند داشت».

نتیجهٔ ۳: هر زیر مجموعه از یک مجموعه بردارهای مستقل خطی در یک فضای برداری، مستقل خطی است. به عبارت دیگر اگر مجموعه بردارهای $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$، در فضای برداری V مستقل خطی باشند در این صورت هر زیرمجموعهٔ دلخواه از این بردارها مانند $\{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ نیز مستقل خطی خواهند بود.

اثبات: فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) پس بردارهای $V_1, V_2, \dots, V_p$ می‌بایست وابستهٔ خطی باشند و چون جزئی از بردارهای V_1 تا V_n هستند لذا طبق مسألهٔ ۷ باید تمام n بردار V_1 تا V_n نیز وابسته باشند که خلاف فرض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مسألهٔ ۸: در فضای برداری $\mathbb{R}^2$، ثابت کنید: «شرط لازم و کافی برای آن که بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند آن است که $ad - bc \neq 0$»

حل: ابتدا یک ترکیب خطی دلخواه از این دو بردار تشکیل داده و مساوی با بردار صفر در $\mathbb{R}^2$ یعنی $(0,0)$ قرار می‌دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$x(a,b) + y(c,d) = (0,0)$$

$$\underset{-c}{\overset{d}{\Rightarrow}} \begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx + cdy = 0 \\ -bcx - cdy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ad - bc)x = 0 \quad *$$

برای اثبات برقراری شرط لازم و کافی روی رابطهٔ * بحث می‌کنیم:

I) اگر بردارهای (a,b) و (c,d) مستقل خطی باشند، پس طبق تعریف هر ترکیب خطی از آنها که مساوی با بردار صفر باشد، باید صفر بودن ضرایب یعنی x و y را نتیجه دهد. پس باید $x = 0$ و این در صورتی امکان‌پذیر است (با توجه به رابطهٔ *) که $ad - bc \neq 0$.

II) اگر $ad - bc \neq 0$ واضح است که رابطهٔ * نتیجه می‌دهد $x = 0$ که اگر در معادلات دستگاه قرار دهیم، $y = 0$ نیز نتیجه می‌شود لذا، طبق تعریف بردارها مستقل خطی خواهند بود.

مسألهٔ ۹: اگر بردارهای u_1 و u_2 و u_3 در فضای برداری V مستقل خطی باشند، نشان دهید بردارهای $(u_1 - 2u_2 + u_3)$ و $(2u_1 + u_2 - u_3)$ و $(-u_1 + u_2 - 2u_3)$ نیز مستقل خطی‌اند.

اثبات: یک ترکیب خطی دلخواه از بردارهای داده شده تشکیل می‌دهیم و ثابت می‌کنیم همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی صفر هستند.

$$x(u_1 - 2u_2 + u_3) + y(2u_1 + u_2 - u_3) + z(-u_1 + u_2 - 2u_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x + 2y - z)u_1 + (-2x + y + z)u_2 + (x - y - 2z)u_3 = \vec{0}$$

به یک ترکیب خطی از سه بردار u_1 و u_2 و u_3 رسیدیم که مساوی با بردار صفر شده و چون این سه بردار طبق فرض مستقل خطی‌اند پس باید ضرایب این ترکیب خطی همگی صفر

باشند، یعنی:

$$\begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix}\begin{cases}x+2y-z=0\\-2x+y+z=0\\x-y-2z=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{-x-z=0}$$

$$③ \text{ و } ① \Rightarrow \boxed{3x-5z=0}\Rightarrow 2\begin{cases}-x-z=0\\3x-5z=0\end{cases}\Rightarrow 8z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{z=0}\Rightarrow \boxed{x=0}\Rightarrow \boxed{y=0}$$

مسألهٔ ۱۰: مجموعهٔ چند جمله‌ایهای از درجه ۲ و کمتر از ۲ با ضرایب حقیقی را در نظر می‌گیریم یعنی: $V=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ، می‌دانیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است (به عنوان تمرین ثابت کنید، جمع را جمع چند جمله‌ایها و ضرب اسکالر را ضرب عدد در چند جمله‌ای در نظر بگیرید) نشان دهید بردارهای x^2+x+5 و $2x+1$ و 7 در این فضای برداری مستقل خطی‌اند.

اثبات: از بردارهای فوق ترکیبی خطی تشکیل داده و مساوی با بردار صفر فضای V قرار می‌دهیم و در نهایت ثابت می‌کنیم ضرایب همگی صفر هستند.

$$a(x^2+x+5)+b(2x+1)+7c\equiv 0x^2+0x+0$$
$$\Rightarrow ax^2+(a+2b)x+(5a+b+7c)\equiv 0x^2+0x+0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0}\\a+2b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow \boxed{b=0}\\5a+b+7c=0\Rightarrow 7c=0\Rightarrow \boxed{c=0}\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۱: نشان دهید بردارهای مجموعهٔ $\left\{\sin x,\cos x,\cos(x+\frac{\pi}{4})\right\}$ مستقل خطی‌اند.

اثبات: می‌دانیم،

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos x-\sin x$$
$$\Rightarrow \sin x-\cos x+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$$

پس ترکیبی خطی از این سه بردار مساوی با بردار صفر به دست آمد که ضرایبِ آن ناصفر می‌باشند. بنابراین طبق تعریف این بردارها وابستهٔ خطی‌اند.

مسألهٔ ۱۲: اگر a ، $b\neq 0$ را چنان تعیین کنید که دو بردار $(3a,-2b)$ و $(a^2,3b)$ مستقل خطی باشند.

اثبات: با توجه به مسألهٔ ۸، شرط این که دو بردار مستقل خطی باشند آن است که

$$9ab-2a^2b\neq 0\Rightarrow ab(9-2a)\neq 0\overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} a\neq 0, 8a\neq\frac{9}{2}$$

مسألهٔ ۱۳: اگر H و K دو زیرمجموعه از فضای برداری $\vec{V}$ بوده و اعضای هر دو مجموعه، بردارهایی مستقل خطی باشند، ثابت کنید بردارهای مجموعهٔ $(H\cap K)$ نیز مستقل خطی‌اند. (به شرط آن که $H\cap K\neq\phi$)

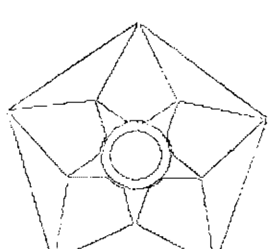
اثبات: می‌دانیم (طبق تعریف اشتراک) $H\cap K\subseteq H$ و طبق نتیجهٔ ۳ از مسألهٔ ۷، هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ مستقل خطی، باید مستقل خطی باشد، پس اعضای $(H\cap K)$ مستقل خطی هستند.

مسألهٔ ۱۴: اگر A_1 و A_2 و A_3 ماتریسهایی $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times k$ باشد و ماتریسهای A_1B و A_2B و A_3B در فضای ماتریسهای $m\times k$ مستقل خطی باشند، ثابت کنید ماتریسهای A_1 و A_2 و A_3 در فضای ماتریسهای $m\times n$ مستقل خطی‌اند.

اثبات: ترکیبی خطی از سه ماتریس A_1 و A_2 و A_3 مساوی با بردار صفر (ماتریس صفر) قرار داده و ثابت می‌کنیم ضرایب باید همگی صفر باشند.

$$xA_1+yA_2+zA_3=\bar{0}\qquad(1)$$
$$\Rightarrow (xA_1)B+(yA_2)B+(zA_3)B=\bar{0}B$$
$$\Rightarrow x(A_1B)+y(A_2B)+z(A_3B)=\bar{0}$$

تساوی اخیر یک ترکیب خطی از سه بردار A_1B و A_2B و A_3B است که طبق فرض مستقل خطی‌اند پس طبق تعریف باید، $x=y=z=0$ که با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود سه بردار A_1 و A_2 و A_3 نیز مستقل خطی‌اند.





تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۱۵)

در شمارهٔ ۱۰ یکان در مقالهٔ **فصلی از تاریخ علوم ریاضی** ترجمهٔ **باقر امامی** چنین آمده است که:

آپولونیـوس برای کسب دانش ریاضی از بازماندگان مکتب اقلیدس، به مصر سفر کرده و قسمت بزرگ دوران حیاتش را در آن دیار گذرانده است. اگر راجع به زندگی خصوصی او اطلاعات کمی در دست است، خوشبختانه دربارهٔ نتایج فعالیت علمی او آگاهی کافی داریم.

شاهکارش همان کتاب مقاطع مخروطی است که در آنجا خواص این منحنیها را چنان بر اساس محکمی پایه گذاشته است که امروزه هم مطالعهٔ خواص این مقاطع بر همان اساس است اگر وضع دانش را در زمانی که این کتاب سرشار از کشفهای شخصی مؤلف قدم به عرصهٔ وجود گذاشته است در نظر بگیریم، واقعاً مبهوت و حیرت‌زده می‌شویم.

کتاب مقاطع مخروطی شامل هشت قسمت است. متن یونانی چهار قسمت اول و ترجمهٔ عربی سه قسمت بعدی به ما رسیده و اثری از قسمت آخر تا به حال به دست نیامده است. گرچه در قرن هفدهم **هالی** ستاره‌شناس معروف کوشیده است که از قسمتهای مختلف پراکنده در کتابهای متفرقه این قسمت اخیر را به هر صورت جمع‌آوری کند.

در **یکان** مسایل مسابقه‌ای نیز مطرح می‌شود. یکی از این مسایل با حل آن که در شمارهٔ ۱۰ آمده به صورت زیر است:

مطلوب است تعیین رابطه‌ای مستقل از α بین x و y به فرض

$$\begin{cases} x = \sin\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \\ y = \cos\alpha + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

حل: از رابطه‌های داده شده به دست می آید که:

$$\begin{cases} \sin^3\alpha = x\sin^2\alpha - 1 \\ \cos^3\alpha = y\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

طرفین هر رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\begin{cases} \sin^6\alpha = x^2\cos^4\alpha - 2x\sin^2\alpha + 1 \\ \cos^6\alpha = y^2\sin^4\alpha - 2y\cos^2\alpha + 1 \end{cases}$$

اگر در رابطهٔ دوم $\cos\alpha$ را بر حسب $\sin\alpha$ نوشته و طرفین رابطهٔ حاصل را عضو به عضو با طرفین رابطهٔ اول جمع کنیم رابطهٔ زیر به‌دست خواهد آمد

$$(x^2 + y^2 - 3)\sin^4\alpha - (2y^2 - 2y + 2x - 3)$$
$$\sin^2\alpha + (y-1)^2 = 0$$

از این معادلهٔ دو مجذوری مقدار $\sin\alpha$ بر حسب x و y پیدا می‌شود و چون در رابطهٔ اول مفروض قرار داده شود رابطه‌ای مستقل از α بین x و y پیدا خواهد شد.

در همین شماره در مقالهٔ **عدد طلایی نمایندهٔ قدرت**

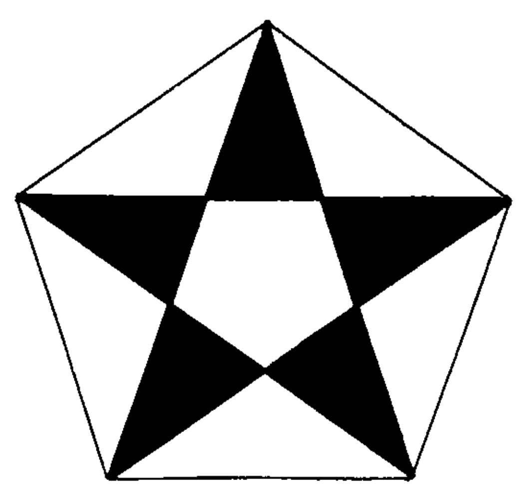
الهی از سیدمحمد کاظم نائینی چنین آمده است:

بر اثر تجارب و بررسیها و اندازه‌گیریهای دقیق و به کار بردن نسبتهایی نظیر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ و $\frac{17}{10}$ و غیره و تحقیق در اشیاء قشنگ و زیبا و بالاخره در محاسبات مربوط به ۵ ضلعیهای منتظم و ده ضلعیها و... عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ کشف شد که دارای خواص جالب و زیبایی است. این عدد با چند رقم اعشار برابر است با ۱/۶۱۷۰۳۳۹۸۸۷۵.

خاصیتهای بی‌شمار و زیبایی که در اثر به کار بردن این عدد و این نسبت در اشیاء به دست آمد حس اعجاب و تحسین همگان را به حدی برانگیخت که آن را **عدد طلایی** نامیدند و افلاطون آن را نمایندهٔ **قدرت** و **مظهر الهی** نامید.

چنانکه می‌دانیم نسبت طول مخمس افلاطونی به واحد برابر عدد طلایی است.

آرم ستارهٔ ۵ پری که در نزد فیثاغورثیان مورد ستایش بود از به هم پیوستن اقطار مخمس به وجود می‌آمد و انتخاب آن به علت ارزش و احترامی بود که فیثاغورثیان برای عدد طلایی قائل بودند و آن را مورد پرستش و احترام و تکریم قرار می‌دادند.



افلاطون عدد طلایی را از تقسیم یک پاره خط به نسبت ذات وسط و طرف به دست آورد و در ساختن ۵ ضلعیها و ۱۲ وجهی منتظم به کار برد و این تقسیم و برش را **تقسیم طلایی** نامید. بعدها **لوکاپاچیولی** Lucapacioli (۱۵۰۹) آن را تقسیم الهی و مقدس نامید.

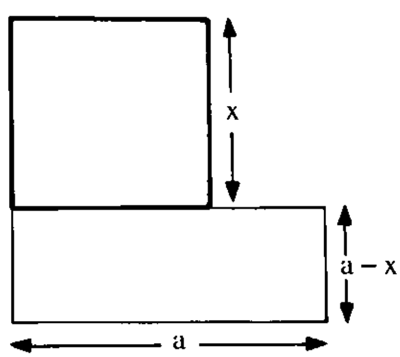
مسألهٔ تقسیم پاره خط به نسبت ذات وسط و طرف یا تقسیم طلایی را اقلیدس در کتاب تحریرات خود به صورت زیر بیان کرده است:

می‌خواهیم پاره خط مستقیمی را به دو قسمت چنان تقسیم کنیم که مستطیلی که با تمام خط و یکی از قسمتهای جدا شده ساخته می‌شود معادل با مربعی باشد که بر قسمت باقیماندهٔ خط بنا می‌شود.

بیان مسأله به صورت جبر و به زبان امروزی چنین است:

اگر طول خط را a و دو قسمت آن را x و $a-x$ بنامیم، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$



سلسلهٔ اعداد ... و $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ که در آن $u_1=1$ و $u_2=1$ و هر یک از جملات آن به استثناء دو جمله اول برابر مجموع دو عدد ماقبل است یعنی رشته اعداد:

۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

به رشتهٔ **فیبوناچی معروف** است. چون دارای خواص جالب و زیبایی است به رشتهٔ **زیباییهای طبیعت** لقب یافته است.

جمله n ام رشتهٔ فیبوناچی یعنی

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

از عبارت $\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ حساب می‌شود:

$\left[u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\right]$ که در آن α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ است.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

حد رادیکال زیرین

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

برابر عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است، زیرا که اگر آن را مساوی x بگیریم و طرفین را به قوهٔ ۲ برسانیم. خواهیم داشت:

$$x^2 = 1+\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

که جملهٔ دوم آن همان x است و در نتیجه داریم:

$$x^2 = 1\times x$$

و ریشهٔ مثبت این معادله چنین است:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

کسر مسلسل

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

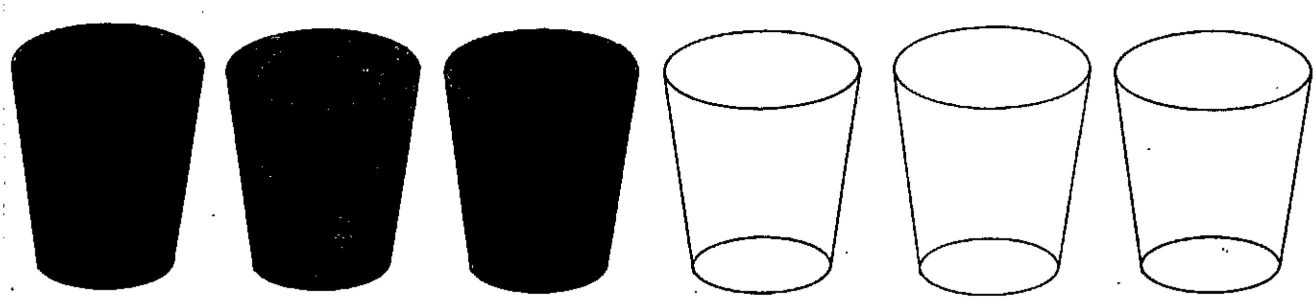
نیز مقداری برابر عدد طلایی دارد پس می‌توان نوشت: $x-1=\frac{1}{x}$ یا $x^2-x-1=0$ که ریشهٔ مثبت آن $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.



تفریح اندیشه ۲

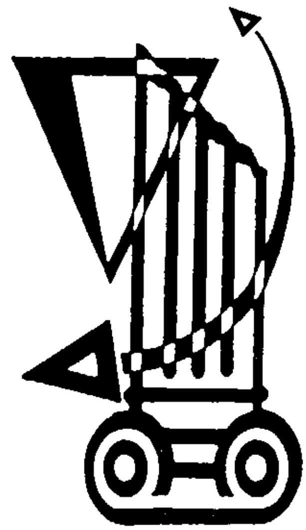
شش لیوان در قفسه‌ای به صف شده‌اند: سه لیوان پر از آب و سه لیوان خالی‌اند (تصویر را ملاحظه کنید). چگونه می‌توان با دست زدن تنها به یک لیوان، آنها را چنان مرتب کرد که لیوانهای آب و لیوانهای خالی یکی در میان باشند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



حدّ

(قسمت اول)



◁ احمد قندهاری

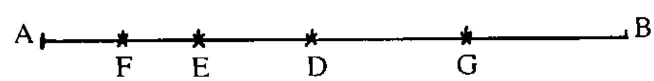
(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)

حدّ، یکی از مفاهیم بنیادی ریاضی است. به همین علّت باید بهای بیشتری به آن داد تا زیربنای درستی از مفاهیم ریاضی حاصل شود.

وقتی از حدّ صحبت می‌کنیم، منظورمان بررسی رفتار یک تابع است وقتی متغیر آن به عدد مشخّصی بسیار نزدیک شود ولی هیچوقت به آن نرسد.

در این فصل مفهوم حدّ را ابتدا به‌صورت شهودی بررسی و بیان می‌کنیم، سپس حدّ تابع تعریف می‌شود. آنگاه با روش شهودی همراه با استدلال، مثالهایی مطرح می‌شود.

مثال (۱): پاره خط AB به طول $l_0=1$ را درنظر می‌گیریم.



اگر نقطه C وسط پاره‌خط AB باشد، طول پاره‌خط AC: $l_1=\frac{1}{2}$

چنانچه نقطه D وسط پاره‌خط AC باشد،طول پاره خط AD: $l_2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$

اگر نقطه E وسط پاره‌خط AD باشد، طول پاره‌خط AE: $l_3=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$

چنانچه نقطه F وسط پاره‌خط AE باشد،طول پاره خط AF: $l_4=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$.

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، پاره‌خطهایی به طولهای $l_5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ و $l_6=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$ و ... و $l_n=\frac{1}{2^n}$ خواهیم داشت.

اگر این عمل چندین دفعه تکرار شود (n دفعه)، ملاحظه خواهیم کرد که هرچه‌قدر مقدار n بزرگتر شود طول l_n به عدد صفر نزدیک می‌شود. یا به‌عبارت دیگر:

اگر تعداد دفعات را زیادتر کنیم طول l_n به صفر نزدیکتر می‌شود چنانچه بخواهیم طول l_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه مورد نیاز بزرگ کنیم. ممکن است بپرسید چگونه n مورد نیاز را اختیار می‌کنیم؟

برای پاسخ این سؤال به پرسش زیر دقّت بفرمایید.

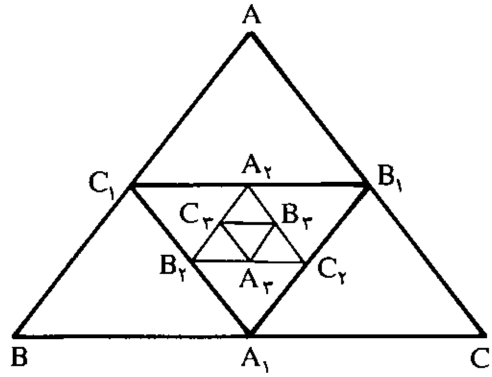
آیا می توان l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که l_n از $\frac{1}{1000}$ کوچکتر شود.

جواب مثبت است چرا که: $l_n=\frac{1}{2^n}$ و می‌دانیم $2^{10}=1024$ و می‌نویسیم

$$l_n<\frac{1}{1000}\Rightarrow \frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}\Rightarrow 2^n>1000\Rightarrow n\ge 10$$

بنابراین اگر بخواهیم l_n را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم که مقدار آن از $\frac{1}{1000}$ کمتر شود باید n را مساوی ۱۰ یا بزرگتر از ۱۰ اختیار کنیم.

مثال (۲): مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع $a_0=1$ در نظر می‌گیریم.



اگر وسط اضلاع این مثلث را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۱B_۱C_۱$ به دست می‌آید که طول ضلع آن:
$a_۱=\frac{۱}{۲}$

چنانچه وسط اضلاع مثلث $A_۱B_۱C_۱$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۲B_۲C_۲$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_۲=\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲^۲}$

اگر وسط اضلاع مثلث $A_۲B_۲C_۲$ را به هم وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۳B_۳C_۳$ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن: $a_۳=\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲^۳}$

چنانچه این عمل را به همین شیوه تکرار کنیم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع متعددی پدید می‌آید مانند $A_۴B_۴C_۴$ و $A_۵B_۵C_۵$ و ... $A_nB_nC_n$ که طول اضلاع آنها به ترتیب $a_۴=\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۲^۴}$ و $a_۵=\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱}{۲^۵}$ و ... $a_n=\frac{۱}{۲^n}$ است.

در این مثال می‌خواهیم اندازه محیط و اندازه مساحت مثلث $A_nB_nC_n$ را بررسی کنیم و ببینیم به چه عددی نزدیک می‌شود.

اگر محیط مثلثها را با $۲P_۰$ ، $۲P_۱$ ، $۲P_۲$، ...$۲P_n$ و مساحت مثلثها را با $S_۰$ ، $S_۱$ ، $S_۲$، ...S_n نشان دهیم. و با این اطلاع که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})$ است می‌توان نوشت:

الف: در مورد محیط مثلثها:

اگر $a_۰=۱\Rightarrow ۲p_۰=۳a_۰=۳(۱)=۳$

اگر $a_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲p_۱=۳a_۱=۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$

اگر $a_۲=\frac{۱}{۲^۲}\Rightarrow ۲p_۲=۳a_۲=۳(\frac{۱}{۲^۲})=\frac{۳}{۲^۲}$

اگر $a_۳=\frac{۱}{۲^۳}\Rightarrow ۲p_۳=۳a_۳=۳(\frac{۱}{۲^۳})=\frac{۳}{۲^۳}$

....

....

اگر $a_n=\frac{۱}{۲^n}\Rightarrow ۲p_n=۳a_n=۳(\frac{۱}{۲^n})=\frac{۳}{۲^n}$

اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم ملاحظه می‌کنیم که $\frac{۳}{۲^n}$ یا $۲p_n$ به صفر نزدیک می‌شود.

چنانچه بخواهیم $(۲p_n)$ به صفر نزدیک شود باید n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. یعنی برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $۲p_n$ به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

اینک این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان یک n به اندازه کافی بزرگ اختیار کرد. برای پاسخ به این پرسش به سؤال زیر توجه کنید.

سؤال: آیا می‌توان $(۲p_n)$ را تا اندازه‌ای به صفر نزدیک کرد که $۲p_n$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ شود.

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$۲p_n<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow\frac{۳}{۲^n}<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow\frac{۲^n}{۳}>۱۰۰۰\Rightarrow ۲^n>۳۰۰۰$$

می‌دانیم $۴۰۹۶=۲^{۱۲}$، پس اگر n را مساوی ۱۲ یا بزرگتر از ۱۲ اختیار کنیم $۳۰۰۰<۲^{۱۲}$ یا $۲^n>۳۰۰۰$ یا $۲P_n<\frac{۱}{۱۰۰۰}$.

ب: در مورد مساحتها: داشتیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، $(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})$ است.

اگر $a_۰=۱\Rightarrow S_۰=\frac{(۱)^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

اگر $a_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_۱=\frac{(\frac{۱}{۲})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۱}{۴}$

اگر $a_۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_۲=\frac{(\frac{۱}{۴})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^۲})$

اگر $a_۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow S_۳=\frac{(\frac{۱}{۸})^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^۳})$

....

....

اگر$a_n = \frac{۱}{۲^n} \Rightarrow S_n = \frac{(\frac{۱}{۲^n})^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^n})$

اگر بخواهیم، S_n به صفرنزدیک شود، باید nرا به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم. پس برای nهای به اندازه کافی بزرگ، S_n به اندازه دلخواه به صفر نزدیک می‌شود.

سؤال: آیا می‌توان (n) را طوری انتخاب کرد که S_n از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

$$S_n < \frac{۱}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴^n}) < \frac{۱}{۱۰۰۰۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴^{n+۱}} < \frac{۱}{۱۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۴^{n+۱}}{\sqrt{۳}} > ۱۰۰۰۰ \Rightarrow ۴^{n+۱} > ۱۰۰۰۰\sqrt{۳}$$

اگر $\sqrt{۳}$ را ۱/۷۳ فرض کنیم باید $۴^{n+۱} > ۱۷۳۰۰$

می‌دانیم $۴^۸ = ۶۵۵۳۶$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم آنگاه S_n کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ خواهد شد.

مثال (۳): فرض کنیم دایره $C_۰$ به شعاع $R_۰ = ۱$ مفروض باشد اگر دایره $C_۱$ در نقطه A مماس بر دایره $C_۰$ به شعاع $R_۱ = \frac{۱}{۲}$ و دایره $C_۲$ در نقطه A مماس بر $C_۰$ به شعاع $R_۲ = \frac{۱}{۴}$ و دایره $C_۳$ در نقطه A مماس بر دایره $C_۰$ به شعاع $R_۳ = \frac{۱}{۸}$ باشد. و به همین روش دایره‌های دیگری مماس بر دایره $C_۰$ در نقطه A و به شعاع نصف شعاع دایره قبلی رسم کنیم و شعاع دایره (n) امی را $R_n = \frac{۱}{۲^n}$ بنامیم، چنانچه محیط دایره‌ها را با $P_{c_۰}, P_{c_۱}, P_{c_۲}, ..., P_{c_n}$ و مساحتهای دایره‌ها را با $S_{c_۰}, S_{c_۱}, S_{c_۲}, ..., S_{c_n}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

الف: در مورد محیط‌ها:

اگر $R_۰ = ۱ \Rightarrow P_{c_۰} = ۲\pi R_۰ = ۲\pi$

اگر $R_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P_{c_۱} = ۲\pi R_۱ = ۲\pi(\frac{۱}{۲})$

اگر$R_۲ = \frac{۱}{۲^۲} \Rightarrow P_{c_۲} = ۲\pi R_۲ = ۲\pi(\frac{۱}{۲^۲})$

اگر $R_۳ = \frac{۱}{۲^۳} \Rightarrow P_{c_۳} = ۲\pi R_۳ = ۲\pi(\frac{۱}{۲^۳})$

....

....

اگر$R_n = \frac{۱}{۲^n} \Rightarrow P_{c_n} = ۲\pi R_n = ۲\pi(\frac{۱}{۲^n})$

حال اگر nرا به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم P_{c_n} یعنی محیط دایره (n)امی خیلی به صفر نزدیک می‌شود.

می‌توان $P_{c_n} = ۲\pi(\frac{۱}{۲^n})$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به‌شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد که P_{c_n} از $\frac{۱}{۵۰۰۰}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است. می‌نویسیم:

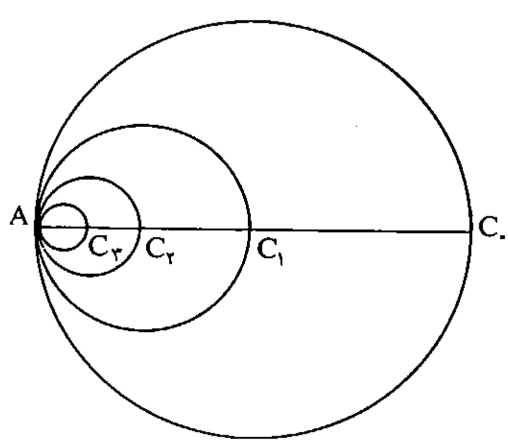
$$P_{c_n} < \frac{۱}{۵۰۰۰} \Rightarrow ۲\pi(\frac{۱}{۲^n}) < \frac{۱}{۵۰۰۰} \Rightarrow \frac{۲^n}{۲\pi} > ۵۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۲^n > ۱۰۰۰۰\pi \qquad \pi = ۳/۱۴$$

داریم:

$$\Rightarrow ۲^n > ۳۱۴۰۰ \qquad ۲^{۱۵} = ۳۲۷۶۸$$

پس اگر n را مساوی ۱۵ یا بزرگتر از ۱۵ اختیار کنیم، آنگاه P_{c_n} از $\frac{۱}{۵۰۰۰}$ کوچکتر خواهد شد.



ب: در مورد مساحتها:

اگر $R_۰ = ۱ \Rightarrow S_{c_۰} = \pi R_۰^۲ = \pi$

اگر$R_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{c_۱} = \pi R_۱^۲ = \pi(\frac{۱}{۲})^۲ = \pi(\frac{۱}{۴})$

اگر$R_۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{c_۲} = \pi R_۲^۲ = \pi(\frac{۱}{۴})^۲ = \pi(\frac{۱}{۴^۲})$

اگر$R_۳ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow S_{c_۳} = \pi R_۳^۲ = \pi(\frac{۱}{۸})^۲ = \pi(\frac{۱}{۴^۳})$

....

....

اگر $R_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_{c_n} = \pi R_n^2 = \pi(\frac{1}{2^n})^2 = \pi(\frac{1}{4^n})$

حال اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم، S_{c_n} به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک می‌شود، به عبارت دیگر: می‌توان S_{c_n} را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

سؤال: آیا می‌توان n را طوری اختیار کرد تا S_{c_n} از $\frac{1}{2000}$ کوچکتر شود؟

جواب مثبت است، می‌نویسیم:

$$S_{cn} < \frac{1}{2000} \Rightarrow \pi(\frac{1}{4^n}) < \frac{1}{2000} \Rightarrow \frac{4^n}{\pi} > 2000$$

$\Rightarrow 4^n > 2000\pi$ داریم: $\pi = 3/14$

$\Rightarrow 4^n > 6280$ داریم: $4^7 = 16384$

پس اگر n را مساوی ۷ یا بزرگتر از ۷ اختیار کنیم، آنگاه (4^n) از (۶۲۸۰) بزرگتر می‌شود در نتیجه S_{cn} از $\frac{1}{2000}$ کوچکتر خواهد شد.

◀ حدّ راست:

مثال(۴): تابع به معادله $f(x) = 3x - 1$ را با شرط $x > 2$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی x از طرف اعداد بزرگتر از (۲) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود بررسی کنیم.

به عبارت دیگر، x را از طرف اعداد بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که مقدار f(x) به چه عددی نزدیک و نزدیکتر می‌شود به این منظور جدول زیر را تنظیم کرده‌ایم:

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۵/۳	۵/۰۳	۵/۰۰۳	۵/۰۰۰۳

این جدول نشان می دهد، وقتی x (از طرف اعداد بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار f(x) به عدد (۵) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. چنانچه نتایج این جدول را از دیدی دیگر بررسی کنیم می‌توانیم بگوییم:

مقدار f(x) به عدد ۵ نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از طرف اعداد بزرگتر از ۲) به عدد۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) را به عدد ۵ آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x) - 5|$ کوچکتر از $\frac{1}{100}$ باشد، در این صورت x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

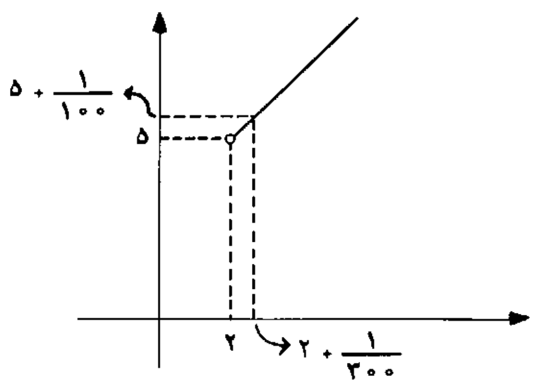
$$|f(x) - 5| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 1 - 5| < \frac{1}{100} \Rightarrow |3x - 6| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow |3(x - 2)| < \frac{1}{100} \Rightarrow 3|x - 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{300}$$

چون $x > 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 \Rightarrow x - 2 < \frac{1}{300}$

پس x را باید به اندازه‌ای به ۲ نزدیک کنیم که $(x - 2)$ از $\frac{1}{300}$ کوچکتر شود.

بنابراین اگر $(x - 2)$ کوچکتر از $\frac{1}{300}$ باشد، آنگاه $|f(x) - 5|$ کوچکتر از $\frac{1}{100}$ خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x با مقادیر بزرگتر از (۲) به عدد (۲) میل می‌کند برابر عدد (۵) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = 5 \\ x \to 2^+ \end{cases}$$

مثال(۵): تابع f به معادله

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

مقادیر f(x) را به ازای $x > 1$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود، وقتی x (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال نتایج این جدول را از دیدگاه دیگری بررسی می‌کنیم. ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم.

مقدار $f(x)$ به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (با مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر کنیم. یعنی $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد ۲ نزدیک و نزدیکتر کنیم، به شرطی که x را (از مقادیر بزرگتر از ۱) به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، $f(x)$ را به عدد ۲ آنقدر نزدیک کنیم که $|f(x)-2|$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ شود. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |x+1-2|<\frac{1}{1000} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{1000}$$

$$x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1 \Rightarrow x-1>\frac{1}{1000}$$ چون

پس معلوم شده است اگر x را از طرف اعداد بزرگتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-1)$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ باشد. آنگاه $|f(x)-2|$ کوچکتر از $\frac{1}{1000}$ خواهد شد.

توجه: اعداد مثبت فوق‌العاده کوچک را با ε یا δ نشان می‌دهیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی‌تر مطرح می‌کنیم.

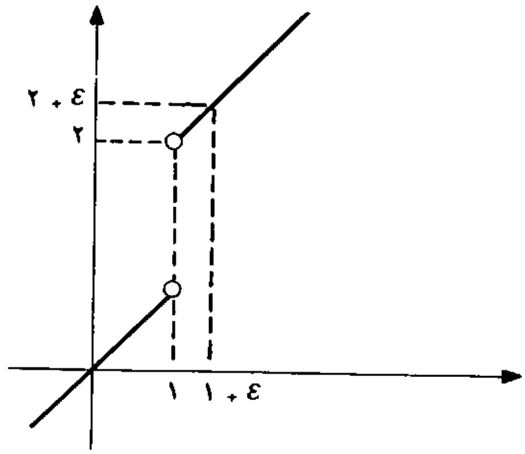
سؤال: می‌خواهیم $f(x)$ را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم که $|f(x)-2|$ از (ε) کوچکتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-2|<\varepsilon \Rightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon$$

$$x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1 \Rightarrow x-1<\varepsilon$$ چون

بنابراین معلوم شده است که اگر x را (از مقادیر بزرگتر از (۱)) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-1)$ کوچکتر از (ε) باشد، آنگاه $|f(x)-2|$ از (ε) کوچکتر خواهد شد.



نتیجه: در این مثال می‌گوییم حدّ راست تابع وقتی x از مقادیر بزرگتر از (۱) به عدد (۱) میل می‌کند برابر ۲ است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x)=2 \\ x\to 1^{+} \end{cases}$$

◄ نتیجه شهودی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه $f(x)$ در بازه (x_0, b) تعریف شده باشد. عدد (L) را حدّ راست تابع f در نقطه x_0 نامیم اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت $(x-x_0)$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

در این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x)=L \\ x\to x_0^{+} \end{cases}$$

مثال (۶): تابع f به معادله $f(x)=\sqrt{x-2}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر $f(x)$ را به ازای $x>2$ و در نزدیکی عدد (۲) محاسبه می‌کنیم و نتایج را در جدول زیر می‌نویسیم.

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱
f(x)	۰/۳۱	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۱

به طوری که در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر

می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال این جدول را از دیدی دیگر بررسی می‌کنیم، ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم.

مقدار $f(x)$ به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x را (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر کنیم.

به عبارت دیگر، مقدار $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که x را به اندازه کافی (از مقادیر بزرگتر از عدد (۲)) به عدد (۲) نزدیک کنیم.

سؤال : می‌خواهیم مقدار $f(x)$ را آنقدر به عدد صفر نزدیک کنیم که $f(x)$ از $\frac{1}{100}$ کمتر باشد. در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کنیم؟

جواب: می نویسیم:

$$f(x)<\frac{1}{100}\Rightarrow \sqrt{x-2}<\frac{1}{100}\Rightarrow x-2<\frac{1}{10000}$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آنقدر نزدیک کنیم تا $(x-2)$ کوچکتر از $\frac{1}{10000}$ باشد.

حال همین سؤال را کلی تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم، $f(x)$ را به عدد صفر آنقدر نزدیک کنیم تا $f(x)$ از (ε) کوچکتر باشد، در این صورت x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲) چقدر باید نزدیک کرد؟

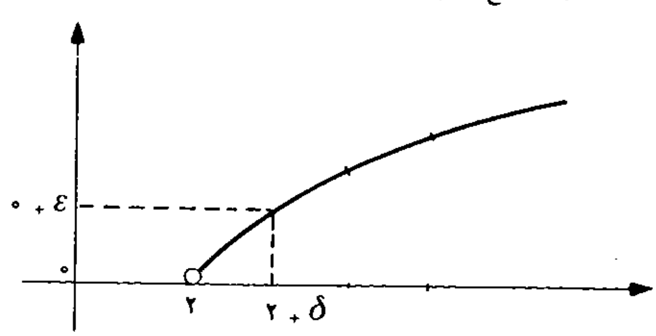
جواب: می‌نویسیم:

$$f(x)<\varepsilon\Rightarrow \sqrt{x-2}<\varepsilon\Rightarrow x-2<\varepsilon^2$$

پس باید x را (از مقادیر بزرگتر از (۲)) به عدد (۲)، آن قدر نزدیک کنیم تا $(x-2)$ کوچکتر از (ε^2) باشد. اگر $\delta=\varepsilon^2$ یا $\delta\le\varepsilon^2$، می‌توان نوشت:

$$0<x-2<\delta\le\varepsilon^2\Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

نمودار تابع f چنین است.



◀ تعریف ریاضی حدّ راست تابع:

فرض می‌کنیم تابع f با ضابطه $f(x)$ در بازه (x_0,b) تعریف شده باشد عدد L را حدّ راست تابع f در نقطه x_0 گوییم و می‌نویسیم :

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=L\\ x\to x_0^+\end{cases}$$

اگر برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$0<x-x_0<\delta\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

مثال (۷): تابع f به معادله $f(x)=-5x+1$ مفروض است. با استفاده از تعریف ریاضی حدّ راست تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)=-4\\ x\to 1^+\end{cases}$$

حل: باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود دارد به طوری که:

$$0<x-1<\delta\Rightarrow |f(x)+4|<\varepsilon$$

$$|f(x)+4|<\varepsilon\Rightarrow |-5x+1+4|<\varepsilon\Rightarrow |-5x+1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |-5(x-1)|<\varepsilon\Rightarrow 5|x-1|<\varepsilon\Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$$

چون $x\to 1^+\Rightarrow |x-1|=x-1$

$$\Rightarrow 0<x-1<\frac{\varepsilon}{5}\Rightarrow \delta\le\frac{\varepsilon}{5}$$

فایده حل ریاضی مسأله آن است که جواب مسأله کلیّت دارد.

مثلاً اگر $\varepsilon=\frac{1}{100}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{500}$

و اگر $\varepsilon=\frac{1}{200}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{1000}$

و اگر $\varepsilon=\frac{1}{300}$، آنگاه $\delta\le\frac{1}{1500}$

پس برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ به وجود می‌آید.

تمرین: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) و هم با تعریف ریاضی حدّ راست تابع، بررسی و حل کنید.

$$\begin{cases}\text{حد } (f(x)=2x-3)=1\\ x\to 2^+\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\sqrt{x-1})=0 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|})=2 \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

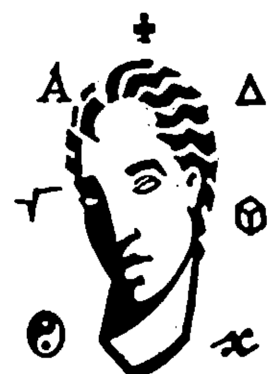
تمرین: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ راست توابع به معادلات زیر را بیابید.

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x+[x]) \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=[x]+[-x]) \\ x\to 4^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=x-[x]) \\ x\to 3^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } (f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}) \\ x\to 1^+ \end{cases}$$



تفریح اندیشه ۳

در پایان اجّرای یک برنامهٔ موسیقی مسئول رختکن در مکان حضور نداشت. بجای او یک راهنما البسهٔ حاضران را به آنان تحویل می‌داد. چنانچه چهار نفر در آن جمع از کت استفاده کرده باشند، به چند طریق ممکن است راهنما کتهای آنان را اشتباه تحویل دهد، به‌طوری که هیچ‌کس کت خودش را دریافت نکند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



ادب ریاضی

سخنانی است که ما را در مورد مطلوبی که در جستجوی شناختن آن هستیم به علم یقینی می‌رساند، خواه انسان برهان را میان خود و نفس خود برای استنباط آن مطلوب به‌کار گیرد، یا در مورد شخص دیگر از آن استفاده کند. یا آنکه دیگری به‌وسیلهٔ آن، در اثبات مطلوبی، انسان را مخاطب قرار دهد. برهان در همهٔ این حالها به نتیجهٔ علم یقینی می‌رسد.

احصاء العلوم فارابی

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۴)

مسألهٔ هفت هفت بِرْویک

از: ۱۰۰ مسألهٔ مهم ریاضیات مقدماتی

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

در تقسیم زیر، که در آن مقسوم بر مقسوم‌علیه بدون باقیمانده قابل بخش است:

```
**۷*******:****۷* = **۷**
******
-------
*****۷*
*******
-------
  *۷****
  *۷****
  -------
  *******
  ****۷**
  -------
    ******
    ******
    -------
```

اعدادی که به جای ستاره‌ها (*) قرارداشته‌اند تصادفاً پاک شده‌اند. اعداد مزبور کدام‌اند؟

این مسألهٔ جالب از بِرویک *"E. H. Berwick"*، ریاضیدان انگلیسی، است، که آن را در ۱۹۰۶ در نشریهٔ ادواری The School World انتشار داد.

حل. به هر یک از رقمهای گمشده حرفی جداگانه تخصیص می‌دهیم. به این ترتیب، مثال مورد بحث به صورت زیر درمی‌آید:

AB ۷ CDELQWЗ : αβγδ ۷ ε = Kλ ۷ μν

```
abΔcde
-------
FGHIK۷L        سطر سوم
 fghikΞl        سطر چهارم
 -------
  M۷NOPQ        سطر پنجم
  mvnopq        ← ۷.b
  -------
  RSTUΣ۷W       سطر هفتم
  rstuv vw
  -------
    XYZ xyz     سطر نهم
    XYZ xyz
    -------
```

I. رقم اول (α) مقسوم‌علیه b باید ۱ باشد، زیرا ۷b همان‌گونه که سطر ششم مثال نشان می‌دهد، دارای شش رقم است، در حالی‌که که اگر α برابر ۲ باشد، ۷b دارای هفت رقم می‌شود.

از آنجا که باقیمانده‌های واقع درسطرهای سوم و هفتم دارای شش رقم‌اند، F باید برابر ۱ و R باید برابر ۱ باشد، که به عنوان نتایج آنها f، r نیز (مطابق طرح مسأله) باید برابر ۱ باشند.

از آنجا که b نمی‌تواند از ۱۹۹۹۷۹ تجاوز کند، بیشترین مقدار μ برابر ۹ است، بنابراین حاصل‌ضرب واقع در سطر هشتم نمی‌تواند از ۱۷۹۹۸۱۱ متجاوز باشد، و s < ۸. و ازآنجا که S می‌تواند تنها ۹ یا ۰ باشد، و از آنجا که در سطر نهم زیر s باقیمانده‌ای موجود نیست، تنها حالت دوم امکان‌پذیر است. در نتیجه S = ۰ و (از آنجا که R = ۱) S نیز برابر ۰ است. از

R = ۱ و S = ۰ این نیز نتیجه می‌شود که M = m + ۱ . به این ترتیب m ≤ ۸ ، و ۷b ، حاصل‌ضرب سطر ششم، نمی‌تواند بیشتر از nopq ۸۷ باشد.

II. در نتیجه، تنها مقادیر ممکن دومین رقم مقسوم‌علیه، β ، عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲. (۷.۱۳۰۰۰۰ هم‌اکنون بیشتر از ۹۰۰۰۰۰ است.) β = ۰ به این علت حذف می‌شود که ۱۰۹۹۷۹ حتی زمانی که در نه ضرب شود، عددی هفت‌رقمی، که به عنوان مثال، مطلوب سطر هشتم است، به دست نمی‌دهد.

در این صورت، حالت β = ۱ را در نظر می‌گیریم. این مقدار، γ را تنها برابر ۰ یا ۱ می‌خواهد. (اگر γ ≥ ۲ ، در تعیین رقم دوم سطر ۶، شخص باید به ۷ = ۷.۱ = ۷β مقداری ≥ ۱، حاصل از حاصل‌ضرب ۷.γ ، را بیفزاید، در حالی که رقم دوم باید ۷ باشد.)

اما، γ = ۰ ، به عنوان نتیجه‌ای از هفت رقم سطر ۸ ناممکن است، زیرا حتی ۹.۱۱۰۹۷۹ نیز حاصل‌ضربی هفت رقمی به‌دست نمی‌دهد.

در حالت γ = ۱ ، باید همان‌طور که نگاهی به سطر ۸ نشان می‌دهد، شرایط زیر در نظر گرفته شود: δ ، ε ، و μ باید طوری انتخاب شوند که μ.۱۱۱δ۷ε به عددی هفت رقمی، که رقم سوم آن از آخر ۷ باشد، منجر شود. تنها امید رسیدن به این توسط مضرب μ = ۹ مطرح می‌شود (زیرا حتی ۸.۱۱۱۹۷۹ تنها شش رقم دارد). اما سومین رقم از آخر ۹.۱۱۱δ۷ε ، همان‌گونه که به آسانی با آزمایش ملاحظه می‌شود، می‌تواند تنها اگر δ = ۰ یا δ = ۹ برابر هفت باشد. در حالت اول، سطر ۸، حتی زمانی که ۱۱۱۰۷۹ در ۹ ضرب شود، دارای هفت رقم نمی‌شود، و در حالت دوم سطر ۶ ***۷.۱۱۱۹۷* = ۷۸۳ است، که ناممکن است. به این ترتیب، حالت γ = ۱ نیز کنار گذاشته می‌شود.

بنابراین، تنها مقدار مناسب برای رقم دوم مقسوم‌علیه β = ۲ است، که از آن نتیجه می‌شود که m = ۸ و M = ۹ .

III. سومین رقم مقسوم علیه، γ، می‌تواند تنها ۴ یا ۵ باشد، زیرا ۷.۱۲۶۰۰۰ بزرگتر و ۷.۱۲۴۰۰۰ کوچکتر از سطر ششم است. گذشته از این، از آنجا که ۹.۱۲۴۰۰۰ بزرگتر و ۷.۱۲۶۰۰۰ کوچکتر از سطر هشتم (۱۰tu۷vw) است، μ باید برابر ۸ باشد.

از آنجا که ۸.۱۲۴۹۷۹ = ۹۹۹۸۳۲ < ۱۰۰۰۰۰۰

این فرض که γ = ۴ ، از برقرار کردن شرط سطر ۸ بازمی‌ماند، و بنابراین γ باید برابر ۵ باشد.

IV. از آنجا که رقم سوم از آخر ۸.۱۲۵δ۷ε باید ۷ باشد، با آزمایش کردن درمی‌یابیم که δ برابر ۴ یا ۹ است. δ = ۹ به این علت حذف می‌شود که حتی ۷.۱۲۵۹۷۰ = ۸۸۱۷۹۰ بزرگتر از سطر ششم درمی‌آید، بنابراین تنها δ = ۴ مناسب است. به این ترتیب، ε می‌تواند به عنوان یکی از اعداد ۰ یا ۴ در نظر گرفته شود. اما، هر یک از این دو که انتخاب شود، برای سومین رقم سطر ششم از ***۷.۱۲۵۴۷ε = ۸۷۸ ، n = ۸ را پیدا می‌کنیم. به همین ترتیب، برای سطر هشتم، **۸.۱۲۵۴۷ε = ۱۰۰۳۷

و در نتیجه t = ۰ و u = ۳ را به دست می‌آوریم.

از آنجا که λb = λ.۱۲۵۴۷ε به سطر چهارم هفت رقمی منجر می‌شود و تنها ۸b و ۹b هفت رقم دارند، λ برابر ۸ یا ۹ است.

V. از t = ۰ و x ≥ ۱ (همراه با R = r = ۱ ، S = s = ۰) نتیجه می‌شود که T ≥ ۱ ، و از n = ۸ ، N ≤ ۹ ، نتیجه می‌گیریم که T ≤ ۱ ، بنابراین T = ۱ . لذا N برابر ۹ است و x = ۱ . از آنجا که x = ۱ و

(سطر ۹) ۲۰b > ۲۰۰۰۰۰

نتیجه می‌شود که v = ۱ ، نیز y = ۲ ، z = ۵ ، x = ۴ ، y = ۷ ، و z = ε . مسأله با نتایج به دست آمده در این مرحله به صورت زیر درمی‌آید:

```
ABvCDELQW۰ε : ۱۲۵۴۷ε = Kλ۷۸۱
abΔcde
-------------
۱ G H  I K V L
۱ g h  i k Ξ l
-------------
    ۹ ۷ ۹ O P Q
    ۸ ۷ ۸ ۰ p q
    -----------
    ۱ ۰ ۱ U Σ V W
    ۱ ۰ ۰ ۳ ۷ v w
    -------------
        ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ε
        ۱ ۲ ۵ ۴ ۷ ε
```

VI. در این حالت ε یکی از پنج عدد

۰,۱,۲,۳,۴

است. این پنج حالت متناظر با رشته‌های اعداد زیر هستند.

vw = ۶۰,۶۸,۷۶,۸۴,۹۲

opq = ۲۹۰,۲۹۷,۳۰۴,۳۱۱,۳۱۸

و بسته به این که λ برابر ۸ یا ۹ باشد،

Ξl = ۶۰,۶۸,۷۶,۸۴,۹۲

یا

Ξl = ۳۰,۳۹,۴۸,۵۷,۶۶

این وضعیت ده امکان متفاوت رامطرح می‌کند. در صورتی که هر یک از آنها را با سه جمع متوالی به سمت بالا، با شروع از سطرهای ۹ و ۸ به سطر ۷، سپس از سطرهای ۷ و ۶ به سطر ۵، و سرانجام از سطرهای ۵ و ۴ به سطر ۳، امتحان کنیم، درمی‌یابیم که تنها زمانی که ۳ = ۴ و ۸ = λ، رقم ۷ لازم را برای رقم ماقبل آخر سطر ۳ به دست می‌آوریم. در این حالت

VW = ۸۴، UεΣ VW = ۶۳۳۱، Opq = ۳۱۱، OPQ = ۹۴۴۰

ghik Ξl = ۰۰۳۷۸۴ ، GHIKVL = ۱۰۱۷۷۷۸

و این صورت زیر را به مسأله می‌دهد:

ABVCDE ۸۴۱۳ : ۱۲۵۴۷۳ = K۷۸۸۱

a bΔcde

۱۱۰۱۷۷B

۱۰۰۳۷۸۴

۹۷۹۹۴۴

۸۷۸۳۱۱

۱۰۱۶۳۳۱

۱۰۰۳۷۸۴

۱۲۵۴۷۳

۱۲۵۴۷۳

VII. سرانجام، از آنجا که از جمیع مضربهای b تنها ۵b = ۶۲۷۳۶۵ چون با ۱۱۰۱۷۷، باقیماندهٔ تقسیم سطر سوم، جمع شود عددی، شامل ۷ای در رقم سوم آن، به دست می‌دهد، K = ۵ ، و همزمان abΔcde = ۶۲۷۳۶۵

و ABVCDE = ۷۳۷۵۴۲

را به دست می‌آوریم، که جمیع ارقام گمشده از مسألهٔ مورد بحث را به دست می‌دهد.



ادب ریاضی

ذکر فیثاغورس صوری

هنوز در صغر سن بود که اهل صور را به سبب استیلای اعداد صورت جلا روی نمود و پدر فیثاغورس او را به ساموس و از ساموس به انطاکیه برد و حاکم انطاکیه فیثاغورس را فرزند خوانده به معلم سپرد و فیثاغورس به تحصیل علم لغت و موسیقی سعی فرموده در آن فن مهارت کامل حاصل نمود چنانچه گویند اکثر سازها مخترع اوست، و فیثاغورس در سن شباب به تعلیم هندسه و نجوم پرداخت، آنگاه به مصر شتافته مطالعهٔ علم حکمی را پیش نهاد همت ساخت و از آنجا به شهر ساموس بازگشته به درس حکمت و تألیف مسایل آن فن اوقات شریف مصروف داشت و دویست و هشتاد رساله در علوم مختلفه تصنیف نمود و خلق بسیار از طالبان فضل و کمال به ملازمت آن حکیم عدیم‌المثال می‌رفتند و در مقام استفاده بوده از افادهٔ طبع وقادش بهره می‌گرفتند و بعضی از ملوک اطراف به زیارت آن قدوهٔ اشراف می‌شتافتند و از نصایح سودمندش و مواعظ دل‌بندش بهره و حظی تمام می‌یافتند و فیثاغورس همواره فرق انام را به تحصیل معرفت طبایع اشیا و دست بازداشتن از ارتکاب مآثم و خطایا ترغیب نمودی و بر مواظبت جهاد و اکثار صیام و مداومت قرائت کتب امر فرمودی و او به بقای نفس بعد از مفارقت بدن و ادراک لذت و الم و ثواب و عقاب اعتراف داشت و علی‌الدوام همت بر سیاحت و احراز فضایل و اکتساب کمالات می‌گماشت.

تاریخ حبیب السیر اثر خواند میر

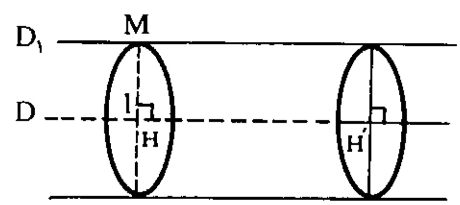
• محمد هاشم رستمی

(قسمت هفتم)

مکان هندسی

(اوّل ، دوم ، سوم، چهارم دبیرستان)

۸ ـ مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط ثابت D به فاصله ثابت l باشد، رویهٔ یک استوانهٔ دوّاری است که خط D محور آن و مقطع قائمش (فصل مشترک رویهٔ استوانه‌ای دوار با صفحه‌ای عمودبر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است.



اثبات به روش هندسی: خط D را در صفحه‌ای مانندP درنظر می‌گیریم. خط D_1 را به موازات خط D و به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این خط یکی از دو خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از خط D به فاصلهٔ ثابت l قرار دارد. از دوَران خط D_1 حول خط D، یک رویهٔ استوانه‌ای دوّار به وجود می‌آید که خط D محور آن و مقطع قائمش (یعنی فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه‌ای عمود بر محور آن سطح) دایره‌ای به شعاع l است. بنابراین، هر نقطه واقع بر سطح استوانه‌ای دوّار از خط D به فاصلهٔ l واقع است، و هر نقطه‌ای که به فاصله l از خط D باشد، روی این سطح استوانه‌ای دوّار قرار دارد.

اثبات به روش تحلیلی: خط $D:\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ را در دستگاه مختصات $o-xyz$ درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یکی از نقاط مکان هندسی فوق باشد یعنی نقطه‌ای از فضا که فاصله‌اش از خط D برابر مقدار ثابت lاست. در این صورت اگر A نقطه ای اختیاری از خط D باشد،داریم:

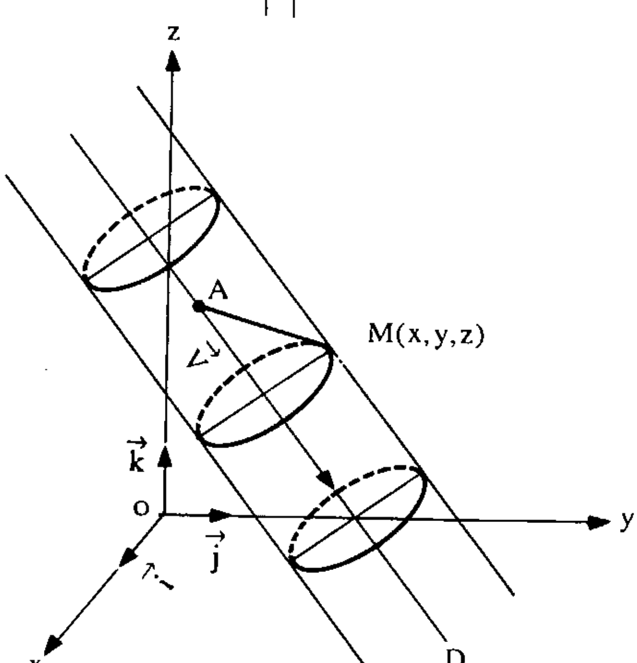
$$\text{فاصلهٔ نقطه‌از خط در فضا}: d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}$$

$A(x_1,y_1,z_1), M(x,y,z)\Rightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$،

$\vec{V}(p,q,r)\Rightarrow \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(r(y-y_1)-q(z-z_1), p(z-z_1)$

$r(x-x_1)$

$q(x-x_1)-p(y-y_1)$، $\left|\vec{V}\right|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}, d=l$،



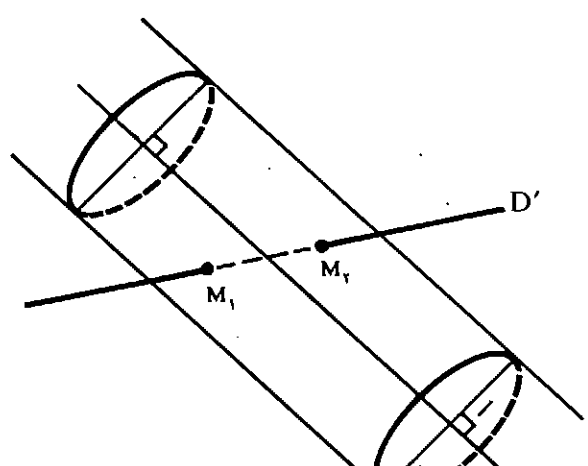
$$\Rightarrow l=\frac{\sqrt{[r(y-y_1)-q(z-z_1)]^2+[p(z-z_1)-r(x-x_1)]^2+[q(x-x_1)-p(y-y_1)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[r(y-y_1)-q(z-z_1)]^2+[p(z-z_1)-r(x-x_1)]^2+[q(x-x_1)-p(y-y_1)]^2-l^2(p^2+q^2+r^2)=0} \quad (1)$$

معـادلهٔ (۱)، مـعادلهٔ یک رویهٔ استـوانه‌ای دوار است کـه خط D محـور آن و شعـاع مقطع قـائمش برابر l است. واضح است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، متعلق به این رویه و فاصله اش از خط D برابر l است.

مثال ۱ ــ دو خط متنافر D و 'D مفروضند. نقطه‌ای از خط 'D را تعیـین کنیـد کـه از خط D به فـاصلهٔ مـعلوم l باشد.

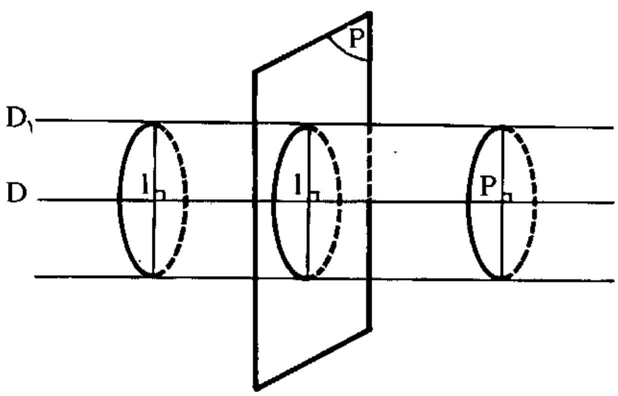
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فـضا که از خط D به فاصلهٔ معلوم l واقع است سطح استوانه‌ای دواری است که شعـاع مقطع قائمش l است. این رویه را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع این رویه باخط 'D جـواب مسـأله است و به تعداد نقـاط برخورد، مسأله جواب دارد.



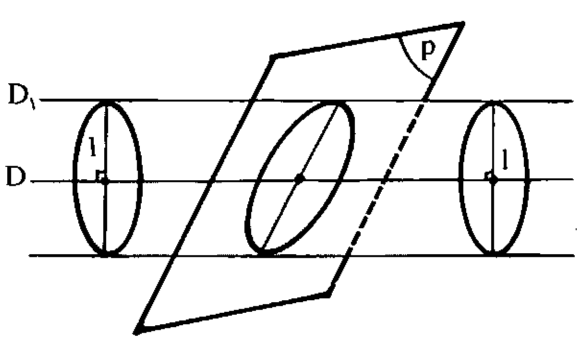
مثال ۲ ــ صفحهٔ P و خط D غیرواقع در این صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از خط D به فاصلهٔ مـعین l واقع است، یعنی سطح استـوانه‌ای دواری را که خط D مـحور آن و شـعاع مـقطع قـائمش دایره‌ای به شعـاع l است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این سطح دوار با صفحه P جواب مسأله است. این جـواب (در صورت وجـود) بنابر وضع نسبی خط D و صفحهٔ P حالتهای مختلفی دارد که عـبارتند از:

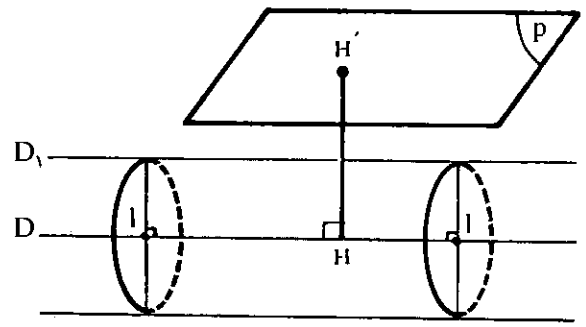
الف) اگر صـفحـه P بر خط D عـمود بـاشد، جـواب دایره‌ای به شعاع l است.



ب) اگر صفـحهٔ P نسبت به خط D مایل باشد، جواب یک بیضی است.

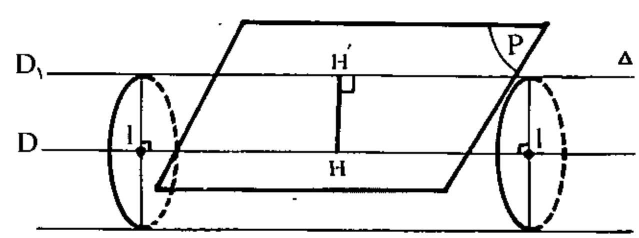


ج) اگر صفحهٔ P موازی خط D باشد، حالتهای زیر را خواهیم داشت:

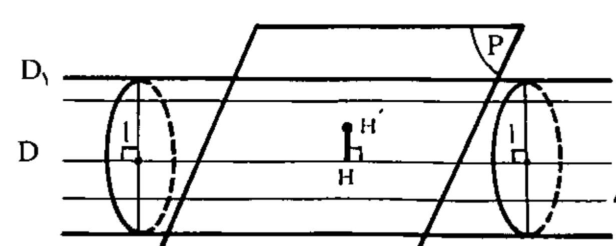


۱) اگر صفحهٔ P رویهٔ استوانه‌ای دوار را قطع نکند، مسأله جواب ندارد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P بیشتر از l باشد.

۲) اگر صفحهٔ P بر رویهٔ استوانه‌ای دوّار در طول یک خط راست مماس باشد، جواب مسأله همان خط تماس می‌باشد و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P برابر l باشد.

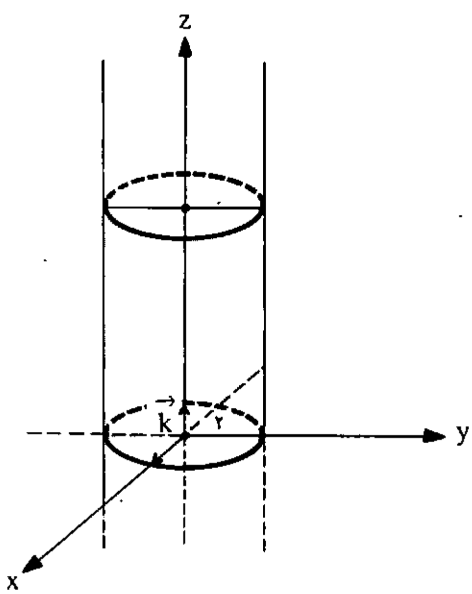


۳) اگر صفحه P سطح استوانه‌ای دوار را قطع کند، جواب دو خط راست موازی خط D می‌باشند، و این در صورتی است که فاصلهٔ خط D از صفحه P کوچکتر از l و بزرگتر از صفر باشد.



تبصره ـ اگر صفحهٔ P بر خط D بگذرد همان‌طوری که پیش از این دیدیم مکان هندسی جواب مسأله دو خط راست موازی خط D، در طرفین آن و به فاصلهٔ l از آن می‌باشد، که در حالت فضایی این دو خط فصل مشترک سطح استوانه‌ای دوّار با صفحه P است که چون در این حالت فاصلهٔ خط D از صفحهٔ P صفر است، خطوط جواب مسأله به فاصله l از خط D واقعند.

مثال ۱ ـ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از محور z ها در دستگاه مختصات $o-xyz$ به فاصلهٔ ۲ قرار داشته باشد.



حل ـ در دستگاه مختصات دکارتی در فضا معادلهٔ محور z ها به صورت: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ است.

برای تعیین معادلهٔ مکان هندسی فوق، فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان باشد. با توجه به اینکه بردارهادی محور z ها $\vec{k}(0,0,1)$ است، اگر نقطهٔ دلخواه $A(0,0,1)$ را روی محور z ها اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{vmatrix} \quad ,$$

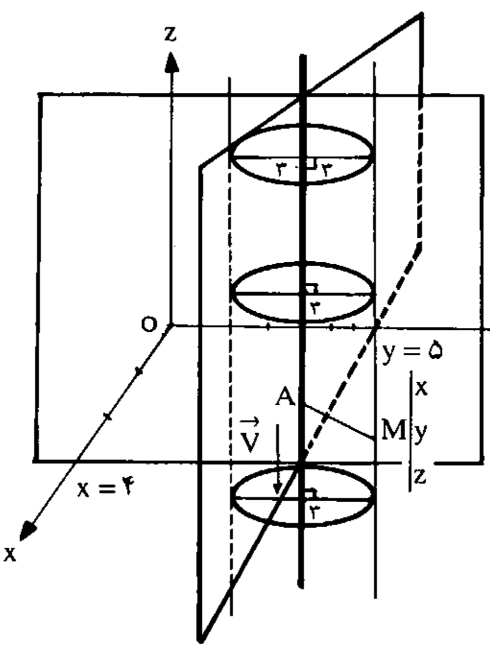
$$\vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y\\-x\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow$$

$$2=\frac{\sqrt{(y)^2+(-x)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}\Rightarrow 2=\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{1}\Rightarrow x^2+y^2=4$$

معادلهٔ بالا معادلهٔ یک سطح استوانه‌ای دوّار است که محور آن محور z ها و شعاع مقطع قائمش برابر ۲ است. فصل مشترک این سطح استوانه‌ای دوّار با صفحهٔ xoy از دستگاه مختصات o−xyz دایرهٔ (c) به معادلهٔ $(c):\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۲ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D:\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$ به فاصلهٔ ۳ واقع است.



حل ــ فرض می‌کنیم M(x,y,z) نقطه‌ای از مکان هندسی فوق باشد. بردارهادی خط D به تصاویر (۰،۰،۱) است. بنابراین با اختیار نمودن نقطهٔ A(۴,۵,۲) از خط D خواهیم داشت:

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-4\\y-5\\z-2\end{vmatrix}\quad \vec{V}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{V}\begin{vmatrix}y-5\\-x+4\\0\end{vmatrix}$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow$$

$$3=\frac{\sqrt{(y-5)^2+(-x+4)^2+0}}{\sqrt{0+0+1}}$$

$$\Rightarrow (y-5)^2+(x-4)^2=9$$

این معادله رویهٔ استوانه‌ای دواری را مشخص می‌کند که مقطع قائم آن با صفحهٔ xoy، دایرهٔ به معادلهٔ $(c):\begin{cases}(y-5)^2+(x-4)^2=9\\z=0\end{cases}$ است.

مثال ۳ ــ نقطه‌ای روی خط $D:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z$ بیابید که از خط $D':\begin{cases}x-2y+z-1=0\\2x+y-z+3=0\end{cases}$ به فاصلهٔ $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ باشد.

حل ــ معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّاری را که خط D محور آن و شعاع مقطع قائمش $15\sqrt{\frac{5}{14}}$ است می‌نویسیم و نقطهٔ تقاطع این رویه با خط D′ را به دست می‌آوریم. اگر M(x,y,z) نقطه‌ای از این مکان باشد با توجه به این که بردار هادی خط D به تصاویر $\vec{V}(2,3,1)$ است با انتخاب نقطه دلخواه A(۱,۰,۰) از خط D داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y\\z\end{vmatrix},\quad \vec{V}\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{AM}\wedge\vec{V}\left|\begin{array}{l} y-۳z \\ ۲z-x+۱ \\ ۳x-۲y-۳ \end{array}\right.$$

$$d=\frac{\left|\vec{AM}\wedge\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|}\Rightarrow ۱۵\sqrt{\frac{۵}{۱۴}}=$$

$$\frac{\sqrt{(y-۳z)^۲+(۲z-x+۱)^۲+(۳x-۲y-۳)^۲}}{\sqrt{۴+۹+۱}}$$

$$\Rightarrow (y-۳z)^۲+(۲z-x+۱)^۲+$$

$$(۳x-۲y-۳)^۲=۱۱۲۵$$ معادلهٔ رویهٔ استوانه‌ای دوّار

$$\begin{cases} x-۲y+z-۱=۰ \\ ۲x+y-z+۳=۰ \end{cases}\Rightarrow\ z=۵x+۵\ ,\ y=۳x+۲$$
$$(y-۳z)^۲+(۲z-x+۱)^۲+(۳x-۲y-۳)^۲=۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow (-۱۲x+۱۳)^۲+(۹x+۱۱)^۲+(-۳x-۷)^۲=۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow ۲۳۴x^۲+۵۵۲x+۳۳۹=۱۱۲۵\Rightarrow$$

$$۲۳۴x^۲+۵۵۲x-۷۸۶=۰\Rightarrow ۷۸x^۲+۱۸۴x-۲۶۲=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\ ,\ x=\frac{-۲۶۲}{۷۸}=\frac{-۱۳۱}{۳۹}$$

$$\Rightarrow M_۱(x=۱\ ,y=۵\ ,z=۱۰)$$

$$M_۲(x=\frac{-۱۳۱}{۳۹}\ ,y=\frac{-۱۰۵}{۱۳}\ ,z=\frac{-۴۶۰}{۳۹})$$

نقاط $M_۱$ و $M_۲$ جواب مسأله‌اند. بنابراین دو نقطه روی خط D' وجـود دارد کـه از خط D به فـاصلهٔ $۱۵\sqrt{\frac{۵}{۱۴}}$ است. باید توجه داشت که ممکن است مسأله یک جواب داشته باشد. و یا دارای جواب نباشد بنابراًن کـه معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده برحسب x به ترتیب، ریشهٔ مضاعف داشته باشد و یا ریشه نداشته باشد.

تمرین

۱ ــ خط D و دو نقطهٔ A و B مـفـروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیـابید که از خط D به فاصلهٔ معلوم l و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. در صورتی که:

الف) دو نقطهٔ A و B روی خط D باشند.

ب) نقطهٔ A روی خط D و نقطهٔ B خـارج خط D باشد.

ج) دو نقطهٔ A و B روی خط D قرار نداشته باشند.

۲ ــ دو خط متوازی D و D' به فاصلهٔ h از یکدیگر مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط D به فاصلهٔ l و از خط D' به فاصلهٔ l' باشد. (بحث کنید).

۳ ــ خطوط متوازی $D_۱$ و $D_۲$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فـضـا را تعیـین کـنیـد کـه از دو خط $D_۱$ و $D_۲$ متسـاوی‌الفاصله، و از خط $D_۱$ به فاصلهٔ معین l قرار داشـته باشد.

۴ ــ دو خط مـتـوازی $D_۱$ و $D_۲$ مـفـروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فـضا را تعیین کنید که بـه یک فاصله از این دو خط و به فـاصلهٔ $l_۱$ از خط $D_۱$ و به فـاصلهٔ $l_۲$ از خط $D_۲$ واقع باشد. (حالت $l_۱=l_۲$ را نیز بررسی کنید).

۵ ــ دو خط متقاطع $D_۱$ و $D_۲$ و خط $D_۳$ غیر واقع در صـفحـهٔ آنها مـفروض است. مکـان هندسی نقطه‌ای از فضـا را تعیین کـنید که از دو خط $D_۱$ و $D_۲$ متساوی‌الفاصله و از خط $D_۳$ به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۶ ــ سـه خط مـتـوازی و مـتـمـایز $D_۱$ و $D_۲$ و $D_۳$ مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از دو خط $D_۲$ و $D_۳$ به یک فاصله، و از خط $D_۱$ به فاصلهٔ معلوم l قرار داشته باشد.

۷ ــ خط $D:\frac{x-۲}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z+۱}{-۱}$ ودو نقطهٔ $A(۱,+۳,۳)$ و $B(-۲,-۱,+۴)$ مـفروضند. مـعادلـهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از خط D به فاصله $\sqrt{۲۶}$ و از دو نقطهٔ A و B متساوی‌الفاصله باشد.

۸ ــ دو خط $D_۱:\begin{cases} x+۲y=۱ \\ z-x=۴ \end{cases}$ و $D_۲:\begin{cases} x=t \\ y=۳t-۲ \\ z=۲ \end{cases}$ و خط $D_۳:\ \frac{x}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۴}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از دو خط $D_۱$ و $D_۲$ متـساوی

الفاصله و از خط D_3 به فاصله ثابت $2\sqrt{21}$ واقع باشد.

۹ ــ خطهای متوازی $D_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ و $D_2:\begin{cases}x=+1\\y=-4\end{cases}$ و خط $D_3:\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط D_1 و D_2 متساوی‌الفاصله و از خط D_3 به فاصله ۴ واقع باشد.

۱۰ ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از خط $D:2x-1=y-3=3z-6$ به فاصله ۳، و از صفحهٔ $P:2x-y-2z=0$ به فاصله ۲ است.

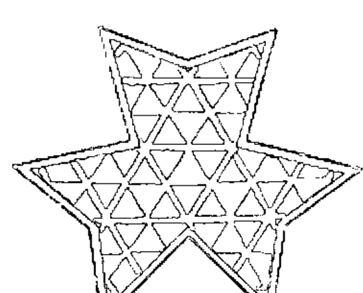
۱۱ــ صفحه $P:3x+4y-1=0$ وخط $D:\begin{cases}x+y=3\\z-y=4\end{cases}$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ P را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ معین $2\sqrt{3}$ باشد.

۱۲ ــ اولاً ــ معادلهٔ خطی را بنویسید که از مرکز کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$ می‌گذرد، با محور x ها زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$، با محور عرضها زاویهٔ $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{4}$ می‌سازد و زاویه‌اش با محور z ها منفرجه است.

ثانیاً ــ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از سطح کرهٔ فوق را تعیین کنید که از خط D به فاصلهٔ ۲ قرار دارد.

۱۳ ــ دو خط $D:\begin{cases}x=2a-1\\y=3-a\\z=a+2\end{cases}$ و $D':\begin{cases}x=2y-3\\z+x=2\end{cases}$ مفروضند مختصات نقاطی از خط D را بیابید که از خط D' به فاصلهٔ ۵ واقعند.

۱۴ ــ دو خط متقاطع $D:x=y=z-1$ و $D':\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-2$ مفروض‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از این دو خط به فاصلهٔ معین ۲ واقع است.

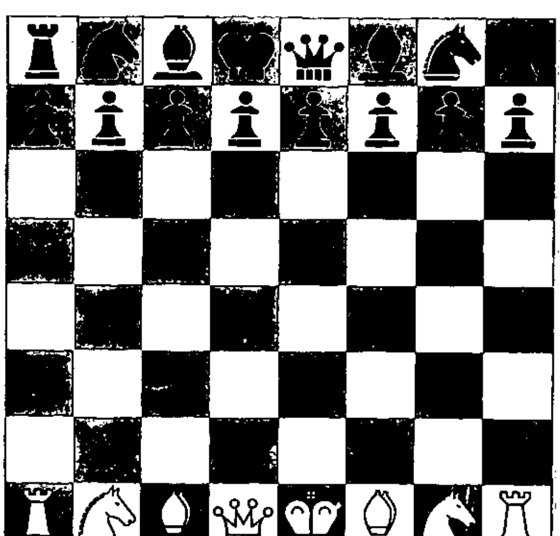




تفریح اندیشه ۴

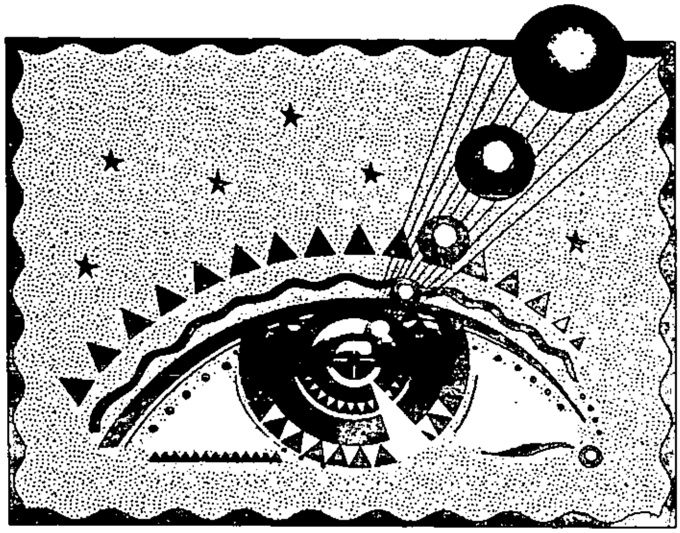
یک رخ شطرنج روی صفحه شطرنج که از ۶۴ خانه تشکیل شده است می‌خواهد از آخرین خانهٔ سمت چپ بالا، به اولین خانه سمت راست پایین بیاید. در خانه‌های عمودی، این مهره فقط می‌تواند از بالا به پایین، و در خانه‌های افقی، به راست یا چپ حرکت کند، اما نمی‌تواند از خانه‌ای که تازه گذشته، دوباره بگذرد.

چند راه ممکن برای حرکت رخ وجود دارد؟



جواب در صفحهٔ ۸۸

★ ★ ★ ★



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۲)

● حمید رضاامیری

TEST 5

تست ۵

Time allowed: 1¼ hours

وقت $۱\frac{۱}{۴}$ ساعت

SECTION I

بخش ۱

(Twenty questions) Questions 1–20

سؤالهای ۱ الی ۲۰ (بیست سؤال)

1. The period of the function f, where

$$f : x \mapsto 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right),\ x \in \mathbb{R},$$

is

A π B $\pi/3$ C 3π D 6π E $11\pi/2$

۱ ــ دورهٔ تناوب تابع f (باضابطهٔ) $f:x\mapsto ۲\sin(\frac{x}{۳}-\frac{\pi}{۲})$ ، $x \in \mathbb{R}$ عبارت است از

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) ۳π ۴) ۶π ۵) $۱۱\frac{\pi}{۲}$

2. The unit vector in the direction of (**a** − **b**), where
a = (3**i** − 5**j** − 2**k**), **b** = (2**i** − 3**j** − 4**k**),
is

A **i** − 2**j** + 2**k** B $\frac{1}{\sqrt{65}}$(5**i** − 2**j** − 6**k**)

C ⅓(**i** − 2**j** + 2**k**) D $\frac{1}{9}$(**i** − 2**j** + 2**k**)

E ⅓(−**i** + 2**j** − 2**k**)

۲ ــ بردار واحد در امتداد بردار (**a** − **b**)، که **a** = (۳**i** − ۵**j** − ۲**k**) و **b** = (۲**i** − ۳**j** − ۴**k**)، عبارت است از

۱) **i** − ۲**j** + ۲**k**

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۶۵}}$(۵**i** − ۲**j** − ۶**k**)

۳) $\frac{۱}{۳}$(**i** − ۲**j** + ۲**k**)

۴) $\frac{۱}{۹}$(**i** − ۲**j** + ۲**k**)

۵) $\frac{۱}{۳}$(−**i** + ۲**j** − ۲**k**)

3. Given that $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, then $\frac{dy}{dx} =$

A $\tan(t/2)$ **B** $\cot(t/2)$ **C** $-\cot(t/2)$

D $\frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}$ **E** $-\tan(t/2)$

۳) فرض کنید $x = t - \sin t$ و $y = ۱ - \cos t$ در این صورت $\frac{dy}{dx}$ برابر است با

۱) $tg(\frac{t}{۲})$ ۲) $\cot g(\frac{t}{۲})$ ۳) $-\cot g(\frac{t}{۲})$

۴) $\frac{۱ - \sin t}{۱ - \cos t}$ ۵) $-tg(\frac{t}{۲})$

4. The complete set of the real values of k for which the equation
$$x^2 + kx + 2k = 0$$
has real distinct roots is

A $\{k : k > 8\}$

B $\{k : k < 0\}$

C $\{k : 0 \leqslant k \leqslant 8\}$

D $\{k : k \leqslant 0\} \cup \{k : k \geqslant 8\}$

E $\{k : k < 0\} \cup \{k : k > 8\}$

۴) مجموعهٔ تمام مقادیر حقیقیِ k که (به‌ازای آنها) معادلهٔ $x^۲ - kx + ۲k = ۰$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقیِ متمایز باشد، عبارت است از

۱) $\{k : k > ۸\}$

۲) $\{k : k < ۰\}$

۳) $\{k : ۰ \leq k \leq ۸\}$

۴) $\{k : k \leq ۰\} \cup \{k : k \geq ۸\}$

۵) $\{k : k < ۰\} \cup \{k : k > ۸\}$

5. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(1 - x)^2} dx =$

A $\frac{4}{3}$ **B** $-\frac{4}{3}$ **C** 1 **D** ln 3 **E** − ln 3

۵ ــ (حاصل انتگرال کدام است؟) $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{(۱-x)^۲} dx =$

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) ۱ ۴) Ln۳

۵) −Ln۳

6. The gradient of that diameter of the circle
$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$
which is perpendicular to the line joining the centre of the circle to the origin is

A $-\frac{4}{3}$ **B** $-\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$

D $-\frac{5}{4}$ **E** $\frac{3}{4}$

۶ ــ ضریب زاویهٔ قطرِ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۸y = ۰$ که بر خط و اصل بینِ مرکز دایره و مبدأ مختصات، عمود است، عبارت است از

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$ ۵) $\frac{۳}{۴}$

7. Given that
$$f : x \mapsto 2x,$$
$$g : x \mapsto 3x - 4,$$
for $x \in \mathbb{R}$, then
$f^{-1}g^{-1} : x \mapsto$

A $\frac{1}{2x(3x - 4)}$ **B** $\frac{x + 4}{6}$ **C** $\frac{x + 8}{6}$

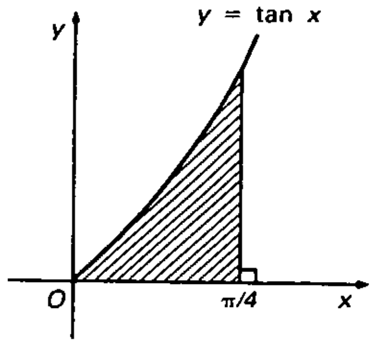
D $\frac{1}{6x - 8}$ **E** $\frac{3x - 4}{2}$

۷ ــ فرض کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f : x \mapsto ۲x$ و $g : x \mapsto ۳x - ۴$، در این صورت ? $f^{-۱}g^{-۱} : x \mapsto$ (منظور از $f^{-۱}g^{-۱}$ همان $f^{-۱}og^{-۱}$ است)

۱) $\frac{۱}{۲x(۳x - ۴)}$ ۲) $\frac{x + ۴}{۶}$

۳) $\frac{x + ۸}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶x - ۸}$

۵) $\frac{۳x - ۴}{۲}$

8. 

The area, in square units, of the shaded region is

A 1   **B** ln 2   **C** − ln 2

D $\frac{1}{2}$ ln 2   **E** − $\frac{1}{2}$ ln 2

9. Given that $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$e^y\frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

and $y = 0$ when $x = 0$, then, when $x = -1$,

A $y = 1$ **B** $y = -\ln(e-2)$

C $y = -1$ **D** $y = 1 + \ln 2$

E y cannot be found

10. Given that

$$\frac{1+i}{x} = \frac{i}{y+i},$$

where $x,\ y \in \mathbb{R}$, then

A $x = 0,\ y = 1$ **B** $x = 0,\ y = -1$

C $x = 2,\ y = 1$ **D** $x = -2,\ y = 1$

E there is insufficient information for x and y to be found.

11. The number of ways in which n books can be chosen from $(m+n)$ different books is

A $\frac{(m+n)!}{n!}$ **B** $(m+n)! - m!$

C $(m+n)! - n!$ **D** $\frac{(m+n)!}{m!}$

E $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

۸ ــ مساحت ناحیهٔ سایه‌زده، در واحد مربع، عبارت است از

۱) ۱   ۲) Ln۲

۳) −Ln۲   ۴) $\frac{۱}{۲}$Ln۲

۵) −$\frac{۱}{۲}$Ln۲

۹ــ فرض کنید برای x ∈ℝ و y ∈ℝ، $e^y\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ و اگر x = ۰ در این صورت y = ۰، در صورتی که x = −۱ (مقدار y کدام است؟)

۱) y = ۱

۲) y = −Ln(e − ۲)

۳) y = −۱

۴) y = ۱ + Ln۲

۵) y را نمی‌توان یافت.

۱۰ ــ فرض کنید $\frac{۱+i}{x} = \frac{i}{y+i}$ که x, y ∈ℝ، در این صورت

۱) x = ۰, y = ۱

۲) x = ۰, y = −۱

۳) x = ۲, y = ۱

۴) x = −۲, y = ۱

۵) اطلاعات برای محاسبهٔ x و y کافی نیست.

۱۱ ــ تعداد راههایی که می‌توان n کتاب را از بین (m + n) کتاب متمایز، انتخاب کرد، عبارت است از

۱) $\frac{(m+n)!}{n!}$

۲) (m + n)! − m!

۳) (m + n)! − n!

۴) $\frac{(m+n)!}{m!}$

۵) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

12. The coefficient of x^2 in the binomial expansion of $(1-x)^5$ is

A -15 B -10 C $+10$

D $+15$ E $+20$

13. $\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r}$

A $=\frac{1}{e-1}$ B $=\frac{e}{e-1}$ C $=\frac{1}{e+1}$

D $=\frac{e}{e+1}$ E does not converge

14. The roots of the equation $2x^2+7x+3=0$ are α and β. An equation whose roots are $2\alpha+\beta$ and $\alpha+2\beta$ is

A $2y^2+21y+52=0$ B $2y^2-21y+52=0$

C $2y^2-21y-52=0$ D $2y^2+21y-52=0$

E $2y^2+21y-48=0$

15. The complete set of values of x for which
$|x-2|<|2x|$,
where $x \in \mathbb{R}$, is

A $\{x : x > -2\}$

B $\{x : \frac{2}{3} < x < 2\}$

C $\{x : x < -2\} \cup \{x : \frac{2}{3} < x < 2\}$

D $\{x : x < -2\} \cup \{x : x > \frac{2}{3}\}$

E $\{x : x < -\frac{2}{3}\} \cup \{x : x > 2\}$

16. The general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(y+1)}{x}$$

is, N being a constant,

A $y=x^2+N$

B $y=Nx^2-1$

C $y=N(x^2-1)$

D $y=x^2+Nx$

E $y=Nx^2-2x$

۱۲ــ ضریبِ $x^۲$ در بسط بینمِ $(۱-x)^۵$ عبارت است از

۱) -۱۵ ۲) -۱۰

۳) ۱۰ ۴) ۱۵ ۵) ۲۰

۱۳ــ مقدار $\sum_{r=۱}^{\infty} e^{-r}$ (برابر است با)

۱) $\frac{۱}{e-۱}$ ۲) $\frac{e}{e-۱}$

۳) $\frac{۱}{e+۱}$ ۴) $\frac{e}{e+۱}$

۵) همگرا نیست.

۱۴ــ α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۷x+۳=۰$ می‌باشند. معادله‌ای که ریشه‌های آن $۲\alpha+\beta$ و $\alpha+۲\beta$ باشند، عبارت است از

۱) $۲y^۲+۲۱y+۵۲=۰$ ۲) $۲y^۲-۲۱y+۵۲=۰$

۳) $۲y^۲-۲۱y-۵۲=۰$ ۴) $۲y^۲+۲۱y-۵۲=۰$

۵) $۲y^۲+۲۱y-۴۸=۰$

۱۵ــ مجموعهٔ تمام مقادیری چون $x \in \mathbb{R}$ برای (برقراریِ نامساوی) $|x-۲|<|۲x|$ عبارت است از

۱) $\{x : x > -۲\}$

۲) $\left\{x : \frac{۲}{۳} < x < ۲\right\}$

۳) $\{x : x < -۲\} \cup \left\{x : \frac{۲}{۳} < x < ۲\right\}$

۴) $\{x : x < -۲\} \cup \left\{x : x > \frac{۲}{۳}\right\}$

۵) $\left\{x : x < -\frac{۲}{۳}\right\} \cup \{x : x > ۲\}$

۱۶ــ جواب عمومیِ معادلهٔ دیفرانسیلِ $\frac{dy}{dx}=\frac{۲(y+۱)}{x}$، (با شرط این که N مقدار ثابتی باشد، عبارت است از

۱) $y=x^۲+N$ ۲) $y=Nx^۲-۱$

۳) $y=N(x^۲-۱)$ ۴) $y=x^۲+Nx$

۵) $y=Nx^۲-۲x$

17. Given that $x = \cos^2 t$, $y = \tan t$, then, when $t = \pi/4$,

$\frac{dy}{dx} =$

A 2 B -2 C 4

D -4 E $-\frac{1}{2}$

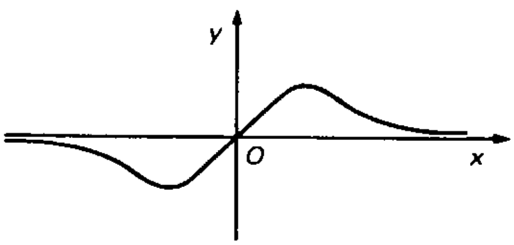
۱۷ ــ فرض کنید $x = \cos^۲ t$ و $y = tg\ t$، در این صورت، هرگاه $t = \frac{\pi}{۴}$ (مقدار) $\frac{dy}{dx}$ برابر است با

۱) ۲ ۲) −۲

۳) ۴ ۴) −۴

۵) $-\frac{۱}{۲}$

18.



The equation of the curve shown could be

A $y = \tan^{-1}x$ B $y = x e^{-x}$

C $y = \frac{x}{1 + x^2}$ D $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$

E $y = \frac{\sin x}{x}$

۱۸ ــ معادلهٔ منحنی نمایش داده شده (روبرو) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y = tg^{-۱}x$

۲) $y = xe^{-x}$

۳) $y = \frac{x}{۱ + x^۲}$

۴) $y = \frac{x^۲}{۱ + x^۴}$

۵) $y = \frac{\sin x}{x}$

19. The number of solutions, which lie in the range $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, of the equation

$$2 \sin^2 x + 7 \sin x + 6 = 0,$$

where $x \in \mathbb{R}$, is

A 0 B 1 C 2 D 4

E none of the above

۱۹ ــ تعداد جوابهای واقع در فاصلهٔ $۰ \le x \le ۲\pi$ و $x \in \mathbb{R}$، برای معادلهٔ $۲\sin^۲ x + ۷\sin x + ۶ = ۰$، عبارت است از

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

۵) هیچ‌یک از موارد فوق (قبل)

20. $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}).(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$

A $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + \mathbf{k}$ B 9

C -9 D $9\mathbf{i}$

E $-9\mathbf{i}$

۲۰ــ(مقدار)$(۲i + ۳j + k).(i - ۴j + k)$ برابر است با

۱) $۲i - ۱۲j + k$

۲) ۹

۳) −۹

۴) ۹i

۵) −۹i

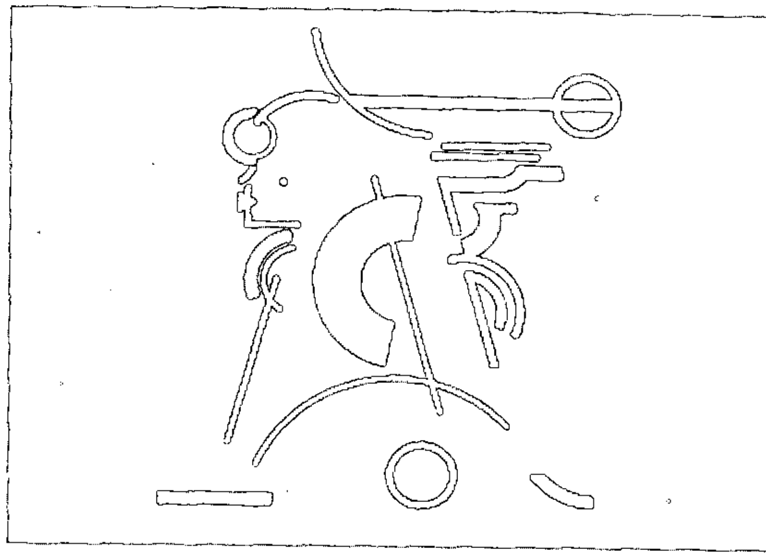
ریاضیات گسسته

(قسمت دوّم)

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

Discrete and Combinatorial Mathematic. An Applied Introduction. Ralph P. Grimaldi



ترکیبات: قضیهٔ دو جمله‌ای

دستهٔ کارتی شامل ۵۲ کارت از چهار رنگ زیر تشکیل شده‌است:

قرمز، سیاه، آبی، و سبز. هر رنگ دارای ۱۳ کارت (از یک تا سیزده) است: ۱، ۲، ۳، ...، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳.

اگر خواسته باشیم از این دسته کارت به‌طور متوالی و بدون بازگرداندن، سه کارت بیرون بکشیم، در این صورت بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب:

$$۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ = \frac{۵۲!}{۴۹!} = P(۵۲ \text{ و } ۳)$$

امکان موجودند، که مثلاً یکی از آنها ۱، سبز یکی ۹، قرمز یکی سیاه است. به‌جای این کار، اگر به‌طور ساده از دستهٔ کارت مزبور یکباره سه کارت چنان انتخاب کنیم که دیگر ترتیب انتخاب کارتها مهم نباشد، در این صورت جمیع شش جایگشت زیر دقیقاً متناظر بایک انتخاب (بدون ترتیب) می‌شوند.

سیاه - ۱، سبز - ۹، قرمز و ۹، قرمز - سیاه - ۱، آبی و سیاه - ۹، قرمز - ۱، آبی ۹، قرمز - ۱، آبی - سیاه و ۱، آبی - ۹، قرمز - سیاه و ۱، آبی - سیاه - ۹، قرمز

در نتیجه، هرانتخاب، باترکیب، ازاین کارتها بی‌هیچ ارجاعی به‌ترتیب، متناظر با ۳! جایگشت سه کارت است. این مطلب در شکل تساوی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(تعداد انتخابهای سه اندازه‌ای از دسته‌ای ۵۲ تایی) × (۳!)

= (تعداد جایگشتهای ۵۲ کارت‌که یکباره سه کارت از آنها انتخاب شود)

$$= P(۵۲ . ۳) = \frac{۵۲!}{۴۹!}$$

درنتیجه، از یک دستهٔ کارتِ ۵۲ تایی، می‌توان به $۵۲!/(۳!۴۹!) = ۲۲,۱۰۰$ طریق، سه کارت، بدون بازگرداندن، بیرون کشید.

درنتیجه، دانشجوی مورد بحث می‌تواند، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب، امتحان خود را به

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

طریق به‌اتمام رساند. □

مثال ۱ . ۲۰

a) معلم ورزش دبیرستانی باید از کلاسهای پایینتر و بالاتر نه نفر برای تیم والیبال انتخاب کند. اگر ۲۸ نفر دانش‌آموز کلاس پایینتر و ۲۵ نفر دانش‌آموز کلاس بالاتر موجود باشند، می‌تواند انتخاب خود را به

$$\binom{۵۳}{۹} = ۴,۴۳۱,۶۱۳,۵۵۰$$

طریق انجام دهد.

b) اگر دو شاگرد کلاس پایینتر و یک شاگرد کلاس بالاتر بهترین بازیکن‌اند و ضرورت دارد که در تیم باشند، در این صورت باقی‌ماندهٔ تیم می‌توانند به

$$\binom{۵۰}{۶} = ۱۵,۸۹۰,۷۰۰$$

طریق انتخاب شوند.

c) برای تورنمنت خاصی تیم مدرسه باید متشکل از چهار شاگرد پایینتر و پنج شاگرد بالاتر باشد. معلم موردبحث می‌تواند چهار شاگرد پایینتر را به $\binom{۲۸}{۴}$ طریق انتخاب کند. به‌ازای هریک از این انتخابها $\binom{۲۵}{۵}$ طریق اختیار پنج شاگرد بالاتر را دارد. در نتیجه، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب می‌تواند تیمش را به

$\binom{28}{4}\binom{25}{5} = 1{,}087{,}836{,}750$ طریق برای تور خاص انتخاب کند. □

بعضی از مسائل را، بسته به این‌که شخص چگونه به تحلیل وضعیت می‌پردازد، می‌توان از نقطهٔ نظر ترتیب یا ترکیب مورد بررسی قرار داد. مثال زیر به توضیح این موضوع می‌پردازد.

مثال ۱ . ۲۱. معلم ورزش مثال ۱ . ۲۰ باید چهار تیم نه نفره از میان ۳۶ دانش‌آموز سال اول تشکیل دهد. به چند طریق می‌تواند این چهار تیم را انتخاب کند. تیمها را A ، B ، C ، و D می‌نامیم.

a) برای تشکیل تیم A ، می‌تواند نه دانش‌آموز را از میان ۳۶ دانش‌آموزی که نام‌نویسی کرده‌اند به $\binom{36}{9}$ طریق انتخاب کند. برای تیم B فرآیند انتخاب $\binom{27}{9}$ امکان به‌دست می‌دهد. این کار برای انتخاب تیمهای C و D ، به‌ترتیب، $\binom{18}{9}$ و $\binom{9}{9}$ طریق امکان به‌جامی‌گذارد. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، چهار تیم مذکور می‌توانند به

$$\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \left(\frac{36!}{27!9!}\right)\left(\frac{27!}{18!9!}\right)\left(\frac{18!}{9!9!}\right)\left(\frac{9!}{9!0!}\right) = \frac{36!}{9!9!9!9!} = 2.145\times 10^{19}$$

طریق انتخاب شوند.

b) برای راه حل دیگر، ۳۶ دانش‌آموز مزبور را به طریق زیر در یک خط قرار می‌دهیم.

دانش‌آموز اول	دانش‌آموز دوم	دانش‌آموز سوم	......	دانش‌آموز سی و پنجم	دانش‌آموز سی‌وششم

به‌سبب انتخاب چهار تیم، باید نه نفر A ، نه‌نفر B ، نه نفر C و نه نفر D را در ۳۶ مکان مزبور توزیع کنیم. تعداد طرقی که این کار را طبق آنها می‌توان انجام داد تعداد ترتیبات ۳۶ حرف در بردارندهٔ نه عضو هریک از A ، B ، C ، و D است. این مسأله، مسألهٔ آشنای ترتیبهای اشیای نامتمایز است، و جواب آن عبارت از:

$$\frac{36!}{9!9!9!9!}$$ □

دو مثال بعدیمان اشاره براین دارند که چگونه بعضی از مسائل، برای حلشان، به‌هر دو مفهوم ترتیب و ترکیب نیاز دارند.

مثال ۱ . ۲۲. تعداد ترتیبات حروف TALLAHASSEE عبارت است.

$$\frac{11!}{3!2!2!2!1!1!} = 831{,}600$$

چند ترتیب از آنها بدون A های مجاوراند؟

هنگامی که A ها را کنار بگذاریم، برای ترتیب حروف باقی‌مانده:

$$\frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040$$

طریق موجودند. یکی از این ۵۰۴۰ طریق را درشکل زیر نشان داده‌ایم، که نوک پیکانهای آن دلالت برنه‌مکان ممکن برای سه A ی موردبحث دارند.

↑ E ↑ E ↑ S ↑ T ↑ L ↑ L ↑ S ↑ H ↑

سه مکان از این مکانها را می‌توان به $\binom{9}{3} = 84$ طریق انتخاب کرد؛ و به‌علت این‌که این کار به‌ازای جمیع ۵۰۳۹ ترتیب دیگر E ، E ، S ، T ، L ، L ، S ، H نیز ممکن است، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب $5040 \times 84 = 423{,}360$ ترتیب حروف بدون A های متوالی درTALLAHASSEE موجودند □ .

مثال ۱ . ۲۳. در مطالعهٔ نظریهٔ کدگذاری جبری «algebraic coding Theory» و نظریهٔ زبانهای کامپیوتری «Theory of computer languages» ترتیبات خاصی، موسوم به رشته‌ها «*strings*» ، تشکیل شده از الفبا «alphabet» ای تعیین شده از نمادها، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر الفبای تعیین شده مزبور، فی‌المثل، شامل نمادهای ۰ ، ۱ ، و ۲ باشد، در این‌صورت ۰۱ ، و ۲۰ پنج رشته از نه رشتهٔ به طول «*length*» دواند. ۰۰۰ و ۱۱۰ درمیان ۲۷ رشتهٔ به‌طول سه‌اند.

درحالت عمومی، اگر n عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد، آنگاه بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب در مورد الفبای ۰ ، ۱ ، و ۲ ، 3^n رشته به‌طول n موجودند. اگر $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، وزن «*weight*» x ، نمایش داده شده با wt(x) ، را با $wt(u) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال، حالت $n = 2$ ، $wt(12) = 3$ و $wt(22) = 4$ ؛ و در حالت $n = 3$ ، $wt(101) = 2$ ، $wt(210) = 3$ ، و $wt(222) = 6$.

می‌خواهیم مشخص کنیم که در میان 3^{10} رشتهٔ به‌طول ۱۰ چند رشته وزن زوج دارند. رشته‌ای چنین زمانی که تعداد ۱ های واقع در

آن زوج باشد دارای وزن زوج است.

شش حالت متفاوت برای بررسی موجودند. اگر رشتهٔ x شامل ۱ نباشد، در این صورت هریک از ۱۰ مکان واقع در x را می‌توان با ۰ یا ۲ پرکرد، و بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب 2^{10} رشته از چنین رشته‌هایی وجود دارند. زمانی که رشتهٔ مورد بحث شامل دو ۱ باشد، مکانهای این دو ۱ را می‌توان به $\binom{10}{2}$ طریق اختیار کرد. هنگامی که این دو مکان مشخص شوند، برای قراردادن ۰ یا ۲ درهشت‌مکان دیگر $\binom{8}{2}$ طریق موجود می‌شوند. درنتیجه $2^8\binom{10}{2}$ رشته به‌وزن زوج وجود دارند که شامل دو ۱ اند. تعداد رشته‌های چهار حالت دیگر را در جدول ۱ . ۲ داده‌ایم.

■ جدول ۱ . ۲

تعداد ۱ها	تعداد رشته‌ها	تعداد ۱ها	تعداد رشته‌ها
4	$\binom{10}{4}2^6$	8	$\binom{10}{8}2^2$
6	$\binom{10}{6}2^4$	10	$\binom{10}{10}$

در نتیجه، بنا به قاعدهٔ جمع، تعداد رشته‌های به‌طول ۱۰ ی که دارای وزن زوجند عبارت است از:

$$2^{10}+\binom{10}{2}2^8+\binom{10}{4}2^6+\binom{10}{6}2^4+\binom{10}{8}2^2+\binom{10}{10} = \sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n} \quad \square$$

این بخش را باسه مطلب که بامفهوم ترکیبات در ارتباطند خاتمه می‌دهیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای اعداد صحیح n ، r ، با n ≥ r ، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$. این‌رابطه رامی‌توان به‌طریق جبری‌ازفرمول $\binom{n}{r}$ محقق کرد، اما ترجیح می‌دهیم ملاحظه کنیم زمانی که با انتخاب با اندازهٔ r ی از کلکسیونی از n شیء متمایز سروکار داریم، فرایند انتخاب n − r شیء به‌جا می‌گذارد. درنتیجه، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ وجود تناظری را بین انتخابهای بااندازهٔ r (شیء انتخاب شده) و انتخابهای بااندازهٔ n − r (شیء به‌جا مانده) اظهار می‌کند. مثالی از این تناظر را در جدول ۱ . ۳ نشان داده‌ایم که در آن n = ۵ ، r = ۲ ، و اشیای متمایز عبارتند از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، و ۵.

این نوع تناظر درفصل ۵ به‌گونه‌ای صوریتر تعریف شده در سایر حالات شمارش به کار خواهد رفت.

■ جدول ۱ . ۳

	انتخابهای اندازهٔ r = ۲ (اشیای انتخاب شده)	انتخابهای اندازهٔ n - r = ۳ (اشیای کنار گذاشته شده)
1.	1,2	3,4,5
2.	1,3	2,4,5
3.	1,4	2,3,5
4.	1,5	2,3,4
5.	2,3	1,4,5
6.	2,4	1,3,5
7.	2,5	1,3,4
8.	3,4	1,2,5
9.	3,5	1,2,4
10.	4,5	1,2,3

مطلب دوم قضیه‌ای است از تجربهٔ گذشته‌مان در جبر.

قضیهٔ ۱ . ۱ . (قضیه دو جمله‌ای) اگر x و y متغیر و n عددی صحیح و مثبت باشد در این صورت:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\dots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{n}x^ny^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

پیش از بررسی اثبات عمومی قضیه، به‌امتحان حالتی خاص می‌پردازیم. اگر n = ۴ ، ضریب x^2y^2 در حاصل‌ضرب

(x + y)	(x + y)	(x + y)	(x + y)
عامل اول	عامل دوم	عامل سوم	عامل چهارم

برابر باتعداد طرحی است که در آنها می‌توانیم دو x را (با به جاگذاشتن y) از چهار x ی، که در هر عامل یکی از آنها موجود است، انتخاب کنیم. (گرچه x ها در ظاهر یکسان‌اند، آنها را به‌عنوان x واقع در عامل اوّل، x واقع در عامل دوم، ... ، و x واقع در عامل چهارم متمایز می‌کنیم.) به‌عنوان مثال، در میان امکانات موجود، می‌توانیم (۱) x را از دو عامل اول و y را از دو عامل دوم؛ یا (۲) x را از عوامل اوّل و سوم و y را از عوامل دوم و چهارم اختیار کنیم. جدول ۱ . ۴ شش انتخاب ممکن را اختصار کرده‌است.

■ جدول ۱ . ۴

	عاملهای انتخاب شده برای x		عاملهای انتخاب شده برای y
(1)	1,2	(1)	3,4
(2)	1,3	(2)	2,4
(3)	1,4	(3)	2,3
(4)	2,3	(4)	1,4
(5)	2,4	(5)	1,3
(6)	3,4	(6)	1,2

در نتیجه ضریب x^2y^2 در $(x+y)^4$ برابر $\binom{4}{2} = 6$، تعداد طرق انتخاب دوشیء متمایز از مجموعه‌ای از چهار شیء متمایز است.

اکنون به اثبات حالت عمومی روی می‌آوریم.

اثبات. در حاصل‌ضرب

$(x+y)$	$(x+y)$	$(x+y)$	$(x+y)$
عامل چهارم	عامل سوم	عامل دوم	عامل اول

ضریب x^ky^{n-k}، که در آن $0 \le k \le n$، تعداد طرق متفاوتی است که در آنها می‌توان k، x (و نتیجتاً $(n-k)$، y) از n عامل موجود را انتخاب کرد. (به‌عنوان مثال یک راه، انتخاب x از k عامل اوّل و y از $n-k$ عامل دوم است.) تعداد کل انتخابهایی به اندازهٔ k یی چنین، از کلکسیونی با اندازهٔ n، عبارت است از: $\binom{n}{k} = (n, k)$ و قضیّهٔ دو جمله‌ای از آن به دست می‌آید. □

از مطلب فوق متوجه می‌شویم که

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

به‌علت این قضیّه، اغلب به $\binom{n}{k}$ نیز به‌عنوان ضریب دو جمله‌ای «*binomial coefficient*» اشاره شد.

مثال ۱ . ۲۴

a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب x^5y^2 در $(x+y)^7$ عبارت است از:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

b) ضریب a^5b^2 در $(2a-3b)^7$ عبارت است از:

$$\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$$

این مقدار را از قضیّهٔ دوجمله‌ای با قراردادن $x = 2a$ و $y = 3b$ به دست می‌آوریم. □

نتیجه ۱ . ۱

به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$،

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

اثبات:

قسمت (a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای، چون قرار دهیم $x = y = 1$، به دست می‌آید. زمانی که $x = -1$ و $y = 1$، قسمت (b) نتیجه می‌شود. □

سومین و آخرین مطلبمان تعمیم قضیّهٔ دوجمله‌ای و به قضیّهٔ چند جمله‌ای «*multinomial theorem*» موسوم است.

قضیّهٔ ۱ . ۲

به‌ازای اعداد صحیح و مثبت n، t، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\dots x_t^{n_t}$ در

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_t)^n$$

عبارت است از:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\dots n_t!}$$

که هر n_i ی آن، به‌ازای هر $1 \le i \le t$، عددی صحیح با $0 \le n_i \le n$ است، و

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_t = n$$

اثبات:

چون در اثبات قضیّهٔ دوجمله‌ای، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\dots x_t^{n_t}$ تعداد طرقی است که طبق آنها می‌توان x_1 را از n_1 عامل از n عامل، x_2 را از n_2 عامل از $n-n_1$ عامل باقی‌مانده، x_3 را از n_3 عامل از $n-n_1-n_2$ عامل اکنون باقی‌مانده، ... ، و x_t را از n_t عامل از آخرین $n_t = n-n_1-n_2-n_3-\dots-n_{t-1}$ عامل باقی‌مانده، انتخاب کرد. این کار را می‌توان، چون در قسمت (a) ی مثال ۱ . ۲۱، به

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{t-1}}{n_t}$$

طریق انجام‌داد. تفصیلات نشان دادن این را که مقدارفوق برابراست با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\dots n_t!}$$

که به‌صورت:

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_t}$$

نیز نوشته می‌شود و به ضریب چند جمله‌ای multinomial coefficient موسوم است؛ به‌عهدهٔ خواننده وامی‌گذاریم. □



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

کُدگذاری اطلاعات
و نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر (۵)

❏ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

۱ ــ کُدگذاری اطلاعات:

انسانها در طول تاریخ برای بیان مقصود خود تلاش کرده‌اند اطلاعات مورد استفادهٔ خود را به صورت ترکیبی از نماد[1]هایی که قابل فهم باشد نمایش دهند. در زبان فارسی علایمی که برای ارقام و اعداد بکار می‌روند به همراه حروف الفبا از این گونه نمادها هستند.

پیدایش خط و استفاده از اعداد در میان ملل و اقوام مختلف و پذیرش نمادهای متعدد برای شکلهای هندسی، به کارگیری ترکیبی از خط[2] و نقطه[3] برای علایم مورس و مجموعه‌ای از علایم قرار دادی برای نُتهای موسیقی را می‌توان نمونه‌هایی از کدگذاری اطلاعات در میان این ملل دانست. پیش از آغاز بحث، لازم است تعریفی از داده و اطلاعات ارائه شود.

در کامپیوتر به اطلاعات خام که هیچ عملی روی آن انجام نشده باشد داده[4] و به دادهٔ پردازش شده به‌منظور رسیدن به یک هدف معین، **اطلاعات**[5] می‌گویند.

داده‌های ورودی و اطلاعات خروجی در کامپیوتر از ارقام لاتین ۰ تا ۹، حروف A تا Z یا a–z و نمادهای عملیاتی +، −، *، /، **، ^ و غیره و علایم ویژه مانند: !، $، #، و غیره (و یا معادل آنها در هریک از زبانهای رایج دنیا از جمله زبان فارسی) تشکیل شده است که به هریک از این علایم، **یک کاراکتر**[6] می‌گویند.

برای نمایش هریک از این کاراکترها در کامپیوتر، لازم است مدارهای الکترونیکی ساخته شود تا کاراکترهایی مانند ۲۶ حالت حرف الفبای انگلیسی، ۳۲ حرف الفبای فارسی، ۱۰ حالت ارقام ۰ تا ۹ فارسی یا لاتین و غیره نشان داده شود.

برای نمایش ارقام ۰ تا ۹ چنانچه بخواهیم از سیستم دهدهی استفاده کنیم باید ۱۰ حالت مختلف داشته باشیم و برای هر حالت به یک مدار[7] الکترونیکی نیاز است. اما این کار با اشکال مواجه خواهد شد و مدار ساخته شده نیز از سرعت کافی برخوردار نخواهد بود. از این رو در کامپیوتر از سیستم عددی

دودویی یا باینری استفاده می‌شود که دارای کمترین حالت ممکن است. این سیستم دارای دو حالت ۰ و ۱ است. طبق قرار داد اگر از مدار الکترونیکی جریان[۸] عبور کند به آن ارزش ۱ و در غیر این‌صورت به آن ارزش ۰ می‌دهند. دلایل استفاده از سیستم دودویی غیر از سادگی عملیات ریاضی در این مبنا آسانی نمایش کاراکترها توسط مدارهای الکترونیکی است. این سیستم دارای معایبی نیز هست، از آن جمله برای نوشتن اعداد بزرگ در این مبنا، تعداد رقم‌های زیادی مورد نیاز است.

کاراکترها در حافظهٔ[۹] کامپیوتر به‌صورت مجموعه‌ای از ۰ و ۱ ذخیره می‌شوند. به یک رقم در مبنای ۲ که از ۰ یا ۱ تشکیل می‌شود یک **بیت** (BIT) می‌گویند که مخفف Binary digit است. بیت کوچکترین واحد حافظه در کامپیوتر است.

در کامپیوترهای متداول امروزی، هر کاراکتر از هشت بیت تشکیل شده است، از این رو به هر هشت بیت **یک بایت** گفته می‌شود به چهار بیت در اصطلاح کامپیوتری **نیبل** Nibble می‌گویند و هر Nibble معرف یک رقم در مبنای ۱۶ است.

سیستم‌های متداول کدگذاری اطلاعات در کامپیوتر عبارتند از: **الف** ــ سیستم BCD **ب** ــ سیستم اَسکی ASCII **ج** ــ سیستم EBCDIC.

الف ــ سیستم کدگذاری BCD. BCD که مخفف Binary Coded Decimal است به معنی **معادل دودویی یکی عدد دهدهی** است. همان‌گونه که از نام این سیستم پیداست از آن فقط برای نمایش و کدگذاری اعداد استفاده می‌شود. از این سیستم نمی‌توان برای نمایش کاراکترهای حرفی و علایم ویژه و عملیاتی استفاده کرد. در سیستم BCD هر رقم مبنای ۱۰ به کمک چهار رقم مبنای ۲ نمایش داده می‌شود. سیستم ۶ بیتی BCD نیز وجود دارد.

از آنجا که اعداد مبنای ۱۰ دارای سه حالت منفی، مثبت و بدون علامت است از این رو برای این منظور از یک جدول علامت قرار دادی BCD به شرح زیر استفاده می‌شود.

کد BCD	علامت عدد
۱۱۰۱	−
۱۱۰۰	+
۱۱۱۱	بدون علامت

در سیستم کدگذاری BCD، کد علامت[۱۰] عدد با چهار بیت نمایش داده می‌شود و در سمت راست عدد قرار می‌گیرد.

مثال: عدد ۱۲۷ را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۱۱
۱	۲	۷	علامت

در نتیجه معادل دودویی عدد ۱۲۷ با کد BCD به‌صورت ۰۰۰۱۰۰۱۰۰۱۱۱۱۱۱۱ می‌شود.

مثال: عدد ۱۲۷+ را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۰۰
۱	۲	۷	+

مثال: عدد ۱۲۷− را به روش BCD نمایش دهید.

حل:

۰۰۰۱	۰۰۱۰	۰۱۱۱	۱۱۰۱
۱	۲	۷	−

ب ــ سیستم کدگذاری اَسکی ASCII : ASCII مخفف American Standard Code for Information Interchange به معنی **کد استاندارد آمریکا برای تبدیل اطلاعات** است. این سیستم کُدگذاری در حال حاضر بیشتر از سایر سیستم‌های کدگذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اکثر کامپیوترهای شخصی نوع IBM و سازگار[۱۱] با آن از سیستم کدگذاری اَسکی برای نمایش اطلاعات استفاده می‌شود. هر کاراکتر حرفی یا عددی و کاراکتر ویژه و

کاراکتر کنترلی با ۸ بیت نمایش داده می‌شود. درواقع در این سیستم، هر بایت از هشت بیت تشکیل شده است. سیستم هفت بیتی اَسکی هم وجود دارد که چندان متداول نیست. از سیستم کدگذاری ASCII برای نمایش همه‌گونه اطلاعات و داده‌ها از قبیل عددی ــ حرفی، حرفی ــ عددی و تصاویر استفاده می‌شود. با ۸ بیت، ۲۵۶ = ۲^۸ ترکیب گوناگون ایجاد می‌شود از این رو کد اسکی کاراکترها شامل ۲۵۶ کاراکتر از ۰ تا ۲۵۵ است.

در سیستم اسکی ۸ بیتی به چهار بیت سمت چپ، بیتِ Zone یا ناحیه و به چهار بیت سمت راست، بیتِ Digit یا رقم می‌گویند. کوچکترین واحد آدرس پذیر در کامپیوتر بایت است. برای سادگی انجام عملیات برروی کاراکترها، حافظهٔ بعضی از کامپیوترها طوری ساخته شده‌اند که می‌توان بایتها را به صورت انفرادی آدرس دهی کرد.

حدود ۸۰ درصد کشورها به‌طور کامل و ۱۰۰٪ در کامپیوترهای خود از کُد استاندارد ASCII استفاده می‌کنند و ۲۰ درصد کشورها نظیر ژاپن، کشورهای خاورمیانه، چین و کشورهای دارای زبان روسی فقط از ۶۰٪ کُد استاندارد ASCII استفاده می‌کنند چون الفبای این کشورها حاوی علایم زیادی است که در محدودهٔ کُد ASCII جای نمی‌گیرد.

نمی‌توان مفهوم نمایش کاراکترها توسط اعداد را جدید دانست. در حقیقت، کد ASCII دنبالهٔ مستقیم کُد مورس است که در سالهای ۱۸۰۰ توسط اپراتورهای تلگراف به کاربرده می‌شد. در کُد مورس، حروف و علایم دستوری توسط ترکیبات گوناگونی از ضربه‌های روی کلید تلگراف بیان می‌شود. پالسهای کوتاه و بلند که به صورت علامتهای خط و نقطه‌ها نوشته می‌شود مشابه حالتهای خاموش ۰ و روشن ۱ در حساب دودویی است. کُدهای مورس حداکثر از شش خط تیره یا نقطه برای نمایش یک کاراکتر استفاده می‌کند در حالی که کد ASCII فقط هشت بیت را به‌کار می‌برد چون کد ASCII نسبت به کُد مورس شامل علایم بیشتری است. ASCII بین حروف بزرگ و کوچک تمایز قایل است. اگر چه کُدهای مورس و ASCII از الگوهای دودویی یکسانی استفاده نمی‌کنند، با این وجود تشابهات آنها قابل توجه است.

در ASCII مقادیر ۱ تا ۲۶ بیانگر کاراکترهای کنترلی هستند. ۲۶ کاراکتر کنترلی منطبق با ۲۶ حرف الفبا زبان انگلیسی است.

یکی دیگر از ویژگی‌های کد استاندارد ASCII این است که مقادیر دهدهی ۴۸ تا ۵۷ اسکی بیانگر ارقام ۰ تا ۹ هستند. این مطلب یک تناقض به نظر می‌رسد. آیا عدد صفر به صورت هشت بیتی ۰۰۰۰۰۰۰۰ ذخیره می‌شود یا به‌صورت ۰۰۱۱۰۰۰۰ که معادل دودویی عدد دهدهی ۴۸ است؟ پاسخ برای هر دو حالت مثبت است. عدد صفر هم به‌صورت دودویی ۰۰۰۰۰۰۰۰ و هم به‌صورت ۰۰۱۱۰۰۰۰ ذخیره می‌شود! علت آن، این است که کامپیوترها میان اعدادی که در عملیات ریاضی به‌کار می‌روند و اعدادی که در چاپ یا در یک آدرس به‌صورت خیابان چهارم پلاک ۲۰ به‌کار می‌رود، تفاوت قایل هستند. عددی مانند ۲۰ بستگی به این که در عملیات ریاضی به کار رود یا در یک جمله یا یک آدرس چاپ شود، متفاوت ذخیره[۱۲] می‌شود. عدد ۲۰ در عملیات ریاضی به‌صورت علامت و قدر مطلق عدد[۱۳] یا روش مکمل[۱۴] ۱ یا مکمل[۱۵] ۲ ذخیره می‌شود که کمی بعد توضیح داده می شود در حالی که همین عدد در چاپ یا در آدرسی به‌صورت پلاک ۲۰ به صورت اسکی برای کاراکتر صفر و دو به طور مستقل و از سمت چپ به راست ذخیره می‌شود.

به مجموعه کاراکترهای ASCII که در زیر ارائه شده است توجه کنید.

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	NUL	032	(space)	064	@	096	
001	☺	SOH	033	!	065	A	097	a
002	☻	STX	034	"	066	B	098	b
003	♥	ETX	035	#	067	C	099	c
004	♦	EOT	036	$	068	D	100	d
005	♣	ENQ	037	%	069	E	101	e
006	♠	ACK	038	&	070	F	102	f
007	(beep)	BEL	039	'	071	G	103	g
008	◘	BS	040	(	072	H	104	h
009	(tab)	HT	041	)	073	I	105	i
010	(line feed)	LF	042	*	074	J	106	j
011	(home)	VT	043	+	075	K	107	k
012	(form feed)	FF	044	,	076	L	108	l
013	(carriage return)	CR	045	-	077	M	109	m
014	♫	SO	046	.	078	N	110	n
015	☼	SI	047	/	079	O	111	o
016	►	DLE	048	0	080	P	112	p
017	◄	DC1	049	1	081	Q	113	q
018	↕	DC2	050	2	082	R	114	r

ASCII value	Character	Control character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
019	‼	DC3	051	3	083	S	115	s
020	¶	DC4	052	4	084	T	116	t
021	§	NAK	053	5	085	U	117	u
022	▬	SYN	054	6	086	V	118	v
023	↨	ETB	055	7	087	W	119	w
024	↑	CAN	056	8	088	X	120	x
025	↓	EM	057	9	089	Y	121	y
026	→	SUB	058	:	090	Z	122	z
027	←	ESC	059	;	091	[	123	{
028	(cursor right)	FS	060	<	092	\	124	¦
029	(cursor left)	GS	061	=	093	]	125	}
030	(cursor up)	RS	062	>	094	^	126	~
031	(cursor down)	US	063	?	095	_	127	⌂

ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
128	Ç	160	á	192	└	224	α
129	ü	161	í	193	┴	225	β
130	é	162	ó	194	┬	226	Γ
131	â	163	ú	195	├	227	π
132	ä	164	ñ	196	─	228	Σ
133	à	165	Ñ	197	┼	229	σ
134	å	166	ª	198	╞	230	µ
135	ç	167	º	199	╟	231	τ
136	ê	168	¿	200	╚	232	Φ
137	ë	169	⌐	201	╔	233	Θ
138	è	170	¬	202	╩	234	Ω
139	ï	171	½	203	╦	235	δ
140	î	172	¼	204	╠	236	∞
141	ì	173	¡	205	═	237	φ
142	Ä	174	«	206	╬	238	ε
143	Å	175	»	207	╧	239	∩
144	É	176	░	208	╨	240	≡
145	æ	177	▒	209	╤	241	±
146	Æ	178	▓	210	╥	242	≥
147	ô	179	│	211	╙	243	≤
148	ö	180	┤	212	╘	244	⌠
149	ò	181	╡	213	╒	245	⌡
150	û	182	╢	214	╓	246	÷
151	ù	183	╖	215	╫	247	≈
152	ÿ	184	╕	216	╪	248	°
153	Ö	185	╣	217	┘	249	∙
154	Ü	186	║	218	┌	250	·
155	¢	187	╗	219	█	251	√
156	£	188	╝	220	▄	252	ⁿ
157	¥	189	╜	221	▌	253	²
158	Pt	190	╛	222	▐	254	■
159	ƒ	191	┐	223	▀	255	(blank FF)

خوانندگان عزیز توجه داشته باشند وقتی شما عددی مانند ۲۰ را چه در محاسبات ریاضی و چه برای چاپ باشد به کمک صفحه کلید روی مانیتور تایپ می‌کنید به ترتیب کُد اسکی ۲ و ۰ در حافظه ذخیره می‌شود اما برای عملیات ریاضی عدد ۲۰ طبق مراحلی که در زبان برنامه‌نویسی پیش‌بینی شده است به صورت علامت و قدرمطلق عدد در عملیات شرکت می‌کند. لازم به توضیح است که چون نوشتن کُد دودویی کلمه‌ای مانند HOSSEIN به‌صورت استاندارد ASCII به فضای زیادتر از آنچه که در اختیار ماست احتیاج دارد از این رو ما نیز مانند اکثر کامپیوترهای شخصی معادل مبنای ۱۶ کد ASCII را می‌نویسیم.

مثال: کلمهٔ ALI را به‌صورت کُد دودویی و شانزده‌تایی ASCII نمایش دهید.

حل: با مراجعه به جدول کد اسکی کاراکترها معلوم می‌شود که کد اسکی حرف A برابر ۶۵ و کد اسکی حرف L برابر ۷۶ و کد اسکی حرف I برابر ۷۳ در مبنای ۱۰ است. از این رو نمایش ALI به‌صورت دودویی و شانزده تایی به صورت زیر است:

به صورت دودویی:

A		L		I	
0100	0001	0100	1100	0100	1001

۱ بایت

به‌صورت شانزده‌تایی:

A		L		I	
4	1	4	c	4	9

۱ بایت

مثال: TAX به چه صورت با کد اسکی شانزده تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	A	X
54	41	58

مثال: TEHRAN به چه صورت با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	E	H	R	A	N
54	45	48	52	41	4E

مثال: NO.20 به چه صورت با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

N	O	.	2	0
4E	4F	2D	32	30

مثال: HOSSEIN را با کد اسکی شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل:

H	O	S	S	E	I	N
48	4F	53	53	45	49	4E

مثال: عدد ۱۲۷ را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

حل:

۱	۲	۷
31	32	37

مثال: عدد ۱۲۷+ را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

حل:

+	۱	۲	۷
2B	31	32	37

مثال: عدد ۱۲۷− را با سیستم کدگذاری ASCII نمایش دهید.

−	۱	۲	۷
2D	31	32	37

در عملیات ریاضی کلیهٔ اعداد مثبت و بدون علامت و اعداد منفی به روش مقدار و علامت عدد قابل نمایش است که عدد بدون علامت، مثبت در نظر گرفته می‌شود. در کامپیوترهای سازگار با IBM و خود IBM اعداد منفی با روش مکمل ۲ و در کامپیوترهای CDC و هیولت پاکارد اعداد منفی با روش مکمل ۱ نمایش داده می‌شود. این مطلب را بعد از سیستم کدگذاری EBCDIC به‌طور مفصل مطرح خواهیم کرد.

ج ــ سیستم کُدگذاری اِبسدیک EBCDIC:

EBCDIC که مخفف Extended BCD Interchange Code است به معنی **کُد تبدیل توسعه یافتهٔ BCD** می‌باشد. همانگونه که از نام EBCDIC پیداست این سیستم کُدگذاری، توسعه یافتهٔ سیستم کُدگذاری BCD است چون برخلاف سیستم BCD ، اعداد صحیح، اعشاری، کاراکترهای حرفی و کاراکترهای ویژه با سیستم کُدگذاری EBCDIC قابل نمایش است. از کدگذاری EBCDIC در کامپیوترهای بزرگ IBM یا Main Frame نظیر IBM ۳۶۰ ، IBM ۳۷۰ ، IBM ۴۳۴۱ و غیره استفاده می‌شود.

در این سیستم هر کاراکتر با هشت بیت نمایش داده می‌شود که از دو قسمت ۴ بیتی تشکیل شده است و مانند سیستم کدگذاری اسکی به چهار بیت سمت چپ، بیت Zone یا ناحیه و به چهار بیت سمت راست، بیت Digit یا رقم می‌گویند.

در روش نمایش ،اعداد به صورت غیر فشرده یا unpacked ، برای علامت اعداد از همان جدول قراردادی علامت عدد سیستم کدگذاری BCD استفاده می‌شود.

به مجموعه کاراکترهای EBCDIC که در زیر ارائه شده است توجه کنید:

EBCDIC Character Set

Ordinal Value				Ordinal Value				Ordinal Value				Ordinal Value			
Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character
0	000	00	NUL	64	100	40	space	128	200	80		192	300	C0	{
1	001	01	SOH	65	101	41	RSP	129	201	81	a	193	301	C1	A
2	002	02	STX	66	102	42		130	202	82	b	194	302	C2	B
3	003	03	ETX	67	103	43		131	203	83	c	195	303	C3	C
4	004	04	SEL	68	104	44		132	204	84	d	196	304	C4	D
5	005	05	HT	69	105	45		133	205	85	e	197	305	C5	E
6	006	06	RNL	70	106	46		134	206	86	f	198	306	C6	F
7	007	07	DEL	71	107	47		135	207	87	g	199	307	C7	G
8	010	08	GE	72	110	48		136	210	88	h	200	310	C8	H
9	011	09	SPS	73	111	49		137	211	89	i	201	311	C9	I
10	012	0A	RPT	74	112	4A	¢	138	212	8A		202	312	CA	SHY
11	013	0B	VT	75	113	4B	.	139	213	8B		203	313	CB	
12	014	0C	FF	76	114	4C	<	140	214	8C		204	314	CC	
13	015	0D	CR	77	115	4D	(	141	215	8D		205	315	CD	
14	016	0E	SO	78	116	4E	+	142	216	8E		206	316	CE	
15	017	0F	SI	79	117	4F	|	143	217	8F		207	317	CF	
16	020	10	DLE	80	120	50	&	144	220	90		208	320	D0	}
17	021	11	DC1	81	121	51		145	221	91	j	209	321	D1	J
18	022	12	DC2	82	122	52		146	222	92	k	210	322	D2	K

Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character	Dec	Oct	Hex	Character
19	023	13	DC3	83	123	53		147	223	93	l	211	323	D3	L
20	024	14	RES/ENP	84	124	54		148	224	94	m	212	324	D4	M
21	025	15	NL	85	125	55		149	225	95	n	213	325	D5	N
22	026	16	BS	86	126	56		150	226	96	o	214	326	D6	O
23	027	17	POC	87	127	57		151	227	97	p	215	327	D7	P
24	030	18	CAN	88	130	58		152	230	98	q	216	330	D8	Q
25	031	19	EM	89	131	59		153	231	99	r	217	331	D9	R
26	032	1A	UBS	90	132	5A	!	154	232	9A		218	332	DA	
27	033	1B	CU1	91	133	5B	$	155	233	9B		219	333	DB	
28	034	1C	IFS	92	134	5C	*	156	234	9C		220	334	DC	
29	035	1D	IGS	93	135	5D	)	157	235	9D		221	335	DD	
30	036	1E	IRS	94	136	5E	;	158	236	9E		222	336	DE	
31	037	1F	ITB/IUS	95	137	5F	¬	159	327	9F		223	337	DF	
32	040	20	DS	96	140	60	-	160	240	A0		224	340	E0	\
33	041	21	SOS	97	141	61	/	161	241	A1	~	225	341	E1	NSP
34	042	22	FS	98	142	62		162	242	A2	s	226	342	E2	S
35	043	23	WUS	99	143	63		163	243	A3	t	227	343	E3	T
36	044	24	BYP/INP	100	144	64		164	244	A4	u	228	344	E4	U
37	045	25	LF	101	145	65		165	245	A5	v	229	345	E5	V
38	046	26	ETB	102	146	66		166	246	A6	w	230	346	E6	W
39	047	27	EXC	103	147	67		167	247	A7	x	231	347	E7	X
40	050	28	SA	104	150	68		168	250	A8	y	232	350	E8	Y
41	051	29	SFE	105	151	69		169	251	A9	z	233	351	E9	Z
42	052	2A	SM/SW	106	152	6A	¦	170	252	AA		234	352	EA	
43	053	2B	CSP	107	153	6B	,	171	253	AB		235	353	EB	
44	054	2C	MFA	108	154	6C	%	172	254	AC		236	354	EC	
45	055	2D	ENQ	109	155	6D	_	173	255	AD		237	355	ED	
46	056	2E	ACK	110	156	6E	>	174	256	AE		238	356	EE	
47	057	2F	BEL	111	157	6F	?	175	257	AF		239	357	EF	
48	060	30		112	160	70		176	260	B0		240	360	F0	0
49	061	31		113	161	71		177	261	B1		241	361	F1	1
50	062	32	SYN	114	162	72		178	262	B2		242	362	F2	2
51	063	33	IR	115	163	73		179	263	B3		243	363	F3	3
52	064	34	PP	116	164	74		180	264	B4		244	364	F4	4
53	065	35	TRN	117	165	75		181	265	B5		245	365	F5	5
54	066	36	NBS	118	166	76		182	266	B6		246	366	F6	6
55	067	37	EOT	119	167	77		183	267	B7		247	367	F7	7
56	070	38	SBS	120	170	78		184	270	B8		248	370	F8	8
57	071	39	IT	121	171	79	`	185	271	B9		249	371	F9	9
58	072	3A	RFF	122	172	7A	:	186	272	BA		250	372	FA	
59	073	3B	CU3	123	173	7B	#	187	273	BB		251	373	FB	
60	074	3C	DC4	124	174	7C	@	188	274	BC		252	374	FC	
61	075	3D	NAK	125	175	7D	'	189	275	BD		253	375	FD	
62	076	3E		126	176	7E	=	190	276	BE		254	376	FE	
63	077	3F	SUB	127	177	7F	"	191	277	BF		255	377	FF	EO

(Column groups: Ordinal Value — Dec, Oct, Hex; Character.)

Note: Blank characters indicate codes not assigned in the IBM standard. These often correspond to additional characters, e.g., superscripts, on various devices.

مثال: کلمهٔ ALI را به‌صورت کد دودویی و شانزده‌تایی EBCDIC نمایش دهید.

حل: با مراجعه به جدول کد EBCDIC کاراکترها معلوم می‌شود که کد EBCDIC حرف A برابر ۱۹۳ و کد EBCDIC حرف L برابر ۲۱۱ و کد EBCDIC حرف I برابر ۲۰۱ در مبنای ۱۰ است. از این رو نمایش ALI به‌صورت دودویی و شانزده‌تایی به‌صورت زیر است:

به صورت دودویی:

A		L		I	
۱۱۰۰	۰۰۰۱	۱۱۰۱	۰۰۱۱	۱۱۰۰	۱۰۰۱

به صورت شانزده‌تایی:

A		L		I	
C	1	D	3	C	9

مثال: TAX به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظه کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	A	X
E3	C1	E7

مثال: TEHRAN به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

T	E	H	R	A	N
E3	C5	C8	D9	C1	D5

مثال: NO.20 به چه صورت با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌شود؟

حل:

N	O	.	2	O
D5	D6	4B	F2	F0

مثال: HOSSEIN را با کد EBCDIC شانزده‌تایی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل:

H	O	S	S	E	I	N
C8	D6	E2	E2	C5	C9	D5

مثال: رقم ۸ را با سیستم کدگذاری EBCDIC به‌صورت دودویی در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: با روش unpacked ، چون ۸ بدون علامت است از این رو طبق جدول

Zone	Digit
۱۱۱۱	۱۰۰۰

قرار داد علامت BCD ، علامت آن کُد ۱۱۱۱ دارد.

مثال: عدد ۱۲۷ را با کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل: بنا به قرار داد، علامت یک عدد در قسمت Zone یا ناحیهٔ سمت راست‌ترین رقم آن عدد قرار می‌گیرد. به‌صورت:

Zone Digit Zone Digit.....Sign Digit

در نتیجه:

۱		۲		Zone	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۱۱	۰۱۱۱

که به صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱	۲	۷
F1	F2	F7

مثال: عدد ۱۲۷+ را با سیستم کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل:

۱		۲		+	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۰۰	۰۱۱۱

که به صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱		۲		+	۷
F	1	F	2	C	7

درواقع علامت عدد مثبت در این روش C است.

مثال: عدد ۱۲۷− را با سیستم کدگذاری EBCDIC با روش unpacked در حافظه نمایش دهید.

حل:

که به‌صورت شانزده‌تایی چنین است:

۱		۲		−	۷
۱۱۱۱	۰۰۰۱	۱۱۱۱	۰۰۱۰	۱۱۰۱	۰۱۱۱

درواقع علامت عدد منفی در این روش D است.

۱		۲		−	۷
F	1	F	2	D	7

به روش unpacked در زبان اسمبلی IBM، Zoned decimal نیز می‌گویند. در روش فشرده یا packed در کدگذاری EBCDIC ، علامت عدد در سمت راست آن قرار می‌گیرد
+۱۲۷ → ۱۲۷+

۲ ــ نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر:

برای نمایش اعداد صحیح در حافظهٔ کامپیوتر از سه روش به شرح زیر استفاده می‌شود:

الف. روش قدرمطلق عدد و علامت

ب. روش مکمل ۱

ج. روش مکمل ۲

الف. روش قدر مطلق عدد و علامت. تمام اعداد صحیح مثبت و بدون علامت تنها با این روش نمایش داده

می‌شوند. اما اعداد صحیح منفی علاوه بر روش قدر مطلق عدد و علامت، با دو روش مکمل ۱ و مکمل ۲ نیز نمایش داده می‌شوند. از آنجا که در کامپیوتر شخصی یا Pc ها برای عدد صحیح ۲ بایت اختصاص می‌یابد. سمت چپ‌ترین بیت از ۲ بایت به علامت عدد اختصاصی داده می شود. برای اعداد صحیح مثبت و اعداد صحیح بدون علامت[16]، در بیت علامت صفر ذخیره می‌شود و برای اعداد صحیح منفی در بیت علامت یک ذخیره می‌شود و در بقیهٔ بیت‌ها از چپ به راست قدر مطلق عدد به صورت دودویی ذخیره می‌شود.

مثال: عدد ۷ را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

↓
بیت علامت

مثال : عدد ۷− را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

مثال: عدد ۷+ را در یک کامپیوتر با طول کلمهٔ ۱۶ بیت نمایش دهید.

حل:

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱

برای ادامهٔ بحث راجع به چگونگی ذخیره سازی اعداد صحیح منفی با روش مکمل ۱ و روش مکمل ۲ لازم می‌بینیم قدری دربارهٔ مکمل‌گیری برای یک عدد در یک مبنای دلخواه صحبت کنم.

✱ واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Symbol
2 - Dash
3 _ Dot
4 _ Data
5 _ Information
6 - Character
7 - Circuit
8 - Wrrent
9 - Memory
10 - Sign
11 - Compatible
12 - Store
13 - Magnitude
14 - One's Complement
15 - Two's Complement
16 - Unsigned Integer



۱ـ اگر درختهای باغی را ۹تا ۹تا یا ۱۲تا ۱۲تا یا ۲۱تا ۲۱تا یا ۲۲تا ۲۲تا یا ۳۹تا ۳۹تا بشمریم هر دفعه ۶ واحد کسر داریم تا تعداد درستی به دست‌آوریم، در باغ حداقل چند درخت وجود دارد؟

۲ـ ثابت کنید اگر A عددی ۲n رقمی با ارقام مساوی یک و B عددی n رقمی با ارقام مساوی ۴ باشند در این‌صورت $N = A + B + 1$ مربع کامل است.

۳ـ ثابت‌کنید: اگر $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}$ آنگاه $\frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$

توان (نما)

(قسمت اول)

(سال اول نظام جدید و قدیم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای آسانتر شدن محاسبه، عبارتی مانند: $2\times2\times2\times2\times2$ را به صورت 2^5 می‌نویسیم. و آن را می‌خوانیم «۲ به توان ۵». به این ترتیب داریم: $4\times4\times4=4^3$ و $3\times3\times3\times3=3^4$

در عددی مانند 3^4، عدد ۳ را پایه و عدد ۴ را توان یا نمای آن عدد می‌نامیم همین‌طور $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ به معنی «$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$» است و در عدد $\left(\frac{2}{5}\right)^3$، $\frac{2}{5}$ پایه و ۳ توان آن عدد است.

عدد $(3/4)^2$ نیز که خوانده می‌شود «۳/۴ به توان ۲»، به معنی $(3/4)\times(3/4)$ است. بنابراین اگر a عدد حقیقی و n عدد طبیعی فرض شوند، بنا به تعریف داریم:

$$\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{\text{(n عامل)}} = a^n \quad (1) \quad \text{(تعریف)}$$

در تعریف (۱) عدد حقیقی a را پایه و عدد طبیعی n را توان (نما) می‌نامیم.

لازم به یادآوری است که توان دوم یک عدد را مجذور آن عدد و توان سوم یک عدد رامکعب آن عدد می‌نامیم.

مثال ۱: اعداد 2^7، 1^5، $\left(\frac{4}{5}\right)^3$، $(2/3)^2$ و 5^4 را بخوانید. و مفهوم آنها را بنویسید.

حل:

$2^7=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$: «۲ به توان ۷»

$1^5=1\times1\times1\times1\times1$: «۱ به توان ۵»

$\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$: «$\frac{4}{5}$ به توان ۳»

$(2/3)^2=2/3\times2/3$: «۲/۳ به توان ۲»

$5^4=5\times5\times5\times5$: «۵ به توان ۴»

مثال ۲: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) 2^4+5^2 ۲) 3^3-4^2

۳) $2^3\times3^2$ ۴) $10^3\div5^2$

حل:

۱) $2^4=2\times2\times2\times2=4\times4=16,\ 5^2=5\times5=25$

$2^4+5^2=16+25=41$

۲) $3^3=3\times3\times3=9\times3=27,\ 4^2=4\times4=16$

$3^3-4^2=27-16=11$

۳) $2^3=2\times2\times2=4\times2=8,\ 3^2=3\times3=9$

$2^3\times3^2=8\times9=72$

۴) $10^3=10\times10\times10=100\times10=1000,\ 5^2=5\times5=25$

$10^3\div5^2=1000\div25=40$

با توجه به تساویهای زیر:

$2^5=2\times2\times2\times2\times2,$

$2^4=2\times2\times2\times2$ و

$2^3=2\times2\times2,\quad 2^2=2\times2$

می‌نویسیم $2=2^1$، همین‌طور $3=3^1$ و $4=4^1$.

پس ۲ به توان ۱ مساوی ۲ و به طور کلی هر عدد حقیقی مانند: a به توان ۱ برابر a است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^1=a \quad (2) \quad \text{(تعریف)}$$

این تذکر لازم است که هر عدد حقیقی که دارای توان نباشد، توان آن را یک منظور می‌کنیم.

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) 3^2+4^2 ۲) $3^3+4^3+5^3$

۳) $2^6-6^2+4^2$ ۴) 5^4-3^5

۵) $2^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ۶) $\left(10^4\div5^3\right)\div2^4$

● ضرب عددهای تواندار با پایه‌های مساوی

می‌دانیم:

$$۲^۳ \times ۲^۴ = (۲\times۲\times۲)\times(۲\times۲\times۲\times۲)$$
$$= ۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^۷$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲^۳ \times ۲^۴ = ۲^{۳+۴} = ۲^۷$$

همین‌طور :

$$۵^۴ \times ۵^۵ = ۵^{۴+۵} = ۵^۹$$
$$۳^۲ \times ۳^۳ = ۳^{۲+۳} = ۳^۵$$
$$(۳/۴)^۳ \times (۳/۴)^۴ = (۳/۴)^{۳+۴} = (۳/۴)^۷$$
$$۷ \times ۷^۲ \times ۷^۳ \times ۷^۴ \times ۷^۵ = ۷^{۱+۲+۳+۴+۵} = ۷^{۱۵}$$

مثال ۳: عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $۲^۵ \times ۲^۴ \times ۲^۳ \times ۲^۲ \times ۲$

۲) $۵^۳ \times ۵^۴ \times ۵^۵$

۳) $(۱/۲)^۲ \times (۱/۲)^۳$

۴) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^۳ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^۴ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^۷ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲۰}$

۵) $(۰/۲)^۲ \times (۰/۲)^۳ \times (۰/۲)^۵ \times (۰/۲)^۴$

۶) $۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰۰$

حل :

۱) $۲^۵ \times ۲^۴ \times ۲^۳ \times ۲^۲ \times ۲ = ۲^{۵+۴+۳+۲+۱} = ۲^{۱۵}$

۲) $۵^۳ \times ۵^۴ \times ۵^۵ = ۵^{۳+۴+۵} = ۵^{۱۲}$

۳) $(۱/۲)^۲ \times (۱/۲)^۳ = (۱/۲)^{۲+۳} = (۱/۲)^۵$

۴) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^۳ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^۴ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^۷ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲۰} =$
$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳+۴+۷+۲۰} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳۴}$

۵) $(۰/۲)^۲ \times (۰/۲)^۳ \times (۰/۲)^۵ \times (۰/۲)^۴ =$
$(۰/۲)^{۲+۳+۵+۴} = (۰/۲)^{۱۴}$

۶) $۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰۰$
$= ۱۰ \times ۱۰^۲ \times ۱۰^۳ \times ۱۰^۴ \times ۱۰^۵ \times ۱۰^۶ =$
$۱۰^{۱+۲+۳+۴+۵+۶} = ۱۰^{۲۱}$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۱) در ضرب عددهای تواندار اگر پایه‌ها مساوی باشند، کافی‌است یک پایه را نوشته، نماها را با هم جمع کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۱) چنین است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (۱)$$

مثال ۴: با فرض این که a یک عدد حقیقی است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a \times a^۲ \times a^۳ \times a^۴$

۲) $a^{۲۰} \times a^{۱۴}$

۳) $a^{۳۴} \times a^{۳۴}$

۴) $a^{۱۰۰} \times a^{۲۰} \times a^{۱۰} \times a^۳ \times a$

۵) $a^{۱۰۰۰} \times a^{۳۰۰} \times a^{۷۰} \times a^۴$

حل :

۱) $a \times a^۲ \times a^۳ \times a^۴ = a^{۱+۲+۳+۴} = a^{۱۰}$

۲) $a^{۲۰} \times a^{۱۴} = a^{۲۰+۱۴} = a^{۳۴}$

۳) $a^{۳۴} \times a^{۳۴} = a^{۶۸}$

۴) $a^{۱۰۰} \times a^{۲۰} \times a^{۱۰} \times a^۳ \times a = a^{۱۰۰+۲۰+۱۰+۳+۱} = a^{۱۳۴}$

۵) $a^{۱۰۰۰} \times a^{۳۰۰} \times a^{۷۰} \times a^۴ = a^{۱۰۰۰+۳۰۰+۷۰+۴} = a^{۱۳۷۴}$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی است و m و n اعداد طبیعی باشند حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{۳m+n} \times a^{۲m+n} \times a^n \times a^m \times a^{۳n}$

۲) $a^{m^۲+n^۲} \times a^{۲mn}$

۳) $a^{۲m^۲} \times a^{۲n^۲} \times a^{۴mn}$

۴) $a^۱ \times a^۲ \times a^۳ \times a^۴ \times a^{۱۱n-۱۰}$

۵) $a^{n^۳} \times a^{۳n^۲} \times a^{۳n} \times a^۱$

۶) $a \times a^۲ \times a^۳ \times \ldots \times a^n$

(راهنمایی: $۱+۲+۳+\ldots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$)

● ضرب عددهای تواندار با نماهای مساوی

می‌دانیم:

$$۲^۳ \times ۳^۳ = (۲\times۲\times۲)\times(۳\times۳\times۳)$$

$$= (2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3) = (2\times3)^3 = 6^3$$

پس می‌توان نوشت:

$$2^3\times3^3=(2\times3)^3=6^3$$

همین طور می‌توان نوشت:

$$1^5\times2^5\times3^5=(1\times2\times3)^5=6^5$$

$$3^4\times3^4=(3\times3)^4=9^4$$

$$2^{30}\times3^{30}=(2\times3)^{30}=6^{30}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۲) در ضرب عددهای تواندار، اگر نماها مساوی باشند، کافی است نمای یکی از عددها را برای حاصلضرب پایه‌ها قرار دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی، و a و b عددهای حقیقی باشند، بیان ریاضی دستور (۲) چنین است:

$$a^n\times b^n=(a\times b)^n \qquad (2)$$

مثال ۵: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد تواندار بنویسید.

۱) $a^5\times b^6\times a^4\times b^3$

۲) $a^m\times a^n\times b^{n+m}$

۳) $a^m\times b^n\times a^n\times b^m$

۴) $a^m\times a^m\times a^n\times a^n\times b^{2n}\times b^{2m}$

۵) $a^{40}\times b^{20}\times a^{20}\times b^{25}\times b^{15}$

۶) $a^{70}\times b^4\times a^4\times b^{70}$

حل:

۱) $a^5\times b^6\times a^4\times b^3=(a^5\times a^4)\times(b^6\times b^3)$
$=(a^{5+4})\times(b^{6+3})$
$=a^9\times b^9=(a\times b)^9$

۲) $a^m\times a^n\times b^{n+m}=(a^m\times a^n)\times b^{m+n}$
$=a^{m+n}\times b^{m+n}=(a\times b)^{m+n}$

۳) $a^m\times b^n\times a^n\times b^m=(a^m\times a^n)\times(b^n\times b^m)$
$=a^{m+n}\times b^{n+m}$
$=(a^{m+n})\times(b^{m+n})=(a\times b)^{m+n}$

۴) $a^m\times a^m\times a^n\times a^n\times b^{2n}\times b^{2m}$
$=(a^m\times a^m\times a^n\times a^n)\times(b^{2n}\times b^{2m})$
$=(a^{m+m+n+n})\times(b^{2n+2m})$
$=a^{2m+2n}\times b^{2m+2n}=(a\times b)^{2m+2n}$

۵) $a^{40}\times b^{20}\times a^{20}\times b^{25}\times b^{15}$
$=(a^{40}\times a^{20})\times(b^{20}\times b^{25}\times b^{15})$
$=(a^{40+20})\times(b^{20+25+15})$
$=a^{60}\times b^{60}=(a\times b)^{60}$

۶) $a^{70}\times b^4\times a^4\times b^{70}=(a^{70}\times a^4)\times(b^{70}\times b^4)$
$=(a^{70+4})\times(b^{70+4})$
$=a^{74}\times b^{74}=(a\times b)^{74}$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد تواندار بنویسید.

۱) $a^{30}\times b^4\times a^2\times b^{31}\times b\times a^4$

۲) $a^{m+n}\times b^m\times b^n\times a^{m+n}\times b^{m+n}$

۳) $a^m\times a^n\times b^m\times b^n\times(a\times b)^{m+n}$

۴) $a\times b\times a^2\times b^2\times a^3\times b^3\times a^4\times b^4$

● تقسیم عددهای تواندار با پایه‌های مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$2^6\div2^4=\frac{2^6}{2^4}=$$

$$\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}=2^2=4$$

این تقسیم را می‌توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$2^6\div2^4=2^{6-4}=2^2=4$$

همچنین:

$$5^5\div5^2=\frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times5\times5\times5}{\cancel{5}\times\cancel{5}}=5^3$$

و به طور مختصر می‌توان نوشت:

$$5^5\div5^2=5^{5-2}=5^3$$

مثال ۶: حاصل تقسیمهای زیر را پیدا کنید.

۱) $5^{20}\div5^{18}$ ۲) $2^{12}\div2^7$

۳) $7^{45}\div7^{44}$ ۴) $3^{134}\div3^{132}$

حل :

۱) $5^{20} \div 5^{18} = 5^{20-18} = 5^{2} = 25$

۲) $2^{12} \div 2^{7} = 2^{12-7} = 2^{5} = 32$

۳) $7^{45} \div 7^{44} = 7^{45-44} = 7^{1} = 7$

۴) $3^{134} \div 3^{132} = 3^{134-132} = 3^{2} = 9$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۳) برای تقسیم دو عدد توانی با پایه‌های مساوی، کافی است یک پایه را بنویسیم و نمای مقسوم‌علیه را از نمای مقسوم کم کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۳) چنین است:

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} \qquad (3)$$

مثال ۷: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توانداربنویسید.

۱) $a^{5} \div a^{3}$

۲) $\dfrac{a^{7} \times b^{5}}{b^{2} \times a^{4}}$

۳) $\dfrac{a^{37} \times b^{40} \times a^{4} \times b^{5} \times a^{3} \times a \times b^{34}}{a^{3} \times b^{30} \times b^{15} \times a^{5} \times a^{3}}$

۴) $\dfrac{a^{132} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}}$

۵) $\dfrac{a^{76} + a^{78}}{a^{4} + a^{2}}$

۶) $\dfrac{a \times a^{2} \times a^{3} \times b \times b^{2} \times b^{3}}{(a \times b)^{4}}$

حل:

۱) $a^{5} \div a^{3} = a^{5-3} = a^{2}$

۲) $\dfrac{a^{7} \times b^{5}}{b^{2} \times a^{4}} = \dfrac{a^{7}}{a^{4}} \times \dfrac{b^{5}}{b^{2}} = a^{7-4} \times b^{5-2} = a^{3} \times b^{3} = (a \times b)^{3}$

۳) $\dfrac{a^{37} \times b^{40} \times a^{4} \times b^{5} \times a^{3} \times a \times b^{34}}{a^{3} \times b^{30} \times b^{15} \times a^{5} \times a^{3}}$

$$= \frac{(a^{37} \times a^{4} \times a^{3} \times a) \times (b^{40} \times b^{5} \times b^{34})}{(a^{3} \times a^{5} \times a^{3}) \times (b^{30} \times b^{15})}$$

$$= \frac{a^{37+4+3+1} \times b^{40+5+34}}{a^{3+5+3} \times b^{30+15}}$$

$$= \frac{a^{45} \times b^{79}}{a^{11} \times b^{45}} = \frac{a^{45}}{a^{11}} \times \frac{b^{79}}{b^{45}} = a^{45-11} \times b^{79-45}$$

$$= a^{34} \times b^{34} = (a \times b)^{34}$$

۴) $\dfrac{a^{132} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}} = \dfrac{a^{132-72}}{a^{37-17}} = \dfrac{a^{60}}{a^{20}} = a^{60-20} = a^{40}$

۵) $\dfrac{a^{76} + a^{78}}{a^{4} + a^{2}} = \dfrac{a^{76}(1 + a^{2})}{a^{2}(a^{2} + 1)} =$

$$\frac{a^{76}}{a^{2}} \times \frac{a^{2}+1}{a^{2}+1} = a^{76-2} \times 1 = a^{74}$$

۶) $\dfrac{a \times a^{2} \times a^{3} \times b \times b^{2} \times b^{3}}{(a \times b)^{4}} =$

$$\frac{a^{1+2+3} \times b^{1+2+3}}{(a \times b)^{4}} = \frac{a^{6} \times b^{6}}{(a \times b)^{4}} =$$

$$\frac{(a \times b)^{6}}{(a \times b)^{4}} = (a \times b)^{6-4} = (a \times b)^{2}$$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند. حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توانداربنویسید.

۱) $\dfrac{(a^{7} \div a^{5}) \times (b^{5} \div b^{3})}{(b^{36} \div b^{32}) \times (a^{12} \div a^{8})} \times \dfrac{a^{10} \div a^{2}}{b^{3} \div b} \times \dfrac{b^{20} \div b^{12}}{a^{6} \div a^{4}}$

۲) $\dfrac{a^{123} \div a^{23}}{b^{154} \div b^{104}} \times \dfrac{b^{120} \div b^{70}}{a^{7} \div a^{4}}$

۳) $\dfrac{a^{82} + a^{78}}{a^{8} + a^{4}} \times \dfrac{b^{78} + b^{82}}{b^{8} + b^{4}}$

۴) $\dfrac{a^{1378} \div a^{2}}{a^{50} \div a^{48}}$

● تقسیم عددهای توان‌دار با نماهای مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$6^{4} \div 2^{4} = \frac{6^{4}}{2^{4}} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2 \times 2} =$$

$$=\frac{\cancel{2}\times 3\times\cancel{2}\times 3\times\cancel{2}\times 3\times\cancel{2}\times 3}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}=3\times 3\times 3\times 3=3^4$$

این تقسیم را می‌توان به طور مختصر چنین انجام داد:

$$6^4\div 2^4=\frac{6^4}{2^4}=\left(\frac{6}{2}\right)^4=3^4$$

همچنین:

$$9^6\div 3^6=\frac{9^6}{3^6}=\left(\frac{9}{3}\right)^6=3^6$$

$$15^7\div 5^7=\frac{15^7}{5^7}=\left(\frac{15}{5}\right)^7=3^7$$

$$32^5\div 8^5=\frac{32^5}{8^5}=\left(\frac{32}{8}\right)^5=4^5$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۴) برای تقسیم دو عدد توانی که دارای نمای مساویند، کافی است نمای یکی از دو عدد را برای حاصل تقسیم پایه‌ها قرار دهیم.

به طور کلی اگر n عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی و b عدد حقیقی مخالف صفر باشند، بیان ریاضی دستور (۴) چنین است:

$$a^n\div b^n=\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (4)$$

مثال ۸: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی تواندار بنویسید.

۱) $a^7\div(a^2\times b^5)$

۲) $\dfrac{a^7\div a^4}{b^5\div b^2}$

۳) $\dfrac{a^4\times b^4\times a^3\times b}{b^7\times a^2\times b^2\times a}$

۴) $\dfrac{a^5\times a^2}{b^{12}\div b^5}$

حل:

۱) $a^7\div(a^2\times b^5)=\dfrac{a^7}{a^2\times b^5}=\dfrac{\cancel{a^2}\times a^5}{\cancel{a^2}\times b^5}=\dfrac{a^5}{b^5}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^5$

۲) $\dfrac{a^7\div a^4}{b^5\div b^2}=\dfrac{a^{7-4}}{b^{5-2}}=\dfrac{a^3}{b^3}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

۳) $\dfrac{a^4\times b^4\times a^3\times b}{b^7\times a^2\times b^2\times a}=\dfrac{a^4\times a^3\times(b^4\times b)}{b^7\times b^2\times(a^2\times a)}$

$$=\frac{\cancel{a^3}\times a^4\times\cancel{b^5}}{\cancel{b^5}\times b^2\times b^2\times\cancel{a^3}}=\frac{a^4}{b^4}=\left(\frac{a}{b}\right)^4$$

۴) $\dfrac{a^5\times a^2}{b^{12}\div b^5}=\dfrac{a^{5+2}}{b^{12-5}}=\dfrac{a^7}{b^7}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^7$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\dfrac{a^5\times b^3\times a^2\times b^4}{b^5\times a^3\times b^2\times a^4}$

۲) $\dfrac{a^m\times b^n\times b^m\times a^n}{b^m\times a^n\times a^m\times b^n}$

۳) $\dfrac{a^m\times a^m}{b^m\times b^m}$

۴) $\dfrac{a\times a^2\times a^3\times a^4\times a^5}{b\times b^2\times b^3\times b^4\times b^5}$

۵) $\dfrac{a^m\times a^n}{b^n\times b^m}$

۶) $\dfrac{a\times a^2\times\ldots\times a^n}{b\times b^2\times\ldots\times b^n}$

● توان صفر

به مثال زیر توجه کنید:

$$8\div 8=1 \qquad (1)$$

از طرفی دیگر با توجه به دستور تقسیم توانی با پایه‌های مساوی می‌توان نوشت:

$$8\div 8=2^3\div 2^3=2^{3-3}=2^0 \qquad (2)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$1=2^0$$

همچنین :

$$5^0=1\ ,\ \left(\frac{2}{3}\right)^0=1\ ,\ (3/4)^0=1\ ,$$
$$(-1000)^0=1\ ,\ (0/0001)^0=1$$

و به طور کلی هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a به توان صفر، برابر ۱ است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^0=1\quad(a\neq 0) \qquad \text{(تعریف)}$$

لازم به ذکر است که صفر به توان صفر (0^0) بی‌معنی است. (در آینده در مبحث حد نشان داده می‌شود که 0^0 یکی از صورتهای مبهم است.)

● توان رساندن یک عدد توان‌دار

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$(3^4)^3 = (3^4)\times(3^4)\times(3^4) = 3^{4+4+4} = 3^{12} = 3^{(4\times 3)}$$

$$(2^5)^4 = (2^5)\times(2^5)\times(2^5)\times(2^5) = 2^{5+5+5+5} = 2^{20} = 2^{(5\times 4)}$$

$$(5^3)^2 = (5^3)\times(5^3) = 5^{3+3} = 5^6 = 5^{(3\times 2)}$$

$$(7^5)^3 = (7^5)\times(7^5)\times(7^5) = 7^{5+5+5} = 7^{15} = 7^{(5\times 3)}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۵) برای به توان رساندن یک عدد توان‌دار کافی است پایه را بنویسیم و توانها را در هم ضرب کنیم. به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای صحیح باشند، بیان ریاضی دستور (۵) چنین است:

$$(a^m)^n = a^{m\times n} \qquad (5)$$

توجه داشته باشیم که $(a^m)^n$ با a^{m^n} فرق دارد. برای مثال $2^6 = (2^2)^3$ و $2^{2^3} = 2^8$.

همچنین به مثال زیر توجه کنید:

$$(2^3\times 3^2)^3 = (2^3\times 3^2)\times(2^3\times 3^2)\times(2^3\times 3^2)$$
$$= (2^3\times 2^3\times 2^3)\times(3^2\times 3^2\times 3^2)$$
$$= 2^{3+3+3}\times 3^{2+2+2} = 2^9\times 3^6$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(2^3\times 3^2)^3 = 2^9\times 3^6$$

بنابراین در حالت کلی اگر a و b عددهای حقیقی و k، m و n عددهای صحیح باشند، داریم:

$$(a^k\times b^m)^n = a^{k\times n}\times b^{m\times n}$$

مثال ۹: با فرض این که a و b عددهای حقیقی باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۱) $(a^3)^4\times(b^4)^3$

۲) $(a^2)^3\times(a^3)^4\times(b^3)^2\times(b^4)^3$

حل: با استفاده از دستور (۵) داریم:

۱) $(a^3)^4\times(b^4)^3 = a^{3\times 4}\times b^{4\times 3}$
$= a^{12}\times b^{12} = (a\times b)^{12}$

۲) $(a^2)^3\times(a^3)^4\times(b^3)^2\times(b^4)^3$
$= a^{2\times 3}\times a^{3\times 4}\times b^{3\times 2}\times b^{4\times 3} = a^6\times a^{12}\times b^6\times b^{12}$
$= a^{6+12}\times b^{6+12} = a^{18}\times b^{18} = (a\times b)^{18}$

● توان منفی

به مثال زیر توجه کنید:

$$2^5\div 2^7 = 2^{5-7} = 2^{-2} \qquad (1)$$

عدد 2^{-2} طبق تعریفی که برای توانهای طبیعی کردیم، معنی ندارد. از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$2^5\div 2^7 = \frac{2^5}{2^7} = \frac{\cancel{2^5}}{\cancel{2^5}\times 2^2} = \frac{1}{2^2} \qquad (2)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

همچنین:

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

$$(2/5)^{-7} = \frac{1}{(2/5)^7},\ (2^{-5})^4 = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}},$$

$$\left((5^{-2})^{-3}\right)^{-5} = (5^6)^{-5} = 5^{-30} = \frac{1}{5^{30}}$$

به طور کلی برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a و هر عدد طبیعی n، بنا به تعریف:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

توجه داشته باشید که ax^{-n} با $(ax)^{-n}$ فرق دارد.

مثال ۱۰: عبارتهای زیر را ساده کنید. و هر یک را با توان مثبت نشان دهید.

۱) $\frac{5^{-3}}{5^{-2}}$

۲) $\frac{5^{-15}\times 5^4}{5^{-3}\times 5^{-4}}$

۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

۴) $\left((3^{-2})^{3}\right)^{3}\times(3^{5})^{-2}$

حل:

۱) $\dfrac{5^{-3}}{5^{-2}}=5^{-3-(-2)}=5^{-3+2}=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

۲) $\dfrac{5^{-15}\times5^{4}}{5^{-3}\times5^{-4}}=\dfrac{5^{-15+4}}{5^{-3+(-4)}}$

$=\dfrac{5^{-11}}{5^{-7}}=5^{-11-(-7)}=5^{-11+7}=5^{-4}=\dfrac{1}{5^{4}}=(\dfrac{1}{5})^{4}$

۳) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3+2}$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$

۴) $\left((3^{-2})^{3}\right)^{3}\times(3^{5})^{-2}$

$=\left(3^{-6}\right)^{3}\times3^{-10}=3^{-18}\times3^{-10}$

$=3^{-18-10}=3^{-28}=\dfrac{1}{3^{28}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{28}$

مثال ۱۱: اگر a و x اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $(a^{-m})^{n}\times(a^{-n})^{-m}$

۲) $x^{n}\div x^{n+1}$

۳) $2\times a^{-5}\times(2\times a)^{5}\times(2\times a)^{-3}$

۴) $\dfrac{x^{-3}\times x^{-2}\times x^{-4}\times x^{5}}{x^{5}\div(x^{-3})^{-3}}$

۵) $\dfrac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{a^{2n-1}}$

۶) $\dfrac{a^{2}\times a^{-3}}{a^{4}\times a^{-5}}$

۷) $\dfrac{x^{-6}\times(x^{-2})^{-2}}{x^{7}\times x^{-5}}$

۸) $\dfrac{x^{-5}\div x^{-3}}{x^{5}\div x^{-7}}$

حل:

۱) $(a^{-m})^{n}\times(a^{-n})^{-m}=a^{(-m)\times n}\times a^{(-n)\times(-m)}=$

$a^{-mn}\times a^{nm}=a^{-mn+mn}=a^{0}=1$

۲) $x^{n}\div x^{n+1}=x^{n-(n+1)}=x^{n-n-1}=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

۳) $2\times a^{-5}\times(2\times a)^{5}\times(2\times a)^{-3}=$

$2\times a^{-5}\times2^{5}\times a^{5}\times2^{-3}\times a^{-3}$

$=(2\times2^{5}\times2^{-3})\times(a^{-5}\times a^{5}\times a^{-3})$

$=(2^{1+5-3})\times(a^{-5+5-3})=2^{3}\times a^{-3}=\dfrac{2^{3}}{a^{3}}=(\dfrac{2}{a})^{3}$

۴) $\dfrac{x^{-3}\times x^{-2}\times x^{-4}\times x^{5}}{x^{5}\div(x^{-3})^{-3}}=\dfrac{x^{-3-2-4+5}}{x^{5}\div x^{9}}=\dfrac{x^{-4}}{x^{5-9}}=$

$\dfrac{x^{-4}}{x^{-4}}=x^{-4+4}=x^{0}=1$

۵) $\dfrac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{a^{2n-1}}=\dfrac{a^{m+n-(m-n)}}{a^{2n-1}}=$

$\dfrac{a^{m+n-m+n}}{a^{2n-1}}=\dfrac{a^{2n}}{a^{2n-1}}=a^{2n-(2n-1)}=a^{2n-2n+1}=a^{1}=a$

۶) $\dfrac{a^{2}\times a^{-3}}{a^{4}\times a^{-5}}=\dfrac{a^{2-3}}{a^{4-5}}=\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}}=a^{-1-(-1)}=a^{-1+1}=a^{0}=1$

۷) $\dfrac{x^{-6}\times(x^{-2})^{-2}}{x^{7}\times x^{-5}}=\dfrac{x^{-6}\times x^{4}}{x^{7}\times x^{-5}}=$

$\dfrac{x^{-6+4}}{x^{7-5}}=\dfrac{x^{-2}}{x^{2}}=x^{-2-2}=x^{-4}=\dfrac{1}{x^{4}}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{4}$

۸) $\dfrac{x^{-5}\div x^{-3}}{x^{5}\div x^{-7}}=\dfrac{x^{-5-(-3)}}{x^{5-(-7)}}=\dfrac{x^{-5+3}}{x^{5+7}}=$

$\dfrac{x^{-2}}{x^{12}}=x^{-2-12}=x^{-14}=\dfrac{1}{x^{14}}=(\dfrac{1}{x})^{14}$

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $\dfrac{(a^{-m})^{-m}\times(a^{-n})^{-n}\times(a^{m})^{2n}}{(b^{-m})^{-m}\times(b^{-n})^{-n}\times(b^{2n})^{m}}$

(جواب: $(\dfrac{a}{b})^{(m+n)^{2}}$)

۲) $\left(\dfrac{2^{3}\times3^{3}\times a^{-5}\times b^{-4}\times c^{-3}}{2a^{-3}\times4b^{-2}\times9c^{-1}\times3}\right)^{-3}$

(جواب: $(abc)^{6}$)



Mathematics:
The New Golden Age
Keith Devlin

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۱۴)

یک مجمع تاریخی

در اوت ۱۹۰۰ بهترین ریاضیدانهای جهان برای دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان[۲] در پاریس گرد آمدند (واقعه‌ای، که جز در دوران جنگ، به برقرار شدن در هر چهار سال یکبار در یکی از حوزه‌های دارای صلاحیت دنیا ادامه داده است). دیوید هیلبرت[۳]، استاد ۳۸ سالهٔ دانشگاه گوتینگن[۴] از میان این ریاضیدانها بود. قرار بر این بود که هیلبرت، به عنوان یکی از سردمداران ریاضی آن زمان یکی از نطقهای مهم همایش[۵] مزبور را انجام دهد. روزی که برای این کار در نظر گرفته بودند هشتم اوت بود.

از آنجا که همایش مورد بحث در اولین سال قرن بیستم انجام می‌گرفت (در واقع، برای نیل به این منظور یک سال جلوتر آورده شده بود)، هیلبرت در سخنرانی‌اش نه به بررسی بعضی از کارهای متأخر (که قالب معمول صحبتهایی چنین بود)، بلکه به اشاره به کارهای آینده پرداخت.

وی چنین فریاد زد: «این ندای دایمی را در درون خود می‌شنویم که: این همان مسأله است. علتش را جستجو کن. می‌توانی آن را با برهان بیابی، زیرا در ریاضیات **لاادری**[۶] وجود ندارد.»

و برای تأیید این ندا به همایش مزبور نه یکی بلکه فهرستی از بیست و سه مسألهٔ مهم حل نشده[۷] ارائه داد. مسایلی که راه حل هر یک از آنها، در صورت یا ، شدن، پیشرفت مهمی را در دانش ریاضی رقم خواهد زد.

غالب مسایل مزبور با اسامی خاصی، چون مسألهٔ پیوستار[۸] (اولین مسألهٔ در فهرست هیلبرت) یا **مسألهٔ ریمان**[۹] معروف بودند (یا شدند)، اما یکی از آنها بخصوص با مکانش در این فهرست معروفیت عام یافت: مسألهٔ دهم، منشاء *مسألهٔ* دهم هیلبرت کتاب درسی جبری، به نام *حساب*[۱۰]، نوشته شده در حدود ۲۵۰ ب. م. توسط دیوفانت اسکندرانی[۱۱] است.

امروزه ریاضیدانها مطابق با انواع مسایل بررسی شده در این رساله، از نام *معادلهٔ دیوفانتی*[۱۲] برای اشاره به هر معادلهٔ در یک یا بیش‌تر از یک متغیر، با ضرایب صحیحی استفاده می‌کنند، که جواب مورد جستجوی آن کلاً شامل *اعداد صحیح*[۱۳] باشد. شرط اخیر است که ریاضیات معادلات دیوفانتی را اصلاً از جواب معادلات برحسب اعداد حقیقی[۱۴] (یا امکاناً اعداد مختلط[۱۵]) متفاوت می‌کند. (در واقع فهرست اصطلاحات مربوطه در ابتدا اندکی گیج کننده است. کاربرد صفتی کلمهٔ «دیوفانتی» آنقدرها که به نوع جواب مورد جستجو اشاره دارد به خود معادله ندارد. به این ترتیب به معادلهٔ

$$۳x^{۲} - ۵y^{۳} + ۲xy = ۰$$

در صورتی که جوابهای حقیقی ـ مقدار[۱۶] مورد جستجو باشند به عنوان «معادله» و اگر جوابهای صحیح مورد نظر باشند به صورت «معادلهٔ دیوفانتی» اشاره می‌کنیم.)

حل معادلات دیوفانتی کاملاً متفاوت از حل همان معادلات

برحسب اعداد حقیقی است. به عنوان نمونه، اگر معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad (1)$$

را در نظر بگیریم، و آن را به عنوان معادله‌ای منظم برای اعداد حقیقی به شمار آوریم، در این صورت بی‌نهایت جواب داریم. با معلوم بودن هر عدد حقیقی r بین $-\sqrt{2}$ و $+\sqrt{2}$ اگر فرض کنیم $S = +\sqrt{2 - r^2}$

در این صورت $x = r$ ، $y = s$ جوابی را به دست می‌دهد.

اما، چون آن را به عنوان معادله‌ای دیوفانتی در نظر آوریم، تنها چهار جواب موجود می‌شوند:

$$x = +1\ ,\ y = +1\ ;\ x = +1\ ,\ y = -1$$

$$x = -1\ ,\ y = +1\ ;\ x = -1\ ,\ y = -1$$

اگر معادلهٔ مورد بحث را اندکی تغییر دهیم، مثلاً به

$$x^2 + y^2 = 3 \qquad (2)$$

در این صورت باز هم بی‌نهایت جواب حقیقی موجودند اما به هیچ وجه جواب صحیح نداریم.

معادلهٔ (۲) را نمی‌توان حل کرد. بنابراین تفاوت بین (۱) و (۲) چیست؟

به صورت عمومی‌تر، آیا راهی برای گفتن این که هر معادله دیوفانتی مفروضی را می‌توان حل کرد یا خیر وجود دارد؟ به عبارت دیگر، امکان نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که، با معلوم بودن معادله‌ای دیوفانتی، بگوید که جوابی موجود است یا خیر، هست؟

در اصل این همان سؤالی است که هیلبرت به عنوان مسألهٔ دهم فهرست مسایلش مطرح کرد. جواب آن در ۱۹۷۰ توسط یوری ماتیا سویچ[17] ریاضیدان ۲۲ سالهٔ روسی تنها بعد از کارهای بسیاری که در مورد مسأله با کشیده شدن به دهۀ ۱۹۳۰ و استفاده از نتایج واقع در منطق ریاضی[18]، نظریهٔ محاسبات[19]، جبر انجام گرفتند، به دست آمد.

معادلات دیوفانتی و الگوریتم اقلیدسی

ساده‌ترین نوع معادلهٔ دیوفانتی معادله‌ای خطی[20]، با یک مجهول[21] است. در واقع تنها خبری که از زندگی دیوفانت داریم خود به صورت چنین معادله‌ای است. مسأله‌ای قرن چهارمی بر این است که دوران کودکی وی یک ششم حیاتش طول کشیده، ریشش پس از یک دوازدهم آن روییده، و بعد یک هفتم آن ازدواج کرده است؛ پسرش ۵ سال بعد متولد شده و نصف عمر پدر زندگی کرده و چهار سال پیش از وی مرده است. اگر سنی را که در آن دیوفانت مرده با x نمایش بدهیم، اطلاعات فوق معادلهٔ

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

را که جواب $x = 84$ را داراست به دست می‌دهد. (دقیق‌تر باشیم این معادله دیوفانتی نیست زیرا ضرایب آن اعداد صحیح نیستند، اما با ضرب طرفین آن در کوچکترین مضرب مشترک تمام مخرجهای واقع در ضرایب آن، معادله‌ای با ضرایب صحیح به دست می‌آوریم.)

چه دیوفانت ۸۴ سال زندگی کرده باشد چه نه، این واقعیت پابرجاست که حل معادلهٔ دیوفانتی خطی یک مجهولی موضوعی ساده است. معادلهٔ $ax = b$

دارای جواب صحیح است اگر، و تنها اگر a، b را (به طور کامل) بشمارد، که در این حال جواب مزبور عدد صحیح b/a است.

این شرط به قدری ساده است که نوشتن برنامه‌ای کامپیوتری که جواب داشتن یا نداشتن معادله‌ای چنین را بلافاصله بگوید آسان است.

اما در مورد معادلهٔ دیوفانتی خطی دو مجهولی چه می‌توان گفت؟ باز هم راهی ساده برای پیدا کردن وجود یا عدم وجود جواب در دست است. برای ملاحظهٔ این که معادلهٔ

$$ax + by = c$$

جوابی صحیح دارد یا نه، ابتدا بزرگترین عامل مشترک a و b، مثلاً d، را محاسبه می‌کنیم. اگر d، c را بشمارد، جواب داریم، اگر d، c را نشمارد جوابی موجود نیست.

به عنوان مثال، آیا معادلهٔ

$$6x + 25y = 12$$

دارای جواب است؟ خوب، بزرگترین عامل مشترک ۶ و ۱۵ عدد ۳ است، و ۳، ۱۲ را می‌شمارد، بنابراین جوابی موجود است. (فی‌المثل، $x = 7$ ، $y = -2$ مسألهٔ مورد بحث را حل می‌کند.)

توجه داشته باشید که، در یک معادلهٔ دیوفانتی مفروض، مشخص کردن این که جوابی برای آن وجود دارد یا نه به هیچ وجه مساوی یافتن جوابی نیست. چه ممکن است بتوان وجود یک جواب را به آسانی بسیار مشخص کرد، و با این همه پیدا کردن جواب عملاً بسیار مشکل باشد. (گرچه، برعکس، اگر چگونگی یافتن جوابی را بدانیم آنگاه بلافاصله می‌دانیم که جوابی موجود است! اگر بتوانیم چیزی را به دست آوریم، آن چیز باید موجود باشد، در حالی که اشیا می‌توانند بدون به دست آمدن وجود داشته باشند.)

در مورد معادلات دیوفانتی خطی دو مجهولی نه تنها راه ساده‌ای برای مشخص کردن وجود یا عدم وجود جواب موجود است، بلکه فرایندی مکانیکی[22] برای یافتن جواب، البته در صورت وجود، نیز در دست است. جزییات کامل را می‌توان در اغلب کتابهای درسی مربوط به نظریهٔ اعداد یافت[23]. کلید راه حل مورد بحث الگوریتم اقلیدسی[24] برای تعیین بزرگترین عامل مشترک، موصوف در زیر است.

با معلوم بودن دو عدد x و y، فرض می‌کنیم x mod y باقیماندهٔ تقسیم x بر y را نمایش دهد. برای محاسبهٔ بزرگترین عامل مشترک دو عدد مفروض a و b، با a ی بزرگ‌تر از b، به طریق زیر عمل می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $a \bmod b = r_1$، در این صورت فرض می‌کنیم $b \bmod r_1 = r_2$، سپس فرض می‌کنیم $r_1 \bmod r_2 = r_3$. به این طریق ادامه می‌دهیم تا باقیماندهٔ صفر به دست آید: $r_{n-1} \bmod r_n = 0$ در این صورت r_n بزرگترین عامل مشترک a و b است.

به عنوان مثال، برای به دست آوردن بزرگترین عامل مشترک ۱۳۳ و ۵۶، به طریق زیر عمل می‌کنیم

۱۳۳ mod ۵۶ = ۲۱

۵۶ mod ۲۱ = ۱۴

۲۱ mod ۱۴ = ۷

۱۴ mod ۷ = ۰

بنابراین بزرگترین عامل مشترک ۱۳۳ و ۵۶ عدد ۷، آخرین باقیماندهٔ ناصفر مورد بحث، است. (در این مرحله ممکن است خودتان مایل باشید که تحقیق کنید که اعداد ۸۱ و ۲۵ دارای بزرگترین عامل مشترک ۱اند.)

فرایندی که هم اکنون مطرح کردیم در کتاب VII *مقدمات اقلیدس*[25] نوشته شده در حدود ۳۰۰ ــ ۳۵۰ ق. م. آمده است و نشان می‌دهد چرا امروزه به عنوان الگوریتم اقلیدسی معروف است.

اما «الگوریتم» دقیقاً چیست؟ این پرسش تا آنجا که به مسألهٔ دهم هیلبرت مربوط می‌شود اساسی است. پیش از سعی در پاسخ گفتن به آن، نگاه مختصری به مطالب دیگری که در مورد حل معادلات دیوفانتی زمانی که هیلبرت نطق خود را انجام داد شناخته بودند می‌اندازیم.

در واقع مطالب بسیار کمی شناخته شده بودند (و هنوز هم چنین است). به معادلات خطی با بیش از دو متغیر می‌توان با توسیعی از روش الگوریتم اقلیدسی در مورد رهیافت دو متغیری، مذکور در فوق، پرداخت.

در مورد معادلات درجه دوم با یک یا دو مجهولی، از قبیل

$x^۲ - ۳x + ۴ = ۰$.

یا

$۳x^۲ - ۵xy + y^۲ = ۷$

نظریهٔ موثری، مطرح شده توسط گاوس[26]، روشی برای تعیین این که معادلهٔ مفروضی دارای جواب هست یا خیر به دست می‌دهد. (این روش همان نظریهٔ معروف تقابل درجه دوم[27] است).

اما به استثنای حالتهای خاص اتفاقی که در آنها می‌توان از روشهای هوشمندانه استفاده کرد، این موضوع کم و بیش همهٔ آن چیزی است که شناخته شده بود. («حالت خاص» مخصوصاً مهم در ارتباط با معادلات دیوفانتی

$x^n + y^n = z^n$

است، که n آن حداقل ۲ باشد. وجود جوابهای این معادلات، به ازای n بزرگتر از ۲، مسألهٔ مشهور آخرین قضیهٔ فرماست[28].)

و اکنون، در مورد مفهوم «الگوریتم» چه می‌توان گفت.

▶ یادداشتها

۱. Hilbert's Tenth Problem

۲. Second International Congress of

Mathematicions

۳. David Hilbert (1862 _ 1943)

ریاضیدان آلمانی و یکی از مؤسسان ریاضیات قرن بیستم و به وجود آورندهٔ مکتب صورت گرایی ریاضیات است.

۴. University of Göttingen

۵. Meeting

۶. لاادری به معنی نمی‌دانم است، در متن اصلی «Ignorabimus» آمده که به معنای «نخواهیم دانست» است.

۷. Unsolved Problems

۸. Continuum Problem . همان طور که می‌دانیم، چنین نیست که جمیع مجموعه‌های نامتناهی دارای یک اندازه باشند ــ سلسلهٔ مراتب (نامتناهی) کاملی از نامتناهیها موجود است. بنابراین، همان گونه که فهرستی نامتناهی از اعداد متناهی ۱، ۲، ۳، ... موجود است، فهرستی نامتناهی از اعداد نامتناهی

$N_0 , N_1 , N_2 , N_3 , \ldots$

هر یک «بزرگتر» از قبلی وجود دارد.

جمع و ضرب الفهای کانتور (اگرچه در نظر اول اندکی شگفت‌آور) بخصوص ساده‌اند. در هر حالت نتیجهٔ کار درست عدد بزرگتر از دو عدد نامتناهی مورد بحث است.

بنابراین به طور مثال

$N_0 + N_1 = N_1$

$N_1 \times N_3 = N_3$

(تمثیل هتل هیلبرت متناظر با این واقعیت است که $N_0 + 1 = N_0$، برای کم آمدن اتاق باید N_1 مهمان وارد شود.)

بسیاری از مجموعه‌های نامتناهی رخ دهنده در ریاضیات دارای اندازهٔ N_0 اند. به عنوان نمونه، مجموعهٔ اعداد درست مثبت، مجموعهٔ جمیع اعداد درست (یعنی، مثبت و منفی)، مجموعهٔ جمیع اعداد گویا، و مجموعهٔ جمیع اعداد اول همه دارای اندازهٔ N_0 هستند. اما، همان گونه که کانتور نشان داد، مجموعهٔ جمیع اعداد حقیقی به‌طور قطع اعضایی بیشتر از اعضای N_0 دارد. که بلافاصله این سؤال را مطرح می‌کند، اندازهٔ این مجموعه چیست؟ از آنجا که این اندازه N_0 نیست، باید یکی از

$N_1 , N_2 , N_3 , \ldots$

باشد، اما کدام یک؟

خود کانتور، علی‌رغم کوشش بسیار، نتوانست به این مسألهٔ ظاهراً ساده پاسخ دهد. تعدادی از ریاضیدانهای عالی مقام دیگر نیز چنین بودند.

در واقع، *مسألهٔ پیوستار کانتور*، نامی که سؤال مزبور به آن معروف شد، در مقابل این همه کوشش مقاومت کرده نام داده شده به مسأله از اینجا ناشی شده است که از اندازهٔ پیوستار حقیقی پرسش به عمل می‌آورد ــ کلمهٔ اخیر نیز برای توصیف مجموعهٔ اعداد حقیقی زمانی که به عنوان نقاطی که *خط حقیقی* را می‌سازند به کار رفته است.

۹. Riemann Problem . درسال ۱۷۴۰ اویلر تابع معروف به *تابع زتا* «Zeta function» را معرفی کرد که به ازای اعداد حقیقی S بزرگتر از ۱ توسط مجموع نامتناهی

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

تعریف شده است.

به ازای S کوچکتر از یا مساوی با ۱، مجموع نامتناهی مورد بحث پاسخی نامتناهی دارد، بنابراین $\zeta(s)$ به ازای چنین S تعریف نشده است. اما به ازای هر S بزرگتر از ۱ مجموع نامتناهی مزبور مقداری متناهی و معین دارد. اویلر ثابت کرد که مقدار $\zeta(s)$ به ازای هر چنین Sی مساوی حاصل ضرب نامتناهی

$$\frac{1}{1-(1/2)^s} \times \frac{1}{1-(1/3)^s} \times \frac{1}{1-(1/5)^s} \times \frac{1}{1-(1/7)^s} \times \frac{1}{1-(1/11)^s} \times \ldots$$

است، که در آن حاصل ضرب (نامتناهی) مورد بحث روی جمیع اعداد به صورت

$$\frac{1}{1-(1/p)^s}$$

است که p ی آن عددی اول است.

۱۰. Arithmetica

۱۱. Diophantus of Alexandria

Arithmetica نوشته شده در حدود قرن سوم ب. م. اثر

اصلی دیوفانت و یکی از اولین کتابهای نوشته شده در مورد جبر است. قسمت اعظم این رساله با جوابهای گویای معادلات با دو یا بیشتر از دو متغیر دارای ضرایب صحیح سر و کار دارد. امروزه ریاضیدانها، هنگام کار با چنین مسایلی معمولاً خود را محدود به یافتن جوابهای صحیح می‌کنند. این کار اغلب به همان کار قبلی منجر می‌شود. به عنوان مثال، جواب گویای

$$x=\frac{۱}{۴}\ ,\ y=\frac{۱}{۱۰}\ ,\ z=-\frac{۱}{۵}$$

معادلهٔ خطی سه متغیره‌ای چون

$$۲x+۳y+۴z=۰$$

می‌تواند با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک ۴، ۱۰ و ۵، یعنی ۲۰، به جواب صحیح

$$x=۵\ ,\ y=۲\ ,\ z=-۴$$

تبدیل شود.

می‌توان از فرایندی مشابه، در بسیاری از حالات دیگر، برای تبدیل یک جواب گویا به جوابی شامل اعداد صحیح، استفاده کرد.

۱۲. Diophantine equation

۱۳. Integers

۱۴. Real numbers

۱۵. Complex numbers

۱۶. Real _ number solutions

۱۷. yuri Matyasevich

۱۸. Mathematical logic

۱۹. Computation Theory

۲۰. Linear equation

۲۱. Unknowen

۲۲. Mechanical Procedure

۲۳. به عنوان مثال در کتاب زیر:

Elementary Number Theory, by David Burtor (Allyn and Bacon , 1980)

۲۴. Euclidean algorithm

۲۵. Euclid's **Elements**

۲۶. G. F. Gauss ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۵ ــ ۱۷۷۷) به وجود آورندهٔ آثار بدیع بسیار در قسمتهای گوناگون ریاضیات.

۲۷. در ۱۷۹۶ گاوس قضیه‌ای عمیق از نظریهٔ اعداد موسوم به قانون تقابل درجه دوم «Quadratic Reciprocity Law» را اثبات کرد، که در مورد حل معادلاتی چون

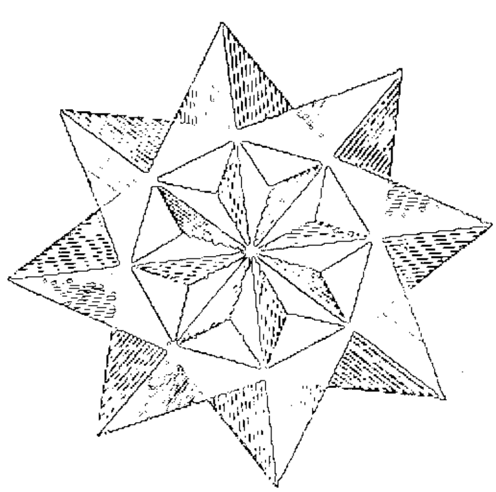
$$x^۲ \bmod ۷ = ۳$$

است، که به صورت

$$x^۲ \bmod p = q$$

اند، که p و q ی آنها اعدادی اول‌اند.

۲۸. Fermat's last theorem. پی یردوفرما «Pierre de Fermat»(۱۶۶۵ ــ ۱۶۰۱) ریاضیدان معروف فرانسوی، دارای آثاری مهم در وضع هندسهٔ تحلیلی، حساب احتمالات و نظریهٔ اعداد. صورت آخرین قضیهٔ فرما چنین است: معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ جز در حالت $n=۲$ و x یا y مساوی ۰ دارای جواب صحیح نیست. ریاضیدانهای بسیاری از جمله اویلر «Eulen»، کومر «Kummer» و ددکیند «Dede Kind» در حل آن مساعی بسیار به کار بردند. طی بیش از سه قرنی که از طرح این مسأله، که خود فرما طبق نوشته‌ای که در حاشیهٔ کتاب حساب دیوفانت خود آورده مدعی اثبات آن شده است، می‌گذرد، جز به ازای حالات خاصی از n، مسأله همچنان حل نشده باقی مانده بود، تا این که در ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳ (۲ تیر ۱۳۷۲) ریاضیدانی ۴۰ ساله، انگلیسی و استاد دانشگاه پرینستون امریکا به نام اندرو وایلز «Andrew Wiles» مدعی اثباتی از حدس تانیاما شد. با توجه به کارهای ریاضیدانان قبلی اثبات این حدس، درستی قضیهٔ فرما را ثابت می‌کند.



ریاضیات کاربردی

● پرویز شهریاری

وقتی می‌شنویم یا می‌خوانیم، محمد خوارزمی دانش جبر را به‌وجود آورد، خیام آن را ادامه داد و جمشید کاشانی توانست، با ظرافت و زیبایی یک معادلهٔ درجه سوم را برای محاسبهٔ دقیق سینوس یک درجه حل کند؛ و یا ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی پایه‌های مثلثات را ریختند و بیشتر دستورهای آن را ــ چه در مثلث روی صفحه و چه در مثلث روی کره ــ به‌دست آوردند و آنها را ثابت کردند و، سرانجام، نصیرالدین توسی، کتاب مستقلی دربارهٔ مثلثات تألیف کرد، ممکن است با سهل‌اندیشی تصور کنیم، این دانشمندان بزرگ، زندگی بی‌دغدغه ای داشته‌اند و از آن جا که «غم نان» آنها را آشفته خاطر نمی‌کرد، در ساعتهای فراغت خود، به «بازی» با عدد و شکل می‌پرداخته اند، تا هم وقت خود را پر کنند و هم ذهن جست‌وجوگر خود را، با کشف رازهای عدد و شگفتیهای شکل، راضی نگه دارند ...

و وقتی در سالهای دبیرستانی، ساعتها روی یک مسألهٔ هندسه کار می‌کنیم و یا، ضمن جست‌وجوی راه حل مسأله‌های جبری یا اثبات درستی اتحادهای مثلثاتی، ساعتها و روزهای خود را می‌گذرانیم، ممکن است این پرسش از ذهن ما بگذرد که «این‌ها، کدام دشواری زندگی را حل می‌کنند؟» و «این همه فرمولها و شکلهای انتزاعی، کدام یک از دردهای بی‌شمار انسان امروزی را درمان می‌کنند؟» ...

وقتی در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم میلادی، ژرژبول ریاضی‌دان ایرلندی (و پدر نویسندهٔ کتاب «خرمگس»)، نخستین کتاب «منطق ریاضی» را، همراه با نمادها و نشانه‌های تازه ای، منتشر کرد، حتی مورد اعتراض بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفت که «این، یک نوع بازی با علامت‌هاست و هیچ‌گونه کاربردی ندارد»، درضمن «انسان را از اندیشیدن بازمی‌دارد، تنها به رابطه‌ها و دستورها توجه دارد و دشمن تفکر است»... ولی بعد، وقتی ماشین محاسبه و کامپیوتر به میدان آمد، معلوم شد که، بدون منطق ریاضی، حتی یک گام هم نمی‌توان برداشت.

وقتی کپلر (۱۵۷۱ ــ ۱۶۳۰ میلادی) برای بررسی حرکت سیاره‌ها و نیوتون (۱۶۴۳ ــ ۱۷۲۷ میلادی) برای طرح مکانیک آسمانی خود، متوجه اهمیت جدی ویژگیهای مقطع‌های مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) شدند، نوشته‌های مناخوسموس (۳۵۰ سال پیش از میلاد) و آپولونیوس (۲۵۰ سال پیش از میلاد) را، دربارهٔ مقطع های مخروطی (که نزدیک به دو هزار سال در فراموشی به سر می‌بردند)، از قفسه‌ها بیرون کشیدند، گرد خاک بیست سده را از آنها زدودند و بحث‌ها و بررسی‌های مربوط به اخترشناسی و مکانیک آسمانی خود را، براساس قضیه‌ها و مسأله‌های این نوشته‌ها، مستدل ساختند.

❑

ریاضیات، همیشه و در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که، در آنها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است؛ دوره‌هایی هم وجود دارد که، در آنها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیش رفته است.

درواقع، مسیر تاریخ ریاضیات، به تناوب، از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است. دو دورهٔ اصلی از سمت‌گیری کاربردی ریاضیات را در گذشته می‌شناسیم. دورهٔ اول که از هزاره‌های پیش از میلاد و درواقع، از زمان پیدایش انسان آغاز می‌شود و تا سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد ادامه دارد، دوران شکل گیری مفهومهای اصلی ریاضیات (یعنی عدد و شکل) در بستگی تنگاتنگ با نیازهای زندگی است. نخستین جهش در پیشرفت ریاضیات، در پیدایش خط به‌وجود آمد. خط به انسان امکان داد تا نیّت خود را به‌صورت ساده، ثبت کند و با نشانه‌ها و نمادها، اندیشهٔ خود را برای

دیگران و هم برای آیندگان باقی بگذارد.

شمار شفاهی، و دشوارتر از آن شمار کتبی، به کندی پیش رفت، چرا که زندگی انسانهای نخستین، به کندی تغییر می‌کرد و، برای تغییری کوچک، نیاز به گذشت سده‌های بسیار بود. ولی به هرحال، تکامل و پیشرفت در ذات طبیعت و پدیده‌های طبیعی است و روشن است که شامل انسان هم می‌شود. از قانونمندیهای دیگر تکامل و بویژه تکامل دانش و تفکر انسانی، این است که هر چه جلوتر می رود، سرعت بیشتری به خود می‌گیرد، یعنی تکامل، حرکتی شتابدار است. به‌عنوان نمونه پیشرفت انسان در سدهٔ بیستم، چه در سطح و چه در عمق، بسیار گسترده‌تر از پیشرفت آدمی در دو هزار سال پیش از آن است.

در دورهٔ نخست مسیر تکاملی ریاضیات با سمت‌گیری کاربردی (که در ضمن، نخستین دورهٔ تکامل ریاضیات، به مفهوم عام آن است)، در آغاز، ریاضیات از سایر آگاهی‌های انسان جدا نبود و حتی در مرحله‌های پیشرفته‌تر، کاتبان و دبیران (که اغلب از کاهنان بودند)، همه‌کاره بوده‌اند: پیش آمدهای تاریخی و سیاسی را ثبت می‌کردند، برای بیماران دارو و دعا تهیه می‌کردند، به کمک سیاره‌ها و ستاره‌ها، آینده را «پیش گویی» می‌کردند و، در ضمن، حساب‌های لازم را (مثل تعیین روزهای جمع‌آوری مالیات، میزان غله‌ای که در انبارها ذخیره شده بود و...) نگه می‌داشتند. بتدریج، با بغرنجتر شدن زندگی، محاسبان و ریاضی‌دانان، از کاتبان جدا شدند و صنف خاصی را تشکیل دادند، حتی برای آماده کردن نسل بعدی و انتقال دانش خود به دیگران، کلاسهای آموزشی را اداره می‌کردند. و این، در واقع نقطهٔ آغاز ریاضیات نظری، به مفهوم ساده و اولیهٔ خود بود. گرچه در این کلاسها، به طور کامل و بدون استثنا، از مسأله‌هایی استفاده می‌شد که، به روشنی جنبهٔ کاربردی داشتند، ولی خود مسأله‌ها، کم و بیش فرضی و ساختهٔ ذهن معلمان بود. دیگر منتظر نمی ماندند تا ساختن یک انبار یا تقسیم غذا بین جنگجویان یا تقسیم زمینی که مرزهای آن، به خاطر ریزش باران و یا طغیان آب، شسته شده بود، مطرح شود تا «صاحبان دانش زمان» تلاش خود را برای حل آنها آغاز کنند، بلکه از قبل، مسأله‌ها را آماده می‌کردند و راه حل آنها را به شاگردان خود می‌آموختند. حتی بتدریج، مسأله‌هایی مطرح و حل می‌شد که، به ظاهر، اندکی دور از کاربرد عملی بود. از این جمله، می‌توان از مسأله های عکس نام برد. اگر پیش از آن، با در دست داشتن بُعدهای یک ساختمان، سطح بنا و گنجایش ساختمان را محاسبه می‌کردند، اکنون با فرض معلوم بودن سطح یا حجم و برخی بُعدها، راه یافتن اندازهٔ بُعد مجهول را جست‌وجو می کردند. و این، در واقع، سر برآوردن جوانه‌های نازک ریاضیات نظری بود.

در این دوره، اثبات و استدلال منطقی کمتر آموزش داده می‌شد. حتی در موردهایی هم، که به احتمالی، معلم در ذهن خود با نوعی استدلال آشنا بود، آن را به شاگردان خود منتقل نمی‌کرد و شاگرد باید تنها یاد می‌گرفت که چگونه جواب مسأله را به دست آورد و هیچ‌گونه چون و چرا نداشته باشد.

طبیعی است، قانونهای موجود، که به صورت «دستور» و «فرمان»، از نسلی به نسل دیگر منتقل می‌شد، نمی‌توانست دقیق و بی‌عیب باشد. برای محاسبهٔ مساحت زمینی که به شکل چهار ضلعی بود، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر ضرب می کردند (که تنها برای مستطیل درست است) و برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصل‌ضرب قاعده در ساق را به دست می‌آوردند و این، گرچه برای محاسبه‌های عملی آن روزگار مشکلی به وجود نمی‌آورد، درست و دقیق نبود. اعتبار هر آموزشی به اعتبار «معلم» و اعتبار هر نوشته‌ای به اعتبار نویسندهٔ آن مربوط بود. ولی زندگی راه خود را می‌رفت و روز به روز بغرنجتر می‌شد و، در نتیجه، محاسبه‌ها و «استدلال» های قبلی، برای حل دشواری‌های تازه کافی نبود. بتدریج اعتبار «صاحبان اعتبار» فرو ریخت و توجه به ریشه‌های استدلالی و منطقی ریاضی روز افزون شد، جوانه‌های ریاضیات نظری که در سایه قرار داشت، شکوفا شد و بتدریج، ریاضیات کاربردی را در سایهٔ خود قرار داد. انگیزه درونی ریاضیات (یعنی منطق و استدلال)، به عنوان عامل تعیین کنندهٔ مسیر ریاضیات به کار افتاد و انگیزهٔ بیرونی (یعنی مشاهده و تجربه) به صورت عاملی درجه دوم در آمد.

❑

دورهٔ دوم تکامل ریاضیات با سمت‌گیری کاربردی را (که در ضمن، دورهٔ سوم تکامل ریاضیات بود) باید از سدهٔ هشتم تا سدهٔ شانزدهم میلادی دانست، دوره‌ای که گرانیگاه آن در ایران بود.

زندگی مسأله‌های تازه ای را پیش آورد که باید به یاری ریاضیات حل می‌شد و ریاضیات نظری دوره پیش (ریاضیات یونانی) از عهدهٔ حل آنها بر نمی‌آمد. این مسأله‌ها، به طور عمده، مربوط می‌شد ند به اخترشناسی، مکانیک (ساختن ساعت‌های مکانیکی، اسطرلاب و سایر ابزارهای لازم برای رصد، ظریف‌تر و دقیق تر کردن وسیله‌های فلزی و سفالی، ...) و مسأله های ناشی از اعتقادهای دینی (پیدا کردن جهت قبله، حل مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت-

نامه‌ها، که گاه بسیار پیچیده بود)، گسترش ارتباط‌های بازرگانی، ساختن قصرها و پرستش گاه‌ها، ایجاد کاریزها و آبراه‌ها و غیره.

و ریاضیات، بااستفاده از همه دست‌آوردهای دوره‌های قبل (وبه ویژه ریاضیات یونان و هند)، با سمت‌گیری کاربردی (که در سطحی بسیار بالاتر از ریاضیات کاربردی دورهٔ قبل از یونان بود)، به تکامل خود ادامه داد و، همان طور که پیش از این گفتیم، اگر از استثناها بگذریم، همهٔ ریاضی دانان این دوره، از پسران موسی شاکر تا جمشید کاشانی، ایرانی بوده‌اند.

وقتی می‌گوییم، ریاضیات این دوره با سمت‌گیری کاربردی به پیش رفته است، به این معنا نیست که در زمینهٔ ریاضیات نظری، کاری انجام نشده است، بلکه تنها به این معناست که عامل اصلی پیشرفت ریاضیات، انگیزه بیرونی آن (یعنی زندگی، عمل و نیازهای ناشی از آنها) بوده است.

ریاضی‌دانان ایرانی این دوره، با اطلاع از کارهای یونانیان و هندیان و با استفاده از ذخیره فرهنگی غنی قوم‌های ساکن ایران، تلاش کردند کمبودها و شکاف‌های نظری ریاضیات یونانی را برطرف کنند. آنها بارها و بارها، «مقدمات» اقلیدس را به بحث انتقادی کشاندند، روش‌های بطلمیوسی را که در «المجسطی» آمده بود، تصحیح کردند و تکامل دادند، پایه‌های جبر و مثلثات و، به طور کلی، ریاضیات محاسبه‌ای را ریختند، با بررسی دقیق بحث مربوط به نسبت‌ها، مفهوم عدد حقیقی را به عنوان یک کمیت پیوسته وارد در ریاضیات کردند، پایه‌های اصلی هندسهٔ نااقلیدسی را بنا نهادند، روش‌های ارشمیدس را در زمینهٔ «انتگرال گیری» تکامل بخشیدند و غیره و غیره. ولی در همهٔ این زمینه‌ها، توجه اصلی ریاضی‌دانان ایرانی، به نیازهای زندگی و دانشهای دیگر بوده است. خوارزمی جبر را به دلیل دشواریهایی که در فقه اسلامی برای تقسیم ارث وجود داشت پدید آورد. نیم نخست کتاب «جبر و مقابلهٔ» خوارزمی، بحثی نظری دربارهٔ راه حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم ــ هم با محاسبه و هم به کمک استدلال های هندسی ــ است. البته خوارزمی از نمادهای جبری استفاده نمی‌کند و مسأله‌ها را به صورت توصیفی حل می‌کند، ولی دقت در روش‌های حل او، ما را به دستوری می رساند که امروز، برای حل معادلهٔ درجه دوم، به‌کار می‌بریم. خوارزمی، و ریاضی‌دانان ایرانی بعد از او، عدد منفی را ــ جز در برخی موردهای استثنایی ــ به کار نمی‌بردند، به معادله‌های بالاتر از درجه سوم توجهی نداشتند (خیام، در کتاب جبر خود، برخی از گونه‌های معادلهٔ درجه سوم را به کمک مقطع های مخروطی حل کرده‌است) و تنها به یکی از ریشه های معادله، اکتفا می‌کردند و، همه اینها، به دلیل توجه اصلی آنها به عمل و نیازهای زندگی بوده است. به‌طور مثال، ریاضی‌دانان ایرانی (به پیروی از ریاضی‌دانان یونانی)، اگر طول پاره‌خط راست را برابر a می‌گرفتند، a^2 را مربع a (یعنی مساحت مربعی به ضلع برابر a) و a^3 را مکعب a (یعنی حجم مکعبی به ضلع برابر a) می‌گفتند، اصطلاحهایی که هنوز هم معمولند. در واقع، توان دوم را به معنای مساحت و توان سوم را به معنای حجم می‌گرفتند و چون در زندگی عملی، با جسم چهار یا پنج بُعدی سر و کار نداریم، بحث دربارهٔ معادله‌های بالاتر از درجه سوم را ــ جز در موردهای نادر مثل معادله‌های سیال کرجی ــ بی معنی می دانستند.

فارابی در کتاب بزرگ موسیقی خود، برای نخستین بار در جهان، نظریهٔ علمی موسیقی را مطرح می‌کند و جنبه‌های مختلف آن را مورد بحث قرار می‌دهد (در تقسیم‌بندی فارابی از دانش‌ها، موسیقی بخشی از ریاضیات به شمار می‌آید). پیش از فارابی، اگر از موسیقی عملی عیلام و بابل و مصر و هند بگذریم، تنها در یونان بحث‌هایی در زمینهٔ موسیقی در جریان بود که بیشتر جنبهٔ متافیزیکی داشت و آمیخته به وهم و تخیل بود. فارابی مبانی فیزیکی و ریاضی موسیقی را بررسی و نخستین کتاب علمی موسیقی را ارائه داده است.

ابوالوفا و بیرونی، بیش از دیگران، دستورهای مثلثاتی را کشف و ثابت کردند و این، به دلیل دشواری‌هایی بود که در اخترشناسی و محاسبه‌های مربوط به آن، پیش می‌آمد. بطلمیوس، بیشتر استدلال ها و محاسبه‌های خود را بر اساس هندسه و قضیه‌ها و مسأله‌های آن انجام می‌داد و این، کار را بسیار دشوار می‌کرد. ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی، برای رفع این دشواری‌ها بود که مثلثات را شکوفا کردند و پیش بردند و، سرانجام، نصیرالدین توسی با تألیف «کشف‌القناع» خود، استقلال مثلثات را از هندسه اعلام کرد. جمشید کاشانی، برای همین محاسبه‌های اختر شناسی (او پایه‌گذار رصد خانهٔ الغ‌بیگ در سمرقند بود) و به این دلیل که راه‌های قبلی (مانند راه ابوالوفا)، اندکی طولانی و تا اندازه‌ای غیر دقیق بود، روش جبری حل معادلهٔ درجه سوم:

$$4x^3 - 3x = a$$

را برای پیدا کردن مقدار دقیق سینوس یک درجه (از روی سینوس سه درجه) به دست آورد. ریاضی‌دانان ایرانی، اندازهٔ سینوس زاویه های ۱۵، ۱۸، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۲، ۷۵ درجه (و در نتیجه، کسینوس آنها) را می‌شناختند و مقدار سینوس سه درجه را با بسط $\sin(18° - 15°)$ به‌دست می‌آوردند.

ابوالوفا دو کتاب جالب دارد، یکی به نام «هندسه برای مهندسان و صنعت‌کاران» و دومی به نام «حساب برای محاسبان» [ریاضی دانان ایرانی، جبر را بخشی از حساب می‌دانستند]. خود نام این دو کتاب، معرف آن است که سمت گیری ابوالوفا در کارهای ریاضی خود، ریاضیات کاربردی بوده است.

باید به این نکته اشاره کنیم که، اغلب مورخان دانش، حتی باانصافترین آنها، نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعهٔ تاریخ ریاضیات، به درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آنها، ریاضی‌دانان ایرانی را، تا حد مترجمان سادهٔ نوشته‌های یونانی پایین آورده اند که، این ترجمه‌ها هم، به موقع خود، به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند که بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران فترتی به وجود می‌آید که تا سدهٔ پانزدهم میلادی ادامه دارد و، سپس، با دسترسی اروپاییان به نوشته های یونانی (از راه ترجمهٔ عربی آنها) دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند. نتیجهٔ این نوع برخورد این است که همهٔ ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هرچه امروز دارند، نتیجهٔ تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. و این درحالی است که، ریاضی دانان ایرانی، از سدهٔ هشتم تا سدهٔ شانزدهم میلادی، پرچم دار ریاضیات جهان بوده‌اند، به نحوی که این دوره، یک دورهٔ کامل از تاریخ تکامل ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

❑

نشانه‌های جدی در دست است که ریاضیات، برای بار سوم و در زمان ما، در جهتی پیش می‌رود که سمت‌گیری کاربردی دارد. انسان امروزی با مسأله‌های بسیار پیچیده‌ای روبه‌روست که اگر بخواهد زندگی خود و نسلهای آینده را نجات دهد، باید آنها را حل کند. محیط زیست با سرعتی باور نکردنی رو به تخریب است، منابع زیرزمینی، جنگل‌ها و زمینهای کشاورزی تهی و لخت می‌شود، شکاف بین کشورهای فقیر و کشورهای غنی از یک طرف، و فاصلهٔ بین عامهٔ مردم و گروه خاص غارتگر هر کشور از طرف دیگر، روز به‌روز عمیق‌تر می‌شود، حتی کمبود آب (که در همین گذشتهٔ نزدیک، گمان می‌رفت تمام نشدنی و لایزال باشد) در بیشتر نقطه‌های جهان احساس می شود، به نحوی که برخی کارشناسان پیش بینی می کنند، جنگ به خاطر آب، در آینده‌ای نزدیک، جایگزین جنگ به خاطر نفت و انرژی شود.

مسأله از این هم بغرنجتر است. انسان زمان ما، بدون برنامه‌ریزی، نمی تواند به زندگی خود ادامه دهد. به اصطلاح «بازار آزاد» و تولید بدون برنامه، به جز آن که میزان مصرف را به صورتی غیر ضروری، آن هم در کشورهای خاص و بین قشرهای خاص، بالا می‌برد و موجب فقر کشورها و قشرهای دیگر می‌شود، از آن جا که از یک برنامهٔ حساب‌شده و انسانی پیروی نمی‌کند، هم به نیروی کار صدمه می‌زند و هم عدم هماهنگی در توزیع پیش می‌آورد. برای رفع این دشواریها، انسان امروزی ناچار است، در هر مورد سمت‌گیری روند کار و پیش بینی فرایند آیندهٔ تولید را روشن کند و بداند، چه چیزی را و چگونه باید تولید و یا مصرف کند که هم عادلانه و انسانی باشد و هم از تخریب محیط و منابع و نابودی نسلهای آینده جلوگیری کند. و همهٔ اینها، جز با تجزیه و تحلیل کمیتی پدیده‌ها و روندها ممکن نیست.

تولید و توزیع، به همان صورت ناسالم امروزی خود، باز هم نیازمند به ریاضیات است. برای خود کار کردن تولید، باید روند کار را، از نظر ریاضی و منطقی، تحلیل کرد و این به معنای آن است که ریاضیات، نه تنها از دیدگاه کمیتی که، بتدریج، از دیدگاه کیفی هم باید وارد عمل شود. امروز دیگر نمی‌توان با دستورهای کلی و بی معنی، مثل «باید ترتیبی داد تا کارها درست شود»، دشواریها را حل کرد. حتی حل مسأله‌های ساده‌ای مثل تخلیه و بارگیری کشتی‌ها، تنظیم شبکه‌های برق و تلفن، یک‌طرفه یا دو طرفه کردن خیابانها ، تعیین محلهای توقف ماشینهای آتش‌نشانی و ....، بدون استفاده از ریاضیات و تنها با متوسل شدن به تجربه ممکن نیست. نظریهٔ «اطمینان بخشی» که در دهه‌های اخیر به وجود آمده است و بتدریج به صورت هستهٔ مرکزی اندیشه ها در زندگی فراصنعتی امروز درمی‌آید، بر اساس یک نظریهٔ ریاضی است. باید از روند تولید اطمینان داشت، باید کارآیی محصول قابل قبول باشد، باید محصول تولید شده، قابل ترمیم و تعمیر باشد و ، اینها، تنها با تکیه بر نظریهٔ اطمینان بخشی که خود شاخه‌های گوناگونی دارد، ممکن می‌شود. این تکه از نوشتهٔ بوریس گنه دنکو، که خود در پیدایش و تنظیم نظریهٔ اطمینان بخشی سهم جدی داشته است، می‌تواند برایتان سودمند باشد:

«سدهٔ بیستم، این قانون‌مندی را تأیید کرد که ریاضیات، با پیدا کردن کاربردهای خود در اقتصاد و صنعت و در پدیده‌هایی از طبیعت که پیش از آن مورد مطالعهٔ کمیتی قرار نگرفته بودند، انگیزه‌ای برای تکامل بعدی خود به دست آورد. در نتیجه، این امکان پیدا شد که جهان ما، عمیقتر، کاملتر و دقیقتر مورد بررسی قرار گیرد و، در عین حال، خود ریاضیات توانست دنیای بی‌کرانی از مسأله‌های تازه را رودر روی خود

ببیند ... جهت تازهٔ بررسیهـای کاربردی را، با عنوان نظریهٔ «اطمینان‌بخشی» می شناسند. این نظریه، به دلیل رشد بی سابقهٔ نقش صنعت و دستگاه‌های فنی در همهٔ جنبه‌های فعالیت‌های جامعه به وجود آمده است. سلامتی و حتی امکان وجود تودهٔ عظیمی از مردم، به طور مستقیم با دستگاه‌های صنعتی بستگی دارد... من در ساختمان مبانی نظریهٔ اطمینان بخشی و حل یک رشته مسأله‌های مربوط به آن ... شرکت‌داشته‌ام. درضمن، تصور دربارهٔ نقش ریاضیات و، به طورکلی، روشهای کمیتی، در مسأله‌هایی که در برابر نظریهٔ اطمینان بخشی وجود داشت، بتدریج شکل گرفت و معلوم شد، هم آزمایش و مشاهده و هم دستورهای دقیق نظری و ، سرانجام، استنتاج، اهمیتی جدی دارند ... نظریه اطمینان بخشی شاخه‌ای از دانش است که جنبهٔ کاربردی دارد و دشواریهای مهندسان، اقتصاددانان و سازمان‌دهندگان تولید را حل می‌کند و گرچه هیچ کدام از این دشواری‌ها خصلت ریاضی ندارند، امّا ریاضیات نقش عظیمی در حل آنها به عهده گرفته است. جهتهای اصلی این گونه بررسی‌ها را، که به ثمر رساندن آنها، بدون استفاده وسیع از ریاضیات ممکن نیست، نام می‌بریم: ۱) محاسبهٔ اطمینان بخشی دستگاه به کمک اطمینان بخشی مفروض عنصرهای آن؛ ۲) ساختن مُدل‌های ریاضی، برای مسأله‌های گوناگون نظریهٔ اطمینان بخشی؛ ۳) تنظیم نظریهٔ مربوط به آزمایش محصول، برای به دست آوردن میزان اطمینان بخشی آن؛ ۴) طرح و حل مسأله بهینه‌سازی؛ ۵) برنامه ریزی روی نظریهٔ اطمینان بخشی، برای حل مسأله‌های آن به کمک کامپیوتر؛ ۶) بیرون آوردن مفهوم اصلی و خصلتهای عددی نظریهٔ اطمینان بخشی و برآورد آنها از نتیجه آزمایشها ... می‌خواهم تأکید کنم که نظریهٔ اطمینان بخشی، نظامی پیچیده است و همهٔ بخشهای تشکیل دهندهٔ آن دارای اهمیتند: کار ریاضی دان، مهندس، فیزیک دان، صنعت کار و اقتصاددان ...

مُدل ریاضی، ابزاری است که به کمک آن می‌توان یک مسأله عملی و کاربردی را، به مسأله‌ای ریاضی تبدیل کرد. نظریهٔ امروزی اطمینان بخشی، به وسیلهٔ مُدل‌های ریاضی سودمندی غنی شده است و این امکان به وجود آمده است که مسألهٔ تبدیل آن را به مسأله‌های دقیقاً فرمولی مطرح کنیم، مسأله‌هایی که با روشهای ریاضی قابل بررسی باشند... روشهای ریاضی بررسی، امکانهای عظیمی برای بالا بردن آگاهیهای ما فراهم می‌کند؛ به ویژه اگر نظریه را، ضمن مقایسهٔ کارهای نظریه‌پردازان و نتیجه‌گیریهای آزمایشگران، اصلاح و دقیقتر کنیم، یعنی وقتی که ریاضی‌دان، به ماهیت فیزیکی مسأله توجه کند و، ضمن عمل، اندیشه‌های نظری را کنار نگذارد. زندگی و عمل، که در گذشته مسأله‌های تاریخی و مهم تازه‌ای را در برابر ریاضیات گذاشته است، در زمان ما هم، همین نقش را به عهده دارد و در آینده هم به عهده خواهد داشت. بررسیهای نظری، در ضمن، مسیر راه آزمایشگران را روشن می‌کند و به آنها امکان می‌دهد، پژوهشهای تجربی خود را در مسیری انجام دهند که از قبل، هدف آن را می شناسند ... باید به طور عاجل به مسأله‌ای بپردازیم که تا کنون روی آن کار نشده است: تأثیر دستگاه فنی، بر سلامتی کسی که روی آن کار می‌کند. جای سخت و خشن رانندهٔ تراکتور و کمباین و تکانهای بیش از حد بار، بر اندامهای راننده اثر می‌گذارد. کار با کامپیوترهای شخصی به وسیلهٔ دانش‌آموزان و دانشجویان، بر چشم آنها، تأثیر منفی می‌گذارد و ...»

به این ترتیب به نظر می‌رسد که دوران سوم تکامل ریاضیات با سمت‌گیری کاربردی، که در سطحی بسیار بالاتر از دورهٔ دوم آن (دورهٔ ریاضیات ایرانی) قرار دارد، ضمن استفاده از همهٔ دست‌آوردهای نظری گذشته، تلاش می‌کند با پر کردن شکافها و برطرف کردن کمبودها، راهنمای انسان در دورهٔ پیچیدهٔ فراصنعتی امروز باشد.

در این جا سعی بر این بود تا جنبه‌هایی از ریاضیات کاربردی امروز مطرح شود که کمتر مشهور است، والاّ، می‌توان به تقریب از همهٔ دانش‌ها نام ببرد که، ضمن تکامل خود در روزگار ما، هر روز و هر ساعت به ریاضیدان نیاز پیدا می‌کنند. دانش‌هایی همچون فیزیک، اخترشناسی، شیمی، زیست‌شناسی، ژن‌شناسی، روان‌شناسی، اقتصاد، جامعه شناسی و حتی تاریخ را نمی‌توان بدون بهره‌گیری جدی از روشهای ریاضی به جلو برد و با موفقیت تکامل داد.

ریاضیات دانشی پویاست و این پویایی، در واقع، بازتابی از پویایی انسان و جامعه‌های انسانی است.

البته انگیزهٔ پیشرفت ریاضیات، تنها مشاهده، تجربه و نیازهای انسانی نیست، بلکه منطق درونی ریاضیات هم، انگیزه‌ای برای پیشرفت آن است. ولی حتی بخش‌هایی از ریاضیات، که به صورت انتزاعی و بدون انگیزهٔ کاربردی به وجود می‌آید، بتدریج (و گاهی هم، بلافاصله) کاربرد خود را پیدا می‌کند. وقتی رنه توم، ریاضیدان معاصر فرانسوی، نظریهٔ «ویژگی‌های نگاشتهای قابل دیفرانسیل‌گیری»را، که به «نظریهٔ فاجعه‌ها» مشهور شده است، آورد، کسی گمان نمی‌کرد به این سرعت مورد توجه قرار گیرد و در صنعت و هنر زمان ما نفوذ کند، به نحوی که به طور مثال بسیاری از طرحهای معماری مُدرن براساس این نظریه شکل بگیرد.

در طول مسیر تکاملی ریاضیات، گاه انگیزهٔ بیرونی (مشاهده،

تجربه، نیازهای زندگی و صنعت و دانش‌های دیگر) و گاه انگیزهٔ درونی (استدلال و منطق درونی ریاضیات) تسلط داشته است و ، ریاضیات، تکامل خود را، طبق «قانون نفی در نفی» گذرانده است، به این معنی که به تناوب از دورهٔ با سمت‌گیری کاربردی به دورهٔ با سمت‌گیری نظری و سپس از دورهٔ با سمت‌گیری نظری به دورهٔ با سمت‌گیری کاربردی رفته است. تاکنون، ریاضیات، چهار مرحله از تکامل خود را پشت سر گذاشته و، در زمان ما، مرحلهٔ پنجم تکامل خود را آغاز کرده است:

۱) دورهٔ تکامل (با سمت گیری کاربردی) که با آغاز شکوفایی دانش یونان به پایان می‌رسد؛

۲) دورهٔ دوم (با سمت‌گیری نظری) که از سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد در یونان آغاز می‌شود و در سده‌های سوم و چهارم میلادی در اسکندریه پایان می‌یابد؛

۳) دورهٔ سوم (با سمت‌گیری کاربردی) که از سدهٔ هشتم میلادی آغاز می‌شود و در سدهٔ شانزدهم میلادی خاتمه می‌یابد. مرکز ثقل فعالیت‌های ریاضی در این دوره، در ایران بوده است؛

۴) دورهٔ چهارم (با سمت‌گیری نظری) که از سدهٔ شانزدهم میلادی، و به طور عمده در اروپای غربی، آغاز می شود و در سدهٔ بیستم پایان می‌یابد؛

۵) و سرانجام دورهٔ پنجم (با سمت گیری کاربردی) که هم اکنون دهه‌های آغازین خود را می‌گذراند. مطلب را با تکهٔ زیبایی از نوشته بوریس گنه دنکو، که بیشتر جنبهٔ آموزشی دارد، به پایان می‌بریم:

«... شک نیست که مقدمات آنالیز ریاضی و هندسهٔ تحلیلی، که در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی وجود دارد، مبنای اصلی ریاضیات جدید و کاربردهای آن را تشکیل می‌دهد. تسلط بر این ابزارهای مقدماتی لازم است، ولی کافی نیست. اگر سخن معروف تسیولکوسکی (نخستین کسی که شیفتهٔ کیهان‌نوردی بود) را اندکی تغییر دهیم، می‌توان گفت که، ریاضیات سنتی دبیرستانی و مقدمه‌های آنالیز ریاضی، گهوارهٔ دانش امروزی است، ولی تا کی می‌توان زیست شناسان، پزشکان، مهندسان و اقتصاددانان آینده را در گهواره نگه داشت؟

برنامهٔ آموزشی دبیرستانها و مدرسه‌های عالی، در زمانی تنظیم شده است که بشر معتقد به وجود قانونهای جزمی در طبیعت بودند. زندگی، این طرز فکر نسبت به قانون‌های طبیعت را به کنار زده است و تلقی آماری، به طور جدی، جای خود را در دانش امروزی و فعالیت‌های علمی باز کرده است. ولی اینها، جایی در آموزش ریاضی امروزی ندارند و یا به تقریب ندارند. طرز تفکر آماری، چنان در همهٔ زمینه‌های عملی و علمی نفوذ کرده است که دیگر نمی‌توان از بازسازی کامل برنامه‌های مدرسه‌های عالی و حتی سالهای ششم و هفتم تحصیل، سرباز زد.

جنبه دیگر آموزش ریاضی، مربوط به ریاضیات محاسبه‌ای است که ، به صورت گسترده‌ای، چهرهٔ آن عوض شده است و امکان برنامه‌ریزی جریان های پیچیده‌ای را در کامپیوترها به وجود آورده است. باید برنامه‌ریزی برای کامپیوتر و دادن نتیجه‌ها به صورت عدد، جدول و منحنی، به صورت عادت درآید. باید تجزیه و تحلیل منطقی جریان‌ها و تشکیل طرحها و شماهای صوری و منطقی، جزو کارهای همیشگی و عادی بشود...

دانش ریاضی در حال اعتلا و پیشرفت است. این، یکی از ویژگیهای دوران ماست که در آینده هم نمی‌توان از آن چشم پوشید. پیشرفت آیندهٔ بشر، قبل از هر چیز، به این بستگی دارد که پژوهشگران و کارکنان کار آزموده، تا چه اندازه بتوانند «با سبک و شیوهٔ ریاضی بیندیشند» و با چه سرعتی بتوانند آموزش ریاضی را، با توجه به نیازهای روز و آیندهٔ نزدیک، تجدید سازمان دهند.

پیشرفت دانش انسانی، مرزی نمی‌شناسد؛ امکانهای ریاضیات هم، برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های طبیعی، روندهای صنعتی، اقتصاد و زندگی اجتماعی، مرزی ندارد. تنها باید بتوان از این امکانها استفاده کرد».

❑

◇ اشاره‌هایی دربارهٔ برخی مفهوم‌ها

۱. انگیزه‌های تکامل ریاضیات

ریاضیات، در مسیر پیشرفت تکاملی خود، هم زیر تأثیر انگیزه بیرونی بوده است و هم زیر فشار انگیزهٔ درونی. انگیزهٔ بیرونی، یعنی نیازهای زندگی و نیازهای دانشهای طبیعی به ریاضیات؛ و انگیزه درونی، یعنی استدلال و منطق درونی ریاضیات که بر پایهٔ روش قیاسی شکل گرفته است.

از یک طرف، با بغرنجتر شدن زندگی اجتماعی و اقتصادی و در عین حال، با نیاز روزافزونی که دانشهای طبیعی، به‌ویژه اخترشناسی، فیزیک، موسیقی، اقتصاد، زیست‌شناسی،... برای دقیقتر شدن و «به‌ریاضی درآمدن» دارند، برای ریاضیات مسأله‌های تازه‌ای مطرح می‌شود و شاخه های تازه‌ای پدید می‌آید و، از طرف دیگر، منطق درونی

ریاضیات، موجب استوارتر شدن مبانی پیشین و درک دقیقتر و قابل انعطافتر مفهومهای ریاضی می‌شود.

این دو انگیزه، بیرونی و درونی، هر دو همیشه در کار پیشبرد ریاضیات بوده‌اند، ولی گاه این و گاه آن پیشی گرفته و نیرومندتر عمل کرده است. با وجود این، هیچ کدام از این دو انگیزه نمی‌تواند برای مدتی بسیار طولانی، یکه‌تاز باشد و تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که دیر یا زود، به هم می‌رسند و «انتزاع» به یاری «عمل» می‌آید و «عمل»، «انتزاعهای تازه‌ای» را مطرح می‌کند.

اغلب این پرسش پیش می‌آید که آیا نظامهای سیاسی و اجتماعی، در شیوهٔ تکامل ریاضیات نقش داشته‌اند یا نه؛ در پاسخ به این پرسش باید گفت: ریاضیات به نظام اجتماعی و یا سیاسی خاصی خدمت نمی‌کند و توان خود را در اختیار هر کسی که استعداد یاری گرفتن از آن را داشته باشد، قرار می‌دهد. تأثیر نظامهای اجتماعی بر پیشرفت ریاضیات (و به‌طور کلی دانش) غیرمستقیم است و در سه جنبهٔ آن محدود می‌شود: سرعت پیشرفت ریاضیات، نحوهٔ آموزش ریاضیات و سرانجام، بهره‌گیری از استنتاج‌های فلسفی چه در زمینهٔ مفهومهای ریاضی و چه در زمینهٔ روشهای آن.

به‌طور مثال، در سده‌های میانه، که نظام فئودالی ــ کلیسایی بر اروپای غربی تسلط داشت، به‌دلیل اولویت دادن به مسأله‌های ذهنی و کلامی، تمامی دانش دچار رکود شد، به‌نحوی که در تمامی این دوره نه‌تنها دانش، حرکت به جلو نداشت، که با سرعتی منفی حرکت می‌کرد و بسیاری از دستاوردهای گذشته فراموش شد و از دستاوردهای عظیم ملتهای شرق (و از جمله ایران) بهره‌ای نبرد. درضمن، وقتی که سرانجام اقلیدس و بطلمیوس و ارسطو را، به عنوان سه استاد بزرگ به رسمیت شناختند، از یک طرف هیچ کس حق نداشت دربارهٔ آنها بحث کند و یا نوشته‌هایشان را مورد انتقاد قرار دهد و از طرف دیگر، کار به اصطلاح آموزش نباید جنبهٔ استدلالی می‌داشت، به‌نحوی که نخستین ترجمه‌های کتاب اقلیدس به لاتینی، تنها شامل صورت قضیه‌ها بود و نه روش اثبات آنها!

مثال دیگری را دربارهٔ تأثیر نظام اجتماعی، بر روش آموزش می‌آوریم. در عیلام و بابل و مصر باستان، حاکمیت، با نظام برده‌داری دولتی ــ دینی بود، به این معنا که همهٔ مردم برده‌های درباریان و کاهنان به حساب می‌آمدند. در نظام خشن و بی‌رحم برده‌داری دولتی، کسی حق چون و چرا نداشت، فرمان از بالا (درباریان یا کاهنان) برای همه مطاع بود، سرپیچی از فرمان موجب از دست دادن زندگی (حتی زندگی تمامی خانواده) می‌شد. این وضع، اثر خود را در آموزش ریاضی هم گذاشته بود. در لوحها و نوشته‌های ریاضی که از این دوران مانده است، کمتر استدلال دیده می‌شود. نویسندهٔ متن ریاضی، تنها «فرمان» می‌دهد که اول چنین کن، بعد چنان کن ... اغلب راه‌حلها با واژه «باید» آغاز می‌شود، بدون این که دلیلی بر آن آمده باشد.

نظام اجتماعی یونان باستان هم نظام برده‌داری بود، ولی برده‌داری شخصی. جامعه از دو طبقه تشکیل می‌شد: «آزادها» و «برده‌ها». برده‌ها از حقوق اجتماعی برخوردار نبودند، ولی در بین «آزادها» نوعی دموکراسی («دموکراسی اشرافی» ــ صاحب بردهٔ بیشتر، آزادی بیشتری داشت)، حاکم بود. همین دموکراسی نیم‌بند و محدود (محدود، هم از نظر مفهوم دموکراسی و هم از نظر طبقه‌های جامعه)، توانست موجب شکوفایی دانش و هنر و سرعت گرفتن پیشرفت آنها شود و چون دانش، و از جمله ریاضیات، برای «آزادها» بود، به‌طور طبیعی و تحت تأثیر همین دموکراسی، استدلال و بحث منطقی نیرو گرفت و تلاش می‌شد، برای هر ادعایی، استدلالی پیدا شود.

بحث دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات و هم نتیجه‌گیریهای فلسفی از مفهومها و روشهای ریاضی، بحثی به نسبت طولانی است و جای جداگانه‌ای می‌خواهد.

۲. قانونمند بودن تکامل ریاضیات

انسان در مسیر حرکت تاریخی خود، گاه به‌صورتی آرام و پیوسته و گاه به‌صورت جهشی و انقلابی، در جهتهای گوناگون پیش رفته است. برخی از این جهتها، و به‌طور عمده مسیر تکاملی روابط اقتصادی و تولیدی، از دیدگاه‌های مختلف مورد بررسی پژوهشگران قرار گرفته است، به نحوی که امروز مسیر تکاملی روابط مادی و اقتصادی بشر ــ چه در درون یک جامعه و چه در کل سیاره زمین ــ کم و بیش برای همگان روشن است. ولی دریغ که هنوز، مسیر تکاملی تفکر انسانی و شاخه های درونی آن، مثل دانش، مورد بررسی علمی دقیق قرار نگرفته، قانونمندیهای آن و بستگیهای متقابل آن با سایر جنبه‌های مادی و معنوی زندگی انسان، روشن نشده است ...

در حالت خاص، در زمینه تاریخ دانش و زندگی‌نامهٔ دانشمندان، تلاشهای بسیاری و اغلب صادقانه، شده است، ولی هنوز به یک دیدگاهی علمی و قانع کننده، که همه جنبه‌های آن را به صورت علمی و منطقی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده باشد، برخورد نمی کنیم. مقدمات و مدارک کار به‌طور کامل آماده است و نیروی ذهنی خلاقی را می‌طلبد

که براساس مدارک موجود، چنین دیدگاهی را ارائه دهد.

در سالهای پنجاه سدهٔ بیستم، کولموگوروف، ریاضیدان نامدار شوروی، مقالهای در زمینهٔ «تاریخ ریاضیات» نوشت و برای کشف قانونهای حاکم بر مسیر تکاملی ریاضیات، کشف مرحلههای مختلف تکامل ریاضیات را ضروری دانست. کولموگوروف، چهار مرحلهٔ اساسی را درنظر گرفته است:

۱. مرحلهٔ شکلگیری مفهومهای اصلی ریاضیات، یا مرحلهٔ پیش آگاهی. این مرحله با آغاز ریاضیات یونانی، پایان مییابد.

۲. مرحله ریاضیات مقدماتی یا ریاضیات با کمیتهای ثابت، و بهطور عمده این مرحله را ریاضیدانان ساکن یونان و سپس اسکندریه گذراندهاند.

۳. ریاضیات با کمیتهای متغیر که به تقریب از دوران نیوتون و لایبنیتس آغاز و در سدهٔ نوزدهم ختم میشود.

۴. ریاضیات امروزی که در زمان ما هم ادامه دارد.

همانطور که میبینیم، کولموگوروف (با این که به بستگی کامل ریاضیات و عمل اعتقاد داشت) تقسیمبندی خود را براساس پیشرفت ریاضیات نظری انجام میدهد و به زبان دیگر، تنها به انگیزه درونی ریاضیات توجه دارد.

اعتبار بیش از اندازهٔ کولموگوروف، موجب شد که بعد از انتشار این مقاله، بیشتر کسانی که در زمینه تاریخ ریاضیات کار کردهاند، با پذیرفتن این مرحلههای چهارگانه، بهطور عمده روی خط ریاضیات نظری پیش رفتند. اما، این شیوه برخورد با مسیر تکاملی ریاضیات، ضمن این که توانسته است بسیاری از جنبههای تاریخ گذشته را روشن کند و به دلیل وجود یک معیار، بسیاری از دشواریها را برطرف کرده است، نمیتواند به بسیاری از پرسشها پاسخ بدهد. اشکال این معیار چیست؟

اول، این روش برخورد با تاریخ تکامل ریاضیات، نیمی از ریاضیات، یعنی ریاضیات کاربردی را فراموش می کند و یکپارچگی ریاضیات را به هم میزند. کارآیی ریاضیات و یکی از دلیلهای عمدهٔ پیشرفت آن، وحدت نظریه و عمل در آن است. درست است که گاه این و گاه آن، در اولویت قرار میگیرد و جهت بررسیهای ریاضی را به سمت نظریه یا عمل میکشاند، ولی اولاً این جدایی نمی تواند برای دورهای طولانی پایدار بماند و در ثانی نه درحالت سمتگیریهای نظری، ریاضیات کاربردی به کلی خاموش است و نه در حالت سمتگیری کاربردی، ریاضیات نظری در جای خود درجامیزند. ریاضیات را چه از نظر تاریخی، چه از نظر فلسفی و چه از نظر آموزشی، باید در یکپارچگی آن و در همراهی یا تقابل نظریه و عمل شناخت. بدون توجه به این وحدت، همیشه جنبههایی از ریاضیات ناشناخته میماند و در ابهام قرار میگیرد.

دوم، نتیجهٔ نهایی این شیوهٔ برخورد با تاریخ ریاضیات، منجربه این میشود که تنها ملتهای ساکن اروپا و بهویژه، اروپای غربی و جنوبی، همهٔ کارها را انجام دادهاند: ریاضیات، بعد از یک دورهٔ طولانی آغاز تمدن بشری، سرانجام از یونان آغاز به شکفتن کرد، سپس دانشمندان یونانی، در اسکندریه دنبال کار را گرفتند تا در سده سوم و چهارم میلادی که مکتب اسکندریه رو به زوال رفت. از اینجا یک دورهٔ طولانی سکوت در سراسر جهان برقرار میشود و اروپا هم (که مشعلدار دانش است) در سدههای میانه فرو میرود و گرفتار دستگاههای تفتیش عقاید میشود؛ تا این که نوزایی و رونسانس، دوباره در اروپا آغاز میشود و وظیفه تکامل ریاضیات را تا به امروز بر دوش خود میگیرد. در این میان، از خوشبختی مردم اروپا کسانی در شرق (و بویژه در ایران) بودند، که لابد برای سرگرمی و گذران ساعتهای فراغت خود، ریاضیات اروپایی، یعنی ریاضیات یونان را از طریق ترجمهٔ آنها به زبان عربی حفظ کردند و بموقع خود، آن را در اختیار «اربابان» دانش، یعنی اروپاییان، گذاشتند تا آنها ناچار نباشند همه چیز را از نو آغاز کنند.

سوم، آیا بهواقع پیشرفت «ریاضیات مقدماتی» در یونان و اسکندریه بهطور کامل انجام شد؟ اساسیترین بخش «ریاضیات مقدماتی» یا «ریاضیات با کمیتهای ثابت»، بخش «محاسبهای» ریاضیات، یعنی حساب، جبر و مثلثات است که ریاضیدانان یونانی، یا بهطور کلی به آنها نپرداختند و یا حد ناچیزی از آنها را مورد مطالعه قرار دادند. حتی عددنویسی موضعی که امروز بهکار می بریم و، کشف آن موجب جهشی در پیشرفت ریاضیات بود، به هیچوجه در یونان پدید نیامد، درحالیکه سدهها پیش از ریاضیدانان یونانی، مردم ساکن «میان دورود» از عددنویسی موضعی استفاده میکردند و حتی برای مرتبههای خالی، علامت صفر را بهکار می بردند. درحالی که هندسه در یونان، به مرز بالایی از شکوفایی رسید، جبر یا مثلثات، حتی بهوجود نیامد. این ریاضیدانان اروپایی بعد از رونسانس، از کدام منبع اروپایی استفاده کردند که یکباره کار پیشرفت جبر و مثلثات را، از نقطههای پایانی آغاز کردند؟ کدام سرچشمهٔ یونانی روش عددنویسی موضعی را به آنها آموخت؟

چهارم، آیا این شیوه بحث دربارهٔ مسیر تکاملی‌تاریخ ریاضیات، با همهٔ قانونهای تکامل، که در اساس بر وجود تضاد درونی پدیده و «نفی در نفی» قرار دارد، تکیه می‌کند؟ کدام تضاد درونی، موجب تکامل ریاضیات شده است؟ در هر مرحله، کدام قانون یا روش ریاضی مربوط به مرحلهٔ قبل، «نفی» شده است؟ ... اگر می‌پذیریم که زندگی و عمل، یکی از نیرومندترین انگیزه‌های پیشرفت دانش، و از جمله ریاضیات، است، در این تقسیم‌بندی، چگونه می‌توان نقش این عامل اصلی را پیدا کرد؟...

این‌گونه پرسشها را که بیشتر جنبهٔ منطقی و فلسفی دارد، تا هر جا بخواهید، می‌توان ادامه داد. ولی، اگر به‌گونه‌ای که در این نوشته آوردیم، با تاریخ ریاضیات برخورد کنیم، همهٔ این دشواریها برطرف می‌شود: ریاضیات، به تناوب، از دوره‌های کاربردی و نظری عبور کرده است و ما هم‌اکنون در دورهٔ پنجم تکامل ریاضیات ــ که سمت‌گیری کاربردی دارد ــ به سر می‌بریم. دوره‌های دوم و چهارم تکامل ریاضیات (یونان باستان و اروپای غربی بعد از رونسانس) دوره‌هایی با سمت‌گیری نظری و دوره‌های اول و سوم مسیر پیشرفت ریاضیات (دوره پیش از یونان و دورهٔ بلافاصله بعد از یونان) دوره هایی با سمت‌گیری کاربردی بوده است و به ویژه، دورهٔ سوم را در تاریخ تکامل ریاضیات، می‌توان به حق، ریاضیات ایرانی دانست، چرا که بیشتر پژوهشهای ریاضی در ایران و به‌وسیلهٔ دانشمندان ایرانی انجام گرفته است. ریاضیات، دانشی پویاست و، این پویایی، به‌خاطر بستگی آن با عمل و زندگی و دانشهای دیگر است. حرکت تکاملی دانش ریاضی مثل هر حرکت تکاملی‌دیگری، صعودی است، ولی روی یک خط راست پیش نمی رود، حرکت تکاملی ریاضیات، حرکتی مارپیچی است. در دوره سوم تکامل ریاضیات (یعنی ریاضیات ایرانی)، مثل دورهٔ اول (پیش از ریاضیات یونانی)، سمت‌گیری کاربردی دارد، ولی در سطحی بسیار بالاتر از آن قرار می‌گیرد، چرا که در این دوره، از همهٔ دستاوردهای دو دورهٔ گذشته استفاده می‌شود، شکافها و رخنه‌های موجود در ریاضیات قبلی از بین می‌رود و شاخه‌های تازه‌ای از ریاضیات (که بیشتر به‌کار عمل، مثل تقسیم ارث یا محاسبه‌های مربوط به اخترشناسی می‌خورد) پدید می‌آید.

در پایان، این نکته را که از مقالهٔ آقایان «روزنفلد» و «کوبسف» برداشته‌ایم و می‌تواند به‌عنوان جمع‌بندی کوتاهی از کارهای ریاضیدانان ایرانی درنظر گرفته شود، بخوانید:

«ریاضیدانان شرق میانه و نزدیک، در زمینه محاسبه های ریاضی، موفقیت‌های زیادی به‌دست آوردند: محاسبهٔ جدولهای مثلثاتی، حل مثلث (چه در روی صفحه و چه در روی کره)، محاسبهٔ ریشه معادله‌های جبری، محاسبهٔ دقیق عدد «پی» (که هم با کسرهای شصت شصتی و هم با کسرهای دهدهی نوشته می‌شد). عملهای مربوط به محاسبه، نظریهٔ نسبتها را شکل داد و با به‌کار بردن عدد دربارهٔ کمیتهای پیوسته، مفهوم آن را گسترش داد.

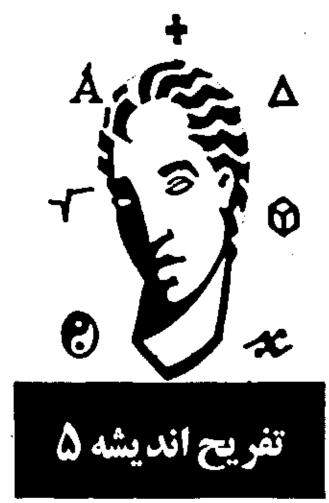
نوشته‌های بکر ریاضیدانان شرق و میانه و نزدیک و یا ترجمه هایی که از ریاضیات یونانی به زبان عربی انجام دادند، تأثیر فوق العاده‌ای در پیشرفت دانش و فرهنگ کشورهای اروپایی از سدهٔ دوازدهم به بعد داشته است.

در سدهٔ دوازدهم، رساله‌های حساب و جبر خوارزمی، به لاتینی ترجمه شد. در جریان مبارزهٔ هواخواهان عددنویسی موضعی با نمایندگان تفکر کهنه، سرانجام عددنویسی موضعی و رقمهای هندی در اروپای غربی پذیرفته شد و به غلط نام «رقم‌های عربی» به خود گرفت. شکل لاتینی شدهٔ نام «الخوارزمی» (Algorithmus) در آغاز به نوع محاسبه با دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی گفته شد و، سپس (از زمان‌لایب نیتس)، به هر جریان منظم محاسبه‌ای، «الگوریتم» گفتند. نام کتاب خوارزمی، ابتدا «الجبر و المقابله» و سپس تنها «الجبر» و به شکل Algebre، روی «دانش جبر» گذاشته شد. به تقریب در همین زمان، نوشته‌های فارابی، ابوکامل و ابن سینا نیز ترجمه شد. در سده دوازدهم، نوشته‌های اقلیدس، بطلمیوس، ارشمیدس، آپولونیوس و دیگر دانشمندان یونان باستان، از عربی به لاتینی برگردانده شد. در این زمان، در اسپانیا، ایتالیا و جنوب فرانسه، گروه‌های زیادی به ترجمهٔ اثرهای عربی مشغول بودند.

نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپای غربی، فیبوناچی (۱۱۷۰ ــ ۱۲۵۰ میلادی) در تونس تحصیل کرده بود. «کتاب حساب» فیبوناچی، زیر تأثیر جدی «ابوکامل» نوشته شد و مسأله‌های زیادی در حساب و جبر را از او تقلید کرد. ریاضی‌دان دیگر اروپای سده‌های میانه، رژیومونتان (۱۴۳۶ ــ۱۴۷۶ میلادی) نویسندهٔ «پنج کتاب دربارهٔ همهٔ گونه‌های مثلثات» است که، به صورت گسترده‌ای، از نوشته‌های «بتانی» و «توسی» استفاده کرده است.

در سدهٔ پانزدهم میلادی، وقتی قسطنطنیه به وسیلهٔ ترکها اشغال شد، تماس فرهنگی بین شرق و اروپا رو به گسترش نهاد. در این زمان دیگر، جدولهای اخترشناسی گورکانی و دیگر آثار دانشمندان ساکن سمرقند، که به زبان‌های یونانی جدید، لاتینی و آلمانی ترجمه شده بود، در اروپا به دست می‌آمد. ضمن این ترجمه‌ها، باید از نوشته‌های مربوط

به جبر هم نام برد که، در آن‌ها، اصطلاحهای جمشید کاشانی، برای نخستین بار در اروپا معمول شد. در همین زمان، بحثی که توسی دربارهٔ اقلیدس کرده بود، شناخته شد و اروپایی‌ها، با دیدگاه‌های خیام و توسی دربارهٔ «نسبتها» و «خطهای راست موازی» آشنا شدند. محتمل است که اروپاییها، اندیشهٔ «بی‌نهایت کوچکها» را از بحثی که توسی دربارهٔ ارشمیدس کرده است، گرفته باشند. اندیشه‌های خیام و توسی و تعمیم مفهوم عدد و گسترش آن تا عدد پیوسته، به اندیشه‌های دکارت (۱۵۹۴ــ ۱۶۵۰ میلادی) خیلی نزدیک است، که پاره خط راست هندسی را، به‌عنوان عددها شرح داده است، مطالعه می‌کند. دربارهٔ آشنائی دکارت با نوشته‌های توسی اطلاعی نداریم، ولی جان والیس (۱۶۱۶ ــ ۱۶۶۳ میلادی) با این نوشته‌ها آشنا بود و در یکی از کارهای خود ــ که به نظریه خطهای راست موازی و نظریه تشکیل نسبتها اختصاص دارد ــ همان بحث و بررسی توسی را تکرار کرده است. «ساکری» با نظریه‌خط‌های راست موازی خیام و توسی به وسیلهٔ والیس آشنا شد. و ما می‌دانیم، این دو نظریه، منجر به دو کشف بزرگ در تاریخ ریاضیات شد: «هندسه نا اقلیدسی» و «کمیتهای متغیر ...».



۹ دانش‌آموز به صورت دایره ایستاده‌اند. برای تعیین برندهٔ بازی، آنها به ترتیب از ۱ تا ۵ در جهت عقربهٔ ساعت می‌شمارند و پنجمین نفر از دایره خارج می‌شود. بازی را به همین ترتیب تا آخر ادامه می‌دهند. یعنی ۵ تا ۵ می‌شمارند و هر بار پنجمین نفر از دور بازی کنار می‌رود. آخرین نفر باقی مانده برنده محسوب می‌شود.

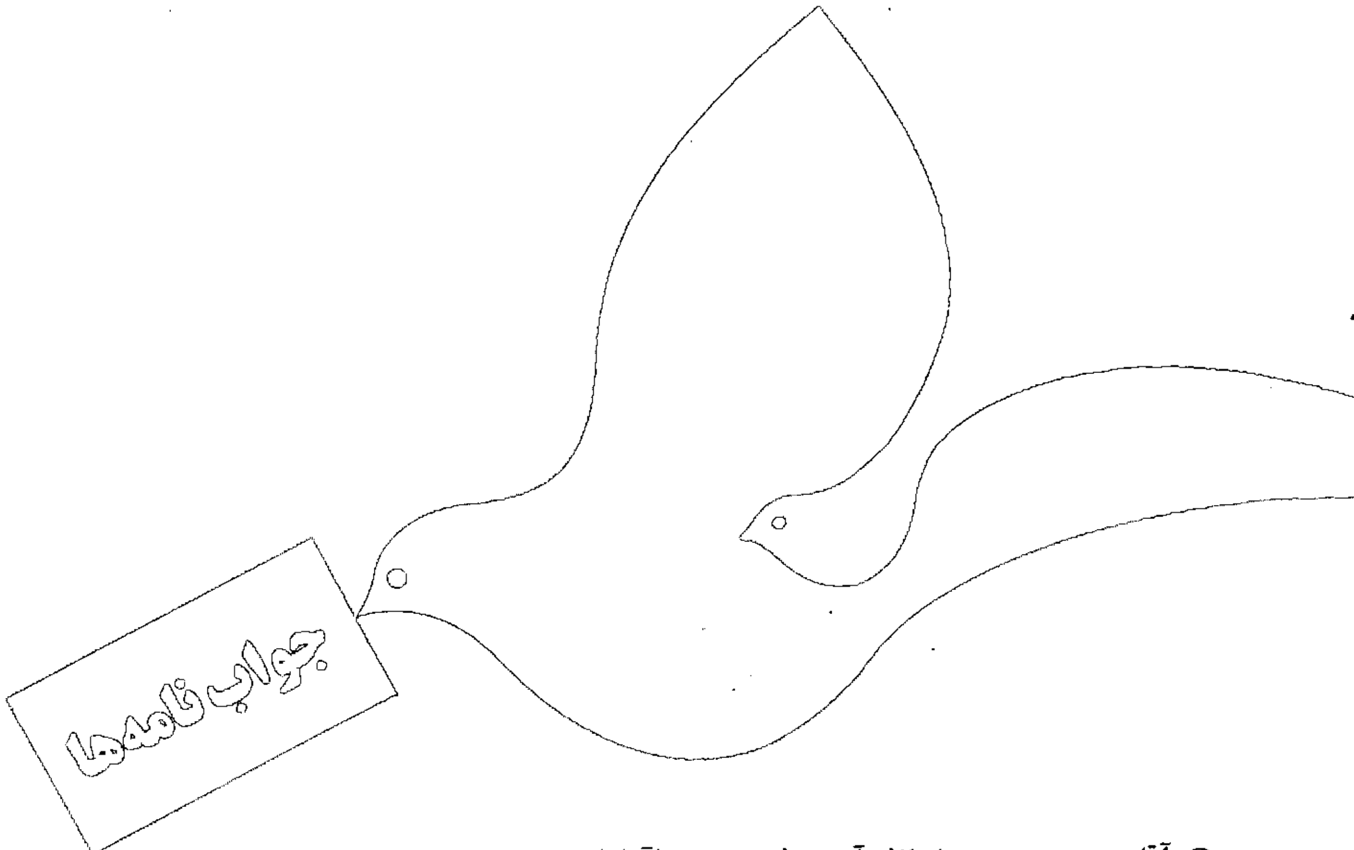
مهرداد کسی است که شمردن را انجام می‌دهد و می‌خواهد این کار را از کسی شروع کند که خودش برنده شود. اگر این ۹ نفر را I ،H ،G ،F ،E ،D ،C ،B ،A (در جهت عقربه‌های ساعت) بنامیم، مهرداد شمارش را از کدام یک باید شروع کند؟

از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸



در حدود ۳۵۰ سال روی اثبات قضیهٔ آخر فرما (معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 2$ دارای جواب صحیح و غیربدیهی نمی‌باشد.) تلاش شده و این قضیه که به خودیِ خود اهمیت چندانی ندارد توانسته بزرگانِ ریاضی را مشغول کند، امّا اکنون که پس از ۳۵۰ سال این قضیه به اثبات رسیده است، باعث ترقی و پیشرفت بسیاری از نظریه‌ها و اثبات چندین قضیه و حدسِ حل نشده و پیوند بعضی از شاخه‌های علم ریاضی به یکدیگر شده است.



○ آقای مهدی محمدی؛ دانش آموز رشته ریاضی (آمل)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است برای شماره‌های آینده از آنها استفاده کنیم. یادآور می‌شویم که سعی کنید مسائل ارسالی تکراری نباشند.

○ خانم زهرا ریاحی؛ دانش آموز رشته ریاضی (مرند)

از نامه ارسالی شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز می‌باشد متشکریم. به عرض می‌رسانیم که إن شاء ا... برای شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد. سعی کنید مسائل حل شده خود را در سطح مطلوب‌تری ارائه دهید تا مورد استفاده دانش‌آموزان دبیرستان قرار گیرد.

○ آقای عموزاد مهدیرجی محمد مهدی؛ دانش آموز رشته ریاضی (بهشهر)

از نامه محبت آمیز شما متشکریم. امیدواریم با یاری و نصرت الهی و نظرات سودمند و الطاف دانش‌آموزان و اساتید و دبیران گرامی بتوانیم در جهتی که رضای خدا و بندگان خدا در آن است ثابت قدم باشیم. مؤید و پیروز باشید.

○ آقای امین هدایی؛ دانش آموز رشته ریاضی (تبریز)

ضمن تشکر و قدردانی از نامه ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «تخمین ریشهٔ سوم یک عدد» می‌باشد به عرض می‌رسانیم که فرمولها و رابطه‌های تقریبی بسیاری برای ریشهٔ nام یک عدد وجود دارد که در این جا به دو مورد از آنان اشاره می‌کنیم. ۱) با استفاده از دیفرانسیل داریم:

$$\sqrt[n]{a^n + b} \simeq a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

مثال:

$$\left(\sqrt[5]{۳۴} = \sqrt[5]{۳۲+۲} = \sqrt[5]{۲^{5}+۲} \simeq ۲ + \frac{۲}{۵\times ۲^{۴}}\right)$$

۲) همچنین در برهان ۵ صفحهٔ ۶۰ مربوط به مقالهٔ بسط دو جمله‌ای ثابت شد:

$$\sqrt[n]{a} = ۱ + \left(\frac{a-۱}{na}\right) + \frac{n+۱}{۲!}\left(\frac{a-۱}{na}\right)^{۲} + \frac{(n+۱)\ (۲n+۱)}{۳!}\left(\frac{a-۱}{na}\right)^{۳} + \dots$$

مثال:

$$\left(\sqrt[۳]{۵} = ۱ + \left(\frac{۴}{۱۵}\right) + \frac{۴}{۲!}\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^{۲} + \frac{۴\times ۷}{۳!}\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^{۳} + \dots \sim ۱/۷۰۹۹\dots\right)$$

موفق و پیروز باشید.

آقای عباس نیرومندی؛ دیپلمهٔ ریاضی (مرودشت)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما به عرض می‌رسانیم در کتب مختلف می‌توانید دو موردی را که به آن اشاره کرده‌اید ببینید. مثلاً می‌توانید در کتاب اندیشهٔ ریاضی (ترجمهٔ پرویز شهریاری) و برخی از کتابهای تئوری اعداد مشاهده کنید. در جواب سؤال دیگر شما باید بگوییم که مطلبی از نظر ریاضی ارزشمند است که اولاً تازه و نو باشد، ثانیاً آن مطلب انگیزه و یا پایه‌ای برای یک تئوری **جدید** به‌شمار آید و بتوان روی آن یک ساختار نوین ریاضی بنا کرد.

در هر حال در این جا مطلب شما را عیناً درج می‌کنیم:

اگر $z = n(2n+1)$ باشد، آنگاه:

$$z^2+(z+1)^2+(z+2)^2+\dots+(z+n)^2=(z+n+1)^2+(z+n+2)^2+\dots+(z+2n)^2$$

$$n=1, z=3: 3^2+4^2=5^2 \quad , \quad n=2, z=10: 10^2+11^2+12^2=13^2+14^2, \dots$$

○ آقای اکبر ترابی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (زنجان)

ضمن تشکر از نامهٔ ارسالی شما که حاوی مقاله‌ای تحت عنوان «گنگ بودن $\sqrt[n]{a}$ با شرط این که a توان nام نباشد» می‌باشد به عرض می‌رسانیم که این مطلب را می‌توانید در اکثر کتابهای تئوری اعداد و مجلات ریاضی مانند مجلهٔ رشد آموزش ریاضی مشاهده کنید. در انتظار مقالات بعدی شما هستیم. موفق و پیروز باشید.

○ آقای رضا تقی‌لو؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (زنجان)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. امید است از آنان در شماره‌های بعدی استفاده کنیم.

○ آقای رضا محمدپور؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اهواز)

از مسائل حل شدهٔ ارسالی شما تشکر و قدردانی می‌کنیم. امید است برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده کنیم. موفقیت روز افزون شما را از خداوند منان مسئلت داریم.

○ خانم سارا قَرجه؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از مطلب ارسالی شما متشکریم. برای اطلاع خوانندگان مطالب شما را دراین جا می‌آوریم:

اگر بدانیم: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$، مقدار $1^2+3^2+\dots+(2n+1)^2$ را به‌دست آورید.

داریم:

$$1^2=1^2$$
$$3^2=(1+2)^2=1^2+2\times2+2^2$$
$$5^2=(1+4)^2=1^2+2\times4+4^2$$
$$\vdots \dots\dots\dots\dots$$
$$(1+2n)^2=1^2+2\times2n+(2n)^2$$

$$\therefore \text{جمع } \underbrace{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n+1)^2}_{A}$$

$$=\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{مرتبه }(n+1)}+4\underbrace{(1+2+\dots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$+\underbrace{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}_{B}$$

$$\Rightarrow A=(n+1)+2n(n+1)+B$$

$$\Rightarrow A-B=n+1+2n(n+1) \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$A+B=1^2+2^2+3^2+\dots+(2n+1)^2$$

$$=\frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3} \qquad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) و اختصار لازم خواهیم داشت:

$$1^2+3^2+5^2+\dots+(2n+1)^2$$
$$=\frac{n}{3}(4n^2+11)+4n^2+1$$

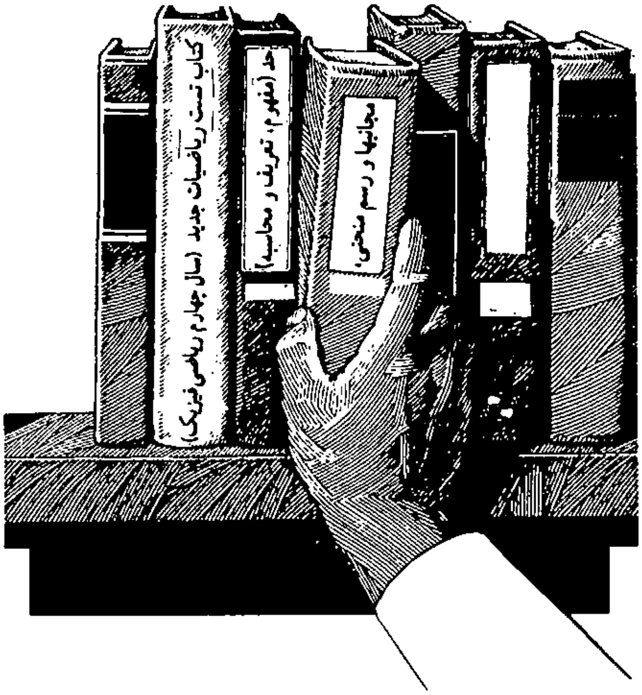
مثال:

$$n=3:$$
$$1^2+3^2+5^2+7^2$$
$$=\frac{3}{3}\left[4(3)^2+11\right]+4(3)^2+1=84$$

○ آقای مسعود فلّاح؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اصفهان)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های آیندهٔ مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

معرفی کتاب





مجانبها و رسم منحنی،
تألیف: احمد قندهاری
انتشارات مدرسه،
چاپ اول، پاییز ۷۴

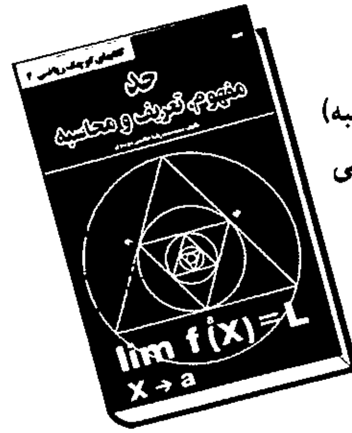
کتاب مجانبها و رسم منحنی، سومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است که با هدف کمک به درک مفاهیم درسی و برطرف کردن کمبودها و خلاهای کتابهای درسی به چاپ می‌رسد.

این کتاب شامل ۲ بخش است. بخش اول اختصاص به مجانبها داشته و از ابتدا مفهوم مجانب و نحوهٔ محاسبه و کاربرد مجانبها را در رسم منحنی بیان می‌کند که در هر مورد با ذکر مثالهای متنوع و حل شده، خواننده به راحتی می‌تواند توانایی درک مطلب را در خود افزایش دهد.

در بخش دوم (رسم منحنی‌ها) روی انواع مختلف منحنی‌ها در حالتهای متفاوت و رسم آنها به طور جداگانه بحث شده و در این بخش با نوعی طبقه‌بندی خاص از تعیین جهت تغییرات گرفته تا رسم منحنی‌های بسیار پیچیده و مشکل، دانش‌آموز می‌تواند تمام حالتهای مورد نیاز را مطالعه و بهره لازم را ببرد.

در انتهای هر مبحث تمرینهایی مربوط به آن گنجانده شده که جواب آخر هر تمرین در جلوی آن آورده شده و نیز در انتهای کتاب تستهایی به تفکیک موضوع طرح و به صورت تشریحی حل شده‌اند.

مطالعهٔ این کتاب را به دانش‌آموزان سالهای سوم و چهارم دبیرستان و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.



حد (مفهوم، تعریف و محاسبه)
تألیف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
انتشارات مدرسه،
چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴

این کتاب که چهارمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد حاوی مفهوم، تعریف و محاسبهٔ حدود توابع و عبارتها با بیانی ساده است که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس تمریناتی دوره‌ای جهت احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده طرح شده است. همچنین برای دانش‌آموزان علاقه‌مند و دانشجویان و دبیران گرامی قسمتهایی مانند:

طریقهٔ استفاده از شعاع همسایگی در مسایل حد (تعریف حد)،

بیان هم ارزیهای مهم و محاسبهٔ حدود عبارتها و توابع نمایی، لگاریتمی و معکوس مثلثاتی (آرکها)،

روشهای رفع ابهام از صورتهای مبهم (0^0 , ∞^0 , 1^∞)،

آورده شده است تا حتی‌الامکان مشکلات دانش پژوهان عزیز را برطرف سازد.

در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به حد رشته‌های تجربی و ریاضی و فنی و همچنین تستهایی جهت پوشش دادن به مطلب (۱۵۱ تست حد) همراه با پاسخ تشریحی آورده شده است تا معلومات کافی و مهارت در تست‌زدن را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم کند. مطالعه و استفاده از این کتاب را از آن جهت که حد یکی از مهمترین مفاهیمی است که در درس ریاضیات بنیادی معرفی می‌شود و پایه و اساس مفاهیمی نظیر مشتق و دیفرانسیل و انتگرال بر آن استوار است، به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی رشتهٔ ریاضی و تجربی و دبیران ریاضی محترم و دانشجویان گرامی توصیه می‌کنیم.



کتاب تست ریاضیات جدید
(سال چهارم ریاضی‌فیزیک)
مؤلفین: یدا ... ایلخانی‌پور و حمیدرضا امیری
نشر دانا،
چاپ اول، پاییز ۷۴

کتابی است که آموزش بخشی از ریاضیات دبیرستانی را به روش تست بیان می‌کند. روشی که مؤلفین در این کتاب، مورد نظر داشته‌اند (آموزش از طریق تست) برای اولین‌بار است که مطرح شده و در این روش کلیهٔ مفاهیم کتاب ریاضیات جدید سال چهارم (چهار بخش منطق ریاضی، حلقه و میدان، تئوری اعداد و ماتریس) طبق سر فصل دروس و پابه‌پای مطالب کتاب به صورت سؤالات چهار جوابی درآمده است.

از خصوصیات این روش و این کتاب می‌توان به چند مورد زیر اشاره کرد:

۱ ــ با مطالعهٔ هر فصل یک بار به طور کامل مطالب آن فصل دوره شده و حتی ریزترین نکات موجود از لابلای مطالب درسی معین و مشخص است.

۲ ــ در جوابهای تشریحی تستها که به صورت جداگانه مطرح شده تمامی گزینه‌ها تک‌تک مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند و بخصوص این که فقط گزینهٔ درست و یا دلیل درستی آن بیان نشده بلکه، سه گزینهٔ دیگر و دلیل نادرستی آنها نیز مورد نظر بوده و روی آنها بحث شده است، در ضمن هر کجا که لازم بوده قضیه‌ها و تعاریف عنوان شده و نتیجه‌های آنها به صورت نکات تستی مطرح شده است.

۳ ــ مباحث کتاب مانند کتاب درسی فصل‌بندی شده تا مبحث به مبحث که پیش می‌روید خود را نیز بیازمایید.

۴ ــ در پایان کتاب دو سری سؤالات کنکور سراسری (۷۳ و ۷۴) مرحلهٔ اول به همراه کلید جوابهای آنها و یک آزمون از کل کتاب آورده شده است.

مطالعهٔ این کتاب رابه کلیهٔ داوطلبان کنکورتوصیه می‌کنیم.

مسابقه‌ای برهان ۱۴

حل مسائل

توجه: در اثبات این مسأله از فرمولی معروف به فرمول پاسکال که به صورت $\binom{k+1}{r}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$ می‌باشد استفاده شده است.

$$p(n):(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$p(1):(a+b)=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b=a+b\Rightarrow p(1)\equiv T$$

فرض استقراء $p(k)\equiv T\Rightarrow (a+b)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$

حکم استقراء $p(k+1):(a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r$

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k=(a+b)\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r$$

$$=(a+b)\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k}b^k\right]$$

$$=\left[\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k}{k}ab^k\right]+$$

$$\left[\binom{k}{0}a^kb+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\ldots+\binom{k}{k}b^{k+1}\right]$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]a^kb+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2+$$

$$\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{3}\right]a^{k-2}b^3+\ldots+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}\ *$$

حال با توجه به اینکه $1=\binom{k+1}{0}=\binom{k}{0}$ و $1=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}$ تساوی * را به صورت زیر می توان نوشت :

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+$$

$$\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^{k+1}=\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r$$

اسامی عزیزانی که مسألهٔ مسابقه‌ای فوق را صحیح حل کرده بودند، به قرار زیر است:

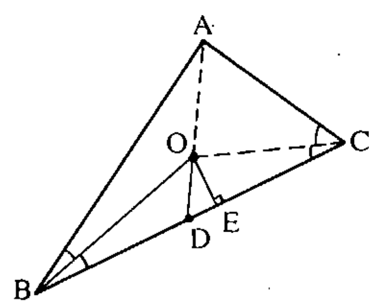
۱ ــ شهرام جلالی، دانشجوی فیزیک (تهران) ۲ ــ ایرج لاریجانی (رامسر) ۳ ــ آتنا کیهانی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (قائم‌شهر) ۴ ــ محمدرضا رضوانی، چهارم ریاضی (محلات) ۵ ــ سیداحمدرضا سجادی، دوم دبیرستان (تهران) ۶ ــ سعید بخشی، سوم ریاضی (تهران) ۷ ــ فرهاد جلالی، سوم ریاضی نظام جدید (مشهد) ۸ ــ بهزاد بیگلر بگیان، دوم ریاضی (تهران) ۹ ــ رضا رهنورد، چهارم ریاضی (مرند) ۱۰ ــ رضا سالم، سوم ریاضی (تهران) ۱۱ ــ میترا عطائیان، سوم ریاضی (مشهد) ۱۲ ــ مجید عسکریفرد، سوم ریاضی (محلات) ۱۳ ــ محمد پیشنماز، سوم ریاضی (تهران) ۱۴ ــ شبگیر حسنی (تهران) ۱۵ ــ مهدی امینیان، سوم ریاضی (مشهد) ۱۶ ــ علی نصیری امینی، چهارم ریاضی (تهران).

مسائل برای حل

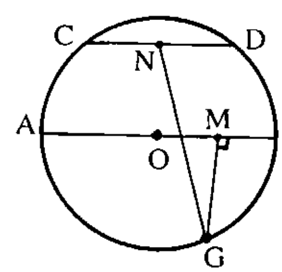
- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

■ مسائل ریاضیات سال اوّل

۱ ــ در مثلث ABC نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است. اگر D نقطه برخورد AO با ضلع BC و OE عمود بر BC باشد، ثابت کنید که $B\hat{O}D = C\hat{O}E$ است.



۲ ــ در دایرهٔ O به قطر AB وتر CD را موازی با AB و مساوی با شعاع دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ M وسط OB عمودی بر قطر AB اخراج می‌نماییم تا دایره را در نقطهٔ G قطع کند ثابت کنید اگر نقطهٔ G را به نقطهٔ N وسط CD وصل کنیم قطر AB پاره‌خط GN را نصف می‌کند.



۳ ــ اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو ارزش درست داشته باشند در این صورت ارزش گزارهٔ $\sim q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ را تعیین کنید.

۴ ــ هرگاه $A \subseteq B$ و داشته باشیم $[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = A$، ثابت کنید $A = B$.

۵ــ اگر $[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = \phi$، ثابت کنید، $A = B$.

۶ ــ اگر $x + \frac{1}{x} = t$، آنگاه حاصل $\frac{x^6+1}{x^3}$ را بیابید.

۷ ــ حاصل عبارت

$$(\sqrt[4]{2}-1)^6(\sqrt[4]{2}+1)^6(3+2\sqrt{2})^3$$

را بیابید.

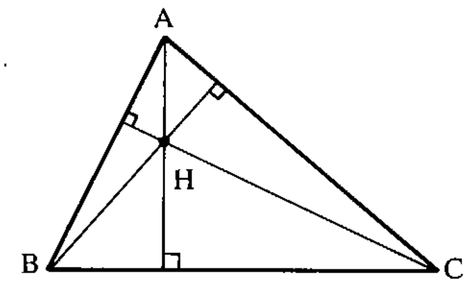
۸ ـ اگر $a, b \geq 0$ و داشته باشیم $ab - 5b - 4a + 20 = 0$، آنگاه کمترین مقدار $(a+b)$ را بیابید.

■ مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

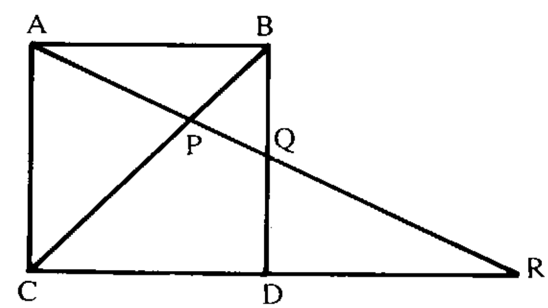
۱ ــ اگر H نقطهٔ تقاطع ارتفاعات مثلث ABC و S مساحت این مثلث باشد، ثابت کنید:

$$BC.AH + AC.BH + AB.CH = 4S$$

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از تهران.



۲ ـ مربع ABCD مفروض است. از رأس A خطی دلخواه رسم می‌کنیم تا قطر BD و ضلع BC را به ترتیب در نقطه‌های P و Q و امتداد ضلع DC را در نقطهٔ R قطع کند، ثابت کنید پاره‌خط AP واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط PR و PQ است.



۳ ـ ثابت کنید، برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A و B و C داریم:

الف) $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$

ب) $(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$

فرستنده: آقای مسعود فزون‌بال، (تهران)

۴ ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq -1\\ -x^2+1 & x\leq 1\end{cases}$ مفروض است ثابت کنید این تابع پوششی است اما یک‌به‌یک نیست.

۵ ـ اگر

$$(x+y-3)^2+(y+z-5)^4+(z+x-4)^6=0$$

آنگاه عبارت $(3y+4x+5z)$ برابر چند است؟

۶ ـ اگر زاویه بین دو خط به معادلات $y=mx+1$ ، $y=2x+m$ ، برابر $(\frac{\pi}{4})$ باشد، طول نقطه تقاطع این دو خط را بیابید.

۷ ـ اندازه‌های زوایای داخلی یک n ضلعی محدب تصاعد، عددی می‌سازند اگر کوچکترین زاویه (°۱۰۰) و بزرگترین زاویه (°۱۴۰) باشد، (n) چند است.

۸ ـ اگر $a\sin^2 x-b\cos^2 x=a-b$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

فرستنده: خانم آیدا بهارستانی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (رشت)

۹ ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف) $(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$

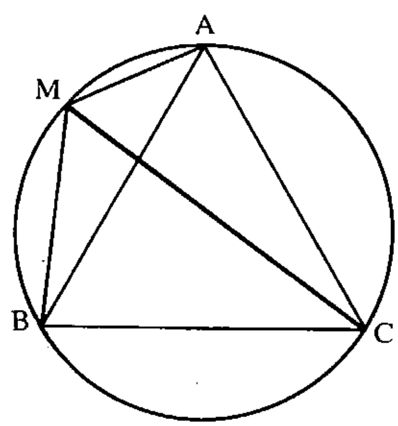
ب) $3\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\pi$

فرستنده: آقای ابوالفضل کریمایی (ملارد شهریار)

■ مسائل ریاضیات و کامپیوتر سال سوّم ریاضی

۱ ـ نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع است. ثابت کنید $MA^4+MB^4+MC^4$ مقداری است ثابت که به جای نقطهٔ M روی دایره بستگی ندارد.

فرستنده: آقای امیرحسین بسطامی



۲ ـ ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است (P نصف محیط مثلث و r_a و r_b و r_c شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث‌اند).

$$r_a r_b+r_a r_c+r_b r_c=P^2$$

۳ ـ در مثلث ABC ، $b+c=2a$ ثابت کنید:

الف) $h_a=3r$ ب) $r_a=h_a$

۴ ــ ثابت کنید اعضای مجموعهٔ $\{\sin 2x, tgx, x^2\}$ وابستهٔ خطی‌اند.

۵ ــ در جبر بول عمل * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$a*b=(a+b).(a'+b')$

ثابت کنید:

الف) $a*a=0$

ب) $a*1=a'$

ج) $a*a'=1$

د) $a*0=a$

هـ) $a.(b*c)=(a.b)*(a.c)$

۶ ــ به چند طریق می‌توان اعداد ۴ رقمی ساخت به شرطی که مجموع ۲ رقم اول و چهارم ۱۰ باشد و مجموع دو رقم وسط ۴ شود.

فرستنده: آقای شهریار خان‌محمدی از (شهرضا)

۷ ــ در بسط $(1-x)^6$، مجموع ضرایب توانهای زوج (x) چقدر از مجموع ضرایب توانهای فرد x بیشتر است.

۸ ــ اگر

$f(x+y, x-y)=2\sin x \sin y$

، آنگاه $f(x,y)$ را بیابید. سپس $f(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ را حساب کنید.

۹ ــ اگر منحنی تابع به معادله $y=x^3+mx^2-4$ در نقطه ماکزیمم بر محور x ها مماس باشد، مقدار عددی m را بیابید.

۱۰ ــ معادلات زیر را حل کنید.

1) $7\cos^2 x+5\sin^2 x=2\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{9}{2}$

2) $3\sin 2x-3\sqrt{3}\cos 2x=6$

3) $3tg(x-\frac{\pi}{12})+\cot g(\frac{\pi}{12}-x)=2$

۱۱ ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

۱۲ ــ ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=(b-c)\cos\frac{\hat{A}}{2}$$

۱۳ ــ برنامه‌ای به زبان BASIC بنویسید تا ابتدا عدد N را از Keyboard دریافت کند آنگاه دوجمله‌ای $(x+y+z)^N$ را بسط دهد.

■ مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ــ بردارهای $\vec{a}(-1,2,3)$ و $\vec{b}(3,0,-2)$ مفروضند. تصاویر برداری که در امتداد بردار $(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})$ را پیدا کنید.

۲ ــ مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(4,1,6)$ نسبت به خط D به معادلهٔ $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ را پیدا کنید.

۳ ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از خط $D:\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+3 \\ z=-t-2 \end{cases}$ به فاصله ثابت ۴ واقع است. (سطح استوانی).

۴ ــ عمل * را در جبر گزاره‌ها به صورت $p*q\equiv(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ تعریف می‌کنیم در این صورت ثابت کنید:

الف) $p*\sim p\equiv T$, $p*p\equiv F$, $p*F\equiv P$

ب) $p\wedge(q*r)\equiv(p\wedge q)*(p\wedge r)$

۵ ــ اگر $b\overset{m}{\equiv}a$ و $a\overset{n}{\equiv}c$ ثابت کنید $b\overset{(m,n)}{\equiv}c$

فرستنده: آقای حمیدرضا داودیان، سال چهارم ریاضی از (شوشتر)

۶ ــ بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2$$

فرستنده: ابوالفضل کریمایی از (ملارد شهریار)

۷ ــ دامنه و برد تابع f به معادله

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4+[x]+[-x]}+\sqrt{-\sin^2\pi x}$

را بیابید.

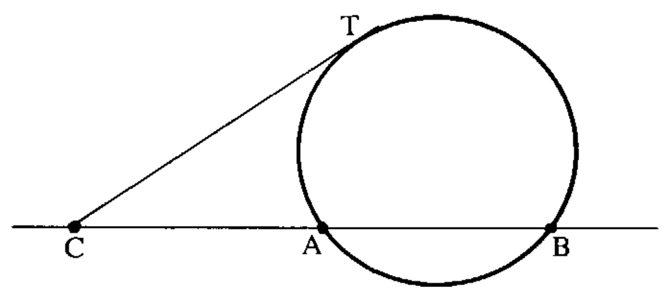
۸ ــ منحنی به معادله $x^4+y^2=a^2x^2 , a>0$ را رسم کنید.

۹ ــ مطلوبست محاسبه

$\cos x>0 \ , \ I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$

■ مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ــ سه نقطهٔ A و B و C روی یک خط راست واقع‌اند. بر دو نقطهٔ A و B دایره‌ای دلخواه می‌گذرانیم و از نقطهٔ C خط CT را بر این دایره مماس می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ T را وقتی دایره تغییر کند، بیابید.



۲ ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم اگر $AH=m\sqrt{2}$ و $BH=m-1$ و $CH=2m+3$ باشد، اندازهٔ اضلاع مثلث و مساحت مثلث را حساب کنید.

۳ ــ عبارت زیر را تجزیه کنید:

$2x^3-3x^2y-8x-4y+y^3$

فرستنده: آقای مهدی نامور؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

۴ ــ نشان دهید معادلهٔ زیر به ازای تمام مقادیر حقیقی غیرصفر m ($m\neq 0$) دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

$\frac{mx-1}{2x-3}=mx-2$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

۵ ــ در یک بازی در دور اول یک تومان، دور دوم ۲ تومان، دور سوم ۴ تومان و... پاداش داده‌اند. معلوم شد که مبلغ کل پاداش ۶۵۵۳۵ تومان بوده است. چند دور بازی شده است؟

فرستنده: خانم مینا رحیمی؛ دانشجوی رشته ریاضی (تهران)

۶ ــ ثابت کنید عبارت زیر مربع کامل است:

$A=\log^2 5+\log^2 8+2\log 5\log 8-4\log 4$

فرستنده: آقای مهدی نامور (بجنورد)

۷ ــ اگر $\log_a^x=\frac{1}{2}$ و $\log_b^x=\frac{1}{3}$ و $\log_c^x=\frac{1}{4}$ باشد؛ مطلوب است محاسبهٔ $\log_x abcx=\frac{1}{4}$ (a و b و c و x عددهای حقیقی مثبت مخالف یک می‌باشند.).

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی (اراک)

۸ ــ مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$A=\frac{1+\sqrt{3}\,tg10^\circ}{\sqrt{3}-tg10^\circ}$

فرستنده: آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سیاهکل)

۹ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$2^{\sin^2 x}+2^{\frac{1}{1+tg^2x}}=3$

فرستنده: آقای افشین ملاسعیدی دهاقانی؛ دانش‌آموز رشته تجربی (دهاقان)

۱۰ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$tgx=\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 80^\circ}$

فرستنده: آقای حمیدرضا محمدی، دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

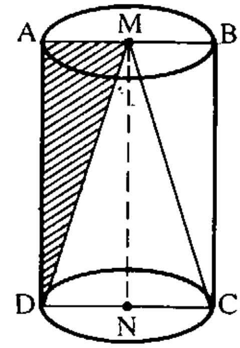
■ مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ــ اندازهٔ بردار مکان مرکز ثقل مثلث ABC را تعیین کنید، در صورتی که نقطهٔ A به طول ۱- روی محور طولها و نقطهٔ B، نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=x^2+1$ و نقطهٔ C به عرض ۲ روی نیمساز ربع اول و سوم باشند.

۲ ــ به کمک ضرب داخلی بردارها ثابت کنید که سه

ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

۳ ـ مستطیل ABCD به طول ۸ و عرض ۴ سانتی‌متر مفروض است. اوساط اضلاع AB و CD را M و N می‌نامیم. از M به D و N و C وصل می‌کنیم. حجم حاصل از دوران سطح AMD حول خط MN را پیدا کنید و این حجم را با حجم حاصل از دوران مثلث MND حول خط MN مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۴ ـ دامنه و برد تابع با ضابطهٔ زیر را تعیین کنید.

$f(x)=\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{4-4x^2}$

۵ ـ زاویهٔ بین خط Δ به معادلهٔ $y=\frac{3}{2}$ و منحنی به معادلهٔ $y=\sin x+2$ را در یکی از نقاط تلاقیشان تعیین کنید.

۶ ـ نزدیکترین نقاط منحنی $x^2-y^2=2$ به نقطهٔ $A(3,0)$ را بیابید.

۷ ـ حدهای زیر را حساب کنید.

1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2+6x}-\frac{3x^2}{3x+2}\right)$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{Arctg}x}{5x}\right)$

۸ ـ مقدار k را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ \frac{k-kx}{\sin(x-1)} & x<1\end{cases}$$

در نقطه‌ای به طول $x_0=1$، پیوسته باشد.

۹ ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند؛ درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید:

1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

۱۰ ـ معادلات زیر را حل کنید.

1) $4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})=1$

2) $\cos 5x\cos 3x-\sin x\sin 3x=1$

۱۱ ـ عبارات زیر را محاسبه کنید.

$P=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$

$S=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$

■ مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ـ مقدار k را چنان بیابید که دو خط $7x-4y=55$ و $y=kx+10$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم متقاطع باشند.

۲ ـ در رابطهٔ $(y-2x)^2=2y-x+1$، مشتق y را برحسب x به دست آورید.

۳ ـ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M(1,2)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس باشد.

۴ ـ تابع اولیهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{7}{x^4}+2x\sqrt{3x^2+4}$ را به دست آورید.

۵ ـ حجم حادث از دوران سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطهٔ:

$y=\sqrt{3\cos^2 x-3\cos x}$

و محور xها و دو خط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ را حول محور xها به دست آورید.

۶ ـ معادلات زیر را حل کنید.

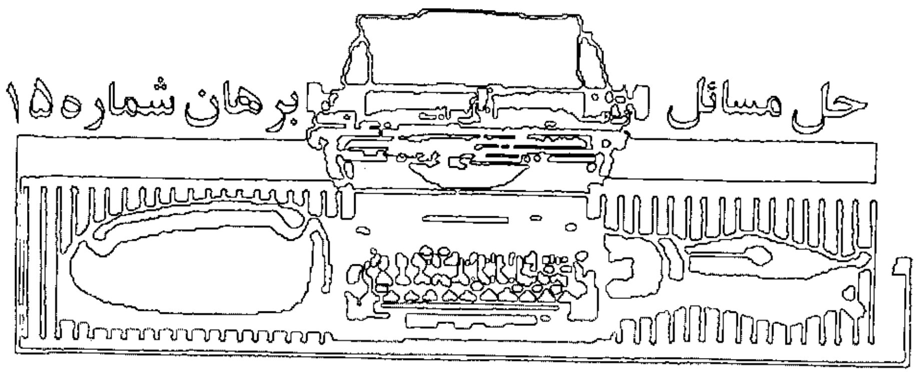
1) $\cot g(x-\frac{\pi}{4})-tg(\frac{\pi}{4}-x)=2$

2) $\sqrt{6}(\sin x+\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x=3\sqrt{3}$

۷ ـ در مثلث ABC داریم:

$a^2b+a^2c+b^3+c^3$

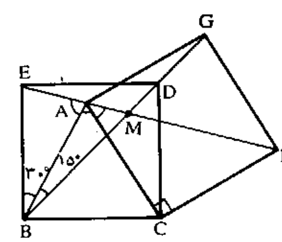
اندازهٔ زاویهٔ A را تعیین کنید و اگر $b=2$ و $C=1$ باشد، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را حساب کنید.



حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ از E به A و از A به F وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $E\hat{A}F=180^\circ$ است. داریم:

$$E\hat{A}F = E\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}F$$



امّا، $B\hat{A}C=60^\circ$ است و $E\hat{A}B=75^\circ$ و $C\hat{A}F=45^\circ$ است، زیرا مثلث ABC متساوی‌الاضلاع، مثلث EBA متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $E\hat{B}A=30^\circ$ و مثلث ACF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است درنتیجه:

$$E\hat{A}F = 75+60+45=180^\circ$$

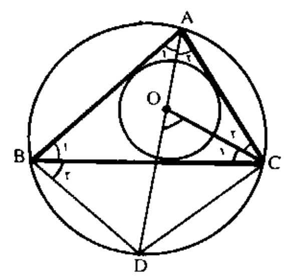
بنابراین سه نقطهٔ E و A و F روی یک خط راست واقع‌اند.

برای اینکه ثابت کنیم سه نقطهٔ B و D و G بر یک استقامت‌اند از نقاط D و G به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. زاویه $A\hat{B}D=15^\circ$ است، زیرا

$$A\hat{B}D = D\hat{B}E - A\hat{B}E = 45-30=15$$

همچنین زاویهٔ $G\hat{B}A=15^\circ$ می‌باشد، زیرا زاویهٔ رأس مثلث متساوی الساقین BAG $(AB=AC=AG)$ برابر 150° است. بنابراین خطوط BD و BG که با AB زاویهٔ 15° ساخته‌اند، بر هم منطبق‌اند، یعنی سه نقطه B و D و G روی یک خط راست واقع‌اند. در ضمن دو خط EAF و BDG یکدیگررا به‌زاویهٔ 60° قطع می‌کنند یعنی اگر نقطهٔ برخوردآنها را M بنامیم، $B\hat{M}E=60^\circ$، زیرا در مثلث ABM، $A\hat{B}M=15$ و $B\hat{A}M=105$، پس $B\hat{M}E=180-120=60^\circ$ می‌باشد.

۲ ـ حل الف) نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است لذا، $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{\hat{A}}{2}$ و $\hat{B}_1=\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2=\frac{\hat{C}}{2}$ است. خط AO نیمساز زاویهٔ داخلی A، کمان BC را نصف می‌کند، یعنی $\widehat{DB}=\widehat{DC}$ پس



$$DB = DC \qquad (1)$$

خواهد بود. از طرفی مثلث ODC متساوی‌الساقین است زیرا:

$$D\hat{C}O = D\hat{C}B + B\hat{C}D = \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}$$

$$C\hat{O}D = \hat{A}_2+\hat{C}_2=\frac{A}{2}+\frac{C}{2}=$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}=D\hat{C}O \Rightarrow DO=DC \qquad (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

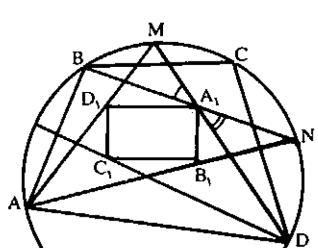
$$DB = DC = DO$$

حل ب) فرض می‌کنیم $\widehat{AD}=2\alpha$ و $\widehat{AB}=2\beta$، $\widehat{BC}=2\gamma$ و $\widehat{CD}=2\delta$ باشد.

وسط کمانهای BC و CD را به ترتیب M و N می‌نامیم دراین صورت نقاط D_1 و B_1 به ترتیب روی پاره‌خطهای راست AM و AN، و A_1 در نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای BN و DM واقع می‌شوند.

با توجه به قسمت الف داریم:

$$MD_1 = MB = MC = MA_1$$



بنابراین مثلث D_1MA_1 متساوی الساقین است و

$$D_1\hat{A}_1M=\frac{1}{2}(180-A\hat{M}D)=90-\frac{\alpha}{2}$$

است. به همین ترتیب حاصل می‌شود: $D\hat{A}_1N=B\hat{A}_1M=\frac{\gamma+\delta}{2}$. از آنجا که، $B_1\hat{A}_1N=90^\circ-\frac{\beta}{2}$ است، بنابراین

$$D_1\hat{A}_1B_1 = 180 - D_1\hat{A}_1M - (B_1\hat{A}_1N - D\hat{A}_1N) =$$

$$180-(90-\frac{\alpha}{2})-(90-\frac{\beta}{2})+\frac{\gamma+\delta}{2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=90^\circ$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که سه زاویهٔ دیگر چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ هم قائمه و درنتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

۳ ـ طبق فرض داریم $\begin{cases} p\vee q\equiv p\vee r \\ p\wedge q\equiv p\wedge r\end{cases}$ حال ثابت می‌کنیم $q\equiv r$:

(از قانونهای

$$p\wedge(p\vee q)\equiv p\vee(p\wedge q)\equiv p$$

که به قوانین جذب معروف هستند استفاده می‌کنیم)

$$q \overset{\text{جذب}}{\equiv} q\vee(p\wedge q)\equiv q\vee(p\wedge r)\equiv$$

$$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)\equiv$$

$$(p\wedge q)\vee r\equiv(p\wedge r)\vee r \overset{\text{جذب}}{\equiv} r$$

۴ ـ طبق فرض داریم $(A-B)=(A\cap B)$ ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$.

$$(A\cap B')=(A\cap B)$$

$$\Rightarrow B\cup(A\cap B')=\underbrace{B\cup(A\cap B)}_{B}$$

$$\Rightarrow (B\cup A)\cap(B\cup B')=B$$

$$\Rightarrow (A\cup B)\cap M=B$$

$$\Rightarrow (A\cup B)=B \Rightarrow A\subseteq B$$

۵ ـ فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{2x-3}=A \ ,$$

$$\frac{1}{y-2}=B \quad \frac{2}{z-1}=C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+B=7 \\ 2B+C=10 \\ 2C+A=10 \end{cases}$$

$$-2\begin{cases} 2B+C=10 \\ 2C+A=10 \end{cases} \Rightarrow A-4B=-10$$

$$-2\begin{cases} A-4B=-10 \\ 2A+B=7 \end{cases} \Rightarrow 9B=27 \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$۲A+B=۷\Rightarrow ۲A+۳=۷\Rightarrow \boxed{A=۲}$

$۲B+C=۱۰\Rightarrow ۶+C=۱۰\Rightarrow \boxed{C=۴}$

$\frac{۱}{۲x-۳}=A\Rightarrow \frac{۱}{۲x-۳}=۲\Rightarrow$

$۴x-۶=۱\Rightarrow \boxed{x=\frac{۷}{۴}}$

$\frac{۱}{y-۲}=B\Rightarrow \frac{۱}{y-۲}=۳\Rightarrow$

$۳y-۶=۱\Rightarrow \boxed{y=\frac{۷}{۳}}$

$\frac{۲}{z-۱}=C\Rightarrow \frac{۲}{z-۱}=۴\Rightarrow$

$۴z-۴=۲\Rightarrow \boxed{z=\frac{۳}{۲}}$

۶ـ

$$\begin{cases}x^۲(y+z)=۱۶\\ y^۲(z+x)=۱۶\\ z^۲(x+y)=۱۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲(y+z)=y^۲(z+x)$$
$$x^۲y+x^۲z=y^۲z+xy^۲$$
$$x^۲y-xy^۲+x^۲z-y^۲z=۰$$
$$xy(x-y)+z(x^۲-y^۲)=۰$$
$$xy(x-y)+z(x-y)(x+y)=۰$$
$$(x-y)\underbrace{(xy+xz+yz)}_{\text{مثبت}}=۰\Rightarrow x=y$$

به همین طریق از مساوی قرار دادن دو معادله دوم و سوم نتیجه می‌شود $y=z$ و از مساوی قرار دادن دو معادله اول و سوم نتیجه می‌شود $z=x$ پس در این دستگاه x ، y ، z مساویند. بنابراین

$x^۲(y+z)=۱۶$

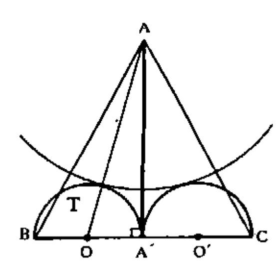
$x^۲(x+x)=۱۶\Rightarrow ۲x^۳=۱۶$

$\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x=۲\\y=۲\\z=۲\end{matrix}}$

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ـ وسط پاره‌خط BA' را نقطهٔ O و شعاع دایرهٔ مورد نظر را R و نقطهٔ تماس دایرهٔ خواسته شده با نیم‌دایرهٔ به قطر BA' را T می‌نامیم. اگر $BC=a$ اختیار شود، داریم: $OT=\frac{a}{۴}$ و از آنجا، $AO=AT+OT=R+\frac{a}{۴}$ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOA' می‌توان نوشت:

$$AO=\sqrt{AA'^۲+OA'^۲}=\sqrt{(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲+(\frac{a}{۴})^۲}=\frac{a\sqrt{۱۳}}{۴}$$

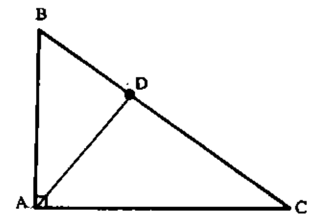


پس:

$$R+\frac{a}{۴}=\frac{a\sqrt{۱۳}}{۴}\Rightarrow R=\frac{a}{۴}(\sqrt{۱۳}-۱)$$

۲ـ (حل از خانم شبنم افسری از تهران). نقطهٔ O که به یک فاصله از دو ضلع زاویهٔ قائمه واقع است. محل برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی A از مثلث ABC با ضلع BC است. پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow c=\frac{۳}{۴}b$$



از طرفی: $a^۲=b^۲+c^۲$ و

$a=BC=۳۰+۴۰=۷۰$

درنتیجه:

$۴۹۰۰=b^۲+(\frac{۳}{۴}b)^۲=\frac{۲۵}{۱۶}b^۲\Rightarrow b=۵۶\Rightarrow c=۴۲$

۳ـ با توجه به رابطهٔ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ و فرمول $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ ، داریم:

$$n[(A\times B)-(B\times A)]$$
$$=n(A\times B)-n[(A\times B)\cap(B\times A)]$$
$$=n(A\times B)-n[(A\cap B)\times(B\cap A)]$$
$$=n(A\times B)-n[(A\cap B)\times(A\cap B)]$$
$$=n(A)\times n(B)-n(A\cap B)\times n(A\cap B)$$
$$=n(A)\times n(B)-[n(A\cap B)]^۲$$

۴ـ برای این که بررسی کنیم یک رابطه، تابع است یا خیر، می‌بایست از ضابطهٔ داده شده y را برحسب x به دست آورده و بررسی کنیم که آیا برای هر x فقط یک y موجود است یا بیشتر:

$$x^۲-y^۲=۱\Rightarrow y^۲=x^۲-۱\Rightarrow y=\pm\sqrt{x^۲-۱}$$

بنابراین، رابطهٔ فوق تابع نمی‌باشد، زیرا برای هر x که بتوانیم در ضابطه قرار دهیم دو مقدار برای y حاصل می‌شود مثلاً اگر قرار دهیم $x=۲$ ، خواهیم داشت $y=\pm\sqrt{۳}$. (از یک عضو دامنه دو فلش خارج می‌شود یکی به $\sqrt{۳}$ و دیگری به $-\sqrt{۳}$)

۵ـ فرض کنیم f یک تابع بوده و g رابطه‌ای دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم $(f\cap g)$ یک تابع است برای این منظور دو حالت در نظر می‌گیریم.

I) اگر $f\cap g=\phi$ در این صورت واضح است که رابطهٔ ϕ به انتفای مقدم تابع است!

II) اگر $f\cap g\neq\phi$ در این صورت داریم:

$$[(x,y)\wedge(x,y_۱)]\in(f\cap g)\xRightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$

$$[(x,y)\wedge(x,y_۱)]\in f\xRightarrow{f\text{ تابع است}}y=y_۱$$

پس $(f\cap g)$ نیز تابع است.

۶ـ

$$۴y^۲-۴(۳x+۱)y+(۵x^۲+۵۴x-۱۳۹)=۰$$
$$\Delta'=۴(۳x+۱)^۲-۴(۵x^۲+۵۴x-۱۳۹)=۰$$
$$\Delta'=۱۶x^۲-۱۹۲x+۵۶۰=۰$$

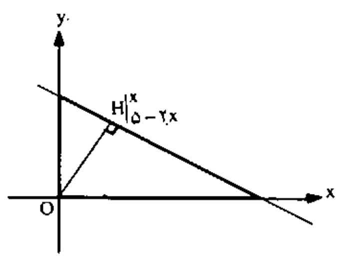
$$x=\frac{۹۶\pm\sqrt{۹۲۱۶-۸۹۶۰}}{۱۶}=\frac{۹۶\pm۱۶}{۱۶}\begin{cases}\frac{۱۱۲}{۱۶}=۷\\ \frac{۸۰}{۱۶}=۵\end{cases}$$

x	$-\infty$		۵		۷		$+\infty$
Δ'		+	۰	−	۰	+	

پس اگر $x>۷$ یا $x<۵$ باشد معادله اصلی دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

۷ـ

$$۲x+y-۵=۰$$
$$OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$



از طرفی:

$$OH=\sqrt{x_H^۲+y_H^۲}=\sqrt{x^۲+(۵-۲x)^۲}$$
$$\Rightarrow\sqrt{x^۲+(۵-۲x)^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow ۵x^۲-۲۰x+۲۰=۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow H\Big|_{۱}^{۲}$$

۸ـ داریم:

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲$$
$$\Rightarrow\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow ۱+۲\sin x\cos x=\frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{-۱}{۸}$$
$$\Rightarrow(\sin x\cos x)^۲=(-\frac{۱}{۸})^۲$$
$$\Rightarrow\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۶۴}\qquad(۱)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲=۱$$
$$\Rightarrow\sin^۴x+\cos^۴x+۲\sin^۲x\cos^۲x=۱$$
$$\Rightarrow\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$$

و با استفاده از رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲(\frac{۱}{۶۴})\Rightarrow\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳۱}{۳۲}$$

۹ـ داریم:

$$\frac{۱}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}=$$
$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{c}{\sin x+\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)} =$$

$$\frac{a\cos x(\sin x+\cos x)+b\sin x(\sin x+\cos x)+c\sin x\cos x}{\sin x\cos x(\sin x+\cos x)}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow a\cos x(\sin x+\cos x)+$$
$$b\sin x(\sin x+\cos x)+c\sin x\cos x\equiv 1$$
$$\Rightarrow a\cos x\sin x+a\cos^2 x+b\sin^2 x+$$
$$b\sin x\cos x+c\sin x\cos x\equiv 1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\sin x\cos x+a\cos^2 x+b(1-\cos^2 x)\equiv 1$$
$$\Rightarrow (a+b+c)\sin x\cos x+(a-b)\cos^2 x+b\equiv 1$$

از اتحاد اخیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)=-2 \\ a-b=0 \Rightarrow a=b=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\boxed{a=b=1}\ ,\ \boxed{c=-2}$$

۱۰ ــ داریم:

$$(a^2-b^2)c^2-b^2(a^2-c^2)=c^4-b^4$$
$$\Rightarrow a^2c^2-b^2c^2-b^2a^2+b^2c^2=c^4-b^4$$
$$\Rightarrow a^2c^2-b^2a^2=(c^2-b^2)(c^2+b^2)$$
$$\Rightarrow (c^2-b^2)a^2-(c^2-b^2)(c^2+b^2)=0$$
$$\Rightarrow (c^2-b^2)(a^2-c^2-b^2)=0$$

یا $\Rightarrow c^2-b^2=0$

یا $a^2-c^2-b^2=0 \Rightarrow c=b$

$a^2=b^2+c^2$

با توجه به تساوی $a^2=b^2+c^2$ نتیجه می‌شود که $\hat{A}=90^\circ$

۱۱ ــ داریم:

$$\sin(\pi\log x)+\cos(\pi\log x)=1$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(\pi\log x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow \sin(\pi\log x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \pi\log x=2k\pi \Rightarrow \log x=2k \Rightarrow \boxed{x_1=10^{2k}}$$

یا $\pi\log x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi\log x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \log x=2k+\frac{1}{2} \Rightarrow x=10^{2k+\frac{1}{2}}=10^{2k}\times 10^{\frac{1}{2}}=10^{2k}\sqrt{10}$$

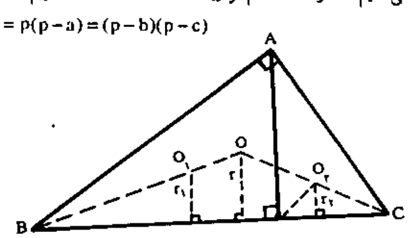
$$\Rightarrow \boxed{x_2=10^{2k}\sqrt{10}}$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ــ (حل از آقای امیرحسین بسطامی از تهران).

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، داریم:

$s=p(p-a)=(p-b)(p-c)$



محیط مثلثهای AHB و AHC را به ترتیب p_1 و p_2 و مساحت این دو مثلث را s_1 و s_2 می‌نامیم. خواهیم داشت:

$$r=\frac{s}{p}=\frac{p(p-a)}{p}=p-a=\frac{b+c-a}{2}$$

$$r_1=\frac{s_1}{p_1}=\frac{p_1(p_1-c)}{p_1}=p_1-c=\frac{AH+BH-C}{2}$$

$$r_2=\frac{s_2}{p_2}=\frac{p_2(p_2-b)}{p_2}=p_2-b=\frac{AH+CH-b}{2}$$

از آنجا:

$$r_1^2+r_2^2=\frac{1}{4}[(AH+BH-C)^2+(AH+CH-B)^2]$$

پس از ساده کردن با توجه به رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه، داریم:

$$r_1^2+r_2^2=\frac{b+c-a)^2}{4}=$$

$$\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{r_1^2+r_2^2=r^2}$$

۲ ــ می‌دانیم که در مثلث ABC وقتی $\hat{A}=120^\circ$ باشد، داریم $a^2=b^2+c^2+bc$ با توجه به این نکته خواهیم داشت:

$$r_a-r=\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}=\frac{s(p-p+a)}{p(p-a)}=\frac{as}{p(p-a)}$$

$$=\frac{as(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{as(\frac{a+c-b}{2})(\frac{a+b-c}{2})}{s^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2-c^2+2bc)}{4s}$$

$$=\frac{a(b^2+c^2+bc-b^2-c^2+2bc)}{4s}$$

$$=\frac{3abc}{4s}=3R \Rightarrow \boxed{r_a-r=3R}$$

حل ب ــ

$$d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

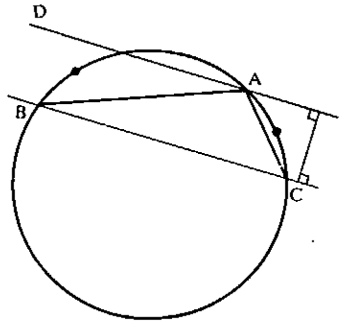
$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc(\frac{a+b+c}{2})(\frac{b+c-a}{2})}$$

$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc(\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4})}a^2$$
$$=b^2+c^2+bc$$

$$\Rightarrow d_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\times\frac{bc}{4}}=\frac{2}{b+c}\times\frac{bc}{2}=\frac{bc}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d_a}=\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

حل ب ــ با معلوم بودن a و s، اندازهٔ ارتفاع AH مشخص است، $AH=\frac{2s}{a}$. پس برای رسم مثلث ابتدا پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ ۱۲۰° مقابل به BC را رسم می‌نماییم. آنگاه خطی موازی BC و به فاصلهٔ $AH=\frac{2s}{a}$ از آن (در طرف کمان درخور) رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این خط با کمان درخور زاویهٔ A رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم: به تعداد نقاط برخورد خط D و کمان درخور، مسأله جواب دارد.



۳ ــ برای اثبات وابستهٔ خطی بودن بردارهای داده شده کافی است ترکیبی خطی از آنها مساوی با بردار صفر، بیابیم به طوری که در آن ترکیب خطی حداقل یک ضریب مخالف صفر موجود باشد.

$$x(v_1-v_3)+y(2v_1+v_2-2v_3)+z(-v_1-v_2+v_3)=\vec{0}$$
$$\Rightarrow (x+2y-z)v_1+(y-z)v_2+(-x-2y+z)v_3=\vec{0}$$

چون v_1 و v_2 و v_3 طبق فرض بردارهای مستقل خطی هستند پس باید ضرایب این ترکیب خطی، همگی صفر باشند، یعنی:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

(معادلات (۱) و (۳) در حقیقت ۱ معادله هستند)

لذا به یک دستگاه معادلات با دو معادله و سه مجهول رسیدیم و می‌دانیم چنین دستگاهی دارای بی‌نهایت جواب ناصفر است.

۴ ــ در پرتاب سه مکعب فضای نمونه دارای (۶×۶×۶) عضو است و برای محاسبهٔ احتمال این که حداقل ۲ عدد از اعداد ظاهر شده یکی باشند می‌توانیم متمم این پیشامد را محاسبه کنیم یعنی احتمال آن که هیچ دو عددی مثل هم نباشند (سه عدد متمایز ظاهر شده باشد) که در حقیقت به قسمت ثانیاً اول پاسخ می‌دهیم.

برای محاسبهٔ تعداد سه تایی‌هایی که از هم متمایز هستند برای مکان اول ۶ انتخاب،برای مکان دوم ۵ انتخاب و برای مکان سوم چهار راه انتخاب داریم که درکل $n(A')=6\times5\times4$ پس:

$$p(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{6\times5\times4}{6\times6\times6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

= احتمال این که حداقل ۲ عدد مثل هم باشند

$$p(A)=1-P(A')=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

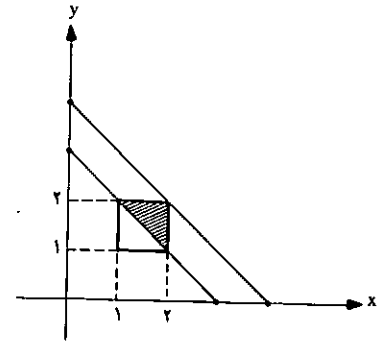
۵ ــ

فضای نمونه $= S=\{(x,y)\,|\ 1<x<2\ ,\ 1<y<2\}$

پیشامد مطلوب $= A=\{(x,y)\,|\ 3<x+y<4\}$

سطح مربع فضای نمونه و قسمت هاشور خورده همان پیشامد مطلوب است پس

$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$



۶ ــ طرفین معادله را در $۲\sin\frac{\pi}{۷}$ ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos x = ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۶\pi}{۷} + ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷} + ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos\frac{۴\pi}{۷}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos x = \sin\frac{۷\pi}{۷} - \sin\frac{۵\pi}{۷} + \sin\frac{۳\pi}{۷} - \sin\frac{\pi}{۷} + \sin\frac{۵\pi}{۷} - \sin\frac{۳\pi}{۷}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\frac{\pi}{۷}\cos x = -\sin\frac{\pi}{۷} \Rightarrow ۲\cos x = -۱$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}}$$

۷ ــ داریم:

$$b\cos^۲\frac{\hat{C}}{۲} + c\cos\frac{\hat{B}}{۲} = p \Rightarrow ۲b\cos^۲\frac{\hat{C}}{۲} + ۲c\cos^۲\frac{\hat{B}}{۲} = ۲p$$

$$\Rightarrow b(۱+\cos\hat{C}) + c(۱+\cos\hat{B}) = ۲p$$

$$\Rightarrow b + b\cos\hat{C} + c + c\cos\hat{B} = ۲p$$

$$\Rightarrow b + c + \underbrace{b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}}_{a} = ۲p$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۲p$$

۸ ــ داریم:

$$\cos ۳x + ۲\cos ۲x + ۷\cos x = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۳\cos x + ۴\cos^۲ x - ۲ + ۷\cos x = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x + ۴\cos^۲ x + ۴\cos x = ۱۲$$

$$\Rightarrow \cos^۳ x + \cos^۲ x + \cos x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos^۳ x - ۱ + \cos^۲ x - ۱ + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (\cos x - ۱)(\cos^۲ x + \cos x + ۱ + \cos x + ۱ + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x - ۱ = ۰$$

یا

$$\cos^۲ x + ۲\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۱ \Rightarrow \cos x = \cos(۰)$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi$$

معادلهٔ $\cos^۲ x + ۲\cos x + ۳ = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد

زیرا: $\Delta' = ۱ - ۳ = -۲ < ۰$

پس تنها جواب معادله چنین است: $\boxed{x = ۲k\pi}$

۹ ــ اگر عبارت

$$۸x^۶ + ۱۲x^۵ + ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx - ۱$$

مربع کامل باشد با توجه به جمله $۸x^۶$ و عدد ثابت (-۱)، عبارت مورد نظر باید به صورت $(۲x^۲ + mx - ۱)^۳$ باشد.

حال عبارت $(۲x^۲ + mx - ۱)^۳$ را حساب کرده متحد با عبارت اصلی قرار می‌دهیم.

$$(۲x^۲ + mx - ۱)^۳ = ۸x^۶ + ۱۲mx^۵ + (۶m^۲ - ۱۲)x^۴ + (m^۳ - ۱۲m)x^۳ + (۶ - ۳m^۲)x^۲ + ۳mx - ۱$$

$$\Rightarrow ۸x^۶ + ۱۲x^۵ + ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx - ۱ \equiv ۸x^۶ + ۱۲mx^۵ + (۶m^۲ - ۱۲)x^۴ + (m^۳ - ۱۲m)x^۳ + (۶ - ۳m^۲)x^۲ + ۳mx - ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۲m = ۱۲ \Rightarrow \boxed{m = ۱} \\ a = ۶m^۲ - ۱۲ \Rightarrow a = ۶ - ۱۲ \Rightarrow \boxed{a = -۶} \\ b = m^۳ - ۱۲m \Rightarrow b = ۱ - ۱۲ \Rightarrow \boxed{b = -۱۱} \\ c = ۶ - ۳m^۲ \Rightarrow c = ۶ - ۳ \Rightarrow \boxed{c = ۳} \\ d = ۳m \Rightarrow \boxed{d = ۳} \end{cases}$$

ــ۱۰

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{۵x^۲ - ۷}{x^۲ + ۱}\right] = \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{۵x^۲ + ۵ - ۱۲}{x^۲ + ۱}\right] =$$

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[\frac{۵(x^۲ + ۱)}{x^۲ + ۱} - \frac{۱۲}{x^۲ + ۱}\right] = \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[۵ - \frac{۱۲}{x^۲ + ۱}\right] =$$

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(۵ + \left[\frac{-۱۲}{x^۲ + ۱}\right]\right) = \text{حد}\left(۵ + [۰^-]\right) =$$

$$۵ - ۱ = ۴$$

۱۱ـ برنامه عدد N را می‌خواند و فاکتوریل اعداد از یک تا خود N را چاپ می‌کند.

```
CLS
INPUT "ENTER NUMBER FOR N"; N
LET PROD = 1
FOR I = 1 TO N
  LET PROD = PROD * I
  PRINT I; "!="; PROD
NEXT
END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NUMBER FOR N? 9
 1  != 1
 2  != 2
 3  != 6
 4  != 24
 5  != 120
 6  != 720
 7  != 5040
 8  != 40320
 9  != 362880
```

ـ۱۲

```
CLS
INPUT"ENTER NUMBERS FOR M & N';M,N
LET M1 = M
LET N1 = N
WHILE N > 0
  LET R = M - N * INT(M / N)
  LET M = N
  LET N = R
WEND
PRINT  M=";M1;" N=";N1;"L.C.M=";M1*N1/ M
END
```

اجرای برنامه:

```
ENTER NUMBERS FOR M & N? 6,15
  M= 6   N= 15   L.C.M= 30
```

❑ حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ــ فرض می‌کنیم $\bar{v}(x,y,z)$ باشد. با توجه به اینکه $\bar{u}_۱(۲,۱,-۳)$ و $\bar{u}_۲(-۱,۲,۱)$ و $|\bar{v}| = ۵\sqrt{۳}$ و زاویهٔ بردار $\bar{v}$ با محور y ها منفرجه است، داریم:

$$\bar{v} \perp \bar{u}_۱ \Rightarrow ۲x + y - ۳z = ۰ \qquad (۱)$$

$$\bar{v} \perp \bar{u}_۲ \Rightarrow -x + ۲y + z = ۰ \qquad (۲)$$

$$|\bar{v}| = ۵\sqrt{۳} \Rightarrow ۵\sqrt{۳} = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۷۵ \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\bar{v}(x = -۷\ ,\ y = -۱\ ,\ z = -۵)$$

۲ ــ مختصات نقطهٔ A' وسط ضلع BC را به دست آورده معادلهٔ میانهٔ AA' را می‌نویسیم.

$$A(۳,۰,۰) \text{ و } B(۰,۴,۰) \text{ و } C(۰,۰,۲) \Rightarrow$$

وسط ضلع BC $A'(۰,۲,۱) \Rightarrow AA': \frac{x-۰}{۳-۰} = \frac{y-۲}{۰-۲} = \frac{z-۱}{۰-۱}$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{y-۲}{-۲} = \frac{z-۱}{-۱}$$

حال معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر AA' را نوشته، از بین صفحات این دسته، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با صفحهٔ $P: x + ۲y - ۲z = ۵$ زاویهٔ $\text{Arccos}\frac{۲}{۳}$ می‌سازد.

$$\frac{x}{۳} = \frac{y-۲}{-۲} = \frac{z-۱}{-۱} \Rightarrow p_۱: ۲x + ۳y - ۶ = ۰$$

و

$$p_۲: y - ۲z = ۰$$

چون هیچیک از دو صفحه $P_۱$ و $P_۲$ جواب مسأله نیستند، پس معادلهٔ دسته صفحه گذرنده بر AA' را به صورت $P_۱ + \lambda P_۲ = ۰$ می‌توان نوشت.

$$P_۱ + \lambda P_۲ = ۰ \Rightarrow y - ۲z + \lambda(۲x + ۳y - ۶) = ۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ دسته صفحهٔ گذرنده بر AA'

$$۲\lambda x + (۱ + ۳\lambda)y - ۲z - ۶\lambda = ۰$$

دسته صفحه $\bar{v}(۲\lambda, ۱+۳\lambda, -۲)\ ,\ \bar{v}_p(۱,۲,-۲)$

کسینوس زاویهٔ بین دو صفحه:

$$\cos\alpha = \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}.\sqrt{a'^۲ + b'^۲ + c'^۲}}$$

$$\text{Arccos}\frac{۲}{۳} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow$$

$$\frac{۲}{۳} = \pm\frac{۲\lambda + ۲ + ۶\lambda + ۴}{\sqrt{۴\lambda^۲ + (۱+۳\lambda)^۲ + ۴}\times\sqrt{۴+۴+۱}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} = \pm\frac{۸\lambda + ۶}{۳\sqrt{۱۳\lambda^۲ + ۶\lambda + ۵}}$$

$$\Rightarrow ۱۳\lambda^۲ + ۶\lambda + ۵ = ۱۶\lambda^۲ + ۹ + ۲۴\lambda$$

$$\Rightarrow ۳\lambda^۲ + ۱۸\lambda + ۴ = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{-۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۱۲}}{۳} = \frac{-۹ \pm \sqrt{۶۹}}{۳}$$

$$\lambda = -۳ + \frac{\sqrt{۶۹}}{۳} \Rightarrow$$

$$Q_۱: ۲(-۳ + \frac{\sqrt{۶۹}}{۳})x + (-۸ + \sqrt{۶۹})y - ۲z + ۱۸ - ۲\sqrt{۶۹} = ۰$$

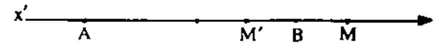
$$\lambda = -۳ - \frac{\sqrt{۶۹}}{۳} \Rightarrow$$

$$Q_۲: ۲(-۳ - \frac{\sqrt{۶۹}}{۳})x + (-۸ - \sqrt{۶۹})y - ۲z + ۱۸ + ۲\sqrt{۶۹} = ۰$$

صفحات جواب مسأله.

۳ ــ چون $(MM'AB)$ تقسیم توافقی با نسبت توافقی ۲ است پس داریم:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = ۲ = \frac{۲}{۱}$$



از طرفی می‌دانیم که اگر $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{p}{q}$ باشد، $x_M=\frac{px_B-qx_A}{p-q}$ (کتاب جبر پایه سال سوم تألیف محمدهاشم رستمی). پس داریم:

$x_M=\frac{2x_B-x_A}{2-1}=2x_B-x_A=-2-2=-4$

همچنین داریم: $y_M=2y_B-y_A=2+1=3$

$z_M=2z_B-z_A=8-0=8$

$\Rightarrow M(-4,3,8)$

و برای تعیین مختصات نقطهٔ M' می‌توان نوشت:

$-\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=2\Rightarrow\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=\frac{-2}{1}\Rightarrow$

$x_{M'}=\frac{-2x_B-x_A}{-2-1}=\frac{2x_B+x_A}{3}$

$\Rightarrow x_{M'}=\frac{-2+2}{3}=0$ و

$y_{M'}=\frac{2y_B+y_A}{3}=\frac{2+(-1)}{3}=\frac{1}{3}$

$z_{M'}=\frac{2z_B+z_A}{3}=\frac{8+0}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow M'(0,\frac{1}{3},\frac{8}{3})$

برای نوشتن معادلهٔ کرهٔ به قطر MM' کافی است مختصات مرکز و شعاع کره را حساب کنیم.

مرکز کره $O'(x=-2,y=\frac{5}{3},z=\frac{16}{3})$ وسط MM'

$O'M=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(-2+4)^2+(\frac{5}{3}-3)^2+(\frac{16}{3}-8)^2}=\frac{2\sqrt{29}}{3}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

$\Rightarrow\boxed{(x+2)^2+(y-\frac{5}{3})^2+(z-\frac{16}{3})^2=\frac{116}{9}}$

معادلهٔ کرهٔ به قطر MM'

۴ ـ برای پیدا کردن معادلهٔ کانونیک تصویر قائم خط D روی صفحهٔ P، معادلهٔ دستهٔ صفحهٔ گذرنده برخط D را می‌نویسیم و از بین صفحات دسته صفحه، صفحه‌ای را انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ P عمود باشد. اگر این صفحه را P' بنامیم، فصل مشترک دو صفحه P و P' (خط D') جواب مسأله است.

$D:(x=t,y=t,z=2t-1)\Rightarrow x=y=\frac{z+1}{2}$

معادله کانونیک خط D

$P_1:x-y=0,\ P_2:2x-z-1=0$

معادله‌های دو صفحهٔ حصور خط D،

چون هیچیک از دو صفحهٔ P_1 و P_2 بر صفحهٔ P عمود نیستند ($aa'+bb'+cc'\neq 0$ است)، پس معادلهٔ دستهٔ صفحه را به صورت $P_2+\lambda P_1=0$ می‌توان نوشت. داریم:

$2x-z-1+\lambda(x-y)=0\Rightarrow\boxed{(2+\lambda)x-\lambda y-z-1=0}$

معادلهٔ دسته صفحه

$\vec{v}(2+\lambda,-\lambda,-1)$ دسته صفحه، $\vec{v}_p(2,-1,1)$، $\vec{v}\perp\vec{v}_p\Rightarrow$

$4+2\lambda+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow\boxed{x+y-z-1=0}$

معادلهٔ صفحهٔ P'

$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x-y+z-2=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{D':\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}}$

معادلهٔ کانونیک تصویر خط D روی صفحهٔ P

راه دیگر ـ می‌توان مختصات تصویر قائم دو نقطهٔ A و B از خط D، روی صفحهٔ P را به دست آورد. اگر این دو نقطه را A' و B' بنامیم، معادلهٔ خط AA' جواب مسأله است.

۵ ـ

۱) $(p\vee\sim q)\Rightarrow\sim r$

۲) $q\Rightarrow s$

۳) $p\vee\sim s$

۴) $(q\Rightarrow p)\Rightarrow\sim r$ — از (۱) و تبدیل فصلی به شرطی

۵) $(s\Rightarrow p)$ — از (۳) تبدیل فصلی به شرطی

۶) $(q\Rightarrow p)$ — از (۲) و (۵) و قیاس

۷) $\sim r$ — از (۴) و (۶) و انتزاع

۸) $\sim r\vee\sim u$ — از (۷) و ادخال فاصل

۹) $\therefore u\Rightarrow\sim r$ — از ۸ و تبدیل فصلی به شرطی

۶ ـ اولاً: فرض کنیم F یک میدان باشد پس یک حلقهٔ جابجایی است و طبق قضیهٔ کتاب برای آن که حلقهٔ جابجایی مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد کافی است قانون حذف در آن برقرار باشد لذا:

اگر $a\neq 0$ و $a\times b=a\times c\overset{a^{-1}\in F}{\Rightarrow}a^{-1}\times(a\times b)=a^{-1}\times(a\times c)$ (میدان F)

$\Rightarrow\underbrace{(a^{-1}\times a)}_{1}\times b=\underbrace{(a^{-1}\times a)}_{1}\times c\Rightarrow b=c$

ثانیاً: طبق فرض داریم $x^{-1}+y=-1$ ، $x+y^{-1}=1$ ثابت می‌کنیم $x+y=0$

(۱) $(x+y^{-1})=1\Rightarrow x^{-1}y\underbrace{(x+y^{-1})}_{1}=x^{-1}y$ ← طبق فرض

(۲) $x^{-1}y(x+y^{-1})=(y+x^{-1})$ ← از طرفی

(۱) و (۲) $\Rightarrow x^{-1}y=\underbrace{(y+x^{-1})}_{-1}\Rightarrow x^{-1}y=-1$

$\Rightarrow(-x^{-1})y=1\Rightarrow y=(-x^{-1})^{-1}\Rightarrow y=-x\Rightarrow x+y=0$

۷ ـ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم برای هر $n\in\mathbb{N}$، 8^n-1 مضرب ۷ است.

$p(1):8^1-1=7=7\times1\to p(1)\equiv T$

فرض استقراء: $p(k)\equiv T\Rightarrow 8^k-1=7q$

حکم استقراء: $p(k+1):\Rightarrow 8^{k+1}-1=7q'$

طرفین فرض را در ۸ ضرب می‌کنیم

$\to 8^{k+1}-8=56q\Rightarrow 8^{k+1}-1-7=56q$

$\Rightarrow 8^{k+1}-1=56q+7\Rightarrow 8^{k+1}-1=7(\underbrace{8q+1}_{q'})$

$\Rightarrow 8^{k+1}-1=7q'$

۸ ـ

$I=\int\frac{dx}{(x\,tgx+1)^2}=\int\frac{dx}{(\frac{x}{\cot gx}+1)^2}=\int\frac{dx}{(\frac{x+\cot gx}{\cot gx})^2}$

$=\int\frac{\cot g^2x\,dx}{(x+\cot gx)^2}$

$u=x+\cot gx\Rightarrow du=1-1-\cot g^2x\,dx$

$\Rightarrow du=-\cot g^2x\,dx$

$I=\int\frac{-du}{u^2}=-\int u^{-2}du=-\frac{u^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{u}+c=\frac{1}{x+\cot gx}+c$

۹ ـ

$I=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{\sin 2x}}\qquad \cos x>0$

در مخرج کسر، عبارت را در cos x ضرب و تقسیم می‌کنیم

$I=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\sqrt{2\sin x\cos x}}$

$I=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\cos x\times\frac{\cos x}{\cos x}\sqrt{2}\sqrt{\sin x\cos x}}$

$=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x}}}=\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{tgx}}$

$I=\int\frac{(1+tg^2x)dx}{\sqrt{tgx}}$

$u=tgx\Rightarrow du=(1+tg^2x)dx$

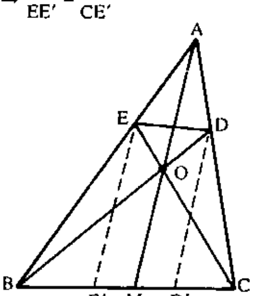
$I=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{tgx}+c$

حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ از نقاط D و E خطهایی به موازات میانهٔ AM رسم می‌کنیم تا ضلع BC را به ترتیب در نقطه‌های D' و E' قطع کنند. داریم:

(۱) $AM\parallel EE'\Rightarrow\frac{AM}{EE'}=\frac{BM}{BE'}$

(۲) $OM\parallel EE'\Rightarrow\frac{OM}{EE'}=\frac{CM}{CE'}$



از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به اینکه $BM=CM$ و $AM=2OM$ است داریم:

$\frac{AM}{OM}=\frac{CE'}{BE'}=2$

پس $CE'=\frac{2}{3}BC$ است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $CD'=D'E'=\frac{1}{3}BC$

پس $D'M=E'M=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{3}BC=\frac{1}{6}BC$ می‌باشد.

حال می‌توان نوشت:

$\frac{AE}{AB}=\frac{E'M}{MB}=\frac{\frac{1}{6}BC}{\frac{1}{2}BC}=\frac{1}{3}$ و

$\frac{AD}{AC}=\frac{D'M}{MC}=\frac{1}{3}\Rightarrow$

$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow DE\parallel BC$

و $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$

۲ ـ اندازهٔ ضلع لوزی را a و اندازهٔ اقطار آن را d و d′ فرض می‌کنیم. چون چهارضلع لوزی متساوی و دو قطر آن عمودمنصف یکدیگرند، پس داریم:

اندازهٔ ضلع لوزی $4a=20\Rightarrow a=5$

$d+d'=14\Rightarrow \frac{d}{2}+\frac{d'}{2}=7$

$OAB: \frac{d^2}{4}+\frac{d'^2}{4}=a^2 \Rightarrow (\frac{d}{2}+\frac{d'}{2})^2-2\times\frac{d}{2}\frac{d'}{2}=a^2$

$\Rightarrow 49-\frac{1}{2}dd'=25$

$\Rightarrow \frac{1}{2}dd'=24 \Rightarrow \boxed{\text{لوزی}\quad s=24cm^2}$

(حل از آقای علی لاری دانش‌آموز دبیرستان کمال تهران)

۳ ـ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ $x^2+3x-3=0$ چنین است:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=s=-3\\ \alpha\beta=p=-3\end{cases}$$

پس داریم:

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1)}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=s^2-2p$$
$$=(-3)^2-2(-3)=9+6=15$$
$$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2+1=\alpha^2(\alpha^2+6\alpha+9)+1$$
$$=\alpha^2(\alpha+3)^2+1$$
$$=[\alpha(\alpha+3)]^2+1=(\alpha^2+3\alpha)^2+1$$

چون α یک ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$x=\alpha: \alpha^2+3\alpha-3=0\Rightarrow \alpha^2+3\alpha=3$$

بنابراین داریم:

$$A=\frac{15}{(-3)(3^2+1)}=\frac{15}{-30}=\frac{-1}{2}\Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}$$

۴ ـ از فرض: $a^2+b^2+8=4a+4b$ نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2+4+4-4a-4b=0$$
$$\Rightarrow (a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)=0$$
$$\Rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=0\Rightarrow (a-2)^2=0\ ,\ (b-2)^2=0$$
$$\Rightarrow a=2\ ,$$
$$b=2\Rightarrow p=\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2^2+2^2}{2+2}=\frac{4+4}{4}=\frac{8}{4}=2$$
$$\Rightarrow \boxed{p=2}$$

۵ ـ داریم:

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\ x''=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow s=x'+x''$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow s=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3+2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}}{3-2}=\frac{10}{1}=10$$
$$p=x'x''=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1\Rightarrow p=1$$

پس معادلهٔ مطلوب چنین است:

$$x^2-sx+p=0\Rightarrow x^2-10x+1=0$$

۶ ـ از فرض $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$، داریم:

$$\frac{\frac{m}{2}(a_1+a_m)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow\frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$
$$\Rightarrow (2a_1-d)(m-n)=0\Rightarrow a_1=\frac{d}{2}\ \text{یا}\ m=n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d}=\frac{d(m-\frac{1}{2})}{d(n-\frac{1}{2})}$$
$$=\frac{2m-1}{2n-1}$$

۷ ـ داریم:

$$\left(\log_{13}^{19}\right)^{-1}+\left(\log_{28}^{19}\right)^{-1}=\log_{19}^{13}+\log_{19}^{28}$$
$$=\log_{19}^{13\times28}=\log_{19}^{364}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\log_{19}^{361}=\log_{19}^{19^2}=2\log_{19}^{19}=2\times1=2$$

پس خواهیم داشت:

$$\log_{19}^{364}>\log_{19}^{361}=2$$

و در نتیجه داریم:

$$\left(\log_{13}^{19}\right)^{-1}+\left(\log_{28}^{19}\right)^{-1}>2$$

۸ ـ داریم:

$$\log_a^{27}=b\Rightarrow 3\log_a^3=b\Rightarrow \log_a^3=\frac{b}{3}\Rightarrow \log_3^a=\frac{3}{b}$$
$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt[6]{a}}=\frac{2}{6}\log_3^a=\frac{1}{3}(\frac{3}{b})=\frac{1}{b}\Rightarrow \boxed{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt[6]{a}}=\frac{1}{b}}$$

۹ ـ داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi\Rightarrow(\hat{B}+\hat{C})=\pi-\hat{A}\Rightarrow\cos(\hat{B}+\hat{C})$$
$$=\cos(\pi-\hat{A})$$
$$\cos(\hat{B}+\hat{C})=-\cos\hat{A}$$

با استفاده از فرض داریم:

$$\cos(\hat{B}+\hat{C})=-\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$
$$\Rightarrow \cos\hat{B}\cos\hat{C}-\sin\hat{B}\sin\hat{C}=-\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$
$$\Rightarrow 2\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$
$$\Rightarrow \frac{\cos\hat{B}\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \cot g\hat{B}\cot g\hat{C}=\frac{1}{2}$$

۱۰ ـ داریم:

$$A=\frac{\cot g^2x}{1+\cot g^2x}+\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{\frac{\cos^2x}{\sin^2x}}{\frac{1}{\sin^2x}}+\frac{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}}$$
$$=\frac{\sin^2x\cos^2x}{\sin^2x}+\frac{\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x}\ \ (x\neq\frac{k\pi}{2})$$
$$\cos^2x+\sin^2x=1$$

۱۱ ـ داریم:

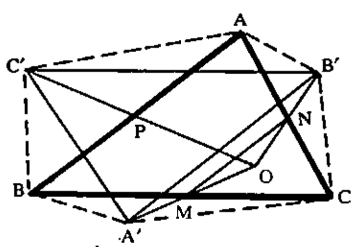
$$8\cos x\cos2x\cos4x=1$$

با فرض $x\neq k\pi$ طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$8\sin x\cos x\cos2x\cos4x=\sin x$$
$$\Rightarrow 4(2\sin x\cos x)\cos2x\cos4x=\sin x$$
$$\Rightarrow 4\sin2x\cos2x\cos4x=\sin x$$
$$\Rightarrow 2(2\sin2x\cos2x)\cos4x=\sin x$$
$$\Rightarrow 2\sin4x\cos4x=\sin x\Rightarrow \sin8x=\sin x$$
$$\Rightarrow\begin{cases}8x=2k\pi+x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{7}\\ 8x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi+\pi}{9}\end{cases}$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ چون نقاط M و N وسط اضلاع AC و BC از مثلث ABC می‌باشند، پس MN∥AB و $MN=\frac{AB}{2}$ است. از طرفی این دو نقطه وسط پاره‌خطهای OB′ و OA′ می‌باشند پس در مثلث OA′B′، MN∥A′B′ و $MN=\frac{A'B'}{2}$ است. لذا A′B′∥AB و A′B′=AB می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اضلاع A′C′ و B′C′ از مثلث A′B′C′ با اضلاع نظیرخود AC و BC از مثلث ABC موازی و مساوی‌اند.



چهارضلعی‌های ABA′B′ و BCB′C′ و ACA′C′ متوازی‌الاضلاع‌اند، زیرا هر کدام دو ضلع روبروی مساوی و موازی دارند. اقطار این متوازی‌الاضلاعها خطوط AA′ و BB′ و CC′ هستند که یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی اگر Q نقطهٔ برخورد AA′ و BB′ باشد. این نقطه در وسط AA′ و BB′ واقع است و چون AA′ و CC′ نیز یکدیگر را نصف می‌کنند پس CC′ نیز از نقطهٔ Q وسط AA′ می‌گذرد بنابراین سه خط AA′ و BB′ و CC′ در نقطه Q متقارنند و این نقطه وسط سه پاره‌خط AA′ و BB′ و CC′ است.

۲ ـ داریم:

$$|\vec{a}|=5k+1\ ,\ |\vec{b}|=3k-2\ ,\ (\vec{a},\vec{b})=\frac{2\pi}{3}\ \text{و}$$
$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=35\Rightarrow|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=35\Rightarrow$$
$$(5k+1)^2-(3k-2)^2=35\Rightarrow 16k^2+22k-38=0$$
$$\Rightarrow \boxed{k=1}\ ,\ k=\frac{-38}{16}=\frac{-19}{8}$$

فقط جواب k=1 قابل قبول است. چون همواره $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ است، $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ تأثیری در مسأله ندارد.

۳ ـ

$$\lim_{x\to5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)=\lim_{x\to5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)+\lim_{x\to5^+}\left(\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x^2-25}}\right)+$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}\times\sqrt{x+5}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}\right)+$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}}\right)=0+\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

۴ ــ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{1}{3} & x=-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{1}{3} & x=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{|x+1|}{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{|x+1|}{x^3+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{-(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right)=-\frac{1}{3}$$

و همچنین داریم:

$$f(-1)=\frac{1}{3}$$

بنابراین تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-1$، پیوستگی راست دارد؛ زیرا:

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=\frac{1}{3}$$

۵ ــ داریم:

$$y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\Rightarrow y^2=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow 2y'y=\frac{-2x}{x^4}$$

$$\Rightarrow y'y=\frac{-1}{x^3}\Rightarrow y''y+y'^2=\frac{3x^2}{x^6}\Rightarrow yy''+y'^2=\frac{3}{x^4}$$

$$\Rightarrow yy''+y'^2=3(\frac{1}{x^2})^2\Rightarrow yy''+y'^2=3(y^2-1)^2$$

۶ ــ داریم:

$$y=a\sin mx$$

$$\Rightarrow y'=am\cos mx=am\sin(mx+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y''=am^2\cos(mx+\frac{\pi}{2})=am^2\sin(mx+\frac{2\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y^{(3)}=am^3\cos(mx+\pi)=am^3\sin(mx+\frac{3\pi}{2})$$

$$\Rightarrow y^{(4)}=am^4\cos(mx+\frac{3\pi}{2})=am^4\sin(mx+\frac{4\pi}{2})$$

به همین ترتیب مشتق nام $y=a\sin mx$ چنین خواهد شد:

$$y^{(n)}=am^n\sin(mx+\frac{n\pi}{2})$$

۷ ــ داریم:

$$m=-\frac{1}{2}\ ,\ \alpha=45^\circ\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}45^\circ=\pm\frac{-\frac{1}{2}-m'}{1-\frac{1}{2}m'}\Rightarrow 1=\pm\frac{-\frac{1}{2}-m'}{1-\frac{1}{2}m'}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}m'=\pm(-\frac{1}{2}-m')\Rightarrow m'=\frac{1}{3}$$

یا $m'=-3$ (ضریب زاویه خطوط مماس)

بنابراین اگر x_0 طول نقطهٔ تماس فرض شود، خواهیم داشت:

$$y'=2x+3\ ,\ m'=\frac{1}{3}=2x_0+3$$

$$\Rightarrow 2x_0+3=\frac{1}{3}\Rightarrow x_0=\frac{-4}{3}\ ,\ y_0=\frac{-20}{9}$$

$$m=-3=2x_0+3\Rightarrow 2x_0+3=-3\Rightarrow x_0=-3\ ,\ y_0=0$$

پس نقاط مطلوب (مختصات نقاط تماس) چنین می‌باشند:

$$A\left|\begin{matrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{20}{9}\end{matrix}\right.\quad ,\quad B\left|\begin{matrix}-3\\ 0\end{matrix}\right.$$

(مسأله دارای دو جواب است)

۸ ــ معادلهٔ خط مجانب افقی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{-4x+1}{2x+4}$ چنین است:

$$y=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow \boxed{\text{معادله خط مجانب افقی}\ \ y+2=0}$$

مرکز تقارن تابع با ضابطهٔ $y=x^3-3x^2+1$ چنین است:

$$y'=3x^2-6x\Rightarrow y''=6x-6\Rightarrow y''=0\Rightarrow 6x-6=0$$

$$\Rightarrow x=1\ ,\ y=-1\Rightarrow \boxed{\text{مرکز تقارن:}\ I(1,-1)}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|-1+2|}{\sqrt{0+1}}=1\Rightarrow \boxed{d=1}$$

(d فاصله مرکز تقارن از مجانب افقی است)

۹ ــ داریم:

$$A=\cos\alpha(2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(2(1-\cos^2\alpha)-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(2-2\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha+1)$$

$$=\cos\alpha(3-4\cos^2\alpha)=3\cos\alpha-4\cos^3\alpha$$

$$=-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$$

$$=-\cos^3\alpha\Rightarrow A=-\cos 3\alpha=\cos(\pi-3\alpha)$$

می‌دانیم:

$$-1\le\cos(\pi-3\alpha)\le 1\Rightarrow \boxed{-1\le A\le 1}$$

۱۰ ــ داریم:

$$\cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+\cos\frac{12\pi}{9}\right)\cos\frac{7\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos\frac{21\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})-\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{7\pi}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{9}-\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{4}\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

۱۱ ــ داریم:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2k+1$$

$$\left(-1\le 2k+1\le 1\ \ k\in z\Rightarrow k=\{-1,0\}\right)$$

بنابراین داریم:

$$k=0:\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$k=-1:\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{2}\Rightarrow$$

$$x=2k+\frac{5\pi}{4}\ ,\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال چهارم تجربی

۱ ــ معادلهٔ خطی که رئوس $A(4,3)$ و $O(0,0)$ را شامل است، چنین است:

$$m_{OA}=\frac{3-0}{4-0}=\frac{3}{4}\ ,\ y-y_0=m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x-0)\Rightarrow y=\frac{3}{4}x\Rightarrow 3x-4y+0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $B(3,-4)$ از خط فوق ارتفاع مثلث است:

$$BH=\frac{|3(3)-4(-4)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9+16|}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5\Rightarrow \boxed{BH=5}$$

۲ ــ داریم:

$$f(x)=m\operatorname{tg}^n ax\Rightarrow f'(x)=nma(1+\operatorname{tg}^2 ax)\operatorname{tg}^{n-1}ax$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=3\operatorname{tg}^7 5x\Rightarrow f'(x)=7\times 3\times 5(1+\operatorname{tg}^2 5x)\operatorname{tg}^6 5x$$

$$\Rightarrow f'(-\frac{\pi}{4})=105(1+\operatorname{tg}^2(-\frac{5\pi}{4}))\operatorname{tg}^6)(-\frac{5\pi}{4})$$

با توجه به تساوی

$$\operatorname{tg}(-\frac{5\pi}{4})=-\operatorname{tg}(\pi+\frac{\pi}{4})=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$$

داریم:

$$f'(-\frac{\pi}{4})=105(1+(-1)^2)(-1)^6=105\times 2=210$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(-\frac{\pi}{4})=210}$$

۳ ــ داریم:

$$y=3\cos x+2\sin x$$

محل تلاقی منحنی با محور yها:

$$x=0\Rightarrow y=3(1)+2(0)=3\ ,\ A(0,3)$$

$$y'=-3\sin x+2\cos x\Rightarrow m=-3\sin(0)+2\cos(0)=2$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow$$

$$y-3=2(x-0)\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}y=2x+3\\ \text{(معادله خط مماس)}\end{matrix}}$$

۴ ــ داریم:

$$y=x^2+px+q\quad ,\quad y=-4x-2$$

خط و منحنی روی محور yها بر هم مماس می‌باشند، از

آنجا که نقطهٔ تماس متعلق به هر دو نمودار می‌باشد: مختصات آن در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$x=0 \Rightarrow y+3(0)=-2 \Rightarrow y=-2$$

نقطهٔ تماس: $A(0,-2)$

$$x=0 \Rightarrow y=(0)^3+p(0)+q=-2 \Rightarrow \boxed{q=-2}$$

$y=-3x-2 \Rightarrow m=-3$ (ضریب زاویه خط مماس)

$$y'=3x^2+p \Rightarrow m=3(0)^2+p=-3 \Rightarrow \boxed{p=-3}$$

۵ ــ داریم:

$$x^2+y^2+2x=0 \Rightarrow (x^2+2x+1)+y^2=1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow C'(-1,0)\ ,\ R=1\ ,\ C(-4,4)$$

$$\Rightarrow C'C=d=\sqrt{(-4+1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\Rightarrow \boxed{d=5}$$

$$d=R+R' \Rightarrow 5=1+R' \Rightarrow \boxed{R'=4}$$

معادلهٔ دایرهٔ مطلوب: $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

۶ ــ اگر خط $y=mx+1$ بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=\frac{1-x}{-x-1}$ مماس باشد، باید معادلهٔ زیر دارای ریشهٔ مضاعف باشد:

$$\begin{cases} y=\frac{1-x}{-x-1} \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-x}{-x-1}=mx+1 \Rightarrow mx^2+mx+2=0$$

از طرفی شرط داشتن ریشهٔ مضاعف برای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، چنین است:

$$(a\neq 0)\quad \Delta=0$$

بنابراین داریم:

$$(m\neq 0)\ ,\ \Delta=m^2-8m=0 \Rightarrow m\neq 0\ ,\ m(m-8)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=8}$$

۷ ــ الف) داریم:

$$4\sin^2 x+2\sin 2x+12\cos^2 x=10$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin x\cos x+6\cos^2 x=5$$

اگر طرفین معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم و از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$ نیز استفاده کنیم داریم:

$$2tg^2x+2tgx+6=5(1+tg^2x)$$

$$\Rightarrow 3tg^2x-2tgx-1$$

$$=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} tgx=1 \Rightarrow tgx=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}} \\ \text{یا} \\ tgx=-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=k\pi-Arctg\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

ب) داریم:

$$\cos x\sin 2x=\sin x \Rightarrow \cos x(2\sin x\cos x)=\sin x$$

$$2\sin x\cos^2 x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow \sin x=0 \quad \text{یا} \quad \cos 2x=0$$

$$\sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi}\ ,\ \cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

۸ ــ با توجه به رابطهٔ سینوسها:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

(R شعاع دایرهٔ محیطی است.)

داریم:

$$a=2R\sin\hat{A}\ ,\ b=2R\sin\hat{B}\ ,\ \cos\frac{\hat{C}}{2}=\frac{a+b}{4R}$$

$$\Rightarrow a+b=4R\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R\sin\hat{A}+2R\sin\hat{B}=4R\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}+\sin\hat{B}=2\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

از طرفی داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{C}}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}\left(\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}-1\right)=0 \Rightarrow \cos\frac{\hat{C}}{2}=0$$

یا

$$\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)=1$$

می‌دانیم $\hat{C}<180^\circ$ است، بنابراین از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود مثلث متساوی‌الساقین است:

$$\boxed{\hat{A}=\hat{B}}$$

جواب ۱: چنانچه او ۱۲ بلوز داشته باشد که معنای آن داشتن ۴ شلوار بعلاوهٔ ۲۴ روسری نیز هست، به اندازهٔ پوشیدن ۱۱۵۲ دست لباس مختلف خواهد داشت. سه سال تنها ۱۰۹۶ روز دارد.

منبع: Murphey, Brain، مجلهٔ بازیها، ژوئن ۱۹۸۶

جواب ۲: آب لیوان دوم را در پنجمی بریزید.

جواب ۳: به ۹ طریق ممکن است.

جواب ۴: هر راه را می‌توان به وسیله علامت گذاشتن در خانه‌هایی که رخ روی خطها (مسیرافقی)، می‌پیماید، مشخص کرد، امّا: رخ هفت خط (مسیر افقی) را می‌پیماید، روی هر خط، ۸ خط برای انتخاب حرکت به طرف پایین وجود دارد.

بنابراین ۷ بار انتخاب بین ۸ امکان وجود دارد. در نتیجه تعداد راههای ممکن برابر است با ۷ بار حاصل ضرب ۸ در خودش، یعنی:

$$8\times8\times8\times8\times8\times8\times8=2097152$$

جواب ۵: فرض کنیم مهرداد که با حرف A نشان داده شده است شمارش را از خودش شروع کند. اعدادی که زیر هر حرف نوشته شده است نشان می‌دهد که شخص مربوط به آن حرف در کدام دور شمردن، از بازی بیرون رفته است، مثلاً E در دور اول و A در دور دوم و G در دور سوم و ... از بازی خارج می‌شوند:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
۲	۸	۵	۴	۱	۶	۳	۹	۷

با این طریق شمردن، نفری که با حرف H نشان داده شده است برنده می‌شود، پس برای اینکه مهرداد برنده شود باید شمارش را از دو نفر بعدی یعنی از C شروع کند.

Borhan

In the name of God

Vol. 5 No. 2

Serial numbers: 16 Winter 1996

- **Licence Holder:** Madrasse Publication
- **Responcible director:** Mahmood Ebrahimi
- **Executive Editor H. R. Amiri**

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran

Post code: 14155/1949

Contents:

1. Limit — A. Ghandehari
2. Descrete mathematics — G. R. Yassipour
3. Short articles of authentic mathematics Jornals. — G. R. Yassipour
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
5. Locus (VII). — M. H. Rostami
6. Exponent — S. M. R. Hashemi mosavi
7. Answers to letters.
8. Problems.
9. Applied mathematics — P. Shahriari
10. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
11. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
12. Vector space (Part Two) — H. R. Amiri
13. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
14. A brief history of mathematics magazins in Iran.
15. lines and orthogonal planes (Part Two) — P. Shahriari
16. Contest problem — H. R. Amiri

کمال‌الدین فارسی

ریاضیدان و فیزیکدان ایرانی (در حدود ۶۶۵ـ۷۱۸)

از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و دنیای اسلام در نیمهٔ دوم سدهٔ هفتم و اوایل سدهٔ هشتم در فارس به دنیا آمد.

مهمترین اثر ریاضی شناخته شدهٔ کمال‌الدین فارسی رسالهٔ تذکرةالاحباب فی‌بیان‌التحاب است که هدف آن اثبات درستی دستوری است که ثابت‌بن قره در سدهٔ سوم برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب بیان کرده است.[1]

کمال‌الدین فارسی حالت کلی قضیه یعنی حالتی را که در آن p مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد نیز در نظر گرفته و در این حالت نیز دستور محاسبهٔ اجزای حاصل‌ضرب ap را بیان و ثابت کرده است.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بوده که دستور محاسبهٔ اجزای حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرده است (شکل هجدهم از رسالهٔ او) دستور این است:
قضیه: اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و مجموع اجزای هر عدد مثلاً عدد a را s(a) بنامیم، آنگاه

$$s(ab) = s(a) \times b + s(b) \times a + s(a) \times s(b)$$

دکارت در حدود بیش از سه سده بعد از درگذشت کمال‌الدین فارسی همین دستور را در اروپا به دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی باز در این مورد حالتی را که در آن دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و قاعدهٔ خود را تعمیم داده است.
علاوه بر این فارسی پس از اثبات صحت دستور ثابت‌بن قره آن را به کار بسته و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورده است. در اروپا متحاب بودن این دو عدد را نخستین بار فرما ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۶۳۶ میلادی یعنی ۳۱۸ سال بعد از فوت کمال‌الدین فارسی به دست آورد.

---

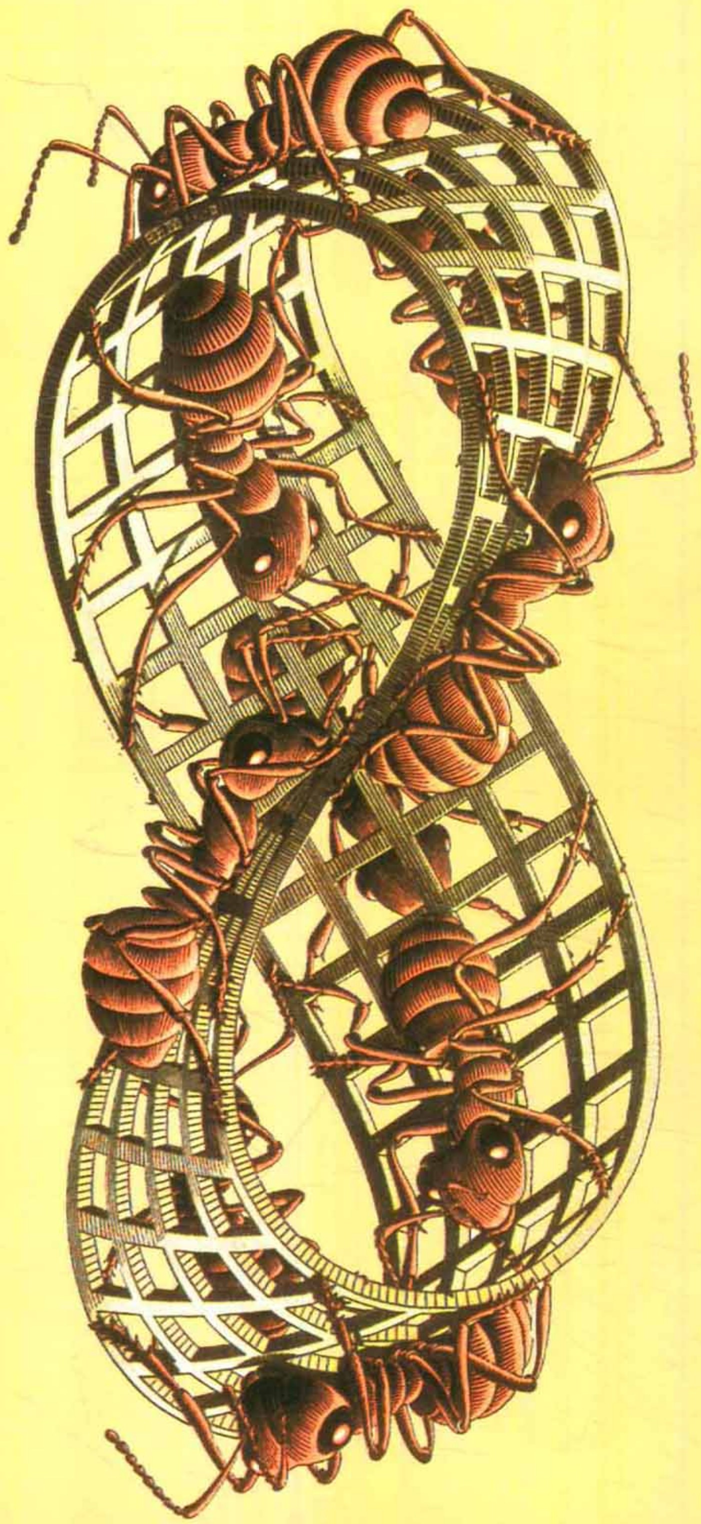
۱. دو عدد طبیعی را در صورتی متحاب می‌نامند که مجموع اجزای هریک از آنها مساوی با دیگری باشد مانند دو عدد ۲۲۰ و ۲۴۸، مقصود از اجزای هر عدد طبیعی غیر اول شمارنده‌هایی از آن عدد هستند که از خود عدد کوچکتر باشند. در بعضی از کتابهای فارسی اصطلاح اعداد متحاب را به صورت «اعدادمتحابه» نوشته‌اند. امّا ابوریحان بیرونی در کتاب التفهیم این اصطلاح را به صورت «عددهای‌متحاب» به کار برده و تای تأنیث به آخر متحاب اضافه نکرده است.

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۷



سال پنجم، بهار ۱۳۷۵ شمارهٔ سوم، بهاء ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

☐ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ☐ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی ☐ سردبیر: حمیدرضا امیری

مطالب این شماره

◆ حرف اوّل ۱
◆ شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۷)/ پرویز شهریاری ۲
◆ حدّ (قسمت دوم)/ احمد قندهاری ۶
◆ تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۱۶) ۱۲
◆ تبدیل ـ تبدیلات خطی (نگاشتهای خطی)/ حمیدرضا امیری ۱۹
◆ داستان شیروموش در هندسه/ دکتر احمد شرف‌الدین ۲۳
◆ توان(نما) (قسمت دوّم)/ سیدمحمدرضاهاشمی‌موسوی ۲۸
◆ مشاهیر ریاضی جهان/ ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور ۳۴
◆ کاربرد دترمینان (قسمت اوّل)/ سیامک جعفری ۳۶
◆ آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۳)/ حمیدرضاامیری ۴۱
◆ مبانی‌کامپیوتروبرنامه‌نویسی‌با BASIC(۶)/ حسین‌ابراهیم‌زاده‌قُلزم ۴۵
◆ محاسبه همزمان سریهای $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$ به کمک اعداد مختلط/ محمد رحیم ۵۰
◆ طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۴)/ ترجمه:غلامرضا یاسی‌پور ۵۲
◆ اثبات نامساویها/ محمدعلی سلحشور ۵۴
◆ گراف (قسمت اوّل)/ ترجمه و گردآوری: سیمین اکبری‌زاده ۵۸
◆ خطهای راست و صفحه‌های عمود برهم در فضا (قسمت دوّم)/ پرویز شهریاری ۶۷
◆ گزارشی از بیست‌وششمین کنفرانس ریاضی کشور/ فایق رشیدزاده ۷۲
◆ رادیکال (قسمت‌اوّل)/ سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی ۷۳
◆ جواب نامه‌ها ۷۹
◆ حل مسائل برهان شماره ۱۶ ۸۱

☐ سال پنجم، بهار ۱۳۷۵ شمارهٔ سوّم

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.**
- **مقالات مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**
- **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**
- **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۴ـ۸۸۹۷۷۷۳، ۸۹۳۸۰۹، ۸۸۰۲۳۳۶، ۸۸۰۲۳۴۷ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اول

السلام علیک یا اباعبدا... و علی‌الارواح التی حلت بفنائک

خداوندا! کیست که ساغر محبت از دست تو نوش کرد و حلقهٔ بندگی دیگری در گوش کرد؟! خدایا! کدامین کهکشان بر گرد تو گشت و واله و حیرانِ تو نگشت؟! معشوقا! کدامین انسان پیشانی عشق بر خاک ربوبیت تو سایید و شیرینی تو چشید و دل به دیگری سپرد؟! دلبرا! کدامین پروانه شعله‌های ملتهب جمال تو را دید و به ظلمت پناه برد؟! امیدا! کدامین یوسف به عشق رؤیای تو آواره نگشت؟! شورآفرینا! کدامین محمّد در حرا صدای تو شنید و نلرزید؟!* شاهدا! کدامین حسین ندای تو شنید و شهید نگشت؟!

به راستی فلسفهٔ شهادت امام حسین(ع) و یارانِ باوفایش در کربلای عشق چه بود؟ چگونه بود که امام در اوج نبرد و چکاچک شمشیرها و در لحظات بحرانیِ جنگ وقتی فرارسیدنِ ظهر را احساس می‌کند، دست از جنگ می‌شوید و در زیر باران تیرها و نیزه‌ها به **نماز** می‌ایستد. پس نماز هدف اصلی قیام اباعبدالله است.

بر تمامی پیروانِ امام حسین(ع) واجب است که در تمام جنبه‌های زندگی خود و به زیباترین وجه ممکن و با شنواترین گوشِ دل، پیامِ عینی امام را تحقق بخشیده تا موجبات خشنودی ایشان ـ که همان خشنودی حضرت حق می‌باشد ـ فراهم شود.

اِن شاءا...

عزیزان:

از این شماره به بعد (شمارهٔ ۱۸ که برای اول سال تحصیلی جدید آماده خواهد شد) بخش مسائل برای حل به کتابهای ریاضی نظام جدید اختصاص خواهد داشت و براساس هر ترم سؤالات از کتابهای ریاضی که در آن ترم تدریس خواهد شد، طرح می‌شوند و به همین دلیل در این شماره فقط پاسخ مسائل برای حلِ شمارهٔ قبل را آورده‌ایم.

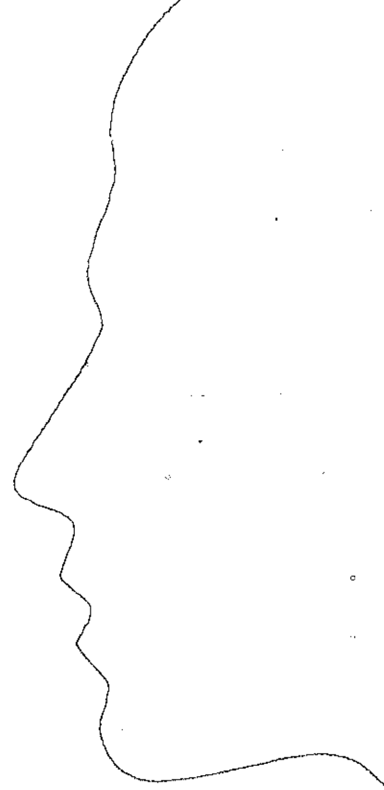
از شما دانش‌آموزان عزیز نیز تقاضا می‌کنیم از این به بعد مسائل ارسالی خود را از کتابهای نظام جدید و براساس سرفصلهای این کتابها و با قید سال و نام کتاب به همراه حل مسائل برای ما ارسال کنید.

منتظر نامه‌ها، مقالات، پیشنهادات و انتقادهای شما عزیزان هستیم.

والسلام ـ سردبیر

---

* برگرفته از کتاب «دست دعا، چشم امید» آقای سید مهدی شجاعی



شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۷)

○ پرویز شهریاری

از این گونه **نمونه‌ها**، به‌فراوانی و در تمامی شاخه‌های ریاضیات وجود دارد. ریاضیات راهنمای عمل است. بنابراین، باید با عمل سازگار باشد. معادله، فرمول، شکل و حتی استدلال، به‌شرطی سودمند است که معرف یک واقعیت باشد و بتواند دشواریهایی را که در برابر زندگی انسان وجود دارد، حل کند. در غیر این صورت، به‌نوعی بازی ذهنی تبدیل می‌شود و نمی‌تواند سودی عملی داشته باشد. در این‌جا، مثالهای دیگری می‌آوریم که، به‌جز مثال آخر، بسیار ساده‌اند، ولی بی‌توجهی ما به‌واقعیت‌ها می‌تواند در مورد آنها نیز، ما را گمراه کند. برخی از این مثالها به‌درک درست تعریفها مربوط می‌شود. گمان من بر این است که شما دانش‌آموز عزیز، به‌این مثالهای ساده نیاز ندارید، ولی ذکر آنها را بی‌فایده نمی‌دانم، چرا که **تکرار**، یکی از شرطهای یادگیری است.

مثال ۱۵ ـ p عددی اول و دو عدد طبیعی a و b نسبت به‌هم اول‌اند.

ثابت کنید، اگر ab و a+b بر p بخش‌پذیر باشند، آن هنگام a^3-b^3 هم بر p بخش‌پذیر است.

مسأله، با استدلال ساده‌ای حل، و درستی حکم آن ثابت می‌شود. این برابری روشن است:

$$a^3-b^3=(a-b)[(a+b)^2-ab]$$

مقدار داخل کروشه، بر p بخش‌پذیر است، زیرا هم $(a+b)^2$ و هم ab، بنا به‌فرض، مضربی از p هستند. درنتیجه، سمت راست برابری مضربی از p می‌شود، یعنی a^3-b^3 بر p بخش‌پذیر است.

هیچ اشکالی در استدلال نیست. ولی بیشتر دقت کنیم. اگر حاصل‌ضرب ab بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، از آنجا که a و b نسبت به‌هم اولند، یا a بر p بخش‌پذیر است و یا b. فرض کنیم a مضربی از p باشد، چون مجموع a+b هم مضربی از p است، بنابراین، به‌ناچار، b هم باید مضربی از p باشد. وقتی هردوعدد a و b، بر $p\neq 1$ بخش‌پذیر باشند، نمی‌توانند نسبت به‌هم اول باشند. در واقع، فرض مسأله، با خودش تناقض دارد. نمی‌توان دو عدد a و b را طوری پیدا کرد که، نسبت به‌هم اول باشند و، در ضمن، دو عدد ab و a+b بر عدد اولی مانند p بخش‌پذیر باشند.

یادداشت: در منطق ریاضی گفته می‌شود: از یک گزارهٔ نادرست، می‌توان هر گزاره‌ای را نتیجه گرفت. به‌طور مثال می‌توان گفت: «اگر ۲ با ۵ برابر باشد، آن هنگام، هر معادله‌ای ریشهٔ حقیقی دارد»... ولی، این بحث مربوط به‌منطق ریاضی (که از دیدگاه منطقی درست است)، در آزمایش و عمل، کاربرد کمتری دارد و ضمن حل مسئله‌های محاسبه‌ای یا استدلالی، به‌جز در موردهای نادر، باید از آن صرف‌نظر کرد.

مثال ۱۶ ـ معادلهٔ $x^x=x$ را حل کنید.

راه‌حل مسأله دشوار نیست، در این‌جا تنها در این باره صحبت می‌کنیم که: آیا $x=-1$ جوابی از معادله است؟ در واقع به‌ازای $x=-1$ داریم:

$$x^x=(-1)^{-1}=\frac{1}{(-1)^1}=-1=x$$

$x=-1$ در معادله صدق می‌کند، با وجود این نباید آن را جوابی از معادله دانست. این معادله تنها یک جواب دارد: $x=1$

چرا؟ دلیل این مطلب به‌تعریف تابع با ضابطه:

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)} \qquad (1)$$

مربوط می‌شود. دامنهٔ این تابع، یعنی مقدارهای قابل قبول برای متغیر x ــ بنا به‌تعریف ــ با این شرطها تعیین می‌شود: $f(x)$ مقداری مثبت باشد و در ضمن، $f(x)$ و $\varphi(x)$ دارای مقداری عددی باشند.

چرا در تعریف این تابع، $f(x)$ را مثبت می‌گیرند؟ برای این‌که، در حالت منفی بودن $f(x)$، اغلب برای y نمی‌توان مقدار معینی پیدا کرد. فرض کنید بخواهیم مقداری برای عدد $a=(-1)^{\sqrt{2}}$ پیدا کنیم. می‌دانیم:

$$1/4<\sqrt{2}<1/5$$

به‌این امید، مقدارهای تقریبی $\sqrt{2}$ را درنظر گرفتیم که شاید بتوانیم راهی برای محاسبه a پیدا کنیم. اگر $\sqrt{2}$ را برابر $1/4$ بگیریم:

$$a=(-1)^{1/4}=(-1)^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{(-1)^7}=-1$$

و اگر $\sqrt{2}$ را برابر $1/5$ فرض کنیم:

$$a=(-1)^{1/5}=(-1)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-1)^3}=\sqrt{-1}$$

که عددی موهومی است.

در بحثی دقیقتر، وقتی در (۱) داشته باشیم $f(x)<0$، برای پیوستگی یا ناپیوستگی تابع و درنتیجه، برای مشتق‌پذیر بودن یا مشتق‌پذیر نبودن تابع نمی‌توانیم حرفی بزنیم.

در مثال بعدی، احتمال اشتباه بیشتر است.

مثال ۱۷ ـ این معادله را حل کنید:

$$(\cos x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$$

خیلی زود و به‌سادگی، این دو جواب به‌دست می‌آید:

$$x_1=2k\pi \quad و \quad x_2=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6} \quad (k\in Z)$$

برای $x_1=2k\pi$ نمی‌توان ایرادی گرفت، زیرا به‌ازای آن داریم:

$$\cos x=\cos(2k\pi)=1$$

که مقداری مثبت است. ولی کسینوس x، به ازای همهٔ مقدارهای x_2، مثبت نمی‌شود، اگر $k=2n$، آن هنگام

$$\cos x=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

و اگر $k=2n+1$، آن هنگام،

$$\cos x=\cos(2n\pi+\frac{5\pi}{6})=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

بنابراین، برای جوابهای معادله، باید نوشت:

$$x_1=2k\pi\ ,\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ (k\in Z)$$

مثال ۱۸ ـ این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$$

معادله‌ای است گنگ. ولی چرا تنها یک معادله؟ برای دو مجهول، دو معادله لازم است و، در اینجا، تنها یک معادله به‌ما داده‌اند. به‌هر حال، باید معادله را گویا کنیم. جملهٔ دوم را از سمت چپ برابری، به‌سمت راست می‌بریم و، دو طرف برابری را، مجذور می‌کنیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{4x-y^2})^2=(\sqrt{y+2}+\sqrt{4x^2+y})^2$$

$$4x-y^2=2y+2+4x^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}$$

$$(y+1)^2+(2x-1)^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}=0$$

هیچ یک از جمله‌های سمت چپ برابری اخیر، نمی‌تواند منفی باشد و، بنابراین، برای این که مجموع آنها برابر صفر شود، باید هر سه جمله برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} y+1=0 \\ 2x-1=0 \\ (y+2)(4x^2+y)=0 \end{cases}$$

از تعداد کم معادله‌ها نگران بودیم، اکنون باید از تعداد زیاد آنها گله داشته باشیم: سه معادله برای دو مجهول دستگاه تنها وقتی جواب دارد که، جواب حاصل از دو معادلهٔ اول، به‌خودی خود، در معادلهٔ سوم هم صدق کند. از دو معادلهٔ اول دستگاه، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{1}{2}\ ,\ y=-1$$

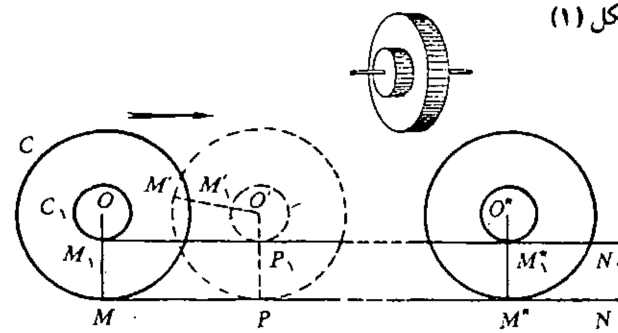
که در معادلهٔ سوم دستگاه هم صدق می‌کند. روشن است که این عددها را باید در معادله اصلی هم امتحان کرد، زیرا ضمن حل، با مجذور کردن دو طرف برابری، ممکن است جوابهای دیگری وارد آن شده باشند. ولی آزمایش نشان می‌دهد که، این مقدارهای x و y، در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.

اکنون به‌مثالی می‌پردازیم که منتسب به ارسطو[1] است. این مثال، نمونهٔ جالبی از استدلال نادرست است و با آن که نادرستی نتیجه‌گیری از همان آغاز روشن است رد کردن آن چندان ساده نیست و نیازمند منطقی ظریف و هوشمندانه است. پاسخ این «سفسطه» را از کتاب

«یاکوب‌دوبنوف» به‌نام «اشتباه در استدلال‌های هندسی» با حذف تکه‌هایی از آن، برداشته‌ایم.

مثال ۱۹ ـ آیا همهٔ دایره‌ها، محیطی برابر دارند؟
طرح مسأله. دو دایره هم مرکز C و C_1 را درنظر می‌گیریم که به‌یکدیگر محکم شده باشند (شکل ۱). برای درک بهتر، به‌نمونه

شکل (۱)



فیزیکی آن هم توجه می‌کنیم: دو غلتک استوانه‌ای که محوری مشترک و افقی داشته باشند و به‌صورتی استوار، به‌یکدیگر چسبیده باشند (بهتر است فرض کنیم، بخشی از استوانه را، به‌صورت استوانه جدیدی تراشیده باشیم، به‌نحوی که محورش همان محور استوانه اصلی و شعاعش کوچکتر از آن باشد (شکل ۱ ـ بالا). از نقطه‌های M و M_1 واقع بر محیط دایره‌های C و C_1، که با نقطهٔ O روی یک خط راست‌اند، مماسهای MN و M_1N_1 را بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. از آنجا که دایره‌ها به‌هم محکم شده‌اند، هرگاه یکی از دایره‌ها، به‌اندازه زاویه‌ای حرکت کند، دیگری هم به‌همان اندازه حرکت خواهد کرد. به‌این ترتیب، اگر دایره C روی خط راست MN حرکت کند، دایرهٔ C_1 روی خط راست M_1N_1 حرکت خواهد کرد. (در شکل ۱، نشانه پیکان نشان می‌دهد، دو دایرهٔ به‌هم چسبیده، در کدام جهت حرکت می‌کنند، دایرهٔ نقطه‌چین، یکی از حالتهای بینابینی دایره را نشان می‌دهد، در ضمن M' و M'_1، جای تازه نقطه‌های M و M_1 هستند.) برای نمونه فیزیکی، باید این‌طور فرض کرد که، زیر هر یک از غلتکها، سطحی افقی قرار گرفته است و، هر استوانه، روی سطح مربوط به‌خود، می‌غلتد. فرض کنیم، دایرهٔ C روی خط راست MN، یک دور کامل بزند و نقطهٔ M به‌وضع نقطه M^* درآید، در این صورت، دایره C_1 هم یک دور کامل می‌زند و نقطهٔ M_1 به‌وضع M^*_1 (روی شعاع O^*M^*) درمی‌آید. O^*M^* موازی OM است، زیرا هر دو، بر خط راست MN عمودند. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$|MM^*| = |M_1M^*_1|$$

یعنی، دو دایره، بعد از یک دور کامل حرکت، راهی برابر پیموده‌اند و، بنابراین، محیط دو دایره، طولهایی برابر دارند. چون دایره‌های C و C_1 را، به‌دلخواه انتخاب کرده‌ایم، پس محیط هر دو دایرهٔ دلخواه، طولی برابر دارند.

به‌نظر می‌رسد، این مسأله، پیش از آن که به‌هندسه مربوط باشد، به‌مکانیک (یا بهتر بگوییم، جنبش‌شناسی یا سینماتیک) بستگی دارد، زیرا سخن بر سر چرخی است که به‌صورت خاصی حرکت می‌کند. از سوی دیگر، می‌توان پیش‌بینی کرد که، پوشش مکانیکی مسأله را می‌توان کنار گذاشت، زیرا در اینجا، زمان نقش چندانی ندارد. یعنی اگر سرعت حرکت چرخ را، تند یا کند کنیم، تغییری در وضع مسأله پدید نمی‌آید. تمامی «سفسطهٔ» مسأله را، می‌توان با زبان هندسه بیان کرد که ما هم، اندکی بعد، به‌آن می‌پردازیم.

بی‌تردید، نقطهٔ ضعف استدلال مسأله را، باید در این جمله جست‌وجو کرد: «دایره (بدون لغزش) بر خط راست می‌غلتد.» باید دربارهٔ معنای درست این جمله دقت کنیم، در این صورت، خیلی زود کشف خواهیم کرد: اگر یکی از دو دایرهٔ چسبیده به‌هم، بدون لغزش بغلتد، حرکت دیگری نمی‌تواند بدون لغزش باشد و، به‌این ترتیب، نادرستی حکم مسأله روشن می‌شود.

در آغاز، با زبان «جنبش‌شناسی» صحبت می‌کنیم. وقتی می‌گوییم، دایره روی خط راست، بدون لغزش، می‌غلتد، به‌این معناست که، دایره طوری حرکت می‌کند که در هر لحظه بر خط راست مماس است، در ضمن، نقطه‌ای از دایره که به‌عنوان نقطه تماس، روی خط راست واقع است، در این لحظه سرعتی برابر صفر دارد. به‌زبان دیگر، نقطه‌ای از دایره که در لحظهٔ مفروض، در «پایین» یعنی در «نقطه تماس» قرار گرفته، برای دایره غلتنده، «مرکز دوران لحظه‌ای» است. در واقع، برای تعیین سرعت هر نقطه از دایره (که لزومی ندارد، روی محیط دایره باشد)، باید به‌این نکته توجه داشته باشیم که، در این لحظه، دور نقطه تماس دوران می‌کند. به‌ویژه، امتداد این سرعت، عمود بر خط راستی است که نقطهٔ مفروض را به‌نقطهٔ تماس وصل می‌کند. به‌عنوان نمونه، باتوجه به‌شکل (۱)، سرعت نقطه‌ای که در وضع M' است، در جهت عمود بر خط راست $M'P$ قرار دارد.

به‌این ترتیب اگر نقطه‌ای از دایره، در لحظه‌ای که «پایین» قرار گرفته است، سرعتی مخالف صفر داشته باشد، در حالتی که سرعتش در جهت حرکت باشد، می‌گویند حرکتی «با لغزش مثبت» دارد و در حالتی که سرعتش در خلاف حرکت باشد، می‌گویند حرکتی «با

لغزش منفی» دارد. تنها در حالتی که لغزش وجود نداشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت: شعاع دایره‌ای که روی خط راست می‌غلتد، به‌اندازه زاویه‌ای دوران می‌کند و راهی که می‌پیماید، برابر است با طول کمان روبه‌رو به این زاویه، به‌طورمثال در شکل (۱) داریم: $|MP| = \widehat{PM'}$ و به‌ویژه، MM^* برابر است با طول محیط دایره‌ای که می‌غلتد. در حالتی که لغزش مثبت باشد $|MP| > \widehat{PM'}$ و در حالتی که با لغزش منفی سروکار داشته باشیم $|MP| < \widehat{PM'}$.

اکنون با بیان هندسی، تفاوت گونه‌های مختلف غلتیدن را شرح می‌دهیم، اگرچه به‌خاطر روشنتر بودن مطلب، گاهی از زبان جنبش‌شناسی (سینماتیک) هم استفاده می‌کنیم. پاره‌خط راست $|MM^*| = 2\pi R$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۱) و برای هر نقطه آن مثل P، در یک طرف خط راست MM^*، دایره‌ای به‌مرکز O' و شعاع برابر R رسم می‌کنیم، روی محیط این دایره، کمان PM' را برابر طول پاره‌خط راست PM، طوری جدا می‌کنیم که $\widehat{PM'}$ و $\overline{PM}$ نسبت به‌نقطهٔ P، در یک جهت باشند [یعنی کمان PM' (و اگر کمان بزرگتر از نیم‌دایره باشد بخشی از آن که به P چسبیده است) و پاره‌خط راست PM، در یک سمت قطر PO' واقع باشند]. اگر این ساختمان را، برای همهٔ حالتهای ممکن نقطه P روی پاره‌خط راست MM^*، انجام دهیم، گوییم (گرچه با زبان «جنبش‌شناسی» صحبت می‌کنیم، ولی در واقع، از حوزهٔ هندسه خارج نمی‌شویم)، مجموعهٔ همهٔ دایره‌های مماس، از یک دوران دایرهٔ به‌شعاع R روی خط راست MN ــ که بدون لغزش روی خط راست MN می‌غلتد ــ به‌دست می‌آید و مکان هندسی نقطه M متناظر با وضعهای مختلف نقطه P، عبارت است از مسیر نقطهٔ M.

اگر در این ساختمان، برابری $|MP| = \widehat{PM'}$ را به $|MP| = k\widehat{PM'}$ تغییر دهیم (k ضریب ثابتی مخالف واحد است)، می‌گوییم: «دایره با لغزش ثابت به‌ضریب k می‌غلتد، درضمن، لغزش را مثبت یا منفی می‌گوییم، وقتی که $k-1$ مثبت یا منفی باشد».

باتوجه به‌این تعریف، به‌مسأله مربوط به‌چرخ برمی‌گردیم. از دیدگاه جنبش‌شناسی، وقتی از دو دایره هم مرکز، دایرهٔ بزرگتر روی خط راست MN، بدون لغزش، می‌غلتد (شکل ۱)، دایره کوچکتر، روی خط راست M_1N_1، نمی‌تواند بدون لغزش بغلتد. در واقع، اگر دایرهٔ کوچکتر هم، بدون لغزش بغلتد، در لحظه‌ای که مرکز مشترک دو دایره، روی O' قرار گیرد، شکل متحرک دارای دو مرکز دوران لحظه‌ای P و P_1 خواهد بود (و در این صورت، سرعت نقطهٔ M'، باید هم در جهت عمود بر PM' و هم در جهت عمود بر P_1M' باشد

که ممکن نیست). به‌جز این، می‌توان گفت که، دایرهٔ کوچکتر، با لغزش مثبت می‌غلتد، زیرا در هرحال، باید داشته باشیم:

$$|M_1P_1| = |MP| = \widehat{PM'}$$

و بنابراین:

$$|M_1P_1| > \widehat{P_1M'_1}$$

برعکس، اگر دایرهٔ کوچکتر را، بدون لغزش، روی خط راست M_1N_1 بغلتانیم، ثابت می‌شود که دایرهٔ بزرگتر، با لغزش منفی خواهد غلتید.

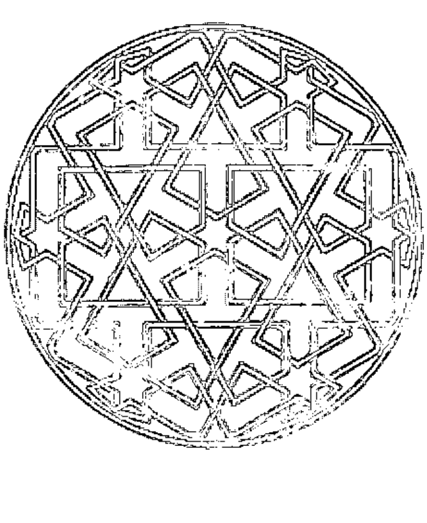
با تعریفهای هندسی هم، می‌توان به‌همین نتیجه‌ها رسید: وقتی دایرهٔ بزرگتر شکل (۱)، طوری بغلتد که در هر وضع داشته باشیم، $|MP| = \widehat{PM'}$، آن وقت برای دایرهٔ کوچکتر، باید نابرابری $|M_1P_1| > \widehat{P_1M'_1}$ برقرار باشد و داشته باشیم:

$$|M_1P_1| = \frac{R}{r}\widehat{P_1M'_1}$$

که در آن، R و r، شعاعهای دو دایرهٔ بزرگتر و کوچکتر هستند. بنابراین، دایرهٔ کوچکتر، با لغزش مثبت به‌ضریب $\frac{R}{r} > 1$ می‌غلتد. برعکس، اگر دایرهٔ کوچکتر، بدون لغزش بغلتد، دایرهٔ بزرگتر، با لغزش منفی به‌ضریب $\frac{r}{R} < 1$ خواهد غلتید.

◆ **یادداشتها**

1– Aristoté lés (فیلسوف یونانی سدهٔ چهارم پیش از میلاد)

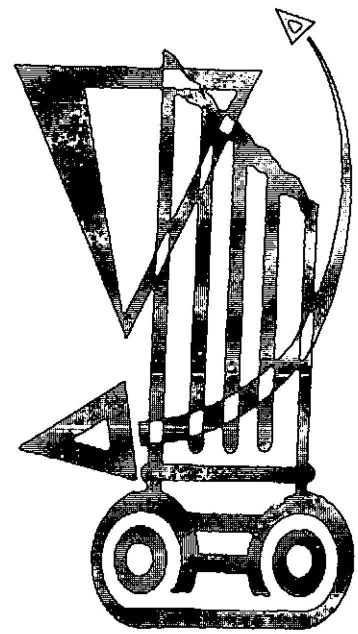


حدّ

(قسمت دوّم)

◄ احمد قندهاری

(با توجه به محدوده کتاب حسابان (۱) نظام جدید)



◄ حدّ چپ

مثال (۸): تابع به معادله $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۳ & x=۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

مقادیر $f(x)$ را به ازاء $x<۱$ و در نزدیکی عدد (۱) محاسبه می‌کنیم و نتیجه را در جدول زیر می‌نویسیم

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹

در این جدول مشاهده می‌شود وقتی x (از مقادیر کوچکتر از (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می شود، مقدار f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود.

حال اگر به طریقه دیگر به این جدول نگاه کنیم و ابتدا مقادیر f(x) را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که مقادیر f(x) به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود اگر x (از مقادیر کوچکتر (۱)) به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر شود.

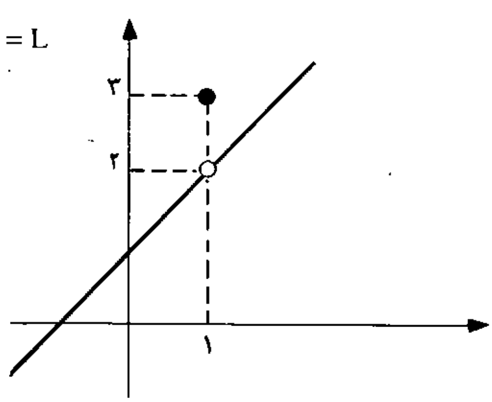
می توانیم مقادیر f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد (۲) نزدیک کنیم.به شرطی که x را به اندازهٔ کافی از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک کنیم. پس به طریقه شهودی می‌توان گفت که حدّ چپ تابع وقتی x، از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود برابر عدد (۲) است و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x)=۲ \\ x\to ۱^{-} \end{cases}$$

◄ نتیجه شهودی حدّ چپ تابع:

فرض کنیم تابع f به معادله f(x) در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع در نقطه x_0 می‌نامیم اگر بتوان مقدار f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که عدد مثبت (x_0-x) را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. می نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x)=L \\ x\to x_0^{-} \end{cases}$$



◄ تعریف ریاضی حدّ چپ تابع:

فرض می کنیم تابع f به معادله f(x) در بازه (a,x_0) تعریف شده باشد. عدد L را حدّ چپ تابع f در نقطه x_0

می‌نامیم، اگر برای هر عدد مثبت (ε) عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد. به طوری که:

$$۰ < x_۰ - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

دوباره به مثال (۸) برمی‌گردیم. و سؤال زیر را مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) آنقدر به عدد (۲) نزدیک شود که $|f(x)-۲|$ از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر باشد. در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |x+۱-۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |x-۱| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

چون $x \to ۱^- \Rightarrow |x-۱| = ۱-x$

$$\Rightarrow ۰ < ۱-x < \frac{۱}{۱۰۰}$$

ملاحظه می‌شود که x را باید از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم که $(۱-x)$ از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر باشد.

حال همین سؤال را کلّی‌تر مطرح می‌کنیم.

سؤال: می‌خواهیم مقدار f(x) را به عدد (۲) آن قدر نزدیک کنیم تا $|f(x)-۲|$ از عدد مثبت‌فوق‌العاده کوچک (ε)، کوچکتر شود در این صورت x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) چقدر باید نزدیک کرد.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۲| < \varepsilon \Rightarrow |x+۱-۲| < \varepsilon \Rightarrow |x-۱| < \varepsilon$$

چون $x \to ۱^- \Rightarrow |x-۱| = ۱-x$

$$\Rightarrow ۰ < ۱-x < \varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon$$

پس باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) به اندازه ε یا مقادیر کوچکتر از (ε) نزدیک کنیم.

یا می‌توان گفت باید x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) آنقدر نزدیک کرد تا $(۱-x)$ از ε کمتر باشد.

مثال (۹): تابع f به معادله

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۱ \\ ۱-x^۲ & x < ۱ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم.

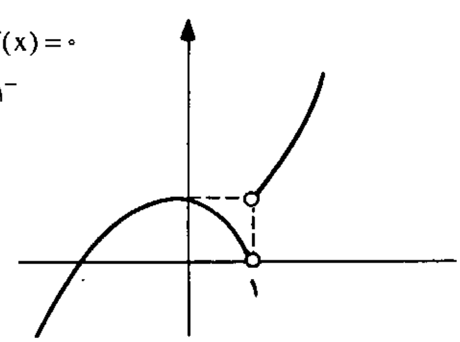
می‌خواهیم حدّ چپ این تابع را وقتی x از مقادیر کوچکتر از (۱) به عدد (۱) نزدیک می‌شود به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) بررسی و تعیین کنیم. برای این کار جدول زیر را می‌نویسیم.

x	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹
f(x)	۱	۰/۷۵	۰/۳۶	۰/۱۹	۰/۱۲	۰/۰۱

به طوری که در این جدول ملاحظه می‌شود، وقتی x از **طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱)** نزدیک و نزدیکتر می‌شود، **مقدار f(x) به عدد صفر** نزدیک و نزدیکتر می شود.

به بیان دیگر، اگر مقادیر f(x) را درنظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم، **که مقادیر f(x) را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر** نزدیک کرد به شرطی که x را از طرف اعداد کوچکتر از (۱) به عدد (۱) به اندازه کافی نزدیک کنیم پس می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{حد } f(x) = ۰ \\ x \to ۱^- \end{cases}$$



تمرین ۱: مسایل زیر را هم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) و هم با تعریف ریاضی حدّ چپ تابع بررسی و حل کنید.

$$\begin{cases} \text{حد } (-۴x+۲) = ۲ \\ x \to ۰^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد } (۲x+۱) = ۳ \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد } \frac{x^۲-۴}{|x-۲|} = -۴ \\ x \to ۲^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد } \sqrt{۱-x} = ۰ \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

تمرین ۲: به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ چپ توابع به معادلات زیر را بررسی کنید و حدس بزنید.

$$\begin{cases} \text{حد}\ ([x]+[-x]) \\ x \to ۲^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد}\ ([x]-۱) \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حد}\ (x-[x]) \\ x \to ۴^- \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{حد}\ \dfrac{x^۲-۷x+۶}{x-۱} \\ x \to ۱^- \end{cases}$$

◄ حدّ تابع:

مثال (۱۰): تابع f به معادله $f(x)=۳x+۱$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و f(x)) حدّ تابع فوق را وقتی x از دو طرف به عدد (۲) میل می‌کند را بیابیم. برای این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۵,۱/۹,۱/۹,۱/۹۹۹ → ۲ ← ۲/۰۰۱,۲/۰۱,۲/۱,۲/۵
f(x)	۵/۵,۶/۷,۶/۹۷,۶/۹۹۷ → ۷ ← ۷/۰۰۳,۷/۰۳,۷/۳,۸/۵

به طوری که جدول نشان می‌دهد وقتی x از هر دو طرف به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، مقدار f(x) نیز به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدگاه دیگری به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که f(x) به عدد (۷) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر شود، می‌توانیم f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد ۷ نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم.

◄ نتیجه شهودی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله f(x) دربازهٔ (a,b) شامل ($x_۰$) تعریف شده باشد. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی می‌نویسیم :

$$\begin{cases} \text{حد}\ f(x)=L \\ x \to x_۰ \end{cases}$$

به معنی آن است که: می‌توان f(x) را به هر اندازه دلخواه به عدد L نزدیک کرد به شرطی که x را (از هر دو طرف) به قدر کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. به بیان دیگر مقدار $|f(x)-L|$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-x_۰|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

از جدول مثال (۱۰) نتایج زیر به دست می‌آید.

اگر $|x-۲|=۰/۵ \Rightarrow |f(x)-۷|=۱/۵$

اگر $|x-۲|=۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۳$

اگر $|x-۲|=۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۳$

اگر $|x-۲|=۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۷|=۰/۰۰۳$

بررسی این جدول نشان می‌دهد، وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۵±)باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۱/۵±) است و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۳±) است. و وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۰۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۰۳±) است. و بالاخره وقتی اختلاف x و عدد (۲) به اندازه (۰/۰۰۱±) باشد، اختلاف f(x) و عدد (۷) به اندازه (۰/۰۰۳±) است. می‌توانیم نتیجه بگیریم که می‌توان $|f(x)-۷|$ را به هر اندازه دلخواه که بخواهیم به صفر نزدیک کنیم به شرطی که $|x-۲|$ را به اندازهٔ، کافی به صفر نزدیک کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$ کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ باشد، x را چقدر باید به عدد (۲) نزدیک کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow |۳x-۶|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۳|x-۲|<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow$$

$$|x-۲|<\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\frac{۱}{۳۰۰۰}$ کوچکتر اختیار کنیم. حال سؤال قبلی را به صورت کلی مطرح می‌کنیم.

سؤال: اگر بخواهیم $|f(x)-۷|$کوچکتر از عدد مثبت خیلی کوچک (ε) باشد آنگاه $|x-۲|$ را باید کوچکتر از چه

عددی اختیار کنیم.

جواب: می‌نویسیم:

$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow |۳x+۱-۷|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |۳x-۶|<\varepsilon \Rightarrow ۳|x-۲|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow |x-۲|<\frac{\varepsilon}{۳} \qquad \delta=\frac{\varepsilon}{۳}$$

به طوری که ملاحظه شد، باید $|x-۲|$ را از $\frac{\varepsilon}{۳}$ یا δ کوچکتر اختیار کنیم. نتیجه:

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰}$

اگر $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$، آنگاه $\delta\le\frac{۱}{۳۰۰۰۰}$

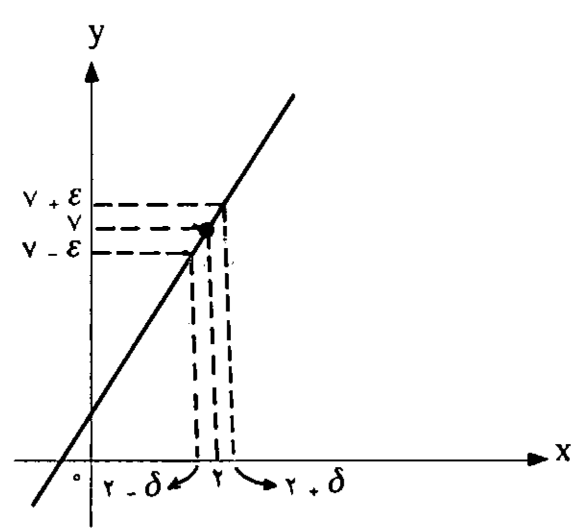
پس برای هر $\varepsilon>۰$، حداقل یک $\delta>۰$ (وابسته به ε) به دست می‌آید که:

$$۰<|x-۲|<\delta \Rightarrow |f(x)-۷|<\varepsilon$$

توجه:

$$|x-۲|<\delta \Rightarrow -\delta<x-۲<\delta \Rightarrow ۲-\delta<x<۲+\delta$$
$$|f(x)-۷|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-۷<\varepsilon$$
$$\Rightarrow ۷-\varepsilon<f(x)<۷+\varepsilon$$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



◄ تعریف ریاضی حدّ تابع:

فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x)$ در بازه (a,b) شامل $x_۰$ تعریف شده باشند. (ممکن است تابع f در خود $x_۰$ تعریف نشده باشد).

وقتی نوشته می‌شود $\begin{cases} \text{حد } f(x)=L \\ x\to x_۰ \end{cases}$

به این معنی است که: برای هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت کوچکی (وابسته به ε) مانند δ وجود دارد به طوری که:

اگر $۰<|x-x_۰|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

مثال (۱۱): نشان دهید در تابع به معادله $f(x)=۲x+۱$،

$$\begin{cases} \text{حد} f(x)=۳ \\ x\to ۱ \end{cases}$$

ابتدا به طریقه شهودی (تشکیل جدول x و $f(x)$) مسأله را بررسی می‌کنیم.

x	۰/۷	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲
f(x)	۲/۴	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	→	۳	←	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۳/۶

به طوری که این جدول نشان می‌دهد، وقتی x از دو طرف به عدد (۱) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۳) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. حال اگر از دیدی دیگر به جدول نگاه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به عدد (۳) نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به عدد (۱) نزدیک کنیم.

به عبارت دیگر مقدار $|f(x)-۳|$ را می‌توانیم به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم. حال مسأله را با استفاده از تعریف ریاضی حدّ تابع، حل می‌کنیم.

می‌گوییم حدّ تابع فوق وقتی $x\to ۱$ عدد (۳) است هرگاه:

به ازاء هر عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε)، عدد مثبت δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

اگر $۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

این تعریف می‌گوید مقدار $|f(x)-۳|$ را به اندازه دلخواه (ε) به صفر نزدیک می‌کنیم به شرطی که مقدار $|x-۱|$ را به قدر کافی

(به قدر δ) به صفر نزدیک کنیم. می‌نویسیم:

$$|f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x+1-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x-2|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \delta \le \frac{\varepsilon}{2}$$

پس اگر $|x-2|$ را کوچکتر از δ اختیار کنیم، آنگاه $|f(x)-3|$ کوچکتر از مقدار دلخواه (ε) خواهد شد.

اگر $\varepsilon=\frac{1}{100}$، آنگاه $\delta \le \frac{1}{200}$

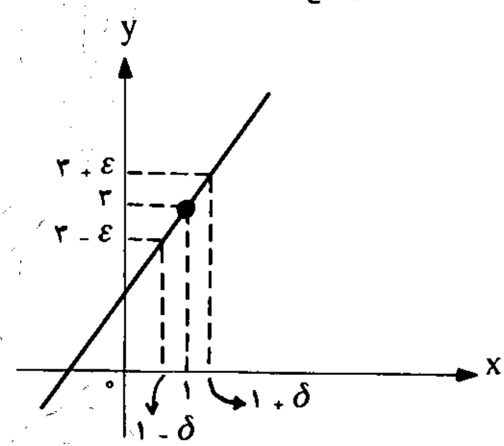
اگر $\varepsilon=\frac{1}{1000}$، آنگاه $\delta \le \frac{1}{2000}$

اگر $\varepsilon=\frac{1}{10000}$، آنگاه $\delta \le \frac{1}{20000}$

پس برای هر $\varepsilon>0$، حداقل یک δ (وابسته به ε) وجود دارد که:

اگر $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$

نمودار هندسی تابع و بحث فوق چنین است.



$$|x-1|<\delta \Rightarrow -\delta<x-1<\delta \Rightarrow 1-\delta<x<1+\delta$$

$$|f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-3<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 3-\varepsilon<f(x)<3+\varepsilon$$

مثال (۱۲): با تعریف ریاضی حدّ تابع ثابت کنید:

$$\begin{cases} \text{حد}\,(x^2-4x)=-4 \\ x\to 2 \end{cases}$$

حل: می‌خواهیم نشان دهیم که در تابع به معادله $f(x)=x^2-4x$ وقتی x به عدد (۲) نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به عدد (۴-) نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارت دیگر $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد (۴-) نزدیک کرد به شرطی که، x را به قدر کافی به عدد (۲) نزدیک کنیم یعنی $|f(x)+4|$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به عدد صفر نزدیک کرد به شرطی که $|x-2|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

به بیان کلّی‌تر می‌خواهیم $|f(x)+4|$ را به اندازه‌ای به صفر نزدیک کنیم تا از عدد مثبت فوق‌العاده کوچک (ε) کوچکتر باشد. به شرطی که $|x-2|$ را به قدر کافی به صفر نزدیک کنیم تا $|x-2|$ کوچکتر از δ (وابسته به ε) باشد.

می‌نویسیم:

$$|f(x)+4|<\varepsilon \Rightarrow \left|x^2-4x+4\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x-2)^2\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow (x-2)^2<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta \le \sqrt{\varepsilon}$$

پس باید $|x-2|$ را آنقدر به صفر نزدیک کنیم تا $0<|x-2|<\delta$

مثال (۱۳): ثابت کنید حدّ تابع f به معادله

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}$$

وقتی $x\to 3$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم: برای هر $\varepsilon>0$، لااقل یک عدد مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)}\right|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} x\to 3 \\ \quad |x-1|=\ (x-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-3|<\varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon$$

مثال (۱۴): ثابت کنید، حدّ تابع به معادله $f(x)=(-1)^{[x]}(2x-6)$ وقتی $x\to 3$ برابر صفر است.

حل: باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>0$، لااقل یک عدد

مثبت مانند (δ) وجود دارد به طوری که:

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|(-1)^{[x]}(2x-6)\right|<\varepsilon$$

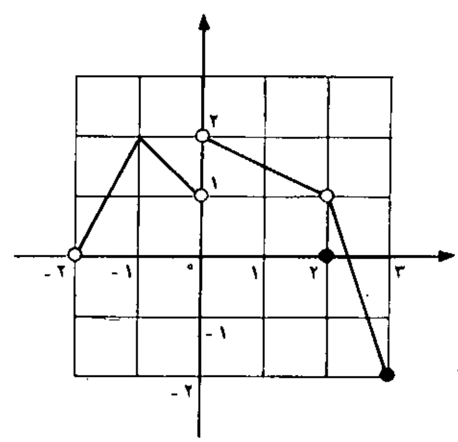
توجه:

$$\begin{cases}(-1)^{[x]}=\pm 1\\ x\to 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow |\pm(2x-6)|<\varepsilon \Rightarrow |\pm 2(x-3)|<\varepsilon \Rightarrow 2|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \quad \delta \le \frac{\varepsilon}{2}$$

تمرین۱: فرض کنید نمودار تابع f شکل زیر باشد. حدّهای زیر را بیابید.



$$\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to 3^-\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to 1^+\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to 1^-\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{حد } f(x)\\ x\to -1\end{cases}$$

تمرین ۲: توابع به معادلات زیر مفروض‌اند جدول زیر را برای هر کدام کامل کنید.

$$f(x)=\sqrt{x-1} \qquad f(x)=\left|\frac{x^2-4}{|x|-2}\right|$$

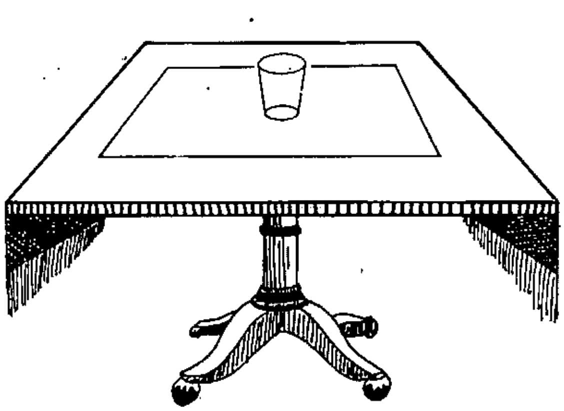
$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|}$$

x	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹ ⟵	۲	⟶ ۲/۰۱	۲/۱	۲/۳
f(x)							



تفریح اندیشهٔ ۱

لیوان آبی بر چهار پایهٔ پوشیده از سفره‌ای قرار دارد. چگونه می‌توان بدون دست زدن به لیوان، سفره را از روی چهارپایه برداشت و لیوان را باقی گذاشت؟



جواب در صفحهٔ ۸۸



تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران (۱۶)

در شمارهٔ ۱۴ مجلهٔ یکان تحت عنوان: «بی‌آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید.» چنین می‌خوانیم:

در یک ردیف خانه پنج زوج زندگی می‌کنند: آقا و خانم صبور، وفا، صبا، غیور و پایا. پنج فروشنده هستند که هیچ‌کدام متأهل نیستند و به‌این خانه‌ها مراجعه می‌کنند. فرض کنیم که اینها بقال و نفت‌فروش و نانوا و قصاب و روزنامه‌فروش باشند. اسامی این فروشنده‌ها عبارت است از صبور، وفا، صبا، غیور و پایا اما نه به‌ترتیب.

خواهر شوهردار قصاب در خانهٔ شماره ۱ زندگی می‌کند.

آقای غیور در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

شخصی که همنام روزنامه‌فروش است خویشاوندی ندارد.

شخصی که همنام قصاب است در خانهٔ شماره ۲ زندگی می‌کند.

آقای غیور با شوهر خواهر قصاب به‌کار می‌رود.

آقای وفا به‌شخصی که همنام نفت‌فروش است در باغچه‌اش کمک می‌کند.

آقای صبا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام روزنامه‌فروش است زندگی می‌کند.

خانم صبور و خانم غیور خواهرند.

شخصی که همنام نانواست فقط یک شوهرخواهر دارد که در خانهٔ شمارهٔ ۳ زندگی می‌کند.

آقای پایا در همسایگی دیوار به‌دیوار شخصی که همنام نفت‌فروش است زندگی می‌کند.

آیا می‌توانید بگویید که نام هر یک از فروشنده‌ها چیست؟ همچنین شماره‌های خانهٔ هر یک از این زوجها چیست؟

در همین شماره در نامه‌ای از هوشنگ شریف‌زاده به‌مجله دربارهٔ اعداد فیثاغورسی چنین آمده است:

... در شمارهٔ ۱۳ مجلهٔ یکان مقاله‌ای تحت عنوان «ساده‌ترین راه تعیین اعداد فیثاغورسی» به‌قلم آقای خلیل‌صدیق ارشادی ملاحظه شد. ایشان پس از مطالعه در مورد اعداد فیثاغورسی بیمار و در بیمارستان بستری شدند و در همان موقع موفق به‌کشف دو فرمول شدند که برای اظهارنظر به‌چند نفر از استادان خارجی طی نامهٔ خصوصی ارسال داشته‌اند. این فرمولها که به‌قول خودشان کاملاً بی‌سابقه بوده است عبارت بود از:

$$X^2+[(\frac{X}{2})^2-1]^2=[(\frac{X}{2})^2+1]^2$$

که در آن X عددی است زوج و:

$$Y^2+(\frac{Y^2-1}{2})^2=[(\frac{Y^2-1}{2})^2+1]^2$$

که در آن Y عددی است فرد. جدولی هم برای اعداد از یک تا بیست‌وشش تنظیم فرموده بودند. ایشان مرقوم داشته‌اند «از طریق حل این فرمولها، با دردست داشتن یکی از اعداد می‌توان دو عدد دیگر را پیدا کرد، به‌عبارت دیگر اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع دیگر و وتر آن نیز به‌آسانی تعیین می‌گردد». بنده از آقای مکتشف عزیز سؤال می‌کنم که اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ باشد ضلع دیگر چقدر خواهد شد ۷ یا ۱۰ یا ۱۴۳(!؟). خواهشمند است قبلاً به‌جدول مراجعه و بعد پاسخ دهند.

فرمولی که آقای صدیق ارشادی کشف فرموده‌اند! قبل از ایشان به‌وسیلهٔ فیثاغورس، افلاطون و براهماگوپتا در قرون قبل از میلاد بیان شده است و این موضوع در غالب کتب ریاضی مذکور می‌باشد از جمله در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام نگارش آقای غلامحسین مصاحب:

۱ ـ فرمولی را که فیثاغورس به‌دست آورده:

$$(2n^2+2n+1)^2=(2n^2+2n)^2+(2n+1)^2$$

و یا اگر n فرد باشد:

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

۲ ـ فرمولی که افلاطون به‌دست داده:

$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

۳ ـ دستوری که براهماگوپتا پیدا کرده به‌صورتهای زیر است:

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$$

و

$$(\sqrt{m})^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-n\right)\right]^2=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+n\right)\right]^2$$

* * *

آقای مرتضی صدیقین تذکر داده‌اند که فرمولهای مذکور در مقالهٔ مزبور در کتاب هندسهٔ مسطحهٔ تألیف میرزارضاخان مهندس‌الملک در صفحهٔ ۱۹۸ مذکور می‌باشد. ایشان همچنین تذکر داده‌اند که استعمال این فرمولها خالی از اشکال نبوده و برای دانش‌آموزان ایجاد اشکال می‌نماید.

باز هم در همین شماره در شرح حال دکتر اکبرزاده به‌قلم دکتر هوشنگ منتصری چنین آورده شده است:

آقای دکتر حسن اکبرزاده در سال ۱۳۰۶ شمسی در شهرستان رشت به‌دنیا آمده، آموزش ابتدایی را در همان شهر و تحصیلات متوسطه را در سال ۱۳۲۶ در دبیرستان البرز خاتمه داده سپس وارد دانشکدهٔ علوم تهران گردیده، در سال ۱۳۲۹ لیسانس در رشتهٔ علوم ریاضی را با احراز رتبهٔ اول و اخذ مدال علمی به‌پایان رسانید.

پس از پایان تحصیلات دانشگاهی در ایران بلافاصله برای ادامهٔ تحصیلات عالیهٔ خود به‌فرانسه مسافرت کرده و در دانشگاه پاریس «سوربون» در مدت دو سال بعد از گذراندن چهار شهادت‌نامه (ریاضیات عمومی ـ مکانیک استدلالی، حساب جامعه و فاضله و هندسهٔ عالی) مجدداً به‌اخذ درجهٔ لیسانس علوم ریاضی نایل گردید. یک سال بعد با دریافت شهادت‌نامهٔ آنالیز عالی کار رسالهٔ دکترای خود را آغاز نمود.

موضوع رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ «فضاهای فینسلر» می‌باشد. «فینسلر» ریاضیدان سویسی در اوایل قرن بیستم بوده است. در دنبالهٔ مطالعات خود به‌یک نوع از فضاهایی که بعدها به‌نام خود او معروف گردید برخورد نمود، این فضاها نوع عمومیتر و دقیقتری از فضاهای «ریمان» می‌باشد که در رشته‌های «فیزیک ریاضی» موارد استعمال دارد.

ارتباط فضاهای فینسلر با سایل مطروحه در «نسبیت عمومی» و آخرین نظریهٔ انیشتین «نظریهٔ وحدانی» و همچنین در توضیح و تفسیر تئوریهای مکانیک آنالتیک و مکانیک کوانتیک از دیرباز مورد توجه دانشمندان قرار داشته است به‌طوری که در سالهای اخیر بسیاری از مکتبهای ریاضی شالودهٔ تئوریهای مزبور را بر اساس فضاهای فینسلر طرح کرده‌اند.

مطالعات و تحقیقات آقای دکتر اکبرزاده دربارهٔ پی‌ریزی جدید و عمومیت فضاهای فینسلر آنقدر جالب و پرارزش بود که بعد از تهیه و تنظیم دو یادداشت به‌آکادمی علوم پاریس در همان حال که کار رسالهٔ دکترای خود را تعقیب می‌نمود به‌عنوان وابستهٔ تحقیقاتی در «مرکز دولتی تحقیقات علمی» استخدام گردید و پس از آن چهار یادداشت دیگر به‌آکادمی علوم پاریس تقدیم نمود که همهٔ این شش یادداشت به‌صورت جزواتی چاپ گردیده و به‌کلیهٔ مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی کشورهای جهان فرستاده شده است.

بالاخره در ۱۳ ژوئن ۱۹۶۱ بعد از یازده سال تحصیل و تحقیق در پاریس رسالهٔ دکترای دولتی خود را با درجهٔ «شایان افتخار» که بالاترین درجات تصویب یک رساله از طرف هیئت قضات می‌باشد گذراند.

پس از پایان تحصیلات آقای دکتر اکبرزاده به‌سمت «مأمور تحقیقاتی» در مؤسسهٔ معروف «کلژدوفرانس» انتخاب گردید.

متن رسالهٔ آقای دکتر اکبرزاده به‌علت اهمیت علمی آن در سالنامهٔ

دانشسرای عالی در پاریس (۱۹۶۳ - ۱۹۶۲) چاپ گردیده و در کلژدوفرانس و همچنین در پاره‌ای از دانشکده‌های خارج از فرانسه نیز تحقیقات این جوان ایرانی با ذکر نام خود او تدریس می‌شود.

کار آقای دکتر اکبرزاده در کلژدوفرانس صرف‌نظر از ادامهٔ تحقیقات، دادن یک سلسله کنفرانسها و هدایت پروفسور آگرژه‌هایی است که مشغول تهیهٔ رسالهٔ تحقیقاتی می‌باشند. ←

در شمارهٔ ۱۵ یکان در مقالهٔ:

نظری اجمالی به‌مبانی ریاضیات

که از دکتر استول و ترجمهٔ جهانگیر شمس‌آوری است و در انجمن معلمان ریاضی در ۲۴ اسفند ۱۳۴۳ ایراد شده چنین می‌خوانیم:

نخستین هدف من از این سخنرانی وصف شرایطی است که بعضی از ریاضیدانان را واداشت که عطف توجهی به‌مبانی ریاضیات مبذول دارند. اجازه بدهید که خیال شما را از این بابت راحت کنم که فرض من بر این بوده است که هیچ آشنایی‌ای با این رشته از دانش که همه خود را وقف آن کرده‌ایم ندارم. نظر من در این خصوص برحسب تجربه‌های شخصی منعکس ساختن این حقیقت است که از میان کسانی که ریاضیات را به‌کار می‌برند، یا خالق آن هستند، تنها چند تنی علاقه و آشنایی با مبانی آن دارند. شاید از روی حسن نیت باشد که اذعان کنیم که مبانی ریاضیات در وضع نسبتاً تأسف‌انگیزی قرار دارد.

اخیراً یکی از پژوهندگان مشهور ریاضیات وضع بنای ریاضیات را به‌یک کشتی تشبیه کرده است که از یک طرف به‌آهستگی در آب فرو می‌رود و از طرف دیگر به‌نظر می‌رسد که به‌علت سرعت خارق‌العادهٔ نمو و توسعهٔ روبنایش در آب بالا می‌آید.

مطالب را با نام بردن از مفاهیم ریاضی که به‌کار خواهم گرفت آغاز می‌کنم.

۱) سلسلهٔ طبیعی اعداد مانند ۱ و ۲ و ۳ و... که به‌منظور شمردن به‌کار گرفته می‌شوند.

۲) مفهوم مجموعه. یک مجموعه، با درک مستقیم و به‌طور کشف و شهود، گرد آمده‌ای از اشیا است. هر یک از اشیای این مجموعه به‌نام عنصر یا عضو مجموعه خوانده می‌شود. چنانچه x عنصر مجموعه A باشد آن را چنین می‌نویسیم: $x\in A$.

مجموعه‌های A و B متساوی‌اند اگر و فقط اگر عضوهای آنها یکی باشد و آن را با علامت چنین می‌نویسیم: $A=B$. به‌مجموعه‌های خود، مجموعهٔ تهی یا خالی را نیز علاوه می‌کنیم و آن مجموعه‌ای است که هیچ عضو ندارد و با علامت چنین نشان داده می‌شود: $\varnothing$.

۳) رابطهٔ شمول برای مجموعه‌ها: اگر A و B مجموعه‌هایی باشند که هر عضو A عضوی از B باشد، A جزء B است که با علامت چنین نوشته می‌شود: $A\subseteq B$. همچنین می‌توان گفت که A زیرمجموعه‌ای از B است اگر داشته باشیم $A\subseteq B$ و $A\neq B$، A زیرمجموعهٔ واقعی B است که با علامت چنین نشان داده می‌شود: $A\subset B$.

۴) چنانچه A مجموعه‌ای باشد، مجموعهٔ تواندار A (که با علامت چنین نمایش داده می‌شود: $P(A)$) مجموعه‌ای است که اعضایش زیرمجموعه‌های مختلف A است. به‌طور مثال اگر A مجموعه‌ای با عنصرهای ۱ و ۲ و ۳ باشد (که چنین نمایش داده می‌شود: $A=\{۱,۲,۳\}$)، مجموعهٔ تواندار آن چنین است:

$$P(A)=\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}\}$$

توجه داشته باشید که $P(A)$ دارای $۸=۲^۳$ عضو است. به‌طور کلی اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، مجموعهٔ تواندار آن دارای ۲^n عضو است.

۵) مفهوم اندازهٔ یک مجموعه. در زندگی روزانه اندازهٔ یک مجموعه را با یک عدد از سلسلهٔ طبیعی اعداد بیان می‌کنیم. می‌گوییم که مجموعهٔ A دارای اندازه‌ای برابر n است (و آن را چنین می‌نمایانیم $\#A=n$) اگر بتوان عضوهای A را در مقابلهٔ عضوهای مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ قرار داد. (به‌زبان دقیق این بدان معنی است که مقابلهٔ یک به‌یک بین اعضای مجموعهٔ A و مجموعهٔ $\{۱,۲,...,n\}$ برقرار است.) مجموعه‌هایی که اندازه‌های آنها را بتوان به‌این وسیله معین کرد مجموعه‌های محدود نامیده می‌شوند. در ریاضیات اغلب مجموعه‌هایی درنظر گرفته می‌شوند که محدود نیستند. چنان مجموعه‌هایی نامحدود خوانده می‌شوند. معمولاً مقایسهٔ اندازه‌های مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ معین کردن اندازهٔ هر یک از آنها و بعد مقایسهٔ اعداد به‌دست آمده از نظر ترتیب قرار گرفتنشان در سلسلهٔ طبیعی اعداد به‌عمل می‌آید. به‌طور مثال اگر معلم A بگوید که تعداد شاگردان او بیش از تعداد شاگردان B است، احتمال دارد که به‌این مطالب ضمن مقایسهٔ تعداد شاگردان کلاس خود، که به‌طور مثال ۴۰ تا است، و تعداد شاگردان کلاس معلم B، که به‌طور مثال ۳۰ تا

است، پی برده باشد. اما توجه داشته باشید که حاجتی برای به‌کار بردن اعداد طبیعی در این مثال نیست. بدین معنی که هریک از این دو معلم می‌توانند به‌همان نتیجه برسند چنانچه صورت اسامی شاگردان کلاسهای خود را تهیه و مشاهده کنند که صورت اسامی شاگردان معلم B قابل مقابله با یکی از زیرمجموعه‌های واقعی صورت اسامی شاگردان معلم A است.

مطالبی که تا اینجا بیان شد برای آمادگی کافی است و اکنون به‌موضوع اصلی باز می‌گردم. در سال ۱۸۸۰ کانتور ریاضیدان آلمانی علاقمند به‌مقایسهٔ اندازهٔ بعضی مجموعه‌های نامحدود گشت. تحقیقات وی منجر به‌نظریهٔ مجموعه‌ها و به‌ویژه نظریهٔ حساب ماورای حد که یک رشته از همین حساب معمولی اعداد طبیعی است گشت. تعریف اساسی وی که خواهیم گفت بر پایهٔ آن چیزی است که در آخرین قسمت، یعنی شمارهٔ ۵، از مقدمات بالا آمده است.

تعریف ـ فرض کنید که A و B دو مجموعه باشند. می‌گوییم که A و B دارای یک اندازه هستند و چنین می‌نویسیم: $A \sim B$ اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر A و B وجود داشته باشد. اندازهٔ مجموعهٔ A بزرگتر از اندازهٔ مجموعهٔ B است (که چنین نوشته می‌شود: $A > B$) اگر و فقط اگر مقابله‌ای یک به‌یک بین عناصر B و زیرمجموعه‌ای از A وجود داشته باشد و برعکس آن چنین نباشد.

هنگامی که مجموعه‌های محدود را به‌کار می‌بریم، تعاریف فوق موافق مفاهیمی است که از اندازه در شمارهٔ ۵ ذکر کردیم.

به‌هر حال آنچه مهم است این که این تعاریف در مجموعه‌های نامحدود نیز قابل استعمال هستند. وقتی که این تعاریف را دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود به‌کار می‌بریم مواجه با نتایجی می‌شویم که اغلب برخلاف آن چیزی است که به‌وسیلهٔ شهود و درک مستقیم و محسوسات حاصل می‌آید. به‌طور مثال اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح و اندازهٔ مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت گویا به‌همان اندازهٔ مجموعهٔ N یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی است. بنابراین اندازهٔ مجموعهٔ نامحدود ممکن است که به‌اندازهٔ بعضی از زیرمجموعه‌های واقعی خود باشد!

مجموعه‌های نامحدودی هستند که اندازهٔ آنها بزرگتر از N است. یکی از آنها مجموعهٔ I یعنی مجموعهٔ همه اعداد حقیقی x است به‌قسمی که $0 < x < 1$. یعنی $I > N$. از طرف دیگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی اندازه‌ای برابر اندازهٔ مجموعهٔ I دارد. این حقیقت که $I > N$ ما را در برابر این پرسش قرار می‌دهد که آیا زیرمجموعه‌ای وجود دارد به‌قسمی که داشته باشیم $I > S$ و $S > N$. تاکنون پاسخ این پرسش معلوم نشده است.

برای هر مجموعهٔ A، مجموعهٔ تواندار A دارای اندازهٔ بیشتری است. این قضیه را کانتور عنوان کرده است و تعمیم نتیجه‌ای دربارهٔ مجموعه‌های نامحدود است. زیرا با به‌خاطر آوردن این که اگر A صاحب n عضو باشد، $P(A)$ صاحب 2^n عضو است. مسلم می‌شود که به‌ازای هر عدد n از سلسلهٔ طبیعی اعداد $2^n > n$.

متأسفانه این قضیهٔ کانتور منجر به‌یک تناقض می‌شود. برای نشان دادن این تناقض مجموعهٔ S را که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است درنظر بگیرید. طبق قضیه $P(S) > S$. از سوی دیگر، چون $P(S)$ خود یک مجموعه است (مجموعه‌ای که عناصرش زیرمجموعه‌های S هستند) $P(S) \subseteq S$. از اینجا عناصر $P(S)$ را می‌توان به‌راه ساده‌ای در مقابلهٔ عناصر یک زیرمجموعه از S قرار داد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان متعاکساً عناصر مجموعهٔ S را در مقابلهٔ عناصر زیرمجموعه‌ای از $P(S)$ قرار داد؟ در پاسخ این سؤال اگر فرض کنیم که چنین چیزی امکان دارد می‌توان به‌این نتیجه رسید که $P(S) \sim S$. و این متناقض نتیجه‌ای است که $P(S) > S$. حال اگر فرض کنیم که پاسخ به‌آن پرسش «نه» باشد، نتیجه می‌گیریم که $S > P(S)$ و باز با تناقض مواجه می‌شویم.

این تناقض که به‌نام پارادوکس کانتور مشهور است یکی از چند تناقضی است که با قیاس از نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه‌های ماورای حد، درست در همان زمان که نظریهٔ او مورد قبول ریاضیدانان گشت، استنباط شده است. هنگامی که به‌اهمیت این تناقضات پی برده شد، ریاضیدانان، خود و ریاضیات را مواجه با بحرانی حقیقی یافتند. بعضی متحمل بار سنگین به‌نظم درآوردن خانهٔ خود گشتند. کوشش آنان شکلهای مختلفی گرفت. کوششی برای تجدید ساختمان نظریهٔ مجموعه چون یک نظریهٔ اصولی (اکسیوماتیک) انجام گرفت. توصیه‌هایی که از این طریق نیل به‌مقصود مورد بحث قرار گرفت این بود که این تناقضات مربوط به‌مجموعه‌های بسیار بزرگ است (پیش از این، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را درنظر گرفتیم) ـ و بنابراین باید حدودی در اطراف مفهوم مجموعه قرار داد تا مجموعه‌های مزاحم طرد شوند. این عمل (آنچنان که بحثش ادامه دارد) ممکن است به‌وسیلهٔ زیرنفوذ درآوردن مفاهیم نظریهٔ مجموعه توسط اصول موضوعه انجام پذیرد، به‌همان طریق که در یک هندسهٔ مستحکم

اقلیدسی «نقطه» و «خط» تحت فرمانبری از اصول موضوعه هستند. نخستین دستگاه اصولی نظریهٔ مجموعه به‌وسیله زرملا در سال ۱۹۰۸ عرضه گشت. پس اصلاحاتی در این نظریه به‌وسیله فرانکل (سال ۱۹۲۰)، سکولم (سال ۱۹۲۰)، وان‌نومان (سال ۱۹۲۰)، برنیز (سال ۱۹۴۰) و گودل (سال ۱۹۴۰) انجام گرفت. وضع موجود اصل‌بندی نظریهٔ مجموعه را که توسط اکثر ریاضیدانان پذیرفته شده است چنین می‌توان توضیح داد: هیچ تناقضی از میان آنها مشتق نشده است. (البته، هر اصل‌بندیی که متضمن تناقضی بوده کنار گذاشته شده است.) از طرف دیگر نامتناقض بودن هیچ یک از آنها ثابت نشده است، یعنی غیرممکن است که مطلبی از نظریه ساخته شود به‌قسمی که هم آن و هم نفی آن قضیه باشند.

راه‌حل اساسی دیگر برای برطرف ساختن بحرانی که به‌وسیلهٔ این تناقضات به‌وجود آمده بود روش بسیار وسیعتری را درنظر گرفت. و آن به‌وسیلهٔ ریاضیدانانی که قادر نبودند یا در جهت توسعهٔ نظریهٔ کانتور دربارهٔ مجموعه یا در اشتقاق تناقضات نظیر آنچه بدان اشاره شد نکته‌ای اساسی بیابند عرضه گشت. آنها به‌موضوع روش استدلال و ناصحیح بودن آن پرداختند. بدین‌ترتیب آنها به‌این نتیجه رسیدند که یک مسئله واقعی که باید به‌حل آن اقدام کرد همان روشن ساختن مفهوم اثبات درست است. تصدیقی که در حدود سال ۱۹۰۰ به‌وسیلهٔ بعضی از ریاضیدانان عرضه گشت مبنی بر این که مفهوم اثبات درست را تحت هیچ قاعده‌سازیی نمی‌توان برحسب اصطلاحهای صریح و ریاضی در آورد مشخص آغاز پژوهشهای نوین در بنیان ریاضیات است.

بخصوص اساس مطالعه‌ای منظم و تحت قاعده به‌وسایل ریاضی دربارهٔ قوانین منطق که قدم به‌قلمرو اثبات ریاضی می‌گذارند نهاده شد. از کارهای اولیهٔ بول و دیگران راسل منطقدان انگلیسی و همکارش وایت‌هد چون یک نظریهٔ اصولی دستگاهی از منطق مناسب برای ریاضیات بیرون کشیده آن را توسعه دادند. (اصلاحی از این نظریه، که عموماً به‌نام حساب مجهولات از رتبهٔ اول خوانده می‌شود در کتابهای درسی نوین منطق ریاضی آمده است.) راسل و وایت‌هد با عدم رضایت از انجام کار، در کتاب تاریخی خود به‌نام اصول ریاضیات، (۱۹۱۳ - ۱۹۱۰) کوشش کردند نشان دهند که همهٔ ریاضیات می‌تواند در چهارچوب دستگاه منطق آنها به‌تکامل بگراید. ماهیت روش آنها در این خصوص در حقیقت تجربی بود چه آنها نشان دادند که چگونه رشته‌هایی از ریاضیات نظیر نظریهٔ مجموعه، نظریهٔ اعداد، و هندسه را می‌توان بر اساس نظریهٔ آنها عرضه داشت و قضایای اصلی این نظریه‌ها را براساسی متحدالشکل و با قاعده استوار ساخت. اما از نظر واقعیت، آنها برای موضوع مورد بحث خود اثباتی ارائه نکرده‌اند. ممکن است که سؤال شود برای اثبات چه می‌توانست ارائه شود؟ یقیناً، اگر همچنان که راسل و وایت‌هد ادعا کردند، ادعا شود که حساب مقدماتی می‌تواند در میان دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ارائه شده تجلی نماید، آن وقت برای هر فرمول داده شدهٔ حساب باید حالتی باشد که یا آن یا نفی آن یک قضیه باشد (یعنی نظریه باید کامل باشد). اینکه اصول ریاضیات کامل نیست (یعنی غیرکامل است) در سال ۱۹۳۱ به‌وسیلهٔ گودل اثبات گردید.

بدین‌ترتیب که وی نشان داد بر اساس محدود کردن توجه به‌آن قسمت از اصول ریاضیات که مناسب برای ظاهر ساختن حساب است فرمولی هست به قسمی که نه آن و نه نفی آن را می‌توان از اصول موضوعه و به‌وسیلهٔ قوانین نتیجه‌گیری فراهم آورده شده اثبات کرد. علاوه بر این اثبات گودل نشان داد که مطالب را با افزودن اصول موضوعهٔ اضافی نیز نمی‌توان ترمیم کرد. بالاخره، (با به‌خاطر آوردن تعریف نامتناقض بودن یا سازگاری که پیش از این گفته شد) گودل ثابت کرد که اگر دستگاهی مانند دستگاهی که در کتاب اصول ریاضیات ذکر شده است نامتناقض باشد، غیرممکن است که بتوان آن حقیقت را یعنی نامتناقض بودن آن را اثبات کرد.

گرچه نتایج مأخوذهٔ گودل پایه‌های تز وایت‌هد و راسل و همچنین امیدهای دیگران را فرو ریخت، ولی مقدری هم برای موضوع بنیانهای ریاضیات یا منطق ریاضی معلوم نساخت بدین‌معنی که هر دوی آنها زینت‌بخش رشته‌های ریاضیات هستند ولی جهت هر یک به‌وسیلهٔ نتایج عمیقی که گودل به دست آورد تغییر یافته است.

در همین شماره در مقالهٔ:

محاسبهٔ Σn^p

که توسط رضا منصوری[1] دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان رهنما، با الهام از روش ابوبکرمحمد کرخی در محاسبهٔ Σn^3 (مذکور در کتاب جبر و مقابلهٔ خیام، تألیف: مصاحب) نوشته شده چنین آمده است:

۱ - محاسبهٔ Σn : مربع ABCD را به‌ضلع n (n عدد صحیح مثبت) بنا کرده، مطابق شکل طولهای BB_1 و DD_1 را برابر با واحد جدا می‌کنیم. مساحت سطح محصور به $BB_1C_1D_1DC$ برابر خواهد

بود با:

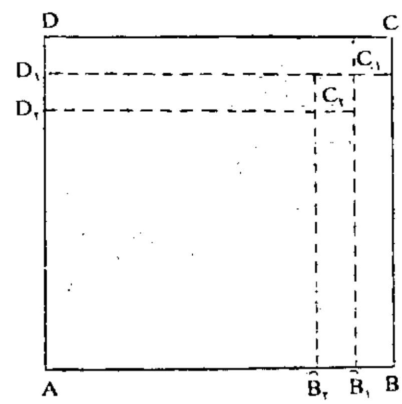
$2n-1$ اگر طولهای B_1B_2 و D_1D_2 را نیز برابر با واحد جدا نماییم مساحت سطح محصور به $B_1B_2C_2D_2D_1C_1$ برابر خواهد شد با $2(n-1)-1$ و با تکرار این عمل نتیجه خواهیم گرفت که سطح مربع ABCD برابر است با:

$$[2n-1]+[2(n-1)-1]+[2(n-2)-1]+\dots+[4-1]+[2-1]$$

که برابر می‌شود با $2\Sigma n-n$ و چون مساحت سطح مربع به‌ضلع n برابر n^2 است پس:

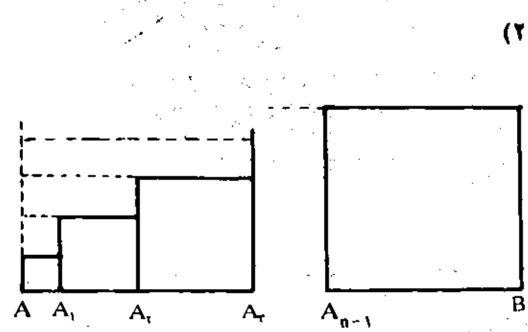
$$2\Sigma n-n=n^2 \quad , \quad \Sigma n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

شکل (۱)



۲ـ محاسبهٔ Σn^2: قطعه خط AB به‌طول $AB=\Sigma n$ را درنظر می‌گیریم. بر این قطعه خط ابتدا از A قطعه خطهای $AA_1=1$ و $A_1A_2=2$ و... و $A_{n-1}B=n$ را جدا کرده روی هر یک از این قطعه خطها مربعی بنا می‌کنیم. مجموع سطوح این مربعها برابر با Σn^2 است.

شکل (۲)



اگر مجموع سطوح این مربعها را از سطح مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+[1+2+\dots+(n-1)]$$

یا به‌صورت دیگر:

$$\Sigma(n-1)+\Sigma(n-2)+\dots+\Sigma[n-(n-1)]$$

که برابر می‌شود با:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\dots+\frac{[n-(n-2)][n-(n-1)]}{2}$$

و به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{2}[n^2-n+(n-1)^2-(n-1)+(n-2)^2-(n-2)+\dots]$$

و درنتیجه برابر است با:

$$\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)$$

و چون سطح کل مستطیل فوق‌الذکر برابر $n.\Sigma n$ است پس:

$$\Sigma n^2+\frac{1}{2}(\Sigma n^2-\Sigma n)=n\Sigma n$$

و از آنجا به‌دست خواهد آمد:

$$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

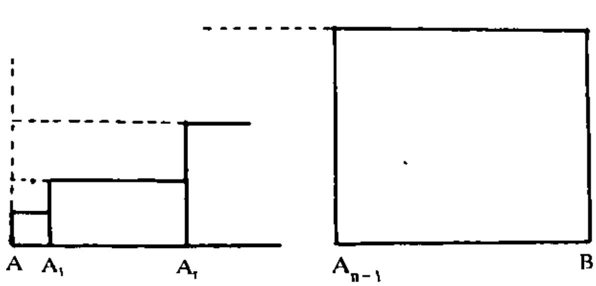
۳ـ محاسبهٔ Σn^p: به‌فرض این که Σn^{p-1} معلوم باشد قطعه خط AB را به‌طول Σn^{p-1} اختیار کرده بر آن قطعه خطهای $AA_1=1^{p-1}$ و $A_1A_2=2^{p-1}$ و... و $A_{n-1}B=n^{p-1}$ را جدا کرده بر روی آنها مستطیلهایی می‌سازیم که ارتفاع آنها به‌ترتیب برابر با ۱ و ۲ و ۳ و ... و n باشد. مجموع سطوح این مربع مستطیلها برابر با Σn^p است و چنانچه مجموع این مساحتها را از مساحت مستطیل به‌طول AB و به‌عرض n کم کنیم، مساحت سطح باقیمانده برابر است با:

$$1^{p-1}+(1^{p-1}+2^{p-1})+\dots+[1^{p-1}+2^{p-1}+\dots+(n-1)^{p-1}]$$

که برابر است با:

$$\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

شکل (۳)



و باتوجه به‌این که مساحت سطح مستطیل فوق‌الذکر برابر با $n.\Sigma n^{p-1}$ است خواهیم داشت:

$$n\Sigma n^{p-1}=\Sigma n^{p}+\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1$$

و از آنجا:

$$\Sigma n^{p}=n\Sigma n^{p-1}-[\Sigma(n-1)^{p-1}+\Sigma(n-2)^{p-1}+\dots+1]$$

از فرمول بالا با معلوم بودن Σn مقدار Σn^2 و از روی آن Σn^3 و بعد Σn^4 و... و بالاخره Σn^p حساب می‌شود.

* * *

تمرین: روابط زیر را محقق کنید.

$$8\Sigma n^3=3(2n+1)\Sigma n^2-\Sigma n$$

$$5\Sigma n^4+\Sigma n^2=6\Sigma n\Sigma n^2$$

$$2\Sigma n^5+(\Sigma n)^2=3(\Sigma n^2)^2$$

$$7\Sigma n^6+5\Sigma n^4=12\Sigma n^2.\Sigma n^3$$

و نتیجه بگیرید:

$$\Sigma n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2=(\Sigma n)^2$$

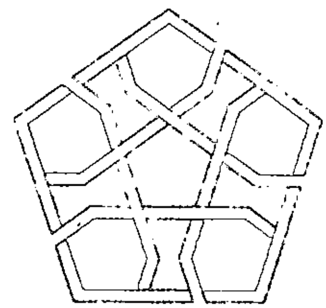
$$\Sigma n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\Sigma n^5=\frac{1}{2}[3(\Sigma n^2)^2-(\Sigma n)^2]$$

$$\Sigma n^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2-3n(n+1)+1]$$

★ یادداشت:

۱ ـ دکتر رضا منصوری فعلی استاد فیزیک و رئیس انجمن فیزیک ایران.





ادب ریاضی

سخنانی است با این خصوصیت که دیگران را به اشتباه می‌افکند و گمراه می‌کند. حق را به باطل مشتبه می‌سازد. ناحق را حق جلوه می‌دهد و حق را ناحق. کسی را که دانا نیست، دانای تیزبین معرفی می‌کند، و آن را که حکیم و داناست نادان وعامی می‌نماید.

لفظ سَفْسَطه درواقع نام فن و حرفه‌ای است که انسان را ـ به وسیلهٔ قول و ابهام ـ در کار مغالطه و فریبکاری و اشتباهکاری (تصویه و تلبیس) توانا می‌کند، خواه درمورد خودش به این که من صاحب علم و حکمت و فضیلت هستم، خواه درمورد دیگری به این که او شخصی ناقص و ناتمام است، بدون آنکه درواقع چنین بوده باشد.

احصاءالعلوم فارابی
ترجمهٔ خدیوجم

و بدترین قرنها قرنی است که در آن بساط اجتهاد و ریاضت درنوردیده شود و سیر اندیشه‌ها منقطع گردد و درهای مکاشفات بسته و راههای مشاهدات مسدود گردد.

حکمت‌الاشراق

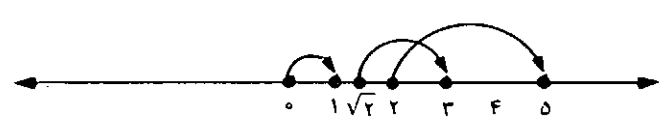


تبدیل ـ تبدیلات خطی
(نگاشتهای خطی)

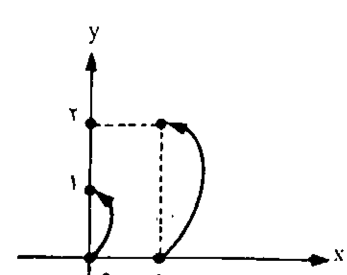
(دانش آموزان پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ ریاضی)

● حمیدرضا امیری

شاید ساده‌ترین نوع تبدیل را بتوانیم در توابع حقیقی جستجو کنیم، مثلاً وقتی می‌نویسیم $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$، $f(x)=x^{2}+1$ در واقع یک تبدیل روی خط اعداد حقیقی متصور می‌شود، در این مثال تابع f عدد حقیقی صفر را به ۱ ($f(0)=1$) و عدد حقیقی ۲ را به ۵ و عدد حقیقی $\sqrt{2}$ را به ۳ و ... تبدیل می‌کند، این تبدیل روی خط اعداد حقیقی انجام‌شده و کاملاً مشهود است.

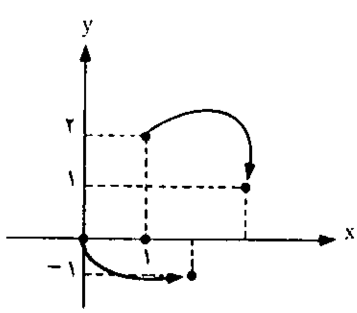


حال اگر تابعی را از IR به IR^{2} تعریف کنیم، هر عدد حقیقی را به‌یک زوج مرتب تبدیل کرده‌ایم و یا به‌عبارت دیگر هر نقطهٔ یک‌بُعدی را به‌نقطه‌ای با دو بعد در صفحهٔ مختصات دکارتی تبدیل کرده‌ایم. مثلاً اگر تعریف کنیم $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}^{2}$، $f(x)=(x,x+1)$ در این صورت تابع f عدد حقیقی صفر را به‌زوج مرتب (۱ و ۰) و عدد حقیقی ۱ را به‌زوج مرتب (۲ و ۱) و ... تبدیل می‌کند.



به‌عنوان مثال‌دیگری، تابع $f:\mathrm{IR}^{2}\to\mathrm{IR}^{2}$، $f((x,y))=(x+2,y-1)$ رادرنظرمی‌گیریم.

این تابع روی مجموعهٔ نقاط صفحهٔ دکارتی (IR^{2}) اثر کرده و هر نقطه را با ضابطه‌ای مشخص به‌نقطهٔ دیگری در همان صفحه تبدیل می‌کند. مثلاً، نقطهٔ (۲ و ۱) را به‌نقطهٔ (۱ و ۳) و یا نقطهٔ (۰ و ۰) را به (۱− و ۲) و ... تبدیل می‌کند، به‌نمودار توجه کنید:



به‌همین ترتیب می‌توان توابعی از صفحه (IR^{2}) به‌فضا (IR^{3}) و یا از IR^{3} به IR^{2} تعریف کرد. به‌عنوان مثال $f:\mathrm{IR}^{2}\to\mathrm{IR}^{3}$، $f((x,y))=(x+1,y-2,x+y)$ تابعی است از مجموعهٔ نقاط صفحه به فضای سه‌بعدی و $g:\mathrm{IR}^{3}\to\mathrm{IR}^{2}$، $g((x,y,z))=(x-1,y+z)$ نیز تابعی از IR^{3} به IR^{2} می‌باشد که هرکدام ویژگیهای مخصوص به‌خود را داشته و در نهایت یک تبدیل را برای ما انجام می‌دهند.

حال می‌خواهیم اندکی بیشتر روی تابع f در مثال اخیر، تأمل کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تأثیر تابع f روی یک عضو از

IR^2 یک سه‌تایی مرتب از IR^3 است که هر مؤلفهٔ این سه‌تایی مرتب با ضابطهٔ خاصی ایجاد می‌شود، اگر قرار دهیم:

$$f_1:IR^2\to IR \quad , \quad f_2:IR^2\to IR \quad , \quad f_3:IR^2\to IR$$

$$f_1((x,y))=x+1 \quad f_2((x,y))=y-2 \quad f_3((x,y))=x+y$$

در این صورت تابع f را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f:IR^2\to IR^3$$
$$f((x,y))=(f_1,f_2,f_3)$$

و در مورد تابع g اگر قرار دهیم

$$g_1:IR^3\to IR \quad و \quad g_2:IR^3\to R$$

$$g_1((x,y,z))=x-1 \quad g_2((x,y,z))=y+z$$

در این صورت تابع g را نیز می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$g:IR^3\to IR^2$$
$$g((x,y,z))=(g_1,g_2)$$

و همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر g_i تابعی است از $IR^3\to IR$.

در حالت کلی می‌توان این مطلب را تعمیم داده و بگوییم:

اگر f تابعی از IR^n به IR^m باشد، می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f:IR^n\to IR^m$$
$$f((x_1,x_2,\dots,x_n)=(f_1,f_2,\dots,f_m)$$

که در تعریف فوق هر f_i تابعی است از $IR^n\to IR$.

حال می‌خواهیم دستهٔ خاصی از تابعهای به‌شکل فوق را مورد بررسی قرار دهیم.

اگر در تابع $\begin{matrix} f:IR^n\to IR^m \\ f:((x_1,x_2,\dots,x_n))=(f_1,f_2,\dots,f_n)\end{matrix}$ ، هر f_i که تابعی‌از $IR^n\to IR$ می‌باشد برحسب x_1 و x_2 و ... و x_n از درجه ۱ و همگون باشد، آن را یک تابع خطی یا نگاشت خطی می‌نامند.

مثال ۱: تابع $\begin{matrix} f:IR^3\to IR^2 \\ f((x_1,x_2,x_3))=(f_1,f_2)\end{matrix}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود خطی است:

$$f_1((x_1,x_2,x_3))=x_1+x_2-2x_3$$
$$f_2((x_1,x_2,x_3))=2x_1+x_2$$

مثال ۲: تابع $\begin{matrix} f:IR^2\to IR^3 \\ f((x_1,x_2))=(f_1,f_2,f_3)\end{matrix}$ که به‌صورت زیر تعریف شده است، خطی نمی‌باشد، زیرا در تعریف f_1، x_1x_2 نسبت به‌متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم است.

$$f_1((x_1,x_2))=x_1x_2+x_1$$
$$f_2((x_1,x_2))=x_1-x_2$$
$$f_3((x_1,x_2))=2x_1+x_2$$

مثال ۳: تابع $\begin{matrix} f:IR\to IR^2 \\ f(x)=(f_1,f_2)\end{matrix}$ که به‌صورت زیر تعریف شده است، خطی نیست زیرا، در تعریف f_1، مقدار ثابتِ ۲ از درجه ۱ نیست.

$$f_1(x)=x+2$$
$$f_2(x)=2x$$

مثال ۴: تابع $f:IR^2\to IR^2$ با ضابطهٔ $f((x_1,x_2))=(f_1,f_2)$ که

$$f_1((x_1,x_2))=(\cos\alpha)x_1+(\sin\alpha)x_2$$

و

$$f_2((x_1,x_2))=(\sin\alpha)x_1-(\cos\alpha)x_2$$

یک تابع خطی است زیرا f_1 و f_2 نسبت به x_1 و x_2 از درجه اول و همگون هستند. تابع فوق هر نقطه از صفحه را نسبت به‌خط $y=x\tg\frac{\alpha}{2}$ قرینه کرده و نقطهٔ جدیدی در صفحه مشخص می‌کند.

◀ نگاشتهای خطی و نمایش ماتریسی آنها

قرارداد: نگاشت خطی $f:IR^n\to IR^m$ با ضابطهٔ

$$f((x_1,x_2,\dots,x_n))=(f_1,f_2,\dots,f_m)$$

را با فرض $y_1=f_1$، $y_2=f_2$ و ... و $y_m=f_m$ و $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(f_1,f_2,\dots,f_m)$، می‌توان به‌صورت $f:IR^n\to IR^m$ نمایش داد.

$$f(x)=y$$

با توجه به‌قرارداد فوق و با توجه به‌این‌که f یک نگاشت خطی است، هر y_i که تابعی از IR^n به IR است به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n$$
$$\vdots$$
$$y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n$$

حال اگر ضرایب a_{ij} را به‌همان ترتیب نوشته شده روی سطرها و ستونهای منظمی قرار دهیم ماتریسی $m\times n$ همچون $A=[a_{ij}]$ به‌دست می‌آید که در این صورت نگاشت f را می‌توان به‌شکل ماتریسی و به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad y=Ax$$

همانطور که مشاهده می‌کنید هر نگاشت خطی را می‌توان به‌صورتِ ماتریسی نمایش داد و در واقع اگر f یک نگاشت خطی از IR^n به IR^m باشد، این نگاشت را می‌توان از تأثیر یک ماتریس $m\times n$ روی اعضای IR^n که به‌صورت ماتریسهایی ستونی نوشته شده باشند، به‌دست آورد.

همچنین اگر یک ماتریس $m\times n$ بر عضوی از IR^n (n ـ تاییهای مرتب) که به‌صورت ستونی نوشته شده‌اند، اثر کند حاصل یک عضو از IR^m بوده و در واقع یک نگاشت خطی تعریف می‌شود. به‌مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۵: تبدیل خطی $f:IR^2\to IR^3$ با ضابطهٔ زیر مفروض است این تبدیل را به‌شکل ماتریسی نمایش می‌دهیم:

$$y_1=f_1((x_1,x_2))=4x_1+2x_2$$
$$y_2=f_2((x_1,x_2))=-2x_1+x_2$$
$$y_3=f_3((x_1,x_2))=\sqrt{2}x_1-\frac{1}{2}x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال ٦: تبدیل خطی $f:IR^3\to IR^2$ در زیر به‌شکل ماتریسی نمایش داده شده است

$$y_1=f_1((x_1,x_2,x_3))=x_1+x_2+x_3$$
$$y_2=f_2((x_1,x_2,x_3))=2x_1-x_2+3x_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مثال ۷: هرگاه صورتِ ماتریسیِ یک تبدیل خطی به‌صورت زیر باشد،

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت اگر این تبدیل خطی را f بنامیم خواهیم داشت:

$$f:IR^2\to IR^2 \quad \text{یا} \quad f((x_1,x_2))=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta,x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$$

$$f:IR^2\to IR^2$$
$$f((x_1,x_2))=(y_1,y_2)$$

در صفحهٔ ۵٦ کتاب درسی ثابت شده است که این تبدیل خطی، تبدیلِ دورانی حولِ مبدأ مختصات و به‌اندازهٔ زاویهٔ θ می‌باشد.

مسألهٔ ۱: اگر A ماتریسی $m\times n$ (ماتریس تبدیل نگاشت خطیِ $f:IR^n\to IR^m$) باشد و $e_j=(0,0,\dots,1,\dots,0)$ (مؤلفهٔ jام یک است و بقیهٔ مؤلفه‌های n تایی، همگی صفر هستند) در این صورت ثابت کنید $f(e_j)=A^j$، که A^j ستونِ jام ماتریس A است.

طبق مطالبِ قبل، هر تبدیل خطی مانند f متناظر است با یک ماتریس تبدیل مانند A و برعکس؛ بنابراین برای اثبات مطلب فوق کافی است ماتریس A را در بردار ستونی e_j ضرب کرده و حاصل A^j باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2m} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mj}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A^j$$

نتیجهٔ مهم: اگر A ماتریس تبدیل خطی $f:IR^n\to IR^m$ باشد در این صورت این ماتریس را می‌توان به‌شکل زیر توجیه کرد:

ستون اول A یعنی A^1 برابر است با $f(e_1)$ و ستون دوم A یعنی A^2 برابر است با $f(e_2)$ ... و ستونِ nام A، برابر است با $f(e_n)$. حال به‌دنبال محک و ملاکی هستیم تا بتوانیم خطی بودنِ یک نگاشت را تشخیص دهیم، قضیهٔ زیر این محک را به‌دست ما می‌دهد.

قضیه: نگاشت $f:IR^n\to IR^m$ یک نگاشت خطی است. اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) به‌ازای هر $x,x'\in IR^n$: $f(x+x')=f(x)+f(x')$.

ب) به‌ازای هر $x\in IR^n$ و $r\in IR$: $f(rx)=rf(x)$.

(اثبات قضیه در کتاب درسی موجود است)

بنابراین از این به‌بعد برای اثباتِ خطی بودنِ یک نگاشت فقط کافی است دو شرط (الف) و (ب) را برای آن بررسی کنیم.

مسألهٔ ۲: تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است. ثابت کنید این تابع، یک تابع خطی است.

$$f:IR^2\to IR^2$$
$$f((x_1,x_2))=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta,x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$$

$$\begin{matrix} y_1=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta \\ y_2=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta \end{matrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

کافی است شرطهای الف و ب را ثابت کنیم پس:

الف)
$$f[(x_1,x_2)+(x'_1,x'_2)]=f[(x_1+x'_1,x_2+x'_2)]$$
$$=((x_1+x'_1)\cos\theta-(x_2+x'_2)\sin\theta \text{ و } (x_1+x'_1)\sin\theta+(x_2+x'_2)\cos\theta)$$
$$=((x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)+(x'_1\cos\theta+x'_2\sin\theta) \text{ و } (x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)+(x'_1\sin\theta+x'_2\cos\theta))$$
$$=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta \text{ و } x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)+(x'_1\cos\theta+x'_2\sin\theta \text{ و } x'_1\sin\theta+x'_2\cos\theta)$$
$$=f((x_1,x_2))+f((x'_1,x'_2))$$

ب)
$$f(r(x_1,x_2))=f((rx_1,rx_2))$$
$$=(rx_1\cos\theta-rx_2\sin\theta \text{ و } rx_1\sin\theta+rx_2\cos\theta)$$
$$=(r(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta) \text{ و } r(x_1\sin\theta+x_2\cos\theta))$$
$$=r(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta \text{ و } x_1\sin\theta+x_2\cos\theta)$$
$$=rf((x_1,x_2))$$

پس با توجه به‌قضیهٔ قبل تابع f، خطی است که اگرآن را R_θ بنامیم و نقطهٔ (x_1,x_2) را روی صفحهٔ مختصات مشخص کرده و تبدیل یافتهٔ آن تحت‌تأثیر R_θ را نیز به‌دست آوریم به‌راحتی مشاهده می‌شود که نقطهٔ (x_1,x_2) به‌اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ دوران یافته است پس R_θ یک تبدیل دوران حول مبدأ است.

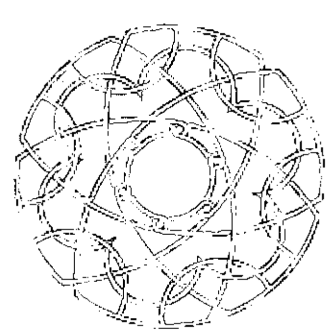
مسألهٔ ۳: آیا تابع $f:IR^2\to IR$ که به‌صورت $f((x_1,x_2))=x_1x_2$ تعریف شده است خطی است یا خیر؟

با توجه به‌تعریف تابع خطی واضح است که x_1x_2 نسبت به‌متغیرهای x_1 و x_2 از درجه دوم بوده و تابع خطی نیست و نیز با توجه به‌قسمت (ب) قضیهٔ قبل داریم:

$$f(r(x_1,x_2))=f((rx_1,rx_2))=rx_1\times rx_2=r^2x_1x_2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر $\rightarrow rf((x_1,x_2))=r\times x_1x_2=rx_1x_2$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow f(r(x_1,x_2))\neq rf((x_1,x_2)) \Rightarrow$ تابع خطی نیست





تفریح اندیشهٔ ۲

تمرین به هدف زدن

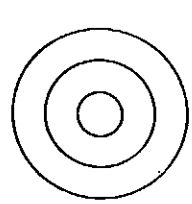
خانم معلم از جواد پرسید: در صورتی که گلوله‌ای که در هر چهار بار یک بار به هدف بخورد، و چهار گلوله از چنین گلوله‌هایی به یک هدف زده شود، احتمال این که تیر به هدف بخورد چقدر است؟

جواد پاسخ داد: ساده است، قطعاً یک گلوله در هدف خواهد نشست.

ــ برو پای تخته و بیست و پنج بار بنویس:

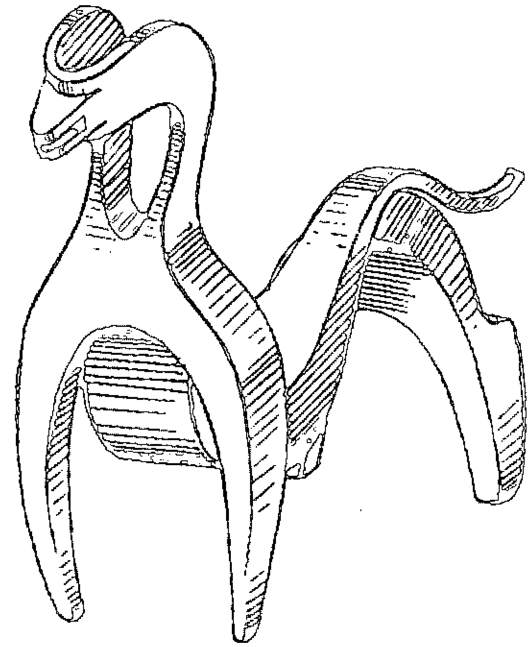
La Théorie de Probabi lité no est que
le bon sens confirmé par le cacul Marquis de
Laplace

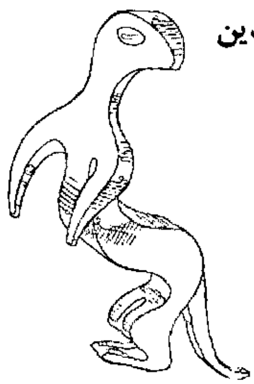




جواب در صفحهٔ ۸۸

داستان شیر و موش در هندسه





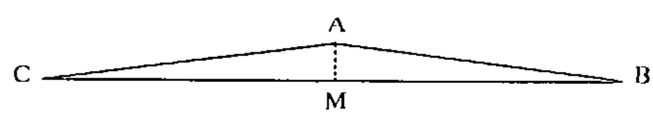
از : دکتراحمد شرف‌الدین

داستان شیر و موش را در کودکی در کتاب دبستانی خوانده‌ایم. اینچنین:

«موشی به‌چنگ شیری افتاد. شیر خواست او را ببلعد. موش از شیر خواست که او را رها کند شاید روزی بتواند شیر را یاری دهد. شیر خندید و گفت از تو حیوان ضعیف چه‌کاری ساخته است و او را آزاد کرد. روزی شیر در دام صیادی افتاد. موش از آنجا گذشت او را در دام اسیر یافت. فوراً به‌جویدن طنابهای دام پرداخت و پس از اندکی شیر را آزاد ساخت».

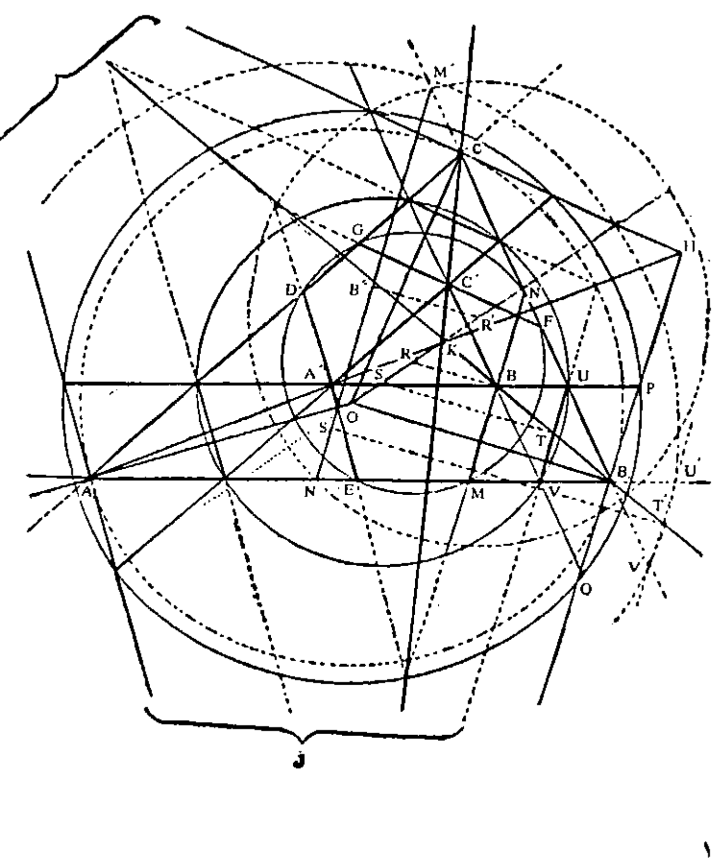
یک حکم مهم هندسی (۱)

در مثلث متساوی‌الساقین اگر زاویه رأس بسیار نزدیک به °۱۸۰ باشد، نسبت طول هر ساق به‌طول میانه مربوط به‌قاعده بسیار بزرگ است.



خواننده: چرا حکم هندسی بالا را به‌عنوان یک حکم مهم معرفی کرده‌اید. این حکم بسیار ساده است و در برابر بعضی احکام هندسی بسیار سخت و پیچیده که چون شیراند موشی بیش نیست. چقدر خوب است که حکم (۱) را با حکم هندسی زیر مقایسه کنید تا دیگر آن را به‌عنوان یک حکم مهم معرفی نکنید.

قضیه: مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و نقطه لوموآن مربوط به‌آن را K می‌نامیم. نقاط A′ ، B′ ، و C′ به‌ترتیب پاره‌خطهای KA ، KB و KC را به‌یک نسبت و در یک جهت تقسیم می‌کنند. نقاط تقاطع اضلاع مثلث ABC را با ضد موازیهای مرسوم از نقاط A′ ، B′ ، و C′ تعیین می‌کنیم. همچنین نقاط تقاطع اضلاع مثلث A′B′C′ را با ضدموازیهای مرسوم از نقاط A ، B ، و C تعیین می‌کنیم. بالاخره نقاط تقاطع اضلاع دو مثلث ABC و A′B′C′ را به‌دست می‌آوریم. سه‌گروه شش‌نقطه‌ای هم‌دایره‌ای حاصل می‌شود.



می‌بینید که حکم (۱) در برابر حکم بالا که چون شیر غرنده است موشی بیش نیست. از حکم (۱) که چون موش ضعیفی است چه کاری ساخته است؟

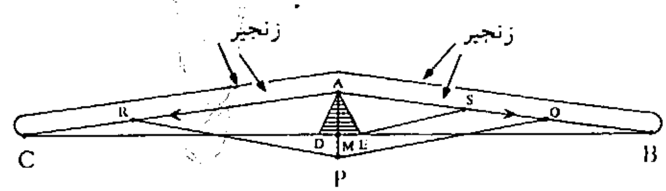
خواننده عزیز اندکی صبر و شکیبایی داشته باشید. بگذارید تا ما کاربردهایی از حکم (۱) عرضه کنیم آن‌وقت خواهید دید که از این حکم که آن را موش حساب می‌کنید کارهایی ساخته است که از بسیاری شیرها ساخته نیست!

کاربردهایی از حکم (۱)

حکم (۱) به‌طور مؤثر در حل بعضی سایل به‌کار می‌آید. در ادامه مقاله مثالهای متعددی در این‌باره عرضه می‌کنیم.

مثال (۱). یک سنگ می‌تواند زنجیرهای یک بولدزر را بگسلد. هنگامی که یک بولدزر از روی یک مانع عبور کند، زنجیرهای آن در یک لحظه کوتاه، تماس کامل خود را با زمین از دست می‌دهند. در این لحظه نیروی کششی بسیار زیاد به زنجیرها وارد می‌شود به‌طوری که ممکن است زنجیرها پاره شوند. این مطلب از همان حکم (۱) یعنی خاصیت مثلث متساوی‌الساقینی که زاویه رأس آن نزدیک 180° است نتیجه می‌شود. اینک توضیح این مطلب:

در شکل زیر، خط افقی BC نمایش زمین و BAC نمایش نیمی از زنجیر بولدزر است و مثلث پرداز شده ADE نمایش یک سنگ است که در نقطه A با زنجیر در تماس است.



قسمتی از وزن یا تمام وزن بولدزر در نقطه A به‌مانع وارد می‌شود که آن را با $\overrightarrow{AP}$ نمایش می‌دهیم. این نیرو را می‌توان به‌دو نیروی $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AR}$ در امتداد دو ساق مثلث ABC تجزیه کرد. اگر زاویه A نزدیک به 180° باشد نسبت اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ (یا $\overrightarrow{AR}$) به‌اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ بسیار بزرگ است. لذا دو نیروی کششی بزرگ $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AB}$ به‌زنجیر وارد می‌شود.

اگر وزن بولدزر ۱۱/۴ تن و سطح تماس هر زنجیر ۴ مترمربع و ارتفاع مانع ۲۵۰ میلی‌متر باشد اندازه هر یک از دو نیروی $\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{AR}$ مساوی ۲۳ تن خواهد بود. چون زنجیر در دو طرف نقطه A با دو نیروی بزرگ ۲۳ تن کشیده می‌شود احتمال شکسته شدن آن زیاد است.

خواننده از مثال مذکور در بالا به‌خوبی درمی‌یابد که حکم هندسی (۱) بسیار مهم است. در صفحات آینده مثالهای دیگری ذکر می‌کنیم. قبل از ذکر مثالهای بعدی، نسبت اندازه‌های نیروهای در امتداد دو ساق را به‌اندازه نیروی در امتداد میانه حساب می‌کنیم.

محاسبه نسبت اندازه‌های نیروها. در شکل (۳) چنین داریم:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}$$

اگر از نقطه M وسط قاعده BC، خط MS را موازی خط AC رسم کنیم، از وسط ساق AB خواهد گذشت. لذا می‌توان نوشت:

$$(۱)\quad \frac{AP}{AQ}=\frac{AM}{AS}=\frac{۲AM}{AB}$$

از طرفی چنین داریم:

$$(۲)\quad \frac{AM}{AB}=\sin MBA$$

هنگامی که زاویه A نزدیک به ۱۸۰° است زاویه MBA کوچک است. فرض کنیم زاویه A مساوی ۱۷۶° باشد آنگاه اندازه زاویه MBA مساوی ۲ درجه است و

$$(۳)\quad \sin MBA=۰/۰۳۴۹\ ...$$

رابطه (۱) با رعایت رابطه (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

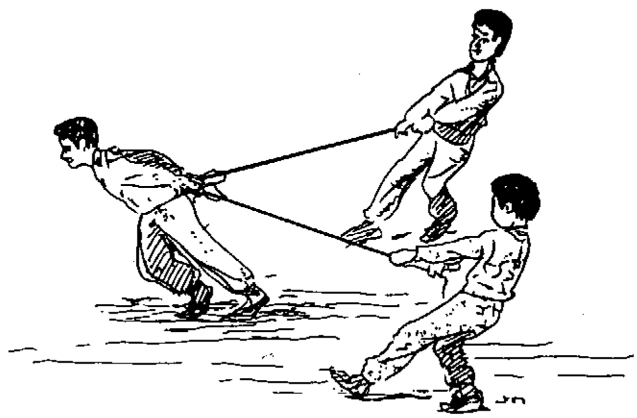
$$\frac{AP}{AQ}=۲\times ۰/۰۳۴۹\ ...=۰/۰۶۹۸...\simeq ۰/۰۷$$

اگر اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ را مساوی ۵۰ کیلوگرم فرض کنیم، اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ (یا $\overrightarrow{AR}$) در حدود ۷۱۱ کیلوگرم خواهد بود. ملاحظه می‌شود که نسبت اندازه نیروی $\overrightarrow{AQ}$ به‌اندازه نیروی $\overrightarrow{AP}$ بزرگ است.

مثال (۲). یک بازی برای کودکان. مطابق شکل، دو سر یک طناب را احمد و محمود در دست دارند و به‌سوی خود می‌کشند. عباس وسط طناب را در دست دارد و آن را چنان می‌کشد که نیروی آن دو را خنثی کند. آیا عباس می‌تواند بر آن دو غلبه کند؟

آری. عباس باید در ابتدای بازی طوری قرار گیرد که در وسط طناب باشد و به‌علاوه زاویه طناب به‌اندازه کافی بزرگ باشد. سپس طناب را به‌سوی خود بکشد و در تمام مدت بازی باید توجه داشته باشد که نیروی زیاد و مداوم بر طناب وارد نکند بلکه باید همواره آن اندازه نیرو وارد کند که زاویه طناب به ۱۸۰° نزدیک باشد. اگر

عباس نیروی زیاد و مداوم وارد کند زاویه طناب به‌تدریج کم می‌شود و لحظه‌ای فرا می‌رسد که غلبه خود را نسبت به‌دو نفر دیگر از دست می‌دهد.



مثال (۳) توت تکانی. دهقانها برای چیدن توت، از یک چادر (پارچه بزرگ مربعی ضخیم) استفاده می‌کنند. بدین قرار که چند نفر گوشه‌های یک چادر را گرفته و در زیر درخت توت می‌ایستند و یک نفر بالای درخت می‌رود و شاخه‌های آن را تکان می‌دهد تا توتها از درخت به‌روی چادر بریزد.

در ابتدای کار افرادی که گوشه‌های چادر را در دست دارند می‌توانند چادر را با اندک نیرویی به‌صورت کشیده نگاه دارند (یعنی چادر به‌صورت یک صفحه باشد). اما همین که مقداری توت به‌روی چادر ریخته شد و توتها به‌مرکز چادر رفت نیرویی بزرگ از طرف مرکز چادر به‌گوشه‌های آن وارد می‌شود. به‌طوری که افرادی که گوشه‌های چادر را در دست دارند به‌خوبی احساس می‌کنند که باید گوشه‌های چادر را با نیروی بسیاری به‌طرف خود بکشند تا چادر کمابیش کشیده باقی بماند. کسانی که در این کار شرکت کرده باشند به‌خوبی حس کرده‌اند که با وجود آنکه مقدار توت در مرکز چادر اندک است نگاهداری گوشه‌های چادر در دست مشکل است و باید نیرویی زیاد مصرف کنند.

این مطلب با همان حکم شماره (۱) قابل توضیح است.

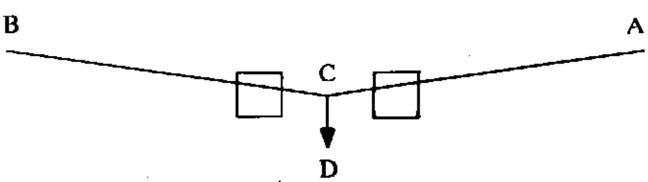
در هنگام توت‌چینی باید گوشه‌های چادر را محکم گرفت و چادر را شل کرد. گوشه‌های چادر را باید محکم در دست بگیرند تا چادر در برابر نیروی زیادی که از مرکز به‌گوشه‌ها وارد می‌شود از دست بیرون نیاید. همچنین چادر را باید شل کنند یعنی هر دو فردی که در برابر هم جای دارند (در دو انتهای یک قطر قرار دارند) باید فاصله خود را از یکدیگر کم کنند.

اگر A و B دو رأس مقابل و O مرکز چادر باشد وقتی چادر را شل کنند مقدار زاویه AOB از 180° دور می‌شود و لذا مؤلفه‌های نیرویی که در مرکز چادر به‌چادر وارد می‌شود روی دو خط OA و OB کوچکتر خواهد شد.

مثال (۴) خشک کردن لباس روی طناب. دو میخ بزرگ A و B را در دو دیوار موازی هم کاملاً در مقابل هم بکوبید (یعنی به‌طوری که خط AB افقی باشد و به‌علاوه عمود بر دو دیوار باشد). سپس دو سر یک طناب را به‌این دو میخ ببندید به‌طوری که طناب کاملاً کشیده باشد. اگر تعداد کمی رخت روی طناب آویزان کنیم، درصورتی که جای میخها در دو دیوار کاملاً محکم نباشد (به‌طور مثال دیوارها گلی باشد یا میخها در بندکشیهای یک دیوار آجری کوبیده شده باشند) پس از اندک مدتی ممکن است دو میخ به‌تدریج مقداری از دیوارها بیرون بیایند با وجود آنکه وزن رختها چندان زیاد نباشد.

این امر تعجب‌انگیز به‌نظر می‌آید یعنی با وجود آنکه وزن رختها چندان زیاد نیست میخها مقداری از دیوار بیرون می‌آیند یا کاملاً از دیوار خارج می‌شوند.

برای توضیح این مطلب حکم هندسی (۱) را به‌کار می‌بریم.



در شکل بالا، بردار $\overrightarrow{CD}$ نمایش نیرویی است که به‌نقطه C وسط طناب AB وارد می‌شود. اگر زاویه ACB به 180° نزدیک باشد، مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{CD}$ روی دو خط CA و CB بزرگ خواهند بود و لذا دو نیروی بزرگ به‌دو میخ وارد می‌شود که درصورتی که دیوار محکم نباشد ممکن است میخها بیرون آیند.

از این جهت است که خانمهای خانه‌دار طناب را مقداری شل می‌بندند.

اکنون درباره مطلب توضیح بیشتری می‌دهیم: مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{CD}$ را روی دو خط CA و CB به‌ترتیب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم. تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را روی دو خط CA و CB به‌ترتیب $\vec{a'}$ و $\vec{b'}$ می‌نامیم. دو نیروی $\vec{a'}$ و $\vec{b'}$ در راستای محورهای دو میخ به‌آنها وارد می‌شود و دو میخ را به‌سوی خارج دیوار می‌کشند. چون مقدار زاویه‌های CAB و CBA

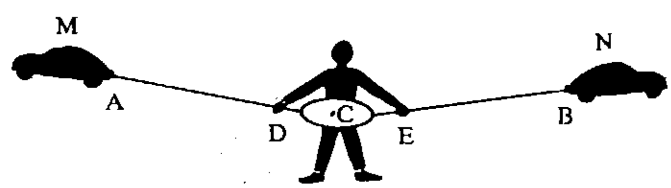
کوچک است پس اندازه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بزرگ است. اگر دو میخ A و B را در مقابل هم نکوبیم به‌طوری که زاویه CAB کوچکتر از زاویه حاصل از خط CA و محور میخ باشد آنگاه نیروی کششی کمتری در امتداد محور میخها به‌آنها وارد می‌شود و احتمال درآمدن میخها از دیوار کمتر می‌شود.

پس برای آنکه میخها از دیوار بیرون نیایند باید دو میخ را در مقابل هم نکوبند (البته دو میخ می‌توانند در یک صفحه افقی باشند) و به‌علاوه طناب را باید اندکی شل ببندند.

از مثالهای مذکور به خوبی می‌توان دریافت که حکم(۱) که به‌نظر بسیار ساده می‌رسد چقدر مهم است و قهرمان داستان ما که یک موش است کارهایی انجام می‌دهد که از بسیاری شیران ساخته نیست.

مثال ۵. یک نمایش پهلوانی

در شکل زیر دو کامیون M و N در خلاف جهت هم قرار گرفته‌اند. کابل AB در نقطهٔ A به‌شاسی کامیون M و در نقطهٔ B به‌شاسی کامیون N بسته شده است. نقطهٔ وسط کابل AB را C می‌نامیم. دو تخته چرم را روی هم می‌دوزیم و کابل را از بین دو تخته چرم عبور می‌دهیم به‌طوری که نقطه C در داخل و وسط چرم باشد.



پهلوان نمایش دهنده، تخته چرم را روی سینه خود می‌گذارد و با سینه خود به‌آن فشار می‌دهد و با دو دست خود کابل را در دو نقطهٔ D و E می‌گیرد.

طول کابل AB را طوری انتخاب می‌کنیم که نسبت به‌پهنای سینه پهلوان خیلی بزرگ باشد. پهلوان در جایی قرار می‌گیرد که زاویه دو پاره‌خط AD و BE به ۱۸۰ درجه خیلی نزدیک باشد.

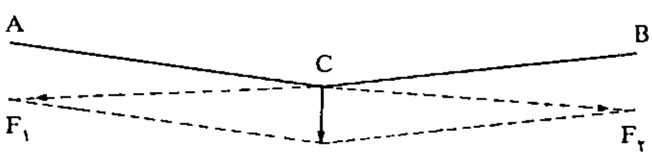
چون طول کابل AB نسبت به‌پهنای شانه پهلوان بسیار بزرگ است می‌توان CA و CB را به‌منزله دو پاره‌خط راست درنظر گرفت. در این صورت ACB یک مثلث متساوی‌الساقین است که زاویه رأس آن (یعنی زاویه ACB) خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است.

نمایش شروع می‌شود. دو راننده کامیون، کامیونها را روشن می‌کنند و هر کدام کامیونها را به‌طرف جلو هدایت می‌کنند. پهلوان با سینه خود به‌تخته چرم فشار می‌آورد و با دو دست خود دو کابل CA و CB را با نیرویی که خیلی زیاد نیست، ولی با قیافه ساختگی که نشانگر تلاش بسیار زیاد اوست، به‌طرف خود می‌کشد.

نیرویی که پهلوان با سینه خود به‌تخته چرم وارد می‌کند به‌دو نیروی $\overrightarrow{CF_1}$ و $\overrightarrow{CF_2}$ تجزیه می‌شود؛(شکل زیر)بزرگ بودن این دو نیرو به‌علت آن است که در مثلث متساوی‌الساقین CAB، زاویه رأس C خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است.

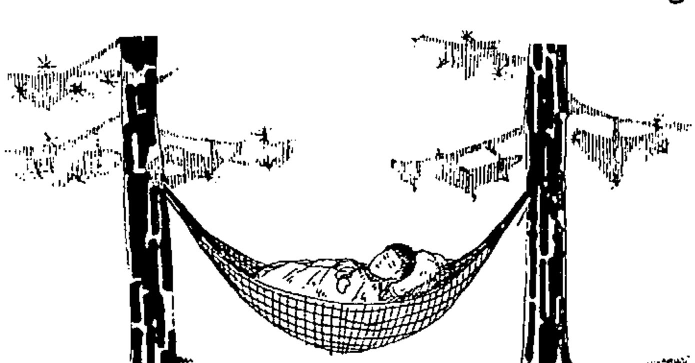
نیروی بزرگ $\overrightarrow{CF_1}$ نیروی کشش کامیون m و نیروی بزرگ $\overrightarrow{CF_2}$ نیروی کشش کامیون N را خنثی می‌کند.

چون زاویه ACB خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است تماشاچیان تصور می‌کنند که دو کابل CA و CB در یک امتدادند و این موجب اشتباه در قضاوت آنها می‌شود. آنها تصور می‌کنند که پهلوان نمایش‌دهندهٔ بیش از حد نیرومند است به‌طوری که با قدرت بازوان خود دو کامیون را به‌طرف خود می‌کشد و مانع جلو رفتن آنها می‌شود، در حالی‌که چنین نیست. نیرویی که پهلوان با سینه خود به‌کابل وارد می‌کند به‌دو نیروی بزرگ تجزیه می‌شود و این دو نیرو در خلاف نیروهایی است که از طرف دو کامیون به‌دو انتهای کابل وارد می‌شود.



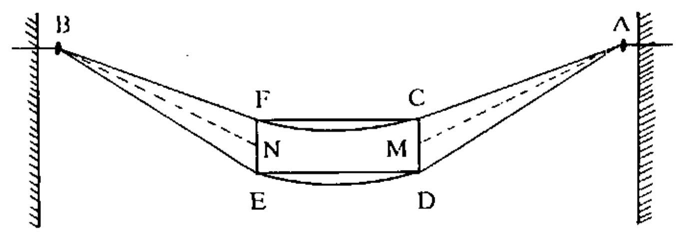
مثال ٦: ننو

ننو [=نه‌نو=ننی=نانو] نوعی گهواره است که از پارچه یا چرم می‌دوزند و از دو طرف آن را با طناب به‌دو دیوار یا دو درخت متصل می‌کنند.



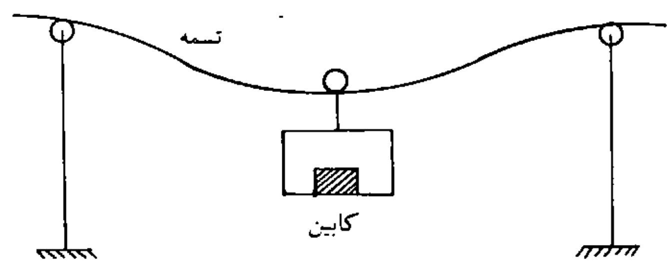
در شکل زیر شمای یک ننو برای بحث هندسی رسم شده است.

در این شکل مستطیل CDEF نمایش یک چرم (یا پارچه) نسبتاً گود است. این چرم به‌دو قطعه چوب CD و EF متصل است. در دو نقطه A و B که دو نقطه مقابل از دو دیوار مقابل یک اتاق‌اند دو میخ بزرگ A و B به‌دیوار کوبیده شده‌اند. دو قطعه چوب CD و EF با طنابهای AC ، AD ، BE و BF که دارای طولهای مساوی‌اند، به‌دو میخ A و B متصل‌اند. وسطهای دو پاره‌خط CD و EF را به‌ترتیب M و N می‌نامیم. طول طنابها را به‌اندازه کافی اختیار می‌کنیم تا زاویه دو خط AM و BN به ۱۸۰ درجه نزدیک نباشد تا دو میخ A و B به‌آسانی از دو دیوار بیرون نیایند.



مثال ۷. تله‌کابین

در سیستم حمل و نقل به‌وسیله تله‌کابین، کابل تله‌کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر امتداد کابل در دو طرف غلتک نزدیک ۱۸۰ درجه باشد کشش کابلها در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و منجر به‌بریده شدن کابل می‌شود.





ادب ریاضی

⇐ چون پیدا و دانسته برابر ناپیدا و نادانسته است، پس همان‌گونه که گاهی تصور ساده و بدون حکم پیدا و دانسته است مانند شناخت ما به‌نام مثلث، و زمانی هم تصوری که با او تصدیق همراه است پیدا می‌باشد مانند باور ما به‌این که سه‌زاویهٔ مثلث با دو زاویهٔ قائمه برابر است، همچنین گاهی یک چیز از جهت تصور ناپیدا و ناشناخته است در این صورت معنای آن به‌ذهن نمی‌آید، مگر آنکه شناخته شود مانند «ذی‌الاسمین» و «منفصل» و مانند آن دو، و زمانی یک چیزی از جهت تصدیق ناپیدا و نامعلوم است تا دانسته شود مانند قوی بودن (برابر بودن) قطر دایره نسبت به‌دو ضلع زاویهٔ قائمه‌ای که همان قطر، وتر آن زاویه واقع شده است، پس آنچه در علوم و نظایر آن مطلوب ماست یا به‌سوی تصور ناپیدا و مجهول و یا به‌سوی تصدیق ناپیدا و مطلوب است، که باید به‌دست آید. ⇒

اشارات و تنبیهات

شرح مشکلات و تقریر و بازنمودن معضلات و استخراج علوم و صناعات و بررسی مسایل و مباحث و اثبات و استوار کردن آنچه از مباحث محقق می‌گردد نیاز به‌تجرید عقل و تمیز ذهن و تصفیهٔ فکر و تدقیق نظر و بریدن از شوایب حسبه دارد و نیاز به‌بریدن و دوری از وسواسهای معتاد و عادی دارد و همهٔ اینها موکول به‌أمن و أمان است.

حکمت الاشراق

شیخ شهاب‌الدین سهروردی

توان (نما)

(قسمت دوّم)

(سال اول نظام جدید و قدیم)

● **سید محمدرضا هاشمی موسوی**

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n اعداد صحیح باشند. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$۱)\ \frac{a^{m+n}\times a^{m-n}\times a^{-m}}{b^{m-n}\times b^{m+n}\times b^{-m}}$$

(جواب: $(\frac{a}{b})^m$)

$$۲)\ \frac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{b^{m+n}\div b^{m-n}}\times\frac{b^{n-m}\times b^{n+m}}{c^{n+m}\times c^{n-m}}$$

(جواب: $(\frac{a}{c})^{۲n}$)

تمرین: عبارت $(۲x^۲-۲)^۰$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده (مبهم) و به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

(جواب: به ازای $x=\pm۱$ تعریف نشده (مبهم) و به ازای بقیهٔ عددهای حقیقی تعریف شده است.)

● اعداد منفی تواندار

به تساویهای زیر توجه کنید:

$$(-۲)^۱=-۲$$

$$(-۲)^۲=(-۲)(-۲)=+۴$$

$$(-۲)^۳=(-۲)(-۲)(-۲)=-۸$$

$$(-۲)^۴=(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)=+۱۶$$

$$(-۲)^۵=(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)=-۳۲$$

با توجه به تساویهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۶) هر عدد حقیقی منفی به توان عددی زوج (مضربی از ۲) برسد حاصل عددی مثبت، و به توان عددی فرد (مضربی از ۲ نباشد) برسد حاصل عددی منفی خواهد شد.

اگر a عددی حقیقی و k عدد صحیح دلخواهی باشد، بیان ریاضی دستور (۶) چنین است: (هر عدد زوج را می‌توان به صورت ۲k و هر عدد فرد را به شکل ۲k + ۱ یا ۲k − ۱ نشان داد)

$$(-a)^{۲k}=a^{۲k}\ ,\ (-a)^{۲k+۱}=-a^{۲k+۱}$$

در آینده مفهوم توانهای گویا و اعمال روی آنها بیان خواهد شد.

برهان:

$$(-a)^{۲k}=((-۱)\times(a))^{۲k}$$

$$=(-۱)^{۲k}\times a^{۲k}=(+۱)a^{۲k}=a^{۲k}$$

و همچنین:

$$(-a)^{۲k+۱}=(-a)^{۲k}\times(-a)=$$
$$a^{۲k}(-a)=-a\times a^{۲k}=-a^{۲k+۱}$$

مثال ۱۲: با فرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $a\times(-a)^{۳۴}\times(-a)^{۷}\times(-a)^{-۵}\times(-a)^{-۳}$

۲) $\left((-a)^{۵}\right)^{-۴}\times\left((-a)^{-۳}\right)^{-۷}\times(-۱)^{۱۳۷۴}\times(-۱)^{۱۳۷۵}$

حل:

با استفاده از دستور (۶) داریم:

۱) $(-a)^{۳۴}=a^{۳۴}\quad,(-a)^{۷}=-a^{۷}\quad,$

$$(-a)^{-۵}=\frac{۱}{(-a)^{۵}}=\frac{۱}{-a^{۵}}=-\frac{۱}{a^{۵}}=-\left(\frac{۱}{a}\right)^{۵}\quad,$$

$$(-a)^{-۳}=\frac{۱}{(-a)^{۳}}=\frac{۱}{-a^{۳}}=-\frac{۱}{a^{۳}}=-(\frac{۱}{a})^{۳}$$

پس خواهیم داشت:

$$a\times(-a)^{۳۴}\times(-a)^{۷}\times(-a)^{-۵}\times(-a)^{-۳}$$
$$=a\times a^{۳۴}\times(-a^{۷})\times(-\frac{۱}{a^{۵}})\times(-\frac{۱}{a^{۳}})$$
$$=(-a^{۳۵+۷})\times(\frac{۱}{a^{۸}})=-\frac{a^{۴۲}}{a^{۸}}=-a^{۴۲-۸}=-a^{۳۴}$$

داریم:

$$\left((-a)^{۵}\right)^{-۴}=((-a))^{-۲۰}=$$
$$(-a)^{-۲۰}=\frac{۱}{(-a)^{۲۰}}=\frac{۱}{a^{۲۰}}=\left(\frac{۱}{a}\right)^{۲۰}$$
$$\left((-a)^{-۳}\right)^{-۷}=(-a)^{(-۳)\times(-۷)}=(-a)^{۲۱}=-a^{۲۱}$$
$$(-۱)^{۱۳۷۴}=+۱\ ,\ (-۱)^{۱۳۷۵}=-۱$$

پس خواهیم داشت:

$$\left((-a)^{۵}\right)^{-۴}\times\left((-a)^{-۳}\right)^{-۷}\times(-۱)^{۱۳۷۴}\times(-۱)^{۱۳۷۵}=$$

$$\left(\frac{۱}{a^{۲۰}}\right)\times\left(-a^{۲۱}\right)(+۱)(-۱)=\left(\frac{۱}{a^{۲۰}}\right)\times\left(a^{۲۱}\right)=\frac{a^{۲۱}}{a^{۲۰}}$$
$$=a^{۲۱-۲۰}=a^{۱}=a$$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر و k یک عدد صحیح باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\left((-a)^{k}\right)^{۲}\times(-a)^{k}\times(-a)^{k}\times(-a)$

۲) $\left((-a)^{k}\right)^{-۲}\times(-a)^{۷۴}$

۳) $\left(\left((-a)^{۳k}\right)^{۵}\right)^{-۲k}\times\left((-a^{k})^{-۵}\right)^{-۶k}$

۴) $(-a)^{۲k}\times(-a)^{۱-۲k}\times a^{-۱}$

● مجموع و تفاضل اعداد تواندار

برای ساده کردن عبارتهایی مانند:

$$۶\times۲^{۸}+۵\times۲^{۹}+۶\times۲^{۷}-۲۴\times۲^{۵}$$

ابتدا باید توان اعداد نمایی با پایهٔ یکسان را مساوی کرد. در عبارت اخیر می‌توان نمای تمام اعداد توانی با پایهٔ ۲ را به ۸ رساند. یعنی اعداد تواندار با پایهٔ یکسان را متشابه کرد:

$$۵\times۲^{۹}=۵\times۲\times۲^{۸}=۱۰\times۲^{۸},$$
$$۶\times۲^{۷}=۳\times۲\times۲^{۷}=۳\times۲^{۸},$$
$$۲۴\times۲^{۵}=۳\times۸\times۲^{۵}=$$
$$۳\times۲^{۳}\times۲^{۵}=۳\times۲^{۸}$$

بنابراین داریم:

$$۶\times۲^{۸}+۵\times۲^{۹}+۶\times۲^{۷}-۲۴\times۲^{۵}$$
$$=۶\times۲^{۸}+۱۰\times۲^{۸}+۳\times۲^{۸}-۳\times۲^{۸}$$
$$=(۶+۱۰+۳-۳)\times۲^{۸}=۱۶\times۲^{۸}=۲^{۴}\times۲^{۸}=۲^{۱۲}$$

همچنین عبارتی مانند:

$$۴\times۳^{۳۴}+۹\times۳^{۳۲}-۱۵\times۳^{۳۳}+۲۷\times۳^{۳۱}$$

را به شکل زیر می‌توان ساده کرد:

$$۴\times۳^{۳۴}+۹\times۳^{۳۲}-۱۵\times۳^{۳۳}+۲۷\times۳^{۳۱}$$
$$=۴\times۳^{۳۴}+۳^{۲}\times۳^{۳۲}-۵\times۳\times۳^{۳۳}+۳^{۳}\times۳^{۳۱}$$
$$=۴\times۳^{۳۴}+۳^{۳۴}-۵\times۳^{۳۴}+۳^{۳۴}=(۴+۱-۵+۱)\times۳^{۳۴}$$
$$=۳^{۳۴}$$

همین‌طور عبارتی مانند:

$$A=۲۰(a^{۳})^{۲}+۵(-a^{۲})^{۳}-۳(-a^{۳})^{۲}$$
$$+(-a)^{۲}\times(۲a^{۲})(-a^{۲})$$

که در آن a عدد حقیقی است را می توان به شکل زیر ساده کرد:

$$A = 20a^6 - 5a^6 - 3a^6 - 2a^6$$
$$= (20-5-3-2)\times a^6 = 10a^6$$

بنابراین حاصل عبارت A برابر $10a^6$ است.

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۷) برای مجموع یا تفاضل اعداد توانی ابتدا عددهای تواندار با پایهٔ یکسان را متشابه می‌کنیم. و سپس مانند جمع جبری جملات متشابه عمل می‌کنیم. (جمع جبری عبارتهای با پایهٔ یکسان که غیر متشابه می‌باشند: مانند: $3a^4+4a^3+2a^2-a$ ، ساده نمی‌شوند.)

مثال ۱۳: با فرض این که a یک عدد حقیقی است.
حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $A = 5(a^3)^2 - 4(a^2)^3$

۲) $B = 7(a^3)^4 + (-a^6)^2 - 3a^{12} + (-a)^{12} - 5(-a^3)^4$

حل:

۱) $A = 5a^6 - 4a^6 = (5-4)\times a^6 = a^6$

۲) $B = 7a^{12} + a^{12} - 3a^{12} + a^{12} - 5a^{12}$
$= (7+1-3+1-5)\times a^{12} = a^{12}$

مثال ۱۴: با فرض این که x یک عدد حقیقی است.
حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $A = 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

۲) $B = 25^x + 5^{2x+1} - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x}$

۳) $C = 9\times 3^{2x} - 9^x + 27\times 3^{2x-2} - 6\times 3^{2x-1} + 2\times 9^{x+1}$

۴) $D = \dfrac{2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}{4\times 2^{x+3} - 2\times 2^{x+3} - 2^{x+2}}$

حل:

$$A = 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$$
$$= \frac{3^x}{3} + 3^x + 3\times 3^x + 3^2\times 3^x$$
$$= (\frac{1}{3}+1+3+9)\times 3^x = \frac{40}{3}\times 3^x = 40\times\frac{3^x}{3} = 40\times 3^{x-1}$$

$$B = 25^x + 5^{2x}\times 5 - 5^{2x}\times 5^2 + 25^x\times 25 - 5^{2x}$$
$$= 5^{2x} + 5\times 5^{2x} - 25\times 5^{2x} + 25\times 5^{2x} - 5^{2x}$$
$$= (1+5-25+25-1)\times 5^{2x} = 5\times 5^{2x} = 5^{2x+1}$$

$$C = 9\times 3^{2x} - 3^{2x} + 27\times\frac{3^{2x}}{3^2} - 6\times\frac{3^{2x}}{3} + 2\times 9^x\times 9$$
$$= 9\times 3^{2x} - 3^{2x} + \frac{27}{9}\times 3^{2x} - \frac{6}{3}\times 3^{2x} + 18\times 3^{2x}$$
$$= (9-1+3-2+18)\times 3^{2x}$$
$$= 27\times 3^{2x} = 3^3\times 3^{2x} = 3^{2x+3}$$

$$D = \frac{2^x + 2\times 2^x + 2^2\times 2^x + 2^3\times 2^x}{4\times 2^3\times 2^x - 2\times 2^3\times 2^x - 2^2\times 2^x}$$
$$= \frac{2^x(1+2+4+8)}{2^x(32-16-4)} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

تمرین: با فرض این که x یک عدد حقیقی است.
حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $A = 9^x - 2\times 9^x + 5\times 3^{2x} - 4\times 3^{2x} + 9\times 3^{2x}$ (جواب: $A = 3^{2x+2}$)

۲) $B = 25^x + 5^6\times 5^{2x+1} - 4\times 25^{x+1} + 4\times 5^{2x+2} - 5^{2x}$ (جواب: $B = 5^{2x+7}$)

۳) $C = \dfrac{3^x + 4\times 3^x + 3^{x+1} - 5\times 3^{x+1} + 3^{x+2}}{3\times 3^{x-1}\times 3^x\times 3^{2-x} + 3^{x+1}}$ (جواب: $C = \frac{1}{6}$)

۴) $D = \dfrac{2^{x+2} + 2^{x+4} - 2^{x+3} + 5\times 2^x}{3\times 2^x - 2^{x+1} + 2^{x+4} - 5\times 2^{x+1}}$ (جواب: $D = \frac{17}{7}$)

● حل معادله‌های توانی (نمایی)

معادلهٔ توانی، معادله‌ای است که در آن مجهول به صورت توان ظاهر شده است، مانند:

$$2^x = 16$$

برای حل چنین معادله‌ای باید دو طرف معادله را به دو عدد تواندار با پایه‌های یکسان تبدیل کنیم:

$$2^x = 2^4$$

سپس توانهای دو طرف تساوی را مساوی هم قرار دهیم و جواب معادله را به‌دست آوریم:

$x = 4$

این تذکر لازم است که برای حل معادلات توانی باید آگاهی کافی از تعاریف و دستورات و عملیات توانی داشته باشیم. زیرا غالباً برای حل کردن یک معادلهٔ توانی باید اعمال جبری مختلفی انجام دهیم تا به یک تساوی قابل حل برسیم. (حل معادلات توانی از نوع دیگر را در مبحث لگاریتم خواهید دید.)

مثال ۱۵: معادلهٔ توانی زیر را حل کنید.

$2^{2x+1}+4^{x+2}+2=74$

حل:

$2^{2x+1}+4^{x+2}=74-2 \Rightarrow 2^{2x}\times 2+4^{2}\times 4^{x}=72 \Rightarrow$

$2\times 2^{2x}+16\times 2^{2x}=72 \Rightarrow (2+16)\times 2^{2x}=72 \Rightarrow$

$18\times 2^{2x}=72 \Rightarrow 2^{2x}=\frac{72}{18}=4$

$\Rightarrow 2^{2x}=2^{2} \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

بنابراین تنها جواب معادله $x=1$ است.

مثال ۱۶: معادله های نمایی زیر را حل کنید.

۱) $4^{2x}=256$

۲) $9^{x+1}=27\times 3^{x+2}$

۳) $5^{x}+5^{x+1}=6$

۴) $5^{2x+2}\times 2^{2x}=0.0025$

۵) $8\times 2^{2x^{2}}+2=2050$

۶) $(\frac{1}{3})^{2-x}=243$

۷) $(\frac{1}{25})^{2x}\times 5^{x-2}=5$

۸) $2^{2^{x}-1}+1=9$

۹) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}}\times 7^{x}=7^{4}$

۱۰) $8^{x+2}=8\times 3^{4x+4}$

۱۱) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=360$

۱۲) $5^{2x+1}+25^{x}-5^{2x+2}+25^{x+1}-5^{2x}=5^{101}$

۱۳) $\frac{3^{2x}+3^{2x-1}}{2\times 8^{x}+8\times 2^{3x}}=\frac{3}{20}$

۱۴) $3^{x}\times(2\frac{2}{3})^{x}\times(\frac{9}{64})^{2x-1}=\frac{9}{8}$

۱۵) $(0.5)^{x-4}\times(\frac{1}{0.125})^{4-x}=(0.25)^{2}$

۱۶) $2^{x+1}-2^{6-x}=8$

۱۷) $2^{x+1}+2^{2-x}=6$

۱۸) $3\times 9\times 27\times 81\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}$

حل:

۱) $4^{2x}=256 \Rightarrow 4^{2x}=4^{4} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$

۲) $9^{x+1}=27\times 3^{x+2} \Rightarrow 3^{2x+2}$
$=3^{3}\times 3^{x+2} \Rightarrow 3^{2x+2}=3^{x+5} \Rightarrow 2x+2=x+5 \Rightarrow$
$2x-x=5-2 \Rightarrow \boxed{x=3}$

۳) $5^{x}+5^{x+1}=6 \Rightarrow 5^{x}+5\times 5^{x}=6 \Rightarrow (1+5)\times 5^{x}=6$
$\Rightarrow 6\times 5^{x}=6 \Rightarrow 5^{x}=1 \Rightarrow 5^{x}=5^{0} \Rightarrow \boxed{x=0}$

۴) $5^{2x+2}\times 2^{2x}=0.0025 \Rightarrow$
$5^{2}\times 5^{2x}\times 2^{2x}=\frac{25}{10000}=\frac{25}{10^{4}}$
$\Rightarrow 25\times(5\times 2)^{2x}=25\times 10^{-4} \Rightarrow$
$10^{2x}=10^{-4} \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

۵) $8\times 2^{2x^{2}}+2=2050 \Rightarrow 2^{3}\times 2^{2x^{2}}=2050-2 \Rightarrow$
$2^{2x^{2}+3}=2048 \Rightarrow 2^{2x^{2}+3}=2^{11} \Rightarrow 2x^{2}+3=11$
$\Rightarrow 2x^{2}=8 \Rightarrow x^{2}=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2}$

۶) $(\frac{1}{3})^{2-x}=243 \Rightarrow (3^{-1})^{2-x}=3^{5}$
$\Rightarrow 3^{x-2}=3^{5} \Rightarrow x-2=5 \Rightarrow \boxed{x=7}$

۷) $(\frac{1}{25})^{2x}\times 5^{x-2}=5 \Rightarrow (5^{-2})^{2x}\times 5^{x-2}=5$
$\Rightarrow 5^{-4x}\times 5^{x-2}=5 \Rightarrow 5^{-4x+x-2}=5 \Rightarrow 5^{-3x-2}$
$=5^{1} \Rightarrow -3x-2=1 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

۸) $2^{2^{x}-1}+1=9 \Rightarrow 2^{2^{x}-1}=9-1$
$\Rightarrow 2^{2^{x}-1}=8 \Rightarrow 2^{2^{x}-1}=2^{3} \Rightarrow 2^{x}-1=3$
$\Rightarrow 2^{x}=4 \Rightarrow 2^{x}=2^{2} \Rightarrow \boxed{x=2}$

۹) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow (7^{-2})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4$

$\Rightarrow 7^{-2x+3} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow 7^{-2x+3+x} = 7^4 \Rightarrow 7^{-x+3} = 7^4$

$\Rightarrow -x+3=4 \Rightarrow -x=1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

۱۰) $8^{x+2} = 8 \times 3^{4x+4} \Rightarrow \frac{8^{x+2}}{8} = \frac{8 \times 3^{4x+4}}{8} \Rightarrow$

$8^{x+2-1} = 3^{4(x+1)} \Rightarrow 8^{x+1} = (3^4)^{(x+1)} \Rightarrow 8^{x+1} = 81^{x+1}$

در معادلهٔ اخیر، نماهای طرفین مساوی است، ولی پایه ها مساوی نیست. بنابراین معادله وقتی جواب دارد که نمای طرفین معادله برابر صفر شود:

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

معادله به ازای $x=-1$ به تساوی عددی $8^0 = 81^0$ تبدیل می‌شود، که یک تساوی درست است.

۱۱) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$

$\Rightarrow 3^x + 3 \times 3^x + 3^2 \times 3^x + 3^3 \times 3^x = 360$

$\Rightarrow (1+3+9+27) \times 3^x = 360 \Rightarrow 40 \times 3^x = 360$

$\Rightarrow 3^x = \frac{360}{40} = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

۱۲) $5^{2x+1} + 25^x - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x} = 5^{101} \Rightarrow$

$5 \times 5^{2x} + 5^{2x} - 5^2 \times 5^{2x} + 25 \times 5^{2x} - 5^{2x} = 5^{101}$

$\Rightarrow (5+1-25+25-1) \times 5^{2x} = 5^{101} \Rightarrow 5 \times 5^{2x} = 5^{101}$

$\Rightarrow 5^{2x+1} = 5^{101} \Rightarrow 2x+1 = 101 \Rightarrow 2x = 100$

$\Rightarrow \boxed{x=50}$

۱۳) $\frac{3^{2x} + 3^{2x-1}}{2 \times 8^x + 8 \times 2^{3x}} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{3^{2x} + \frac{1}{3} \times 3^{2x}}{2 \times 8^x + 8 \times 8^x} = \frac{3}{20}$

$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{3}) \times 3^{2x}}{(2+8) \times 8^x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \times 9^x}{10 \times 8^x} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{4}{30} \times (\frac{9}{8})^x =$

$\frac{3}{20} \Rightarrow (\frac{9}{8})^x = \frac{9}{8} \Rightarrow (\frac{9}{8})^x = (\frac{9}{8})^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

۱۴) $3^x \times (2\frac{2}{3})^x \times (\frac{9}{64})^{2x-1} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow 3^x \times (\frac{8}{3})^x \times (\frac{9}{64})^{2x} \times (\frac{9}{64})^{-1} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow (3 \times \frac{8}{3})^x \times (\frac{9^2}{64^2})^x \times \frac{64}{9} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow (\frac{8 \times 9^2}{64 \times 64})^x = \frac{9^2}{64 \times 8}$

$\Rightarrow (\frac{9^2}{64 \times 8})^x = (\frac{9^2}{64 \times 8})^1$

$\Rightarrow (\frac{81}{512})^x = (\frac{81}{512})^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

۱۵) $(0.5)^{x-4} \times (\frac{1}{0.125})^{4-x} =$

$(0.25)^2 \Rightarrow (0.5)^{x-4} \times (0.125)^{x-4} = (0.5)^4$

$\Rightarrow (0.5)^{x-4} \times (0.5)^{3x-12} = (0.5)^4 \Rightarrow (0.5)^{x-4+3x-12}$

$= (0.5)^4 \Rightarrow (0.5)^{4x-16} = (0.5)^4 \Rightarrow$

$4x-16=4 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow \boxed{x=5}$

۱۶) $2^{x+1} - 2^{6-x} = 8 \Rightarrow 2 \times 2^x - 2^6 \times 2^{-x} = 8$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم و در 2^x ضرب می‌کنیم:

$\frac{2^x}{2}(2 \times 2^x - 2^6 \times 2^{-x}) = 8 \times \frac{2^x}{2} \Rightarrow 2^{2x} - 2^5 = 4 \times 2^x$

با فرض $A = 2^x$، داریم:

$A^2 - 32 = 4A \Rightarrow A^2 - 4A - 32 = 0$

$\Rightarrow (A+4)(A-8) = 0$

$\Rightarrow A+4=0$ یا $A-8=0$

$\Rightarrow 2^x+4=0$ یا $2^x-8=0 \Rightarrow 2^x=-4$

یا $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow \boxed{x=3}$

معادلهٔ $2^x = -4$ جواب ندارد.

۱۷) $2^{x+1} + 2^{2-x} = 6 \Rightarrow$

$2 \times 2^x + 2^2 \times 2^{-x} = 6$

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم و در 2^xضرب می‌کنیم:

$\frac{2^x}{2}(2 \times 2^x + 4 \times 2^{-x}) = \frac{2^x}{2} \times 6$

$\Rightarrow 2^{2x} + 2 = 3 \times 2^x$

با فرض $A = 2^x$، داریم:

$A^2 + 2 = 3A \Rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0$

$\Rightarrow (A-1)(A-2) = 0$

$\Rightarrow A-1=0$ یا $A-2=0 \Rightarrow A=1$ یا

$A=2 \Rightarrow 2^x=1$ یا $2^x=2$

$\Rightarrow 2^x = 2^0$ یا $2^x = 2^1 \Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\boxed{x=1}$

بنابراین معادله دارای دو جواب $x=0$ و $x=1$ می‌باشد.

$$18)\ 3\times 9\times 27\times 81\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}\Rightarrow 3\times 3^{2}\times 3^{3}\times 3^{4}\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}$$

$$\Rightarrow 3\times 3^{9}\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}\Rightarrow 3\times 3^{2x+9}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}\Rightarrow (3-1)\times 3^{2x+9}=2\times 3^{19}\Rightarrow$$

$$2\times 3^{2x+9}=2\times 3^{19}\Rightarrow 3^{2x+9}=3^{19}\Rightarrow 2x+9=19\Rightarrow 2x=10\Rightarrow \boxed{x=5}$$

تمرین: معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

1) $5^{5x}=5^{100}$

2) $4^{5x+1}=2^{762}$

3) $3^{3^{x}-1}+1=10$

4) $9^{3x}=3\times 3^{x+4}\times 3^{x-1}$

5) $3^{x+1}+3^{x-1}=30$

6) $(\frac{1}{2})^{5-x}=2^{95}$

7) $3^{10}\times 3^{20}\times 3^{30}\times 3^{40}\times 3^{x}-3^{x+99}=2\times 3^{9}$

8) $2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}=15$

9) $\frac{3^{2x+1}+3^{2x}}{4\times 8^{x}+2^{3x+4}}=\frac{9}{40}$

10) $3^{x-2}\times 2^{3}\times (2\frac{2}{3})^{x}\times (\frac{9}{64})^{2x}=\frac{9}{64}$

11) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}}=7^{4-x}$

12) $5^{x+3}=25\times 2^{5x+5}$

13) $7^{2x^{2}+1}-49^{x^{2}}=6\times 7^{4}\times 49^{2}$

14) $4\times 8^{2x}\times (\frac{1000}{125})^{4-x}=0/0625$

15) $2^{x+2}=16+2^{7-x}$

16) $25^{2x+2}+5^{2x+1}+5^{2x+3}+21=25^{x+2}+5^{2x+2}+5^{2x}+5^{3}$

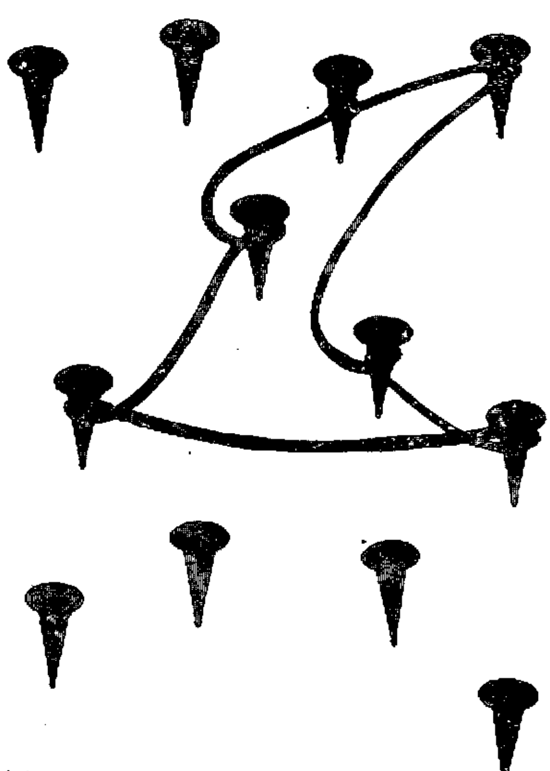
17) $7^{x+1}+7^{2-x}=56$

18) $2^{2^{x}}+2=17+(1374)^{x}\times (1374)^{-x}$

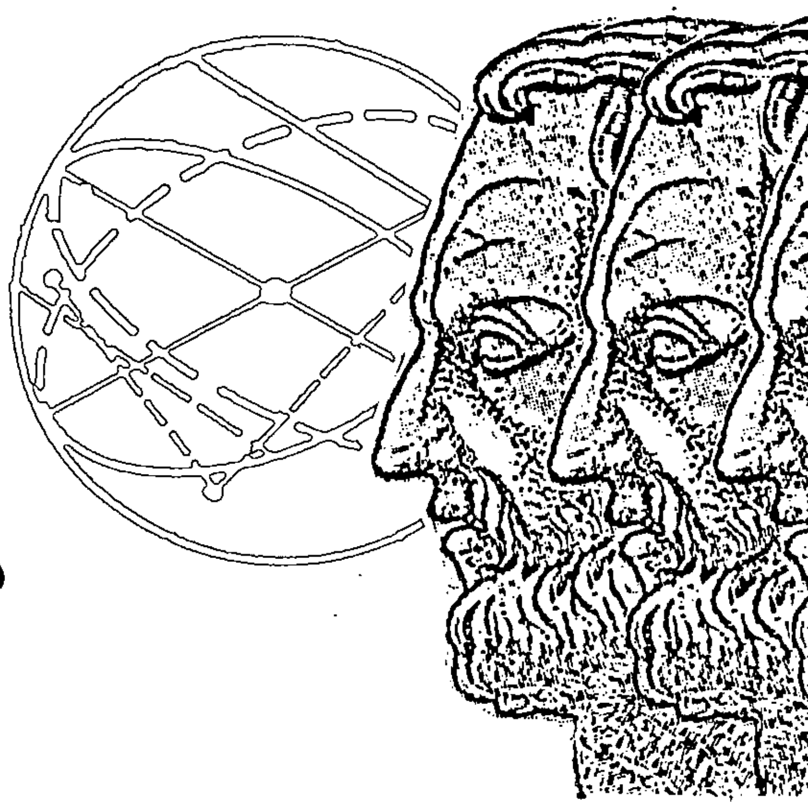


تفریح اندیشهٔ ۳

تعدادی میخ چوبی را در زمین فرو کرده‌ایم، و دو بازیکن مقداری نخ دارند. هر بازیکن به نوبت، جفت میخهایی را که قبلاً به هم وصل نشده‌اند می‌بندد. بازیکنی که شکلی بسته را ایجاد کند می‌برد.



جواب در صفحهٔ ۸۸



مشاهیر ریاضی جهان

از: فرهنگ فشردهٔ ریاضی آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

◀ ددکیند، ریچارد Dedekind , Richard (۱۸۳۱ - ۱۹۱۶).
ددکیند ریاضی‌دانی آلمانی بود که چند سالی را در دانشگاه گوتینگن "University at Cöttingen" گذراند و بیشتر باقی‌ماندهٔ عمرش را در دانشکده‌ای فنی تدریس کرد. شهرتش به علت برش ددکیند است. این برش رجوع به ساخت صوری دستگاه عدد حقیقی‌اش از اعداد گویا دارد. این کار قدم مهمی به سوی تنظیمی از ریاضیات که در این قرن ملاحظه کرده‌ایم، بوده است. تنظیمی که ۲۰۰۰ سال پیشتر توسط اودوکسوس "Eudoxus" پیش‌بینی شده بود. در این مورد خواننده را به روایت بسیار خواندنی ددکیند از کارش در مقالهٔ **پیوستگی و اعداد گنگ** "continuity and Irrational Numbers" حوالت می‌دهیم.

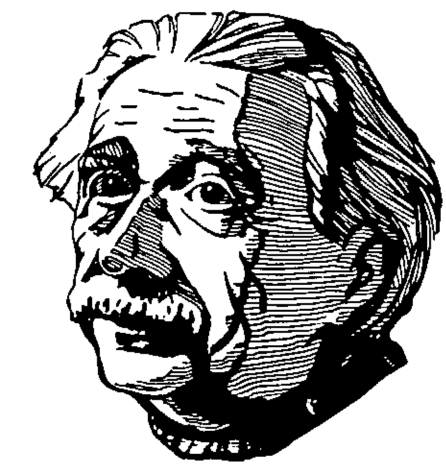


ددکیند

◀ دکارت، رنه Déscartes , René (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰).
در نظر اغلب مردم، دکارت فرانسوی بیشتر به عنوان یک فیلسوف شناخته می‌شود. در علوم فیزیکی، وی به خاطر نظریهٔ گردبادهایش به عنوان توضیح حرکت سیاره‌ای در خاطرها مانده است، نظریه‌ای که توسط نیوتن درهم شکست. در ریاضیات، بیشتر به علت طرح هندسهٔ دکارتیش، که از مختصات "coordinates" برای تبدیل هندسه به جبر استفاده می‌کند، معروف است. این مطلب امروزه بسیار ساده و واضح به نظر می‌رسد، اما شخص باید بداند که مقدار بسیار کمی از ریاضیات جدید، از جمله کل مفهوم وابستگی تابعی، بدون آن توان مطرح شدن داشته است. مشهور است که دکارت هنگامی که در سوئد زندگی می‌کرده، با کار کردن در داخل یک بخاری خود را گرم می‌داشته اس



◀ اینشتاین، آلبرت Einstein , Albert (۱۸۷۹ ـ ۱۹۵۵).
کار اینشتاین یگانه تأثیر مهم بر توسعهٔ فیزیک از زمان نیوتن به بعد بود. او عهده‌دار تئوریهای نسبیت خاص (۱۹۰۵) و عام (۱۹۱۶) بود. سهمی اساسی در موجودیت نظریهٔ کوانتوم داشت و تأثیری مهم بر ترمودینامیک گذاشت. معروفیتش شاید، بیشتر به خاطر معادلهٔ $E = mc^2$ اش، که هم‌ارزی ماده و انرژی را بیان می‌کند، باشد. او خود را بیشتر فیزیک‌دان در نظر می‌گرفت تا ریاضی‌دان، اما اثرش موجب به‌وجود آمدن گسترشهای بسیاری در ریاضیات مدرن شد. قدرت عظیم اینشتاین، برخلاف تصور عام از وی، به عنوان پرفسور مو سفیدی که به سرعت علائم غیرقابل مفهومی بر تخته سیاه می‌نگارد، تواناییش در طرح سؤالهای ساده و دادن پاسخهای ساده بود، و به این طریق نظرمان را نسبت به جهان و درکمان را از زمان و مکان عوض کرد. هیچ چیز نمی‌توانست اساسیتر از این باشد.



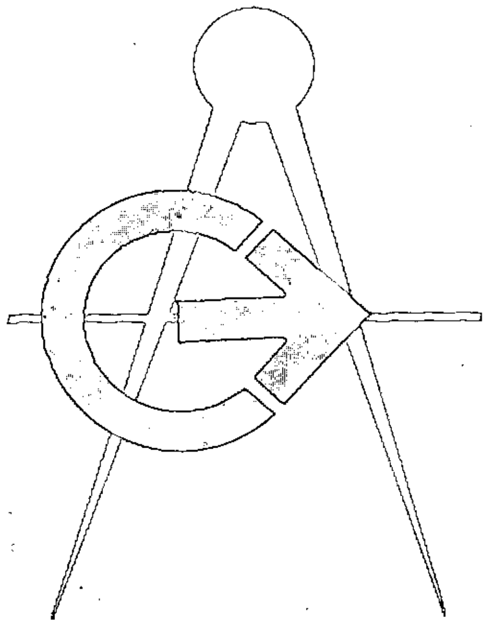
◀ اقلیدس Euclid (حدود ۳۰۰ ق.م.).
اقلیدس ریاضی‌دانی یونانی بود که در اسکندریه کار کرد. مؤلف کتابی که به‌درستی می‌تواند دومین کتاب بانفوذ در فرهنگ غرب به‌شمار رود، یعنی: مقدمات «Elements» است. در مورد او مطالب اندکی می‌دانیم و آشکار نیست که کتاب مورد بحث تا چه‌اندازه اثر اصلی را توصیف می‌کند و تا چه اندازه کتابی درسی است. مقدمات بخش مهمی از هندسه را، دقیقاً تا ساختمان اجسام افلاطونی "Platonic Solids" پنجگانه، با منطقی دقیق و با شروع از آکسیومهای «انکارناپذیر» گسترش می‌دهد. این کتاب طی دو هزار سال به عنوان مدلی از آنچه که ریاضیات محض در مورد آن است، به کار رفت. این کتاب را نباید باکتابهای درسی قدیمی به همین نام، که به‌سبب سادگی، معمولاً کل ساختار ظریف اثر اقلیدس را نابود می‌کردند، اشتباه کرد.



◀ اودوکسوس Eudoxus (حدود ۳۸۰ ق.م.).
اودوکسوس بدون شک یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهای دوران باستان بوده‌است. متأسفانه، تمام آثارش از بین‌رفته است، اما می‌دانیم که عهده‌دار اثر واقع در کتاب ۵ مقدمات "Elements" اقلیدس بوده‌است. همین اثر نیز به تنهایی برای بزرگ شمردن او کافی است، زیرا به زبان آن ایام، طرحی درست و دقیق از دستگاه اعداد حقیقی است. مفاهیم واقع در این اثر به قدری استادانه و ظریف بودند که اهمیتشان بزودی فراموش شدند و در واقع تا زمانی که مسائلی مشابه آنها ریاضی‌دانان قرن نوزدهم را احاطه نکردند آن‌طور که باید و شاید درک نشدند.

◀ اویلر، لئونهارد Euler , leonhard (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳).
مجموع آثار اویلر، پرکارترین ریاضی‌دانهای مشهور، به بیش از ۹۰ مجلد عظیم (گرچه در چاپ بزرگ) می‌رسد. می‌گویند که محاسبات را به سادگی نفس کشیدن انجام می‌داد. جالبتر این است که قسمت مهمی از این آثار را پس از نابینا شدن انجام داده است. اویلر در سوئیس متولد شد اما بیشتر ایام خود را در برلین فردریک کبیر و سن‌پطرزبورگ کاترین کبیر گذراند. مطرح کردن سهم اویلر در ریاضیات در یک پاراگراف مشکل است. او در عصر بسیار باروری که در آن حساب جدید دیفرانسیل و انتگرال در جمیع جهات گسترش یافته بود کار می‌کرد و در اغلب زمینه‌های ریاضیات سهیم بود. جالب این است که اویلر بیشتر به خاطر نمادهایی که معرفی یا همگانی کرده معروف شده است. علایم اساسی π، e، i و نماد مجموع Σ و نماد استاندارد تابعمان، یعنی $f(x)$، در میان کارهای او در زبان ریاضیات است. کتاب Introduction In Analysin Infinitorum اش مهمترین کتاب درسی ریاضیات اواخر قرن هجدهم بود. از میان حجم عظیم آثار اویلر، نتیجه‌ای معروف را که به حق، از آن مغرور بود مطرح می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$



کاربرد دترمینان

(قسمت اول)

● سیامک جعفری از (اهواز)

معمول است که دترمینان را در ضمن درس ماتریسها عنوان می‌کنند و البته این روش مزیتهایی دارد. در اینجا دترمینان را به‌صورت یک تابع عددی که دامنهٔ آن مجموعه‌ای از ماتریسهای مربع است تعریف می‌کنیم.

یادآوری: یادآوری دو نکته از کتابهای درسی ضروری است. ابتدا دستگاه سه‌معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

با عملیاتی که آشنا هستید جواب این دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

نکته دوم اینکه حاصلضرب سه‌گانه اسکالر بسادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}).\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

و خواص زیر را به‌کمک دترمینان بسادگی اثبات کرد:

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=-\vec{b}.(\vec{a}\wedge\vec{c})$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=0$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A(0,1,2)$ و $B(1,-2,0)$ بگذرد و بر صفحه به‌معادله $2x-3y+5z-1=0$ عمود باشد.

حل:

الف) بدون استفاده از دترمینان

$$\begin{aligned} P\perp P' &\Rightarrow \\ A\in P' &\Rightarrow \\ B\in P' &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} 2a-3b+5c=0 \\ b+2c+d=0 \\ a-2b+d=0 \end{cases}$$

با حل دستگاه سه‌معادله، برحسب d خواهیم داشت:

$$c=d\ ,\ b=-3d\ ,\ a=-7d$$

معادلهٔ صفحهٔ P' خواهد شد: $P':\ -7x-3y+z+1=0$

ب) به‌کمک دترمینان

دترمینان زیر را حساب کنید:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

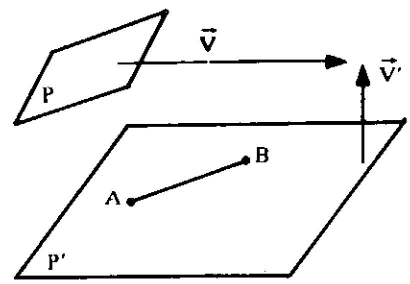
$$\Rightarrow -۷x-۳y+z+۱=۰$$

و به‌دست آوردن این دترمینان ساده است. بیاد داشته باشید که در روش اول ما حل دستگاه را برحسب d به‌عهده خودتان گذاشتیم.

اگر V' بردار قائم صفحه باشد:

بردار قائم $\vec{V'}=\vec{V}\wedge\vec{AB}$

معادله P' $P'\equiv\vec{AM}.(\vec{V}\wedge\vec{AB})=۰$



که همان ضرب اسکالر سه‌گانه است و دترمینان بالا را نتیجه می‌دهد.

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که شامل خط Δ به‌معادلات $\begin{cases}x=y\\ z=۰\end{cases}$ بوده و از نقطه $A(۱,۲,۳)$ بگذرد.

حل:

الف) بدون کمک دترمینان

مختصات نقطه غیرمشخص از خط Δ که معادله‌های پارامتری آن به‌صورت $x=y=t$ و $z=۰$ است باید به‌ازاء هر مقدار t:

$$at+bt+۰+d=۰$$

$$(a+b)t+d=۰$$

این رابطه برقرار باشد.

$$A\in P \quad \begin{cases}a+۲b+۳c+d=۰\\ a+b \qquad\quad =۰\\ \qquad\quad d=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+۲b+۳c=۰\\ a=-b\end{cases} \Rightarrow c=\frac{a}{c}$$

معادله صفحه خواهد شد:

$$P:۳x-۳y+z=۰$$

ب) به‌کمک دترمینان

دترمینان زیر را بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}x-۱ & y-۲ & z-۳\\ ۱-۱ & ۱-۲ & ۰-۳\\ ۱ & ۱ & ۰\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-۱ & y-۲ & z-۳\\ ۰ & -۱ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۰\end{vmatrix}=۰$$

$$B\in\Delta:(۱,۱,۰)$$

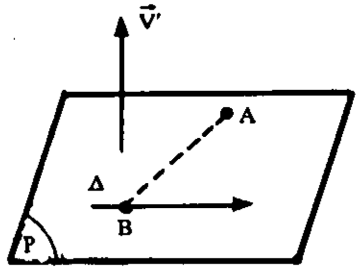
$$\Rightarrow ۳x-۳y+z=۰$$

و به‌دست آوردن این دترمینان با یک روش مشابه ساده خواهد بود.

نقطهٔ دلخواهی مانند B از خط Δ را اختیار می‌کنیم.

بردار قائم صفحه $\vec{V}=\vec{\Delta}\wedge\vec{AB}$

معادله صفحه P $P\equiv\vec{BM}.(\vec{\Delta}\wedge\vec{AB})=۰$



که همان دترمینان بالا را می‌دهد به‌شکل کلی زیر:

$$\begin{vmatrix}x-x_A & y-y_A & z-z_A\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ p & q & r\end{vmatrix}=۰$$

مسئله: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه $A(۲,۰,-۱)$ و $B(۱,-۱,۲)$ و $C(۰,۲,۱)$ می‌گذرد.

حل:

الف) بدون دترمینان

$$P: ax+by+cz+d=۰$$

$$\begin{array}{l}A\in P\Rightarrow\\ B\in P\Rightarrow\\ C\in P\Rightarrow\end{array}\begin{cases}۲a-c+d=۰\\ a-b+۲c+d=۰\\ ۲b+c+d=۰\end{cases}$$

از حل دستگاه اخیر به‌دست می‌آید:

$$a=-\frac{۲d}{۳},\ b=-\frac{d}{۳},\ c=-\frac{d}{۳}$$

$$-\frac{۲d}{۳}x-\frac{d}{۳}y-\frac{d}{۳}z+d=۰$$

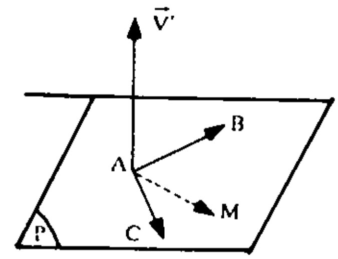
$$:P:\ ۲x+y+z-۳=۰$$

ب) به‌کمک دترمینان

M نقطه‌ای از صفحه است.

بردار قائم $\vec{V}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}$

معادله صفحه $P\equiv\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC})=۰$



که اگر این ضرب سه‌گانه اسکالر را انجام دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مسئله: دو صفحه P و Q به‌معادلات $P:4x+y-2=0$ و $Q:y-2z=0$ مفروضند. معادله صفحه‌ای را که از فصل مشترک دوصفحه P و Q گذشته و بر صفحه R به‌معادله $R:x-2y+z=1$ عمود است بنویسید.

حل:

الف) بدون دترمینان

به‌کمک دسته صفحه داریم:

$$y-2z+\alpha(4x+y-2)=0$$
$$4\alpha x+(1+\alpha)y-2z-2\alpha=0$$

بردار قائم صفحه موردنظر بر بردار قائم R عمود است.

$$\vec{V}(4\alpha,1+\alpha,-2)$$
$$1(4\alpha)-2(1+\alpha)+1(-2)=0\Rightarrow\alpha=2$$

معادله صفحه مطلوب: $8x+3y-2z-4=0$

ب) به‌کمک دترمینان

فصل مشترک دو صفحه یک خط Δ است. بنابراین باید معادله صفحه‌ای را پیدا کرد که از یک خط گذشته و بر صفحه دیگر عمود باشد (یا با بردار قائمی موازی باشد).

اگر $z=0\Rightarrow y=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=(\frac{1}{2},0,0)$

اگر $z=1\Rightarrow y=2\Rightarrow x=0\Rightarrow B=(0,2,1)$

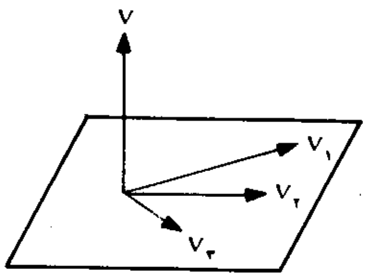
بردار قائم $\vec{V'}=\vec{V}\wedge\vec{AB}$

معادله صفحه $P\equiv\vec{AM}.(\vec{V}\wedge\vec{AB})=0$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0\Rightarrow 8x+3y-2z-4=0$$

با توجه به‌بحث بالا در معادله صفحه اگر سه بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ داشته باشیم که در یک صفحه باشند از روی شکل بسادگی دیده می‌شود که:

$$\vec{V}=\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3$$
$$P=\vec{V}_1.\vec{V}=0\Rightarrow\vec{V}_1.(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3)=0$$



بنابراین می‌توان گفت شرط اینکه سه بردار V_1 و V_2 و V_3 در یک صفحه باشند این است که دترمینان زیر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مشابه بحث بالا می‌توان شرط اینکه چهار نقطه در یک صفحه واقع باشند را پیدا کرد. معادله صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذشت را بیاد داریم

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

حال اگر نقطه‌ای به‌مختصات $A(x_0,y_0,z_0)$ در صفحه باشد باید در معادله صفحه صدق کند. پس شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند به‌دست آمد.

$$\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۱) کدامیک از خطوط زیر متقاطع هستند:

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{+2}=\frac{z+2}{-3}$$
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$$
$$\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$$

الف) ۱ و ۲

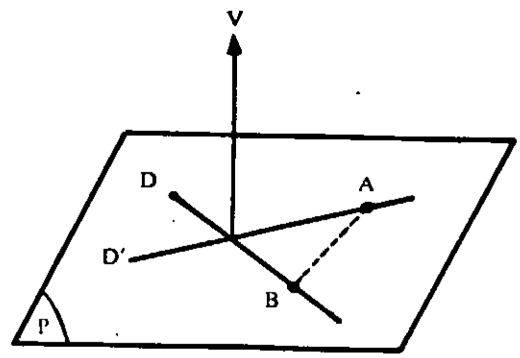
ب) ۱ و ۳

ج) ۲ و ۳

د) هیچکدام

حل: با توجه به‌شکل اگر دترمینان زیر برابر صفر شد دو خط متقاطع هستند.

$$\begin{vmatrix} x_A-x_B & y_A-y_B & z_A-z_B \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$



با آزمایش دترمینان برای خطوط ۱ و ۳

$$A\begin{vmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6-0 & -1+5 & -2-4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

از امتحان دو حالت دیگر که متنافر هستند صرف‌نظر می‌کنیم. پس جواب ب درست است.

تست ۲) معادله صفحه‌ای که شامل دو خط موازی به‌معادلات $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ و $D': \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ کدام است.

الف) $y+2z=0$

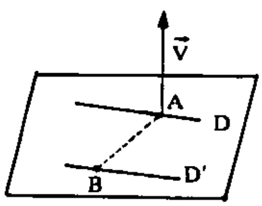
ب) $y-2z+1=0$

ج) $y-2z=0$

د) $x+y-2z=1$

حل: از روی شکل کاملاً مشخص است که معادله خواهد شد: $\overrightarrow{AM}.(\vec{\Delta}\wedge\overrightarrow{AB})=0$

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$



که خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(y-2z)=0 \Rightarrow y-2z=0$$

تست ۳) معادله صفحه‌ای که بر خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ می‌گذرد و بر صفحه P، $P: x-2y+z-5=0$ عمود است کدامیک می‌باشد.

الف) $19x-12y+z-18=0$

ب) $11x+2y-7z+16=0$

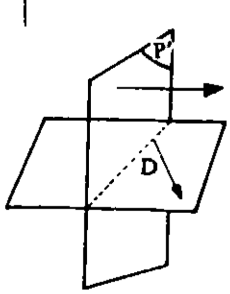
ج) $x-5y-3z=0$

د) $x+y+2z+3=0$

حل: ضرب خارجی V' و Δ بردار قائم صفحه مورد نظر می‌شود. نقطه‌ای از خط Δ هم که مشخص است. پس

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11x+2y-7z+16=0$$



تمرین:

۱) نشـان دهـید معادله صفحه‌ای که از نقطه $M(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و با دو بردار $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ موازی است به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

۲) نشان دهید معادله صفحه‌ای که از خط $\frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l}=\frac{z-z'}{m}$ می‌گذرد و از نقطه‌ای به‌مختصات (x_0,y_0,z_0) غیرواقع بر این خط گذشته به‌صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'-x_0 & y'-y_0 & z'-z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$

۳) نشان دهید شرط اینکه چهار نقطه روی یک صفحه باشند آن است که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۴) نشان دهید اگر فصول مشترک صفحات زیر متقاطع باشند

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

دترمینان زیر همواره برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

۵) شرط این‌که سه صفحه روبرو در یک خط همرأس باشند را به‌دست آورید. شرط این‌که در یک نقطه همرأس باشند (مشترک باشند) چیست؟

$$P_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$P_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$P_3:\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$



اندیشهٔ ریاضی

آیا در جبر بول عمل تفریق وجود دارد؟

دو کمیت بولی x و y را درنظر می‌گیریم. می خواهیم تفاضل این دو کمیت را تعریف کنیم. یک کمیت z جست‌و جو می‌کنیم به‌طوری که تساوی زیر برقرار باشد.

$$x = y + z \qquad (1)$$

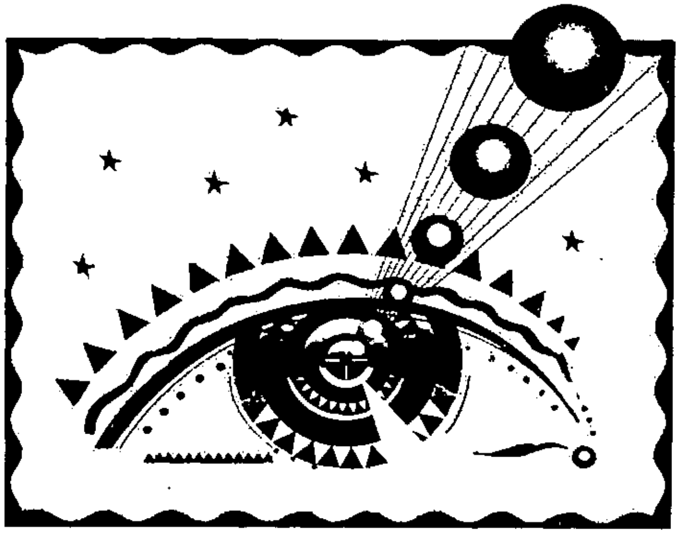
سه حالت ممکن است پیش آید

حالت اول . اگر $y=0$ باشد در این صورت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که $x=z$ یعنی اگر $x=0$ باشد آنگاه $z=0$ و اگر $x=1$ باشد آنگاه $z=1$ پس در حالتی که $y=0$ است مقدار z مشخص نیست.

حالت دوّم. اگر $y=1$ و $x=1$ باشد در این حالت از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که z می‌تواند صفر یا یک باشد. پس مقدار z، در این حالت مشخص نیست.

حالت سوم. اگر $x=1$ و $y=0$ باشد در این حالت از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که برای z مقداری وجود ندارد. مختصر آن که در حالت اول می‌توان عمل تفریق تعریف کرد و در دو حالت دیگر نمی‌توان عمل تفریق تعریف کرد. پس در جبر بول در حالت کلی نمی‌توان عمل تفریق تعریف کرد.

● دکتر احمد شرف‌الدین



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۳)

● حمیدرضاامیری

6.5 Inequalities in two variables

We have seen above that the solution of an inequality in one variable is a set of points on the real line.

The solution of an inequality in two variables x and y of the form $f(x, y) > 0$ is a set of points (x, y) in the x,y-plane. The equation $f(x, y) = 0$ is the equation of a curve C in the x,y-plane which divides the plane into two regions. In general, in one of these regions $f(x, y)$ is greater than 0 and in the other $f(x, y)$ is less than 0. Which region is which is easily determined by finding the sign of $f(x, y)$ for just one point.

Example 17 Determine the region of the x, y-plane for which $x^2 + y^2 > 9$.

We first write the inequality in the form

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 9 > 0.$$

The curve C given by $x^2 + y^2 - 9 = 0$, or $x^2 + y^2 = 9$, is a circle whose centre is the origin and of radius 3.
The origin $(0, 0)$ is inside the circle and

$$f(0, 0) = -9$$

and so is not in the required region. The required region is therefore the set of points outside the circle (see Fig. 6.8).

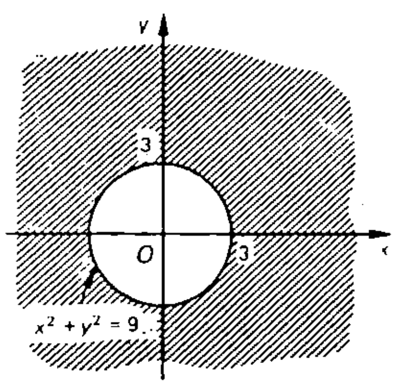


Fig. 6.8

۶.۵ نابرابریهای دومتغیره

در قسمتهای قبل مشاهده کردیم که مجموعهٔ جواب یک نابرابری یک متغیره، مجموعه‌ای است شامل نقاطی روی خط عددهای حقیقی.

مجموعهٔ جواب یک نابرابری با دو متغیر x و y به‌شکل f(x,y) > ۰ مجموعه‌ای است شامل (x,y)هایی واقع در صفحهٔ xoy (صفحهٔ مختصات دکارتی)، که این صفحه را به‌دو ناحیه تقسیم می‌کند. در حالت کلی، یکی از این ناحیه‌ها f(x,y) > ۰ و ناحیهٔ دیگر f(x,y) < ۰ می‌باشد. با پیدا کردن علامت f(x,y) در یک نقطهٔ دلخواه از صفحه، این ناحیه‌ها به‌راحتی قابل تشخیص می‌باشند.

مثال ۱۷:

ناحیه‌ای از صفحهٔ (xoy) را مشخص کنید که در آن $x^{۲}+y^{۲}>۹$.
ابتدا نابرابری را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x,y)\equiv x^{۲}+y^{۲}-۹>۰$$

منحنی C حاصل از $x^{۲}+y^{۲}-۹=۰$ یا $x^{۲}+y^{۲}=۹$ دایره‌ای است به‌مرکز مبدأ مختصات و به‌شعاع ۳.

مبدأ مختصات (۰،۰) در داخل دایره واقع است و $f(۰،۰)=-۹$ و بنابراین در ناحیهٔ جواب قرار ندارد. بنابراین ناحیهٔ جواب مجموعهٔ نقاط خارج دایره می‌باشد. (شکل ۶.۸ را مشاهده کنید.)

Example 18 Determine the region of the x,y-plane for which $x + y \leq 1$.
Write this as $f(x, y) = x + y - 1 \leq 0$. Since the given inequality includes the = sign, the region will include the curve $x + y = 1$. Let us now seek the region for which $x + y < 1$, i.e. $f(x, y) < 0$.
The curve $x + y = 1$ is of course a straight line. This line divides the plane into two half-planes. Substituting (0, 0), we obtain

$$f(0, 0) = -1 < 0$$

and so (0, 0) is in the required region.
The shaded region, including the line, is therefore the required set of points (see Fig. 6.9).

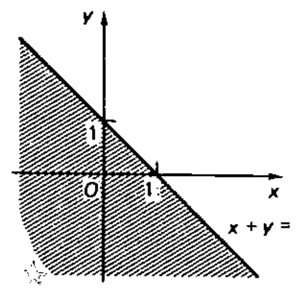


Fig. 6.9

مثال ۱۸:

ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $x+y\leq ۱$. ابتدا نابرابری را به‌صورت $f(x,y)=x+y-۱\leq ۰$ می‌نویسیم. نابرابری در حالت تساوی مجموعهٔ نقاط روی منحنی $x+y=۱$ را شامل می‌شود. حالا بیایید در جستجوی ناحیه‌ای باشیم که $x+y<۱$، یعنی $f(x,y)<۰$.

منحنی $x+y=۱$ مطمئناً یک خط راست است. این خط صفحه را به‌دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند. با قرار دادن (۰،۰) در نابرابری، خواهیم داشت:

$$f(۰،۰)=-۱<۰$$

و بنابراین (۰،۰) در ناحیهٔ جواب قرار دارد. بنابراین ناحیهٔ هاشور خورده که مجموعهٔ نقاط روی خط را نیز شامل می‌شود، مجموعهٔ جواب نابرابری می‌باشد. (شکل ۹ . ۶ را مشاهده کنید.)

If we add the further constraints that $x \geq 0$ and $y \geq 0$, we obtain the region shown in Fig. 6.10, all the boundaries being included.
When the boundary (or part of it) is included, the relevant parts are usually indicated by heavier curves, as shown in Fig. 6.10.

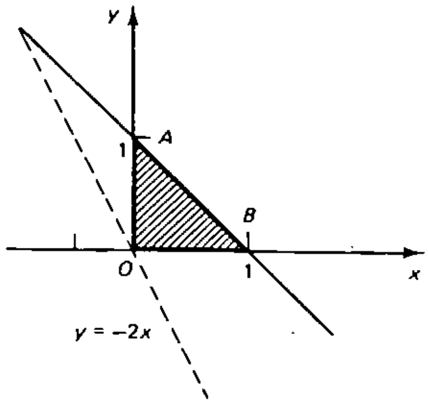


Fig. 6.10

It is quite often necessary to obtain the greatest or least values for points in such a region. (Problems of this nature occur in linear programming.) For example, we might ask: What is the greatest value of $z = 2x + y$ for points satisfying the given inequalities?
The curve $2x + y = k$ is a straight line parallel to the dotted line. As we move this line to the right, k increases. The greatest value will therefore occur when the line is as far from the origin as possible, i.e. when it passes through the point B. The value of z at B is $2(1) + 0 = 2$.

اگر ما محدودیتهای $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ را نیز اضافه کنیم، ناحیه‌ای حاصل می‌شود که در شکل ۱۰ ـ ۶ نشان داده شده است، که تمام خطوط مرزی را نیز شامل می‌شود.

وقتی که ناحیهٔ جواب شامل مرزها (یا قسمتهایی از آنها) باشد، ناحیهٔ مربوطه معمولاً توسط یک منحنی بسته مشخص می‌کند، مطابق آنچه در شکل ۱۰ . ۶ نشان داده شده است.

در بسیاری اوقات نیاز داریم که بیشترین یا کمترین مقدار را در یک ناحیه به‌دست آوریم (این نوع مسائل در مبحث برنامه‌ریزی خطی پیش می‌آیند). برای مثال، ممکن است سؤال کنیم: بیشترین مقدار $z=۲x+y$ برای نقاط واقع در مجموعهٔ جواب نابرابری فوق چقدر است؟ (به‌ازای چه نقطه‌ای از ناحیهٔ فوق عبارت $z=۲x+y$ بیشترین مقدار خود را کسب می‌کند.)

منحنی $۲x+y=k$، دسته خطوطی موازی با هم را مشخص می‌کند. حال اگر خط $y=-۲x$ را به‌موازات خودش و به‌طرف بالا

حرکت دهیم مقدار k افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار زمانی به‌دست می‌آید که خط از مبدأ مختصات دور می‌شود، یعنی: وقتی که می‌خواهد نقطهٔ B را ترک کند مقدار z در نقطهٔ B عبارت است از: ۲(۱)+۰=۲.

Example 19 Determine the region of the x,y-plane for which

$$(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0.$$

The given inequality can only be satisfied if either
(a) both brackets are positive, or
(b) both brackets are negative.
(a) $x^2 + y^2 - 9 > 0$, $y^2 - 4x > 0$.
The curve C_1: $x^2 + y^2 = 9$ is a circle whose centre is the origin and of radius 3. At the point (0, 0) the function $x^2 + y^2 - 9 < 0$ and so is not in the required region. The required region is the set of points outside the circle.
The curve C_2: $y^2 = 4x$ is a parabola. At the point (1, 0) the function $y^2 - 4x < 0$ and so, again, the point is not in the given region.
Hence, the required region is the region shaded in Fig. 6.11.

(b) $x^2 + y^2 - 9 < 0$, $y^2 - 4x < 0$.

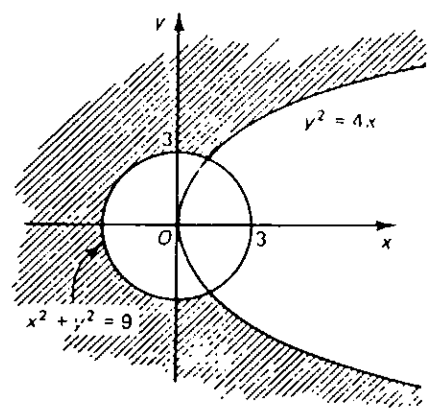


Fig. 6.11

مثال ۱۹:

ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $(x^2+y^2-9)(y^2-4x)>0$. باتوجه به‌نابرابری، ما فقط دو حالت می‌توانیم درنظر بگیریم:

(الف) هر دو پرانتز مثبت باشند، یا

(ب) هر دو پرانتز منفی باشند.

(الف) $x^2+y^2-9>0$ و $y^2-4x>0$

منحنی C_1:$x^2+y^2=9$ دایره‌ای است به‌مرکز مبدأ و شعاع ۳. نقطهٔ (۰،۰) در نابرابری صدق نکرده و بنابراین ناحیهٔ جواب، عبارت است از: مجموعهٔ نقاط واقع در خارج دایره.

منحنی C_2:$y^2=4x$ یک سهمی است. در نقطهٔ (۱،۰) داریم $y^2-4x<0$ و بنابراین این نقطه نیز نمی‌تواند در ناحیهٔ جواب واقع باشد. پس، ناحیه جواب عبارت است از: ناحیهٔ هاشور خورده در شکل ۱۱ - ۶.

(ب) $x^2+y^2-9<0$ و $y^2-4x<0$

We may use the above analysis. In this case we require the alternative regions in both cases and so we obtain the region shaded in Fig. 6.12.
The complete picture is obtained by superimposing Fig. 6.11 on Fig. 6.12.

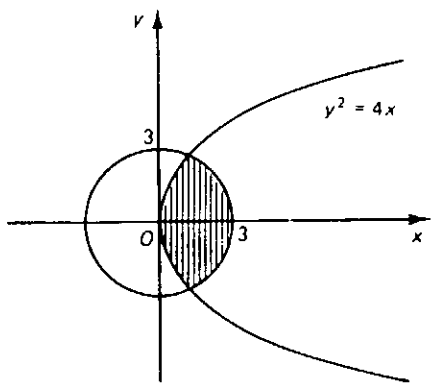


Fig. 6.12

ما از تجزیه و تحلیلی که در بالا انجام شد استفاده می‌کنیم. در این حالت مجموعهٔ جواب حاصل از ناحیهٔ جواب هر دو نابرابری، ناحیه‌ای را برای ما حاصل می‌کند که در شکل ۱۲ - ۶ هاشور خورده است.

تصویر کامل ناحیهٔ جواب از منطبق کردن شکل ۱۱ - ۶ بر ۱۲ - ۶ به‌دست می‌آید.

Exercise 6

1 Given that $x > y$, show that $x - b > y - b$.
2 Given that $x > y$ and $a > 0$, show that $ax > ay$.
3 Given that $a > b$ and a and b are positive, show that, for any positive integer n, $a^n > b^n$.
4 Find the set of values of x for which
$$3x - 2 > 7.$$
5 Find the set of values of x for which
$$\frac{2x + 3}{x - 1} < 1.$$
6 Find the set of values of x for which
$$3x - 2 > x^2.$$
7 Find the set of values of x for which
$$\frac{x - 5}{2 - x} > 3.$$

8 Find the set of values of x for which
$$|x-3|<4.$$
9 Find the set of values of x for which
$$|1-2x|\leqslant|3x-1|.$$
10 Find the set of values of x for which
$$(x+2)(x-2)(x+7)>0.$$
11 Find the set of values of x for which
$$\frac{x^2+56}{x}>15.$$
12 Show that for real values of x the values of the function $\frac{x^2+2}{2x+1}$ cannot lie between -2 and 1.

13 Determine the region of the x,y-plane for which $x \geqslant 0$ and $x-y \leqslant 1$. Hence find the minimum value of y.

14 Shade the region of the x,y-plane for which $y^2<4x$, $x-y<\frac{5}{4}$. Hence find the maximum and minimum values of y.

15 Determine the region of the x,y-plane for which
$$(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0.$$

تمرین ٦:

۱ ـ با فرض اینکه $x>y$، نشان دهید $x-b>y-b$.

۲ ـ با فرض اینکه $x>y$ و $a>0$، نشان دهید که $ax>ay$.

۳ ـ با فرض اینکه $a>b$ و a و b هر دو مثبت هستند، نشان دهید، برای هر عدد صحیح مثبت مانند n، $a^n>b^n$.

۴ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $7>2-3x$ را بیابید.

۵ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $1>\frac{2x+3}{x-1}$ را بیابید.

٦ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $x^2>3x-2$ را بیابید.

۷ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $3>\frac{x-5}{2-x}$ را بیابید.

۸ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $4>|x-3|$ را بیابید.

۹ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $|3x-1|\leq|1-2x|$ را بیابید.

۱۰ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $(x+2)(x-2)(x+7)>0$ را بیابید.

۱۱ ـ مجموعهٔ جواب نابرابری $15<\frac{x^2+56}{x}$ را بیابید.

۱۲ ـ نشان دهید برای مقادیر حقیقی x، مقدار تابع $\frac{x^2+2}{2x+1}$ نمی‌تواند بین دو عدد ۱ و ۲ − واقع شود.

۱۳ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $x\geq 0$ و $x-y\leq 1$. سپس کمترین مقدار y را بیابید.

۱۴ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را هاشور بزنید که در آن $y^2<4x$ و $x-y<\frac{5}{4}$. سپس بیشترین و کمترین مقدار y را بیابید.

۱۵ ـ ناحیه‌ای از صفحهٔ xoy را مشخص کنید که در آن $(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0$.

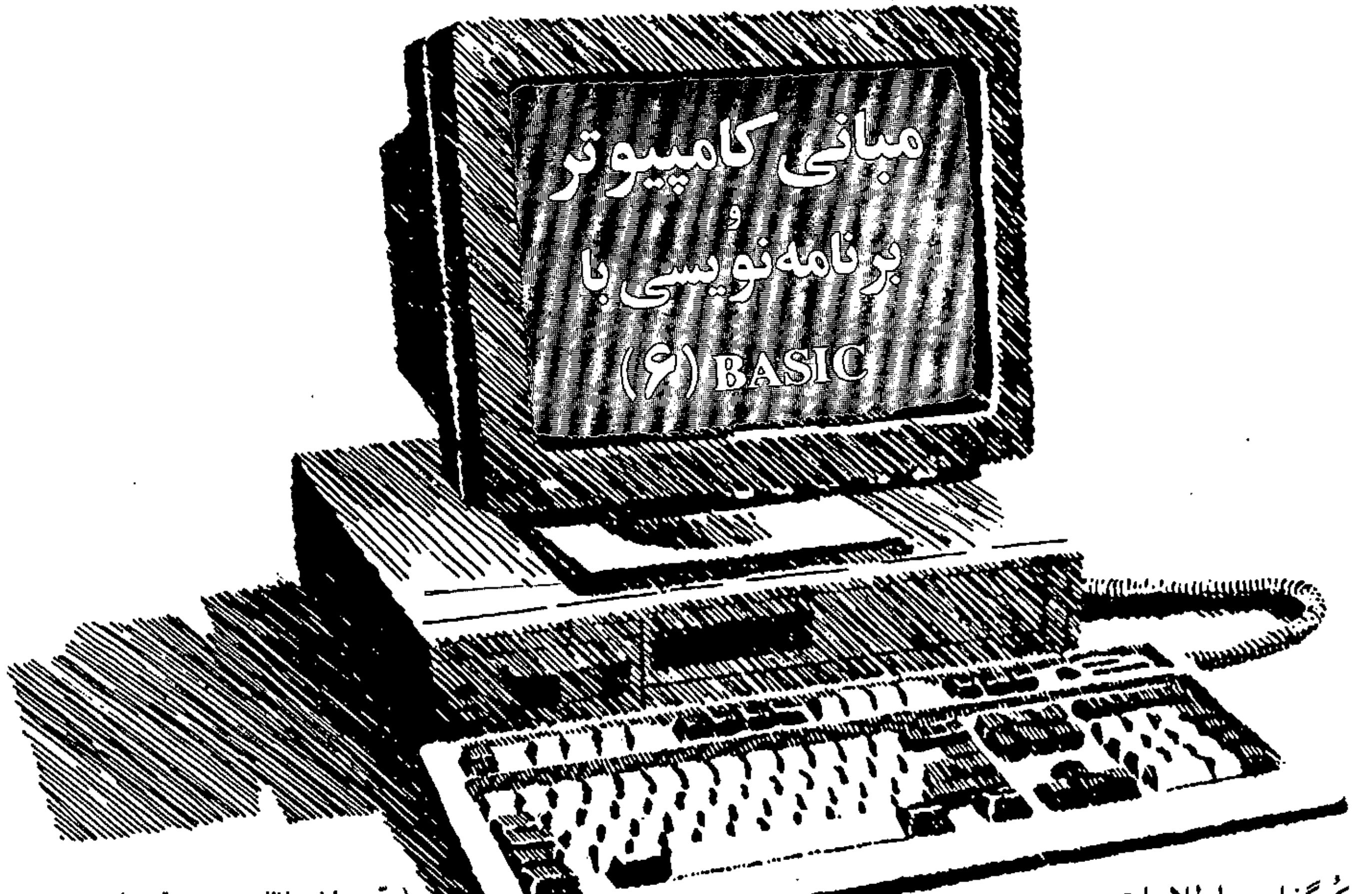


ادب ریاضی

سهم مسلمین در بسط کلیهٔ شاخه‌های ریاضیات تأثیر گذاشته است و در بسیاری در درجهٔ اول اهمیت بوده است. با وجود این، هیچ کتاب درسی در تاریخ ریاضیات به زبان انگلیسی جز از یک دیدگاه کلی، به سهم مسلمین نمی‌پردازد. این امر نه‌تنها از نظر علمی، بلکه از لحاظ آموزشی نیز مایهٔ تأسف است، زیرا سهم دستاوردهای دورهٔ اسلامی، گوهرهایی از استدلال ریاضی را که در دسترس آموختگان ریاضیات دورهٔ دبیرستان هست، در خود دارند. بسیاری از اینها، مراحل مهمّی را در بسط حساب اعشاری، مثلثات مسطحه و کروی، جبر و روشهایی از قبیل درونیابی و تقریب ریشه‌های معادلات نشان می‌دهند.

کتابهای تاریخ ریاضیات و تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی به زبان فارسی نادرترند و معدود محققان تاریخ ریاضیات ایرانی نیز عمدتاً همّ خود را به علم رجال و شرح احوال دانشمندان اسلامی و ایرانی معطوف داشته‌اند و یا آثار آنها در حدّ تک‌نگاری است. مثلاً زنده یاد دکتر غلامحسین مصاحب در کتاب «حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر» پس از مقدمه‌ای کوتاه در مورد تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، تلاش عمدهٔ خود را به نقد و بررسی رسالهٔ «جبر و مقابله» حکیم عمرخیام مصروف داشته و استاد ابوالقاسم قربانی هم عمدتاً در آثار خود به شناساندن رجال ریاضیات اسلامی و ایرانی اهتمام ورزیده است.

(قسمتی از پیشگفتار کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی)



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

کُدگذاری اطلاعات
و نمایش اِعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر (۶)

□ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

انواع روشهای مکمل‌گیری و چگونگیِ ساختن مکمل یک عدد در مبنای دلخواه:

برای هر سیستم عملیاتی و عددی مبنای[1] b دو نوع مکمل به صورت ۱ــ مکمل ۱-b ۲ــ مکمل b تعریف شده است. از آنجا که در کامپیوتر سیستم‌های عملیاتی مهم عبارتند از الف ــ سیستم دودویی یا binary ب ــ سیستم هشت‌تایی یا octal ج ــ سیستم دهدهی یا decimal د ــ سیستم شانزده‌تایی یا hexadecimal ، از این رو، برای مبنای ۲ دو مکمل با نامهای مکمل ۱ و مکمل ۲، برای مبنای ۸ دو مکمل با نامهای مکمل ۷ و مکمل ۸، برای مبنای ۱۰ دو مکمل با نامهای مکمل ۹ و مکمل ۱۰ و برای مبنای ۱۶ دو مکمل با نامهای مکمل ۱۵ و مکمل ۱۶ تعریف می‌شود.

محاسبهٔ مکمل ۱ ــ b : برای محاسبهٔ مکمل ۱ - b عدد مثبت A در مبنای b سه روش به شرح زیر وجود دارد.

۱ ــ روش محاسباتی[2]

۲ ــ روش ذهنی

۳ ــ استفاده از مکمل b

۱ ــ روش محاسباتی برای محاسبهٔ مکمل ۱ ــ b عدد مثبت A : اگر A یک عدد مثبت در مبنای b دارای n رقم در قسمت صحیح[3] و m رقم در قسمت کسری[4] یا ممیزدار باشد آنگاه مکمل ۱ - b عدد A به‌صورت $b^n - b^{-m} - A$ تعریف می‌شود. لازم به ذکر است که نتیجهٔ هریک از عبارتهای b^n و b^{-m} در مبنای ۱۰ بوده بدنبال محاسبه، حاصل به مبنای b تبدیل می‌شود. عدد A همواره در مبنای b است.

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در این‌جا n = ۷ و m = ۰ است چون قسمت کسری نداریم، درنتیجه

مکمل۱عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$

$= (2^7 - 2^0)_{10} - (1011010)_2 =$

$(127)_{10} - (1011010)_2 = (1111111)_2$

$- (1011010)_2 = (100101)_2$

مثال: مکمل ۱ عدد $(11001100)_2$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱عدد $(11001100)_2$

$= (2^8 - 2^0)_{10} - (11001100)_2 = (255)_{10}$

$-(11001100)_2 = (11111111)_2 -$

$(11001100)_2 = (110011)_2$

مثال: مکمل ۱ عدد $(10010/010101)_2$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = 5$ و $m = 6$ است، درنتیجه

مکمل۱عدد $(10010/010101)_2$

$= (2^5 - 2^{-6})_{10} - (10010/010101)_2$

$= (32 - 0/015625)_{10} - (10010/010101)_2$

$= (31/984375)_{10} - (10010/010101)_2$

$= (11111/111111)_2 - (10010/010101)_2$

$= (1101/101010)_2$

مثال: مکمل ۷ عدد $(4563)_8$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = 4$ و $m = 0$ است. درنتیجه:

مکمل۷عدد $(4563)_8$

$= (8^4 - 8^0)_{10} - (4563)_8 =$

$(4095)_{10} - (4563)_8 = (7777)_8$

$-(4563)_8 = (3214)_8$

تمرین: مکمل ۷ عدد $(123/456)_8$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

مثال: مکمل ۹ عدد $(74/360)_{10}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $n = 2$ و $m = 3$ و $b = 10$ است، درنتیجه

مکمل۹عدد $(74/360)_{10}$

$= (10^2 - 10^{-3})_{10} - (74/360)_{10} =$

$(99/999 - 74/360) = 25/639$

مثال: مکمل ۹ عدد $(18)_{10}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۹عدد $(18)_{10}$

$= (10^2 - 10^0)_{10} - (18)_{10} =$

$99 - 18 = 81$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(123)_{16}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(123)_{16}$

$= (16^3 - 16^0)_{10} - (123)_{16} =$

$(4095)_{10} - (123)_{16}$

$= (FFF)_{16} - (123)_{16} = (EDC)_{16}$

تمرین: مکمل ۱۵ عدد $(123/12)_{16}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

۲ ــ روش ذهنی برای محاسبهٔ مکمل $b-1$ عدد مثبت A : در این روش برای محاسبهٔ مکمل $b-1$ عدد صحیح یا ممیزدار A، هر یک از ارقام آن را از $b-1$ کم می‌کنیم آنچه که به دست می‌آید مکمل $b-1$ عدد A است. به عبارت دیگر اگر A به صورت $(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0 . a_{-1}\ldots a_{-m})_b$ باشد آنگاه مکمل $b-1$ عدد A برابر $(s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_0 . s_{-1}s_{-2}\ldots s_{-m})_b$ است که در آن:

$$s_{n-1} = (b-1) - (a_{n-1})$$
$$s_{n-2} = (b-1) - (a_{n-2})$$
$$\vdots$$
$$s_0 = (b-1) - (a_0)$$
$$s_{-1} = (b-1) - (a_{-1})$$
$$\vdots$$
$$s_{-m} = (b-1) - (a_{-m})$$

مثال: مکمل ۱ عدد $(1011010)_2$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $b-1 = 2-1 = 1$ است و از این رو هر رقم عدد داده شده را از یک کم می‌کنیم.

مکمل۱عدد $(1011010)_2$

$=\left[\binom{1-}{1}\binom{1-}{0}\binom{1-}{1}\binom{1-}{1}\binom{1-}{0}\binom{1-}{1}\binom{1-}{0}\right]_2$

$=(0100101)_2=(100101)_2$

همان‌گونه که از مثال پیداست برای به‌دست آوردن مکمل ۱ عدد، کافی است در عدد داده شده تمام یک‌ها را به صفر و تمام صفرها را به یک تبدیل کنیم.

مثال: مکمل ۱ عدد $(11001100)_2$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: با تبدیل یک‌ها به صفر و صفرها به یک داریم:

مکمل۱عدد $(11001100)_2$

$=(00110011)_2=(110011)_2$

مثال: مکمل ۱ عدد $(10010/010101)_2$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

عدد ۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱

مکمل ۱ ⇐ ۰۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰

درنتیجه مکمل یک عدد $(10010/010101)_2$ عدد $(1101/101010)_2$ است.

مثال: مکمل ۷ عدد $(4563)_8$ را با روش ذهنی به دست آورید.

حل: در اینجا $b-1=8-1=7$ است از این رو هر رقم عدد داده شده را از ۷ کم می‌کنیم.

در نتیجه:

مکمل۷عدد $(4563)_8$

$=\left[\binom{7-}{4}\binom{7-}{5}\binom{7-}{6}\binom{7-}{3}\right]_8=(3214)_8$

مثال: مکمل ۷ عدد $(123/456)_8$ را با روش ذهنی به دست آورید.

حل:

مکمل۷عدد $(123/456)_8$

$=\left[\binom{7-}{1}\binom{7-}{2}\binom{7-}{3}/\binom{7-}{4}\binom{7-}{5}\binom{7-}{6}\right]_8$

$=(654/321)_8$

مثال: مکمل ۹ عدد $(74/360)_{10}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: هر رقم عدد داده شده را از ۹ کم می‌کنیم، درنتیجه:

مکمل۹عدد $(74/360)_{10}$ = $(25/639)$

مثال: مکمل ۹ عدد $(18)_{10}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: هر رقم عدد داده شده را از ۹ کم می‌کنیم درنتیجه:

مکمل۹عدد $(18)_{10}$

$=\left[\binom{9-}{1}\binom{9-}{8}\right]_{10}=(81)_{10}$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(123)_{16}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: در اینجا $b-1=16-1=15$ است از این رو هر رقم عدد داده شده را از ۱۵ کم می‌کنیم.

در نتیجه:

مکمل۱۵عدد $(123)_{16}$

$=\left[\binom{15-}{1}\binom{15-}{2}\binom{15-}{3}\right]_{16}=(EDC)_{16}$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(123/12)_{16}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(123/12)_{16}$

$=\left[\binom{15-}{1}\binom{15-}{2}\binom{15-}{3}/\binom{15-}{1}\binom{15-}{2}\right]_{16}$

$=(EDC/ED)_{16}$

۳ ــ استفاده از مکمل b : این روش محاسبهٔ مکمل b−۱ عدد صحیح یا ممیزدار A را بعد از بیان روش مکمل b اندکی دیرتر توضیح می‌دهیم.

محاسبهٔ مکمل b : برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت A در مبنای b نیز سه روش به شرح زیر وجود دارد.

۱ ــ روش محاسباتی

۲ ــ روش ذهنی

۳ ــ استفاده از مکمل b−۱

۱ ــ روش محاسباتی برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت A : اگر A یک عدد مثبت در مبنای b دارای n رقم در قسمت صحیح و m رقم در قسمت کسری باشد آنگاه مکمل b عدد A به‌صورت b^n-A تعریف می‌شود. برخلاف مکمل b−۱ عدد A، در محاسبهٔ مکمل b قسمت کسری هیچ نقشی

ایفا نمی‌کند به همین خاطر b^{-m} در تبدیل بالا وجود ندارد. در این روش نیز نتیجهٔ عبارت b^n عددی در مبنای ۱۰ بود پس از انجام محاسبهٔ b^n، حاصل به مبنای b تبدیل می‌شود.

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل: در اینجا n = ۷ است. در نتیجه

مکمل۲عدد $(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$
$=(۲^۷)_{۱۰}-(۱۰۱۱۰۱۰)_۲=$
$(۱۰۰۰۰۰۰۰)_۲-(۱۰۱۱۰۱۰)_۲$
$=(۱۰۰۱۱۰)_۲$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۲عدد $(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$
$=(۲^۸)_{۱۰}-(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲=$
$(۱۰۰۰۰۰۰۰۰)_۲-(۱۱۰۰۱۱۰۰)_۲$
$=(۱۱۰۱۰۰)_۲$

مثال: مکمل ۲ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۲عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$
$=(۲^۵)_{۱۰}-(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$
$=(۱۰۰۰۰۰)_۲-(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$
$=(۱۰۰۰۱/۱۱۰۰۱۱)_۲$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۸عدد $(۴۵۶۳)_۸$
$=(۸^۴)_{۱۰}-(۴۵۶۳)_۸=(۱۰۰۰۰)_۸$
$-(۴۵۶۳)_۸=(۳۲۱۵)_۸$

مثال: مکمل ۸ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۸عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$
$=(۸^۳)_{۱۰}-(۱۲۳/۴۵۶)_۸$
$=(۱۰۰۰)_۸-(۱۲۳/۴۵۶)_۸$
$=(۶۵۴/۳۲۲)_۸$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۰عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$
$=(۱۰^۲)_{۱۰}-(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}=(۱۰۰-۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$
$=(۲۵/۶۴۰)_{۱۰}$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(۱۸)_{۱۰}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۹عدد $(۱۸)_{۱۰}$
$=(۱۰^۲)_{۱۰}-(۱۸)_{۱۰}=(۱۰۰-۱۸)_{۱۰}=(۸۲)_{۱۰}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۵عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$
$=(۱۶^۳)_{۱۰}-(۱۲۳)_{۱۶}=(۱۰۰۰)_{۱۶}-(۱۲۳)_{۱۶}=(EDD)_{۱۶}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با روش محاسباتی به‌دست آورید.

حل:

مکمل۱۶عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$
$=(۱۶^۳)_{۱۰}-(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}=(۱۰۰۰)_{۱۶}-(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$
$=(EDC/EE)_{۱۶}$

۲ ــ روش ذهنی برای محاسبهٔ مکمل b عدد مثبت A

در این روش چه عدد A یک عدد صحیح مثبت باشد و چه یک عدد ممیزدار، برای محاسبهٔ مکمل b عدد A، کافی است رقم یا رقمهای صفر در سمت راست عدد را کنار گذاشته آنگاه اولین رقم غیر صفر را از b و بقیهٔ ارقام را از b−۱ کم کنیم.

مثال: مکمل ۲ عدد (۱۰۱۱۰۱۰) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل: با توجه به شرحی که داده شده داریم:

۱۱۱۱۱۲
−۱۰۱۱۰۱۰
۰۱۰۰۱۱۰

در نتیجه مکمل ۲ عدد (۱۰۱۱۰۱۰۱)$_{۲}$ عدد (۱۰۰۱۱۰)$_{۲}$ است.

مثال: مکمل ۲ عدد (۱۱۰۰۱۱۰۰)$_{۲}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۱۱۱۱۱۲
−۱۱۰۰۱۱۰۰
۰۰۱۱۰۱۰۰

درنتیجه مکمل ۲ عدد (۱۱۰۰۱۱۰۰)$_{۲}$ عدد (۱۱۰۱۰۰)$_{۲}$ است.

مثال: مکمل ۲ عدد (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)$_{۲}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۲
−۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱
۰۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱

در نتیجه مکمل ۲ عدد (۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)$_{۲}$ عدد (۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)$_{۲}$ است.

مثال: مکمل ۸ عدد (۴۵۶۳)$_{۸}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۷۷۷۸
−۴۵۶۳
۳۲۱۵

در نتیجه مکمل ۸ عدد (۴۵۶۳)$_{۸}$ عدد (۳۲۱۵)$_{۸}$ است.

مثال: مکمل ۸ عدد (۱۲۳/۴۵۶)$_{۸}$ را با روش ذهنی به دست آورید.

حل:

۷۷۷/۷۷۸
−۱۲۳/۴۵۶
۶۵۴/۳۲۲

درنتیجه مکمل ۸ عدد (۱۲۳/۴۵۶)$_{۸}$ عدد (۶۵۴/۳۲۲)$_{۸}$ است.

مثال: مکمل ۱۰ عدد (۷۴/۳۶۰)$_{۱۰}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۹۹/۹(۱۰)
−۷۴/۳۶۰
۲۵/۶۴۰

درنتیجه مکمل ۱۰ عدد (۷۴/۳۶۰)$_{۱۰}$ عدد (۲۵/۶۴۰)$_{۱۰}$ است.

مثال: مکمل ۱۰ عدد (۱۸)$_{۱۰}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

۹(۱۰)
−۱۸
۸۲

درنتیجه مکمل ۱۰ عدد (۱۸)$_{۱۰}$ عدد (۸۲)$_{۱۰}$ است.

مثال: مکمل ۱۶ عدد (۱۲۳)$_{۱۶}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

حل:

(۱۵)(۱۵)(۱۶)
−۱ ۲ ۳
E D D

درنتیجه مکمل ۱۶ عدد (۱۲۳)$_{۱۶}$ عدد (EDD)$_{۱۶}$ است.

مثال: مکمل ۱۶ عدد (۱۲۳/۱۲)$_{۱۶}$ را با روش ذهنی به‌دست آورید.

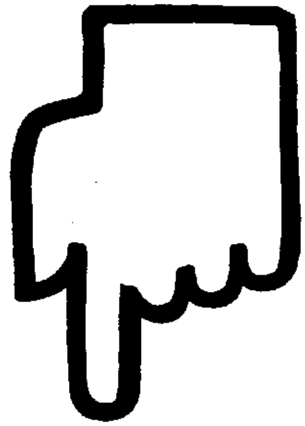
حل:

FFF / F(۱۶)
−۱۲۳/۱۲
EDC / EE

در نتیجه مکمل ۱۶ عدد (۱۲۳/۱۲)$_{۱۶}$ عدد (EDC / EE)$_{۱۶}$ است.

❏ واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1 - Base
2 - Arithmetic procedure
3 - Integer part
4 - Fractional part



● محمد رحیم (دبیر دبیرستان امام صادق (ع))

محاسبهٔ همزمان سریهای $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ به‌کمک اعداد مختلط

هریک از سریهای $\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ را می‌توان به‌طور جداگانه با روشهای معمول به‌دست آورد. آنچه که در زیر می‌آید محاسبهٔ همزمان سریهای فوق به‌کمک اعداد مختلط است. با توجه به‌رابطهٔ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ تساویهای زیر را می‌نویسیم:

$$\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$
$$\vdots$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

از جمع عبارات موجود در طرفین تساویهای فوق داریم:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^1+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\dots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$
$$(\cos\theta+\dots+\cos n\theta)+(\sin\theta+\dots+\sin n\theta)i$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^1+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\dots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x+x^2+\dots+x^n=\frac{x(x^n-1)}{x-1}\ ,\ x\neq\pm1 \text{ و } |x|<1$$

با جایگزینی $(x\neq\pm1\Rightarrow\cos\theta\neq\pm1\Rightarrow\theta\neq k\pi)\,x=\cos\theta+i\sin\theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta+i\sin\theta-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم $S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$ و رابطهٔ (۱) را بازنویسی می‌کنیم:

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta+i\sin\theta-1}$$
$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\cos\theta-1+i\sin\theta}$$

صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج مخرج کسر یعنی $\cos\theta-1-i\sin\theta$ ضرب می‌کنیم:

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-1-i\sin\theta)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{\left[(\cos\theta-1)+i\sin\theta\right]\left[(\cos\theta-1)-i\sin\theta\right]}$$

محاسبات کسر فوق در زیر می‌آید:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-1-i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta-\cos\theta-i\sin\theta$$
$$=-(\cos\theta+i\sin\theta-1)$$
$$[(\cos\theta-1)+i\sin\theta][(\cos\theta-1)-i\sin\theta]$$
$$=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=2-2\cos\theta=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\Rightarrow S=\frac{-(\cos\theta+i\sin\theta-1)\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n-1\right]}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{-\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}-(\cos\theta+i\sin\theta)+1\right]}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\left[(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)-(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos\theta+i\sin\theta)+1\right]$$

$$\Rightarrow S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\left[(\cos(n+1)\theta-\cos n\theta-\cos\theta+1)+i(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta-\sin\theta)\right] \qquad (2)$$

عبارات داخل کروشهٔ رابطهٔ (۲) را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

پرانتز اول:

$$\cos(n+1)\theta-\cos n\theta=-2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$1-\cos\theta=2\sin^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\cos(n+1)\theta-\cos n\theta+1-\cos\theta$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{2n+1}{2}\theta\right]$$

$$=-4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}$$

پرانتز دوم:

$$\sin(n+1)\theta-\sin n\theta=2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$-\sin\theta=-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\sin(n+1)\theta-\sin n\theta-\sin\theta$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{2n+1}{2}\theta-\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=-4\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}$$

با جایگزین کردن عبارات ساده شده داریم:

$$S=\frac{-1}{4\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\left[-4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}-4i\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}\right]$$

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+i\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

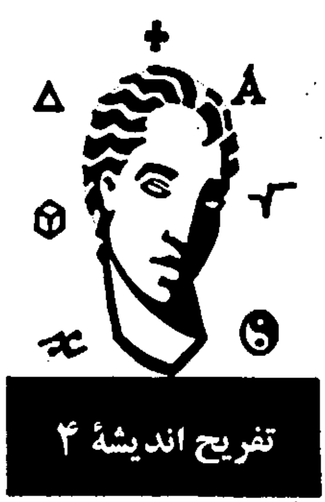
با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی، نتیجهٔ نهایی به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

اگر روابط فوق را به‌یکدیگر تقسیم کنیم نتیجهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta}{\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta}=\operatorname{tg}\frac{n+1}{2}\theta$$



چنانچه یک تخته به شکل مربع با ۲۵ گل میخ مجهز باشد، چند مربع متفاوت می‌تواند به روی آن ایجاد شود؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۵)

100 Great problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مربع به‌صورت تصویر یک چهارضلعی

ثابت کنید هر چهارضلعی را می‌توان به‌عنوان تصویر پرسپکتیوی یک مربع درنظر گرفت.

تصویر پرسپکتیوی[1]، پرسپکتیوی[2] یا تصویر مرکزی[3]، ساده‌ترین و مهمترین تصویرها را می‌توان به‌صورت زیر توضیح داد.

مفروضها عبارت‌اند از: نقطهٔ ثابت Z، مرکز تصویر[4]، و صفحهٔ ثابت E، صفحهٔ تصویر[5]. تصویر پرسپکتیوی یا، به‌طور مختصرتر، پرسپکتیو. نقطه دلخواه P_0 به معنی P، نقطه تقاطع «پرتو تصویری[6]»، ZP_0 با صفحهٔ تصویر، درنظر گرفته می‌شود. P_0 «شیء[7]» و P «تصویر» است. تصویر یک شکل مجموعهٔ تصویرهای نقطه‌هایی است که شکل (شیء) شامل آنهاست. به‌این ترتیب، پرسپکتیو خط مستقیمی چون g_0 خط مستقیمی چون g، یعنی تقاطع صفحهٔ Zg_0 با صفحهٔ تصویر، است.

تصویر پرسپکتیوی‌ای که در آن تنها نقطه‌های صفحه‌ای چون E_0، صفحهٔ شیء[8]، به‌روی صفحهٔ تصویر تصویر شده است، دارای اهمیتی خاص است. D، خط تقاطع صفحهٔ شیء و صفحهٔ تصویر به‌محور پرسپکتیوی[9] موسوم است. محور پرسپکتیوی مکان هندسی نقطهٔ شیء‌ای است که با نقطهٔ تصویرش منطبق است. طبق این موضوع یک خط شیئی دلخواه و تصویرش در این محور متقاطع می‌شوند.

در پرسپکتیوی مورد بحث نقشی قابل توجه توسط نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت صفحهٔ شیئی ایفا می‌شود. از آنجا که شعاعهای تصویری به‌نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت E_0 موازی E_0 حرکت می‌کنند، در صفحهٔ Δای گذرنده از Z و موازی با E_0 واقع‌اند و درنتیجه با صفحهٔ تصویر در f، خط تقاطع این صفحه با Δ برخورد می‌کنند. این خط مشترک به‌خط فرار[10] صفحهٔ شیئی E_0 موسوم است. خط فرار با محور پرسپکتیوی موازی است.

به‌خاطر اجتناب از محدود کردن اعتبار عمومی قضیهٔ فوق، «پرسپکتیو یک خط نیز یک خط است»، توسط حالتی خاص، مجموعهٔ نقطه‌های در فاصلهٔ بینهایت E_0 را «خط در فاصلهٔ بینهایت» این صفحه می‌نامیم و در این صورت می‌توانیم به‌طور مختصر بیان کنیم که:

پرسپکتیو خط در فاصلهٔ بینهایت یک صفحه، خط فرار این صفحه است.

مکانی که در آن g، تصویر g_0، خط دلخواهی از E_0، خط فرار f را قطع می‌کند و تصویر نقطهٔ در فاصلهٔ بینهایت g_0 است نقطهٔ فرار[11] g_0 نامیده می‌شود.

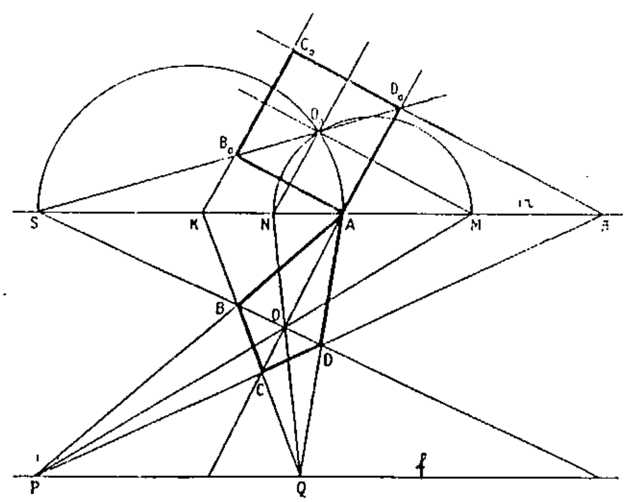
اکنون به‌حل مسأله‌مان می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم چهارضلعی ABCD‌ی واقع در صفحهٔ ترسیم E چهارضلعی مفروض، O نقطهٔ تقاطع قطرهای AC و BD‌ی آن، P نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل AB و CD، Q نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل BC و DA باشد. فرض می‌کنیم مربعی را که در جستجوی آنیم، مطابقتاً، $A_0B_0C_0D_0$، نقطهٔ تقاطع قطرهای آن را O_0، صفحهٔ آن را E_0 بنامیم. از آنجا که P_0 و Q_0، نقطه‌های تقاطع دو جفت ضلع مقابل بر خط در فاصلهٔ بینهایت E_0 قرار دارند P و Q،

تصویرهای آنها، باید بر f، خط فرار پرسپکتیو بودن گذرنده از E_1 و E واقع شود. این که کدام موازی با f را به‌عنوان محور پرسپکتیو بودن O انتخاب کنیم تفاوتی نمی‌کند. در این صورت موازی گذرنده از A را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های تقاطع این محور با خطهای CD، BC، OP، OQ، و BD را با H، K، M، N، و S مشخص می‌کنیم. این نقطه‌ها را، از آنجاکه هر خط شیئی خط تصویری متناظر خود را بر محور مورد بحث تلاقی می‌کند، می‌توان H_1، K_1، M_1، N_1، S_1 نیز نامید.

در چهارضلعی ABCD ضلعهای مقابل PBA و PCD و قطرهای PO و PQ یک دسته شعاعهای توافقی[12] تشکیل می‌دهند. از آنجاکه شعاع PQ موازی خط a حرکت می‌کند، پاره‌خطهای MA و MH به‌طولهای برابرند.

در چهارضلعی ABCD ضلعهای مقابل QCB و QDA و قطرهای QO و QP دسته شعاعهای توافقی می‌سازند. از آنجاکه a ∥ QP، پاره‌خطهای NA و NK نیز به‌طولهای برابرند.



از آنجاکه قطرهای مربع موردنظر باید قطرهای چهارضلعی مفروض را در محور مورد بحث تلاقی کنند، قطرهای مربع مزبور باید از A و S بگذرند. طبق این موضوع O_1، نقطهٔ تقاطع قطرها بر نیمدایره‌ای با قطر AS متعلق به‌صفحهٔ E_1 واقع می‌شود.

از آنجاکه M_1O_1 و N_1O_1، میان‌خطهای[13] مربع مورد بحث از O_1 می‌گذرند، O_1 نیز بر نیمدایرهٔ به‌قطر MN واقع در صفحهٔ E_1 قرار دارد.

نقطهٔ تقاطع دو نیمدایرهٔ مزبور، O_1، نقطهٔ مرکزی[14] مربع موردنظر است.

A_1B_1 و C_1D_1، ضلعهای مربع مورد بحث از A و H موازی MO_1، و ضلعهای B_1C_1 و D_1A_1 از آن از K و A موازی NO_1 هستند.

برای راحتی کار، ترسیم مربوطه را در خود صفحهٔ ترسیم انجام داده‌ایم. در این صورت، برای به‌دست آوردن پرسپکتیوی فضایی مطلوب، مربع مزبور را حول محور a، به‌عنوان محور دوران[15] به‌صفحهٔ جدید E_1 دوران می‌دهیم، از f صفحهٔ Δ را موازی E_1 رسم می‌کنیم، O_1، نقطهٔ تقاطع قطرها را، که اکنون در E_1 قرار دارد، به O وصل می‌کنیم، و نقطهٔ تقاطع خط واصل مزبور را با Δ به‌صورت Z مشخص می‌کنیم.

اکنون درصورتی که مربع $A_1B_1C_1D_1$ واقع در E_1 را از مرکز Z به‌روی E تصویر کنیم، مربع ABCD را به‌عنوان تصویر پرسپکتیوی به‌دست می‌آوریم.

یادداشتها

1- Perspective Projection
2- Perspectivity
3- Central projection
4- Center of projections
5- Plane of the image
6- Projection ray
7- Object
8- Object plane
9- axis of perspectivity
10- Vanishing line
11- Vanishing point
12- harmonic ray pencil
13- mid lines
14- Center point
15- axis of rotation

اثبات نامساویها

● محمدعلی سلحشور

(دبیر ریاضی دبیرستانهای اصفهان)

نامساویهایی که اعتبار آنها نیاز به‌اثبات با استفاده از گزاره‌های شناخته شده دارد در این مبحث مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگرچه گزاره‌ای که به‌آن استناد می‌شود اثبات نشده باشد اما این معنا را دارد که برای هر مقدار حقیقی درست است.

الف: اثبات نامساوی بر اساس تعریف

چنانچه از تعریف برمی‌آید $a>b$ یعنی $a-b$ برای هر مقدار حقیقی a و b مثبت است بنابراین در اثبات نابرابری:

$$f(a,b,...k)>q(a,b,...k)$$

برای همهٔ مقادیر a، b و ...k تفاضل $f(a,b,...k)-q(a,b,...k)$ را تشکیل و نشان می‌دهیم برای همهٔ مقادیر a، b و ...k مثبت است. این روش در اثبات نابرابریهای $f<q$ و $f\geq q$ و $f\leq q$ نیز کاربری دارد.

مثال ۱: (نامساوی کوشی) ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\qquad a\geq 0, b\geq 0$$

حل: $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ را تشکیل و علامت آن را معین می‌کنیم.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

یعنی برای همهٔ مقادیر حقیقی نامنفی a و b مثبت است و درحالتی که $a=b$ صفر است. یعنی:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\quad \text{یا}\quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$$

مثال ۲: نشان دهید اگر $ab>0$ آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

حل:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$$

باتوجه به‌آنکه $ab>0$ داریم: $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ حالت تساوی وقتی است که $a=b$. بنابراین $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2$ نامنفی است یعنی نامساوی برقرار است.

مثال ۳: ثابت کنید:

$$a^2+4b^2+3c^2+14>2a+12b+6c$$

حل: تفاضل $(a^2+4b^2+3c^2+14)-(2a+12b+6c)$ را تشکیل می‌دهیم. این تفاضل را به‌شکل زیر سازمان می‌دهیم:

$$(a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+1$$

$$=(a-1)^2+(2b-3)^2+3(c-1)^2+1$$

که برای هر مقدار حقیقی a، b، c مثبت است. اثبات نامساوی بالا محقق است.

مثال ۴: نشان دهید اگر $a+b+c\geq 0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

حل: تفاضل $a^3+b^3+c^3-3abc$ را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

باتوجه به‌فرض $a+b+c\geq 0$ عبارت جبری حاصل نامنفی است. بنابراین نامساوی بالا برقرار است. توجه دارید که تساوی برای حالتی است که $a+b+c=0$ یا $a=b=c$.

ب: روش ترکیبی اثبات نامساویها

در روش ترکیبی از برخی تعاریف و نامساویهای شناخته شده در اثبات نامساویهای موردنظر استفاده می‌شود. برای نمونه می‌توان به‌نامساویهای: $a^2\geq 0$ و $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ وقتی $a\geq 0$ و $b\geq 0$ و $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ وقتی $ab>0$ و $ax^2+bx+c>0$ وقتی $a>0$ و $b^2-4ac<0$ اشاره کرد.

مثال ۵ : نشان دهید اگر $a\geq 0$ و $b\geq 0$ و $c\geq 0$ و $d\geq 0$ آنگاه:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$$

حل: نامساوی کوشی را الگو قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}$$

چون $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ و $\frac{c+d}{2}\geq\sqrt{cd}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geq\sqrt[4]{abcd}\rightarrow\frac{a+d+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$$

حالت تساوی وقتی برقرار است که $a=b$ و $c=d$ و $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$ یعنی $a=b=c=d$.

مثال ۶ : نشان دهید! $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!$ وقتی $n>1$ و $n\in N$.

حل: از نامساوی کوشی برای اثبات درستی نابرابری فوق استفاده می‌کنیم:

$$\frac{n+1}{2}\geq\sqrt{n\times 1}$$
$$\frac{(n-1)+2}{2}\geq\sqrt{(n-1)\times 2}$$
$$\frac{(n-2)+3}{2}\geq\sqrt{(n-2)\times 3}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2+(n-1)}{2}\geq\sqrt{2\times(n-1)}$$
$$\frac{1+n}{2}\geq\sqrt{1\times n}$$

طرفین n نامساوی بالا را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\geq\sqrt{[n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1][1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)\times n]}$$
$$=\sqrt{n!n!}=\sqrt{(n!)^2}=n!$$

بنابراین از ضرب نامساویهای کوشی نامساوی (۶) به‌دست می‌آید که با فرض $n>1$ نامساوی $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!$ که مورد نیاز بود محقق می‌شود.

مثال ۷ : نشان دهید اگر $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ آنگاه:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

حل: نامساویهای شناخته شده زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$$

از جمع طرفین نامساویهای بالا به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 6$$
$$\rightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$$
$$\rightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+3\geq 9$$
$$\rightarrow\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\geq 9$$
$$\rightarrow\left(\frac{a+b+c}{a}\right)+\left(\frac{b+a+c}{b}\right)+\left(\frac{c+a+b}{c}\right)\geq 9$$

با فاکتور قرار دادن عامل $a+b+c$:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

حالت تساوی وقتی $a=b=c$ برقرار است.

مثال ۸ : ثابت کنید اگر $x\in N$ و $n>1$ آنگاه:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$$

حل:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times 2}<\frac{1}{1\times 2},\ \frac{1}{9}=\frac{1}{3\times 3}<\frac{1}{2\times 3},$$
$$\frac{1}{16}=\frac{1}{4\times 4}<\frac{1}{3\times 4},\ldots,\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\times n}<\frac{1}{(n-1)\times n}$$

$(n-1)$ نامساوی بالا را با هم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+$$

$$\frac{1}{(n-1)^n} = \frac{2-1}{1\times 2}+\frac{3-2}{2\times 3}+\frac{4-3}{3\times 4}+\dots+$$

$$\frac{n-(n-1)}{(n-1).n} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$$

$$+\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}<1$$

پایان اثبات!

ج: اثبات نامساوی با استفاده از برهان خلف:

مثال ۹: نشان دهید اگر $a\ge 0$ و $b\ge 0$ و $c\ge 0$ و $d\ge 0$ آنگاه:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

حل: فرض کنید برای مقادیر a و b و c و d نامساوی (۹) برقرار نباشد یعنی:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}<\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

طرفین نامساوی مثبت هستند و می‌توان آنها را به‌توان ۲ رساند:

$$\to \sqrt{(a+c)(b+d)}<ab+cd+2\sqrt{abcd}$$

$$\to \sqrt{bc+da}<2\sqrt{abcd}\to\frac{bc+ad}{2}<\sqrt{abcd}$$

که با توجه به‌نامساوی کوشی نتیجه حاصل نادرست است. پس نامساوی (۹) برقرار است.

مثال ۱۰: نشان دهید اگر $a\ge 0$ و $b\ge 0$ و $c\ge 0$ آنگاه:

$$\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

حل: فرض می‌کنیم برای مقادیر a و b و c نامساوی (۱۰) برقرار نباشد و داشته باشیم:

$$\frac{a+b+c}{3}>\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

از مربع کردن طرفین نامساوی به‌دست می‌آید:

$$(\frac{a+b+c}{3})^2>\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\to(a+b+c)^2>3(a^2b^2c^2)$$

$$\to 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2<0\to 3(a^2+b^2+c^2)-$$

$$(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)<0\to 2a^2+2b^2+2c^2-$$

$$2ab-2ac-2bc<0\to(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2<0$$

این نتیجه که مجموع چند مربع است نادرست است. بنابراین نقض حکم درست نیست و نامساوی (۱۰) برقرار می‌باشد.

توضیح: اعداد نامنفی a_1، a_2، ... و a_n را در نظر بگیرید. کمیتهای زیر را داریم:

واسطه هندسی $G_n=\sqrt{a_1.a_2...a_n}$

واسطه همساز $H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$

میانگین‌مربع ازاعداد a_1 و a_2 و a_n $Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$

میانگین حسابی $A_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

رابطهٔ زیر بین این کمیتها برقرار است:

$$H_n\le G_n\le A_n\le Q_n$$

د: اثبات نامساویها با استفاده از استقراء:

مثال ۱۱: نشان دهید اگر $n\in N$ و $n\ge 3$ آنگاه: $2^n>2n+1$

حل:

$n=3\to 2^3>2(3)+1$

$n=k\to 2^k>2k+1$ فرض استقراء

$n=k+1\to 2^{k+1}>2k+3$ حکم استقراء

$2^{k+1}=2\times 2^k>2(2k+1)=4k+2=(2k+3)+(2k-1)$

$\to 2^{k+1}>(2k+3)+(2k-1)$

اما برای مقادیر طبیعی k، $2k-1>0$ پس:

$2^{k+1}>2^k+3$

مثال ۱۲: نشان دهید اگر $n\in N$ آنگاه:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$$

اثبات: برای $n=1$ داریم $\frac{1}{2} > 1$ که گزاره‌ای است درست.

حال فرض می‌کنیم برای $n=k$، درست باشد. (فرض استقراء)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^k-1} > \frac{k}{2}$$

باید نشان دهیم نامساوی (۱۲) برای $n=k+1$ نیز درست است. (حکم استقراء)

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}$$

$$S_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)$$

$$=S_k+P_k$$

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

P_k مجموع 2^k کسر است که هر کدام از $\frac{1}{2^{k+1}}$ بزرگترند. بنابراین:

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+$$

$$\dots+\frac{1}{2^{k+1}}=2^k\times\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

یعنی: $S_k > \frac{k}{2}$

$$P_k > \frac{1}{2} \rightarrow S_{k+1}=S_k+P_k > \frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

$$\rightarrow S_{k+1} > \frac{k+1}{2}$$



و همان‌طور که ما امور محسوسه را مشاهده می‌کنیم و از این راه به‌پارهٔ از احوال و اوضاع آنها دانش یقینی پیدا می‌کنیم و سپس بر اساس و بنیان این‌گونه احوال متیقنه دانشها و علوم صحیحی [به‌مانند هیأت و جز آن] بار کرده و استوار می‌نماییم پس همین‌طور اموری از روحانیات را مشاهده می‌کنیم و سپس اموری دیگر را بر اساس و پایهٔ آنها نهاده و استوار می‌کنیم و کسی که راه و روش وی این نباشد او را از این دانش بهره‌ای نباشد و به‌زودی شکوک و تردیدها او را بازیچهٔ خود قرار دهد.

حکمت‌الاشراق

هر تحقیقی که به‌ترتیب اشیا بستگی دارد تا از آگاهی به‌آن، دانستن، چیزهای دیگر حاصل گردد، بلکه هر تحقیقی که وابستگی آن به‌هر تألیفی باشد (خواه در آن ترتیب معینی ملحوظ شود یا خیر)، چنین تحقیقی، به‌شناختن مفرداتی (که در آن تألیف و ترتیب واقع شده است) محتاج است و نیاز تحقیق به‌شناختن مفردات، از هر جهت نیست، بلکه از آن جهتی است، که آن تألیف و ترتیب شایسته‌اند، که در آن، مفردات باشند، به‌همین دلیل اهل منطق به‌رعایت نمودن احوال معانی مفرد نیازمندند تا بدین وسیله به‌مراعات احوال تألیف دسترسی یابند.

اشارات و تنبیهات

ابوعلی‌سینا

گراف
(قسمت اول)

قابل استفاده دانش‌آموزان رشته ریاضی، دوره پیش‌دانشگاهی، ریاضیات گسسته

منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی

رالف ـ پ ـ گریمالدی (جلد دوم)

● ترجمه و گردآوری: سیمین اکبری‌زاده (دبیر ریاضی ـ اراک)

نظریهٔ گراف یکی از مفیدترین و پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات گسسته است. این نظریه بسیار وسیع و پیشرفته‌تر از آن است که بتوان همهٔ مطالب آن را در یک مقاله جمع‌آوری نمود و در این مقاله سعی شده در حد نیاز دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی به‌آن پرداخته شود. لازم به‌تذکر است که با توجه به‌تنوع اصطلاحات نظریه گراف، عبارات به‌کار رفته در این مقاله استاندارد نمی‌باشند.

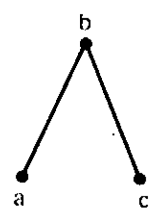
◀ تعریف: گراف (Graph)

گراف بی‌جهت G زوجی مرتب مانند (E و V) است که در آن V مجموعهٔ متناهی و ناتهی و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متشکل از دو عضو متمایز V باشد.* اعضای V را رئوس یا گره‌ها (vertices) ی G و اعضای E را یالها یا خطها (edges) ی G می‌نامیم.

قرارداد: می‌نویسیم «$\{a,b\}\in E$» یا «$ab\in E$»، هرگاه یال ab دو رأس متمایز a و b را بهم وصل کرده باشد، در این صورت گوییم رئوس a و b مجاورند.

توجه: در بعضی گرافها، مجاز به‌داشتن طوقه (loop) یا یالهایی به‌صورت $\{a,a\}$ هستیم، ولی گرافهایی که در کتاب درسی و این مقاله موردنظر می‌باشد بدون طوقه (a) می‌باشند.

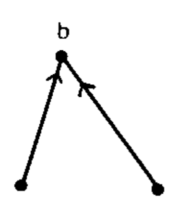
مثال ۱: در گراف شکل (۱): $E=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$، $V=\{a,b,c\}$ و با توجه به‌اینکه تعداد اعضای V (تعداد رئوس گراف) ۳ می‌باشد، گوییم مرتبهٔ گراف ۴ است و می‌نویسیم: $|V|=۳$ یا $P=۳$. و نیز با توجه به‌اینکه تعداد اعضای E (تعداد یالهای گراف) ۲ می‌باشد، گوییم اندازهٔ گراف ۲ است و می‌نویسیم: $|E|=۲$ یا $q=۲$.



شکل (۱)

تذکر: گرافی را که برای یالهای آن جهت در نظر گرفته شود، گراف جهتدار می‌نامند، در این صورت هرگاه از a به b یک یال جهتدار موجود باشد، می‌نویسیم: $(a,b)\in E$. البته در کتب دبیرستانی موضوع مورد بحث معمولاً گراف بی‌جهت است.

مثال ۲: گراف شکل (۲)، گراف جهتداری است که در آن $E=\{(a,b),(c,b)\}$.



شکل (۲)

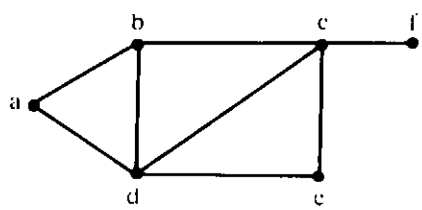
◀ تعریف: گردش (Walk)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت و x,y دو رأس آن

باشند یک گردش از x به y در G، دنبالهٔ متناهی از رئوس و یالهای G مانند $x,e_1,x_1,e_2,...,e_n,y$ می‌باشد که از رأس x شروع و به‌رأس y ختم می‌شود و دارای n یال $1 \leq i \leq n$ ، $e_i = \{x_{i-1},x_i\}$ می‌باشد. عدد n را طول گردش می‌نامیم.

توجه: در گردش ممکن است برخی از رئوس و یالها بیش از یک‌بار ظاهر شوند و نیز معمولاً از نوشتن یالها در دنباله صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۳: در گراف شکل (۳): ۱) دنبالهٔ رئوس b,c,d,e,c,f یک b-f گردش به‌طول ۵ می‌باشد که رأس c تکرار شده ولی هیچ یالی بیش از یک بار ظاهر نشده است.



شکل (۳)

۲) دنبالهٔ رئوس f,c,e,d,a یک f-a گردش به‌طول ۴ می‌باشد که هیچ رأس و یال تکراری در آن وجود ندارد.

تعریف: خط سیر و مدار trail and circxit
مسیر و دور path and cycle

فرض کنید G=(V,E) یک گراف بی‌جهت باشد و x−y گردشی در آن:

الف: اگر در گردش x−y هیچ یالی تکراری نباشد، این گردش را یک x−y خط سیر نامیم. خط سیر بستهٔ x−x را یک مدار گوییم.

ب: اگر در گردش x−y هیچ رأسی بیش از یک بار ظاهر نشود، این گردش را یک x−y سیر نامیم. مسیر بستهٔ x−x را یک دور یا دایره گوییم.

مثال ۴: الف: b−f گردش لیست‌شده در مثال ۳ یک b−f خط سیر می‌باشد. ولی b−f مسیر نیست چون رأس C در آن تکرار شده است.

ب: f−a گردش لیست شده در مثال ۳ هم f−a خط سیر و هم f−a سیر است.

پ: در شکل (۳): a,b,d,c,e,d,a یک a−a مدار هست ولی باتوجه به‌این که رأس d تکرار شده دور نیست.

قضیه: فرض کنید G=(V,E) یک گراف بی‌جهت باشد، با $a,b \in V$ ، $a \neq b$. اگر یک خط سیر از a به b (در G) موجود باشد، آنگاه یک مسیر از a به b (در G) موجود است.

اثبات: چون یک خط سیر از a به b موجود است، یکی از کم‌طولترین آنها مثلاً $\{a,x_1\}, \{x_1,x_2\}, ..., \{x_n,b\}$ را انتخاب می‌کنیم. اگر این خط سیر یک مسیر نباشد (رأس تکراری مانند x_k در آن وجود دارد و) خواهیم داشت:

$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_k,x_{k+1}\}$
$\{x_{m-1},x_m\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و...و $\{x_n,b\} (x_k=x_m)$ و ... و

و به‌این ترتیب:

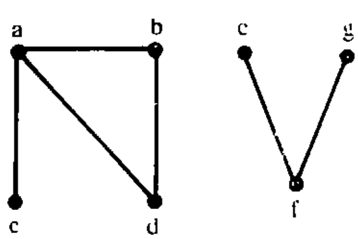
$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و ... و $\{x_n,b\}$

خط سیری از a به b می‌باشد که خط سیری کوتاهتر است. (لذا مطمئناً کم‌طولترین خط سیر از a به b همان سیر موجود از a به b می‌باشد).

◄ تعریف: گراف همبند (connected graph)

فرض کنید G=(V,E) یک گراف بی‌جهت باشد، هرگاه بین هر دو رأس متمایز G یک مسیر موجود باشد، G را همبند (یا مرتبط) نامیم. گرافی را که همبند نیست، ناهمبند یا نامرتبط گوییم.

مثال ۵: گراف شکل (۴) همبند نیست، چون به‌عنوان مثال هیچ مسیری از a به e موجود نیست. منتهی این گراف از دو قسمت تشکیل شده که هر یک از آنها همبند هستند و آنها رامؤلفه‌های گراف می‌نامیم. بنابراین یک گراف همبند است، اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.



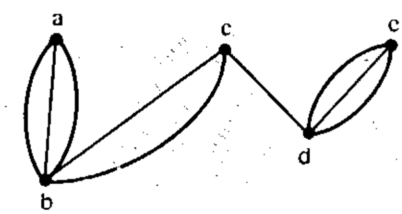
شکل (۴)

تعریف: تعداد مؤلفه‌های گراف G را با k(G) نمایش می‌دهیم.

مثال ٦: گراف شکل (۳) همبند است لذا k(G)=۱. ولی در گراف شکل (۴) داریم: k(G)=۲ .

▶ تعریف: گراف چندگانه (multigraph)

گراف $G=(V,E)$ را گراف چندگانه گوییم، هرگاه رئوسی مانند $a,b\in V$، $a\neq b$ موجود باشند چنانکه بیش از یک یال بین a و b موجود باشد. برای $n\in z^+$، گراف چندگانهٔ G را یک n نمودار گوییم هرگاه هیچ یالی بیش از n بار در آن تکرار نشده باشد. (و حداقل یک یال در آن n بار تکرار شده باشد)



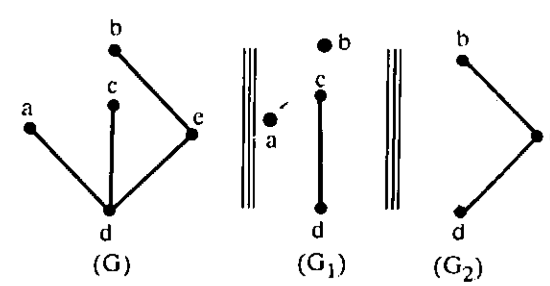
شکل (۵)

مثال ۷: گراف شکل (۵) یک گراف ۳ گانه است.

▶ تعریف. زیرگراف (subgraph)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد، $G_1=(V_1,E_1)$ را زیرگراف G می‌نامیم هرگاه $\phi\neq V_1\subseteq V$ و $E_1\subseteq E$، که هر یال در E_1 بر رأسهای موجود در V_1 واقع است.

مثال ۸: در شکل (۶) G_1 و G_2 زیرگرافهای G هستند.



شکل (۶)

▶ تعریف: درجهٔ رأس (degree of vertex)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، برای هر رأس G مانند v، درجهٔ v تعداد یالهایی از G است که از رأس v می‌گذرد و آن را با $deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

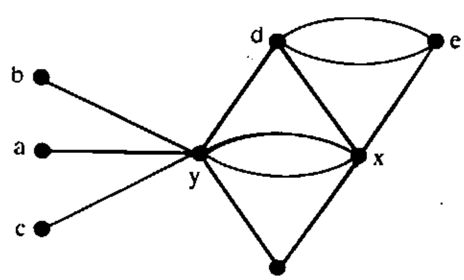
مثلاً در گراف G_1 شکل (۶) داریم: $deg(c)=deg(d)=1$ و $deg(a)=deg(b)=0$، رئوس a و b را ایزوله یا تنها گوییم.

مسئله ۱: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد که همبند است و $|V|\geq 2$. ثابت کنید G شامل دو رأس مانند a و b هست که $deg(a)=deg(b)$.

اثبات: (حل مسئله با استفاده از اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرد). فرض می‌کنیم $|V|=n\geq 2$. باتوجه به تعریف گراف، چون یالها دو رأس متمایز را به‌هم وصل می‌کنند، یالی که وصل کنندهٔ یک رأس به‌خودش باشد وجود ندارد، لذا حداکثر تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه G مانند x، $n-1$ می‌باشد، بنابراین طبق تعریف درجه $deg(x)\leq n-1$. از طرفی چون گراف G همبند است و در گراف همبند رأسی با درجهٔ صفر (ایزوله) موجود نیست، بنابراین حداقل تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه مانند x، یک می‌باشد لذا $deg(x)\geq 1$. به‌این ترتیب برای هر رأس دلخواه مانند x داریم: $1\leq deg(x)\leq n-1$ و $deg(x)\in\{1,2,\ldots,n-1\}$. حال اگر n رأس را به‌عنوان کبوتر و $n-1$ درجهٔ ممکن هر رأس را به‌عنوان لانهٔ کبوتر درنظر بگیریم، چون $n>n-1$، حداقل ۲ رأس مانند a و b در G موجود است که هم درجه‌اند و $deg(a)=deg(b)$.

مسئله ۲: الف) چرا رسم گراف بی‌جهت همبند با ۸ رأس طوری که دنبالهٔ درجات رئوس آن ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد غیرممکن است؟ ب) یک گراف چندگانهٔ بی‌جهت همبند با ۸ رأس ارائه‌دهید که درجات‌رئوس آن ۷ و ۵و۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد.

حل: الف) فرض می‌کنیم $a,b,c,x,y\in V$ و $deg(y)=7$ و $deg(x)=5$ و $deg(a)=deg(b)=deg(c)=1$ چون $deg(y)=7$ پس y با هر ۷ رأس دیگر V مجاور است، لذا رأس x با هیچ یک از رئوس a و b و c مجاور نیست. از طرفی طبق تعریف گراف رأس x با خودش مجاور نیست بنابراین رأس x حداکثر می‌تواند با ۴ رأس باقیمانده مجاور باشد و چون گراف ساده است $deg(x)\leq 4$ و این با $deg(x)=5$ در تناقض است. لذا چنین گرافی قابل رسم نیست، مگر با شرط چندگانه بودن یا طوقه داشتن.



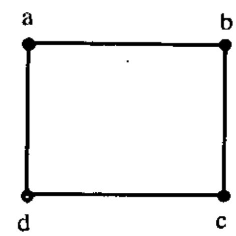
شکل (۷)

ب) شکل (۷) یک گراف دوگانه و همبند است و $\deg(a)=\deg(b)=\deg(c)=1$، $\deg(f)=2$، $\deg(e)=3$، $\deg(d)=4$، $\deg(x)=5$ و $\deg(y)=7$.

◀ تعریف: گراف کامل (complete graph)

فرض کنید V مجموعه‌ای با n رأس باشد. گراف کامل روی V با k_n نمایش داده می‌شود و گراف بی‌جهتی است که برای هر دو رأس متمایز آن مانند a و b **یک یال** $\{a,b\}$ موجود باشد.

• مثال ۹: شکل (۸) گراف کامل نیست. چون به‌عنوان مثال $\{a,c\}\notin E$.



شکل (۸)

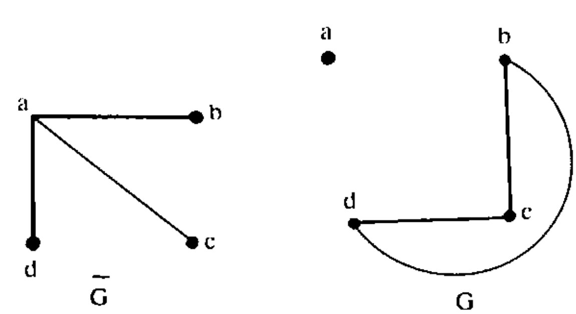
مثال ۱۰: تعداد یالهای گراف کامل k_n، $\binom{n}{2}$ و درجه هر رأس آن $n-1$ است.

◀ تعریف: مکمل گراف (complement of graph)

فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. مکمل G با $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از زیرگرافی از k_n که شامل n رأس G می‌باشد ولی یالهای آن همهٔ یالهایی است که در G نیست پس $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$.

تذکر: k_n در نمودارها همان نقشی را دارد که مجموعهٔ مرجع در مجموعه‌ها دارد.

مثال ۱۱: در شکل ۹، متمم گراف G رسم شده است.



شکل (۹)

مسئله ۳: هرگاه G یک گراف بی‌جهت با v رأس و e یال باشد، تعداد یالهای $\overline{G}$ چند تا است.

حل:

$$|E(G)|=e \text{ و } |V(G)|=v \Rightarrow |E(k_v)|=\binom{v}{2}.$$

$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=|E(k_v)| \Rightarrow |E(\overline{G})|=\binom{v}{2}-e$$

تست ۱: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. اگر G، ۵۶ یال و $\overline{G}$، ۸۰ یال داشته باشد، مقدار n کدام است؟

الف) ۱۶ ب) ۱۷ پ) ۱۸ ت) ۱۹

حل: گزینهٔ (ب) صحیح است.

$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2} \Rightarrow 56+80$$

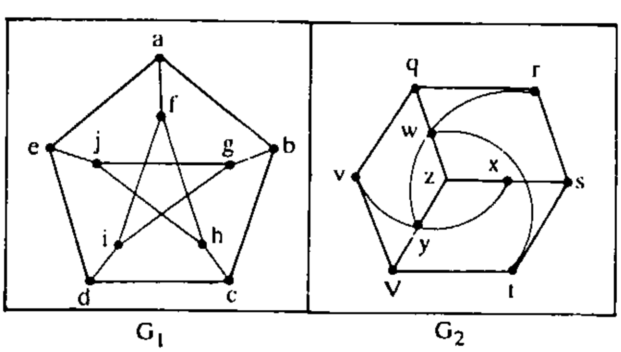
$$\binom{n}{2} \Rightarrow n^2-n-272=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=17} \\ n=-16 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

◀ تعریف: گرافهای یکریخت (Isomorphic graphs)

فرض کنید $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گراف بی‌جهت باشند. تابعی مانند $f:V_1\to V_2$ یکریختی گرافها نامیده می‌شود هرگاه: اولاً) f یک به‌یک و پوشا باشد. و ثانیاً) برای هر دو رأس دلخواه G_1 مانند a و b، $\{a,b\}\in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a),f(b)\}\in E_2$. هرگاه چنین تابعی وجود داشته باشد، G_1 و G_2 را گرافهای یکریخت می‌نامیم.

توجه: اگر ۲ نمودار دارای تعداد رئوس مختلف یا تعداد یال مختلف باشند، یکریخت نیستند.

مثال ۱۲: گرافهای شکل (۱۰)، دو گراف با ۱۰ رأس هستند. با پیداکردن تناظر زیر مجاورت‌ها حفظ می‌شوند.



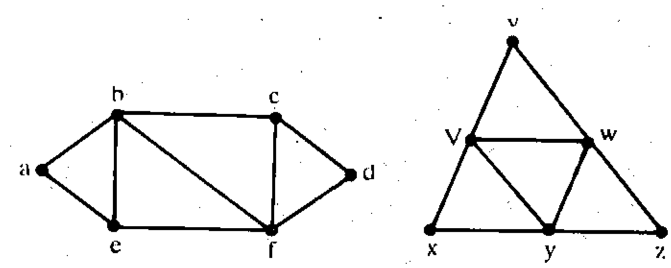
شکل (۱۰)

$a\to q$ $c\to u$ $e\to r$ $g\to x$ $i\to z$

$b\to v$ $d\to y$ $f\to w$ $h\to t$ $j\to s$

برای مثال $\{f,h\}$ یالی در گراف $G_۱$ است و یال متناظر آن $\{w,t\}$ در گراف $G_۲$ وجود دارد. اما ببینیم این تناظر چطور پیش آمده؟ توجه داریم برای اینکه یک ایزومورفیسم مجاورتها را حفظ کند، آن ایزومورفیسم زیرگرافهایی مثل مسیرها و دورها را حفظ می‌کند. در گراف $G_۱$ یالهای af,fi,id,de,ea دوری به‌طول ۵ می‌سازند. بنابراین هنگامی که سعی می‌کنیم ایزومورفیسم را پیدا کنیم باید این را حفظ کنیم. یالهای متناظر در گراف $G_۲$ qw,wz,zy,yr,rq, می‌باشند که آنها نیز دوری به‌طول ۵ تشکیل داده‌اند. به‌علاوه در گراف $G_۱$ با شروع از a ، مسیر a,f,h,c,b,g,j,e,d,i را می‌یابیم که از هر رأس فقط یک بار می‌گذرد، مسیر متناظر آن در گراف $G_۲$ q,w,t,u,v,x,s,r,y,z, می‌باشد که همان خصوصیت را دارد (دو گراف یکریخت هستند).

مسئله ۴: آیا گرافهای $G_۱$ و $G_۲$ در شکل (۱۱) یکریخت هستند؟

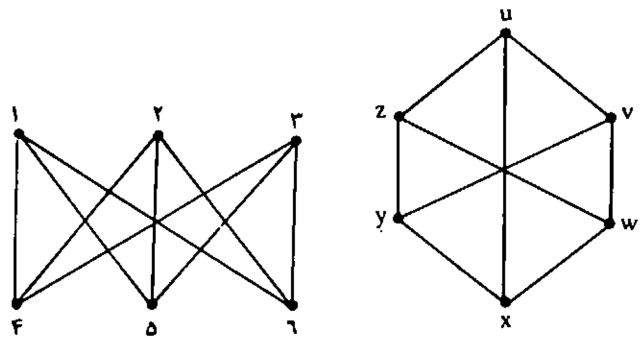


(G_1) (G_2)

شکل (۱۱)

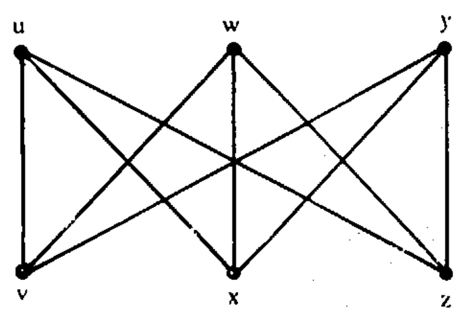
حل: علی‌رغم اینکه هر دو ۶ رأس و ۹ یال دارند ولی یکریخت نیستند. در گراف $G_۱$، دو رأس a و d درجه ۲ هستند و در گراف $G_۲$، ۳ رأس z و x و u درجه ۲ می‌باشند، بنابراین اگر مثلاً رأس a را به‌رأس x و رأس d را به‌رأس z نظیر کنیم، هیچ رأسی از گراف $G_۱$ باقی نخواهد ماند که آن را به u نظیر کنیم و نمی‌توان ساختن تناظر یک به‌یک بین رئوس ۲ گراف را ادامه داد. لذا دو گراف یکریخت نیستند. به‌علاوه در گراف $G_۲$ می‌توانیم از هر رأس شروع کنیم و مداری شامل تمام یالهای گراف و هر یال یک بار بیابیم. مثلاً، اگر از رأس u شروع کنیم مدار u,w,v,y,w,z,y,x,v,u واجد چنین خاصیتی است. (چنین گرافی را گراف **اویلری** می‌نامند) ولی $G_۱$ چنین نیست.

مسئله ۵: الف) نشان دهید $G_۱$ و $G_۲$ در شکل (۱۲) یکریخت هستند. ب) امکان وجود چند ایزومورفیسم $f:G_۱\to G_۲$ وجود دارد؟



(G_1) (G_2) شکل (۱۲)

حل: الف) گراف $G_۲$ را می‌توانیم به‌صورت گراف شکل (۱۳) رسم کنیم. لذا دو گراف یکریخت هستند. ب) ۷۲ ایزومورفیسم.



شکل (۱۳)

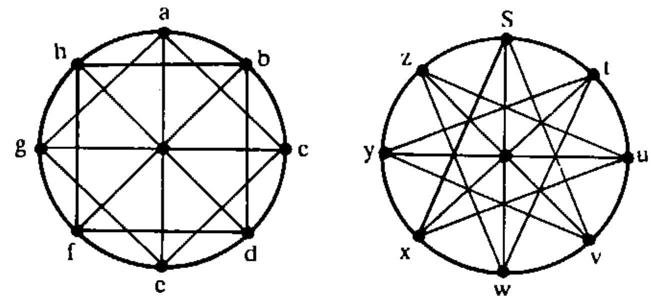
مسئله ۶: الف) اگر $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف بی‌جهت باشند، ثابت کنید $G_۱$ و $G_۲$ یکریخت هستند اگر و تنها اگر $\overline{G}_۱$ و $\overline{G}_۲$ یکریخت باشند. ب) آیا گرافهای شکل (۱۴) یکریخت هستند؟

حل: الف) فرض می‌کنیم $G_۱=(V_۱,E_۱)$ و $G_۲=(V_۲,E_۲)$ یکریخت باشند و ثابت می‌کنیم $\overline{G}_۱$ و $\overline{G}_۲$ یکریخت هستند. با توجه به‌فرض تابعی مانند $f:V_۱\to V_۲$ وجود دارد که اولاً f یک به‌یک و پوشاست و ثانیاً f مجاورت‌ها را حفظ می‌کند یعنی: برای هر $x,y\in V_۱$، $\{x,y\}\in E_۱ \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\}\in E_۲$. *

برای اثبات حکم فرض می‌کنیم $x,y\in V_۱$ و $\{x,y\}\in \overline{E}_۱$ پس $\{x,y\}\notin E_۱$، لذا طبق رابطهٔ * $\{f(x),f(y)\}\notin E_۲$ بنابراین $\{f(x),f(y)\}\in \overline{E}_۲$. لذا همین تابع f مجاورتها را برای $\overline{G}_۱$ و $\overline{G}_۲$ نیز حفظ می‌کند و می‌تواند برای تعریف یک یکریختی بین $\overline{G}_۱$ و $\overline{G}_۲$ مورد استفاده قرار گیرد. اثبات برعکس نیز به‌روش مشابه انجام می‌شود.

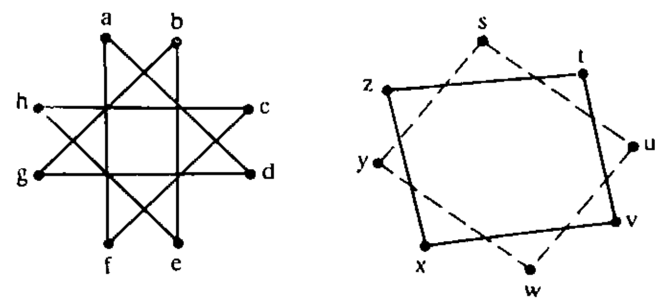
ب) دو گراف شکل (۱۴) یکریخت نیستند. چون مکمل گرافِ $G_۱$ دوری به‌طول ۸ (f,a,d,g,b,e,h,c,f) می‌باشد ولی مکمل گراف $G_۲$

اجتماع دو دور به‌طول ۴ (z,t,u,x,z) و (s,u,w,y,s) می‌باشد. (طبق شکل ۱۵).



G_1 G_2

شکل (۱۴)



(G_1) (G_2)

شکل (۱۵)

تست ۲: کدامیک از گرافهای شکل (۱۶) یکریخت هستند؟

الف) گرافهای شکل (a) ب) گرافهای شکل (b)

پ) گرافهای شکل (c) ت) گرافهای هر سه شکل.

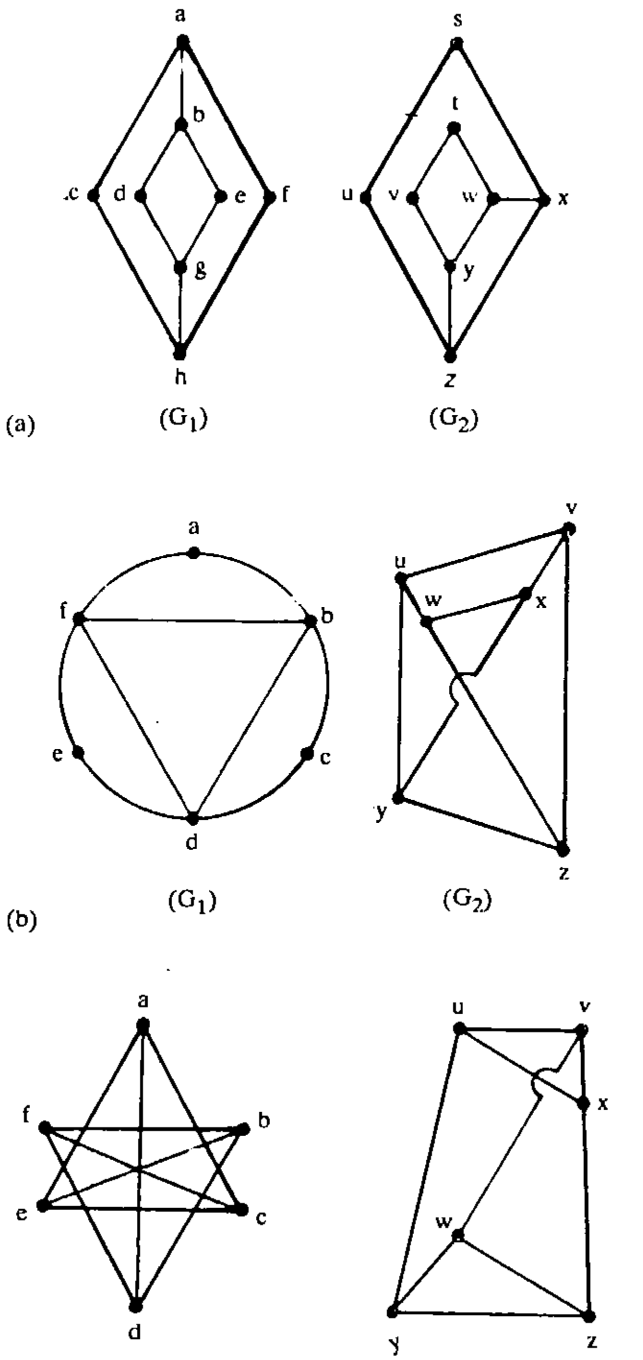
حل: گرافهای شکل (a) یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۸ (x,s,u,z,y,v,t,w,x) می‌باشد ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۸ نیست. گرافهای شکل (b) نیز یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۴ (u,v,x,w,u) هست ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۴ نیست.

و اما در مورد گرافهای شکل (c) درجه تمام رئوس در هر ۲ گراف ۳ است. به‌طور دلخواه a را به u نظیر می‌کنیم. چون $\{a,b\}\notin E_1$ و $f(a)=u$، b را باید به‌رأسی از G_2 نظیر کرد که مجاور با u نباشد پس نمی‌توان آن را به v و y و x نظیر کرد و باید به‌یکی از ۲ رأس w یا z نظیر شود. به‌این ترتیب b را به w نظیر می‌کنیم. اکنون نوبت به‌رأس c رسیده. چون $\underset{\downarrow\, u}{\{a,c\}}\in E_1$ و $\underset{\downarrow\, w}{\{b,c\}}\notin E_1$، لذا c را باید به‌رأسی نظیر کرد که مجاور u باشد ولی با w مجاور نباشد بنابراین نمی‌توان c را به v و y و z نظیر کرد پس $c\to x$ و با ادامهٔ این روند تناظر زیر را به‌دست خواهیم آورد.

$a\to u$ و $b\to w$ و $c\to x$

$d\to y$ و $e\to v$ و $f\to z$

(البته یکتا نیست) که در هر ۲ شرط تعریف صدق می‌کند. لذا دو گراف یکریختند. و گزینهٔ (پ) صحیح است.



(G_1) (G_2)

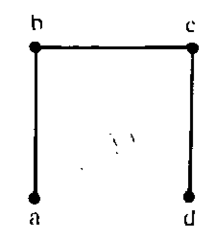
شکل (۱۶)

◀ تعریف: گراف خود مکمل:

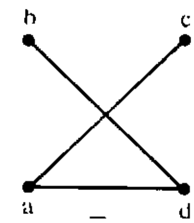
(self−complementary graph)

هرگاه G یک گراف بی‌جهت باشد، اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند آنگاه G را یک گراف خود مکمل (خود متمم گویند).

مثال ۱۳: گراف شکل (۱۷) یک گراف خود مکمل است. چون باتوجه به‌شکل (۱۸) G و $\overline{G}$ هر دو مسیری به‌طول ۳ هستند و مسیرهای هم طول یکریخت می‌باشند.



شکل (۱۷)



شکل (۱۸)

تست ۳: هرگاه G یک گراف خود مکمل با n رأس باشد، تعداد یالهای گراف G باکدام گزینه برابر است.

الف) n ب) $\binom{n}{2}$ پ) $2\times\binom{n}{2}$ ت) $\frac{\binom{n}{2}}{2}$

حل: چون G و $\overline{G}$ یکریخت هستند پس $E(\overline{G})=E(G)$. از طرفی می‌دانیم $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$. (چون G، n رأس دارد). لذا $2|E(G)|=\binom{n}{2}$ و $|E(G)|=\frac{\binom{n}{2}}{2}$ و گزینهٔ (ت) درست است.

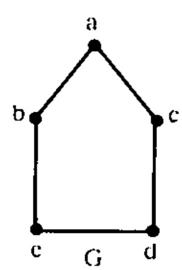
مسئله ۷: فرض کنید G دوری با n رأس باشد. ثابت کنید G خود متمم است اگر و فقط اگر n=۵.

اثبات: **قسمت لزوم)** فرض می‌کنیم G دوری با n رأس و خود متمم‌باشد. ثابت می‌کنیم n=۵. چون G گرافی خود مکمل با n رأس است طبق تست بالا، تعداد یالهای گراف G، $\frac{\binom{n}{2}}{2}$ است. از طرفی چون G دوری با n رأس است پس تعداد یالهای G نیز n می‌باشد. لذا $n=\frac{\binom{n}{2}}{2}$

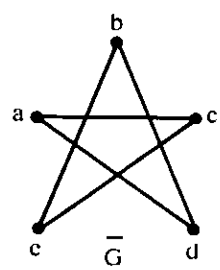
$$n=\frac{1}{2}\binom{n}{2}\Rightarrow n=\frac{1}{4}n(n-1)\Rightarrow$$

$$n^2-5n=0\Rightarrow\begin{cases}n=0 & \text{غیرممکن}\\ \boxed{n=5}\end{cases}$$

اثبات کفایت: فرض می‌کنیم G دوری با ۵ رأس باشد، ثابت می‌کنیم خود متمم است. هرگاه G دوری با یالهای ab,bc,cd,de,ea مطابق شکل (۱۹) باشد، آنگاه $\overline{G}$ نیز مطابق شکل (۲۰) دوری با ۵ یال ac,ce,eb,bd,da می‌باشد. لذا G و $\overline{G}$ هر دو دورهایی هم طول و درنتیجه یکریخت هستند و G خود متمم است.



شکل (۱۹)



شکل (۲۰)

قضیه: هرگاه G=(V,E) یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، آنگاه $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

اثبات این قضیه در کتاب جبر و احتمال نظام جدید آمده است.

◀ تعریف: گراف منظم (regular graph)

گراف بی‌جهت یا چندگانه‌ای را که درجهٔ تمام رئوس آن مساوی باشد گراف منظم می‌نامیم. مثلاً گرافهای شکلهای (۱۹) و (۲۰) را یک گراف ۲ ـ منتظم می‌نامیم. چون درجهٔ تمام رئوس آنها ۲ است. به‌طور کلی هر گراف همبند و ۲ منتظم را یک دور می‌نامیم.

مسئلهٔ ۸: الف) آیا گراف منظمی وجود دارد که درجه تمام رئوس آن ۴ باشد و ۱۰ یال داشته باشد؟

ب) در سؤال بالا به‌جای عدد ۱۰، ۱۵ قرار داده و پاسخ دهید.

حل: الف) فرض می‌کنیم چنین گرافی موجود و n رأس داشته باشد. برای هر رأس دلخواه مانند x: $\deg(x)=4$، پس طبق تعریف گراف منظم داریم: $\sum_{x\in V}\deg(x)=4n$.

از طرفی طبق قضیه بالا $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|=20$ بنابراین $4n=20$ و $n=5$. چنین گرافی موجود و ۵ رأس دارد.

ب) فرض می‌کنیم تعداد رئوس این گراف n باشد لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{x\in V} \deg(x)=4n \\ \text{از طرفی } \sum_{x\in V} \deg(x)=2|E|=30\end{array}\right\} \Rightarrow 4n=30 \Rightarrow n=\frac{30}{4}$$

n به‌دست آمده عدد طبیعی نیست پس چنین گرافی موجود نیست.

تست ۴: هرگاه $G=(V,E)$ دارای ۱۰ یال و ۲ رأس از درجه ۴ و بقیه رئوس از درجه ۳ باشد، تعداد رئوس این گراف با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است.

الف) ۴ ب) ۵ پ) ۶ ت) ۷

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس درجه ۳، n تا باشد پس

$$20=2|E|=\sum_{x\in V} \deg x=2\times 4+3\times n=8+3n$$

$$\Rightarrow 8+3n=20 \Rightarrow n=4 \Rightarrow \text{تعداد رئوس گراف}=4+2=6 \Rightarrow$$

گزینه (پ) درست است.

تست ۵: اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد که $|E|=17$ و برای هر $a\in V$، $\deg a\geq 3$ حداکثر مقدار $|V|$ کدام است.

الف) ۱۰ ب) ۱۱ پ) ۱۲ ت) نمی‌توان تعیین کرد.

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس G، n باشد.

$$\forall a\in V,\ \deg(a)\geq 3 \Rightarrow \sum_{a\in V} \deg(a)\geq 3n \Rightarrow 2|E|\geq 3n$$

$$\Rightarrow 34\geq 3n \Rightarrow n\leq \frac{34}{3}=11/\dots \Rightarrow$$

لذا حداکثر مقدار $|V|$، ۱۱ می‌باشد و گزینه (ب) درست است.

مسئله ۹: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس و e لبه (یال) باشد و $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین درجه در بین درجه‌های رئوس گراف g باشند. ثابت کنید $\delta\leq 2(\frac{e}{n})\leq \Delta$

حل: طبق تعریف مذکور برای هر رأس دلخواه G مانند a داریم: $\delta\leq \deg(a)\leq \Delta$ لذا:

$$\sum_{a\in V} \delta\leq \sum_{a\in V} \deg(a)\leq \sum_{a\in V} \Delta \Rightarrow \delta|V|\leq 2|E|\leq \Delta|V| \div |V| \Longrightarrow$$

$$\delta\leq \frac{2|E|}{|V|\leq \Delta \Rightarrow \delta}\leq \frac{2e}{n}\leq \Delta.$$

$$\underbrace{\delta+\delta+\delta+\dots+\delta}_{|V| \text{ بار}}=\delta|V|$$

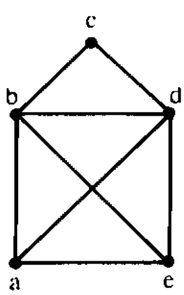
◄ تعریف: مدار اویلری و خط سیر اویلری

(Euler circuit and Euler trail)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. هرگاه مداری در G موجود باشد که از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، گوییم G مدار اویلری دارد (یا به‌اختصار G گراف اویلری است).

هرگاه خط سیری در G موجود باشد چنانکه از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، آن را خط سیر اویلری می‌نامیم.

مسئله ۱۰: در گراف شکل (۲۱)، الف) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌همان رأس اول رسید (به‌عبارت دیگر آیا گراف اویلری است؟)



شکل (۲۱)

ب) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌رأس دیگری به‌جز رأس اول بازگشت (به‌عبارت دیگر آیا گراف خط سیر اویلری دارد)؟

حل: الف) خیر. ب) بله مثلاً با طی کردن دنبالهٔ رئوس a,b,c,d,e,b,d,a,e خط سیر اویلری از a به e خواهیم داشت.

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. G مدار اویلری دارد (G گراف اویلری است)، اگر و تنها اگر G همبند باشد و تمام رئوس آن درجه زوج داشته باشند.

اثبات قسمت لزوم در کتاب درسی ذکر شده و اثبات کفایت با کمک استقراء روی تعداد یالهای G انجام می‌گیرد و از نوشتن آن صرف‌نظر می‌شود.

نتیجه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک نمودار بی‌جهت یا چندگانه باشد. G خط سیر اویلری دارد اگر و تنها اگر همبند باشد و فقط ۲ رأس با درجه فرد داشته باشد.

اثبات: قسمت لزوم) فرض می‌کنیم G همبند و a و b دو رأس G با درجه فرد باشند. یال $\{a,b\}$ رابه‌گراف G اضافه می‌کنیم. اکنون

گراف حاصل (G_1) همبند است و تمام رئوس آن زوج هستند. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 مدار اویلری دارد. حال با حذف یال $\{a,b\}$ از این مدار، خط سیر اویلری برای G به‌دست خواهیم آورد. (بنابراین رأس شروع و پایان خط سیر اویلری دارای درجه فرد هستند.)

اثبات: قسمت کنایت) فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک خط سیر اویلری از a به b داشته باشد. با اضافه کردن یال $\{a,b\}$ به گراف G گراف بزرگتر $G_1=(V_1,E_1)$ تشکیل می‌شود که G_1 مدار اویلری دارد. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 همبند و تمام رئوس آن زوجند. با حذف یال $\{a,b\}$ از G_1 تمام رئوس G دارای درجه‌های زوج خواهند بود به‌جز a و b

$\deg_G(b)=\deg_{G_1}(b)-1$ و $\deg_G(a)=\deg_{G_1}(a)-1$.

بنابراین رئوس a و b در G درجه فرد. دارند و نیز چون یالها در G خط سیر اویلری تشکیل داده‌اند بنابراین G همبند است.

گراف شکل (۲۱) همبند است و نیز ۲ رأس با درجه فرد دارد. لذا با استفاده از این نتیجه فوراً می‌توان ادعا کرد خط سیر اویلری دارد.

مسئله ۱۱ الف) اگر گراف کامل k_n مدار اویلری داشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

ب) اگر گراف کامل k_n خط سیر اویلری داشته باشد ولی مدار اویلری نداشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

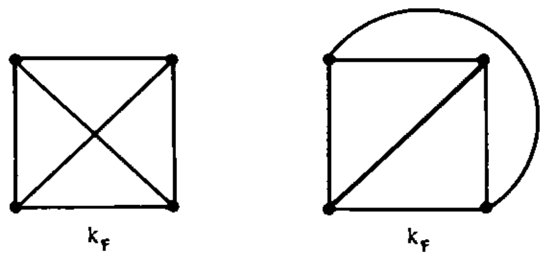
حل: الف) طبق تعریف گراف کامل، درجهٔ هر رأس k_n، $n-1$ می‌باشد. لذا طبق قضیه شرط اویلری بودن k_n آن است که $n-1$ زوج و درنتیجه n باید فرد باشد.

ب) $n=2$ k_2 خط سیر اویلری دارد ولی گراف اویلری نیست.

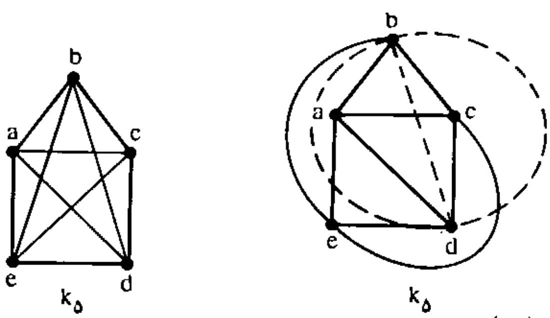
◄ تعریف: گراف مسطح (planar graph)

گراف G رامسطح گوییم، هرگاه بتوان G را در صفحه چنان رسم کرد که یالهای آن فقط یکدیگر را در رئوس قطع کنند.

مثال ۱۴: k_4 گراف مسطح می‌باشد، چون می‌توان آن را مطابق شکل (۲۲) چنان رسم کرد که یالها فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند. گراف k_5 چطور؟ آیا مسطح است؟ باید ببینیم آیا می‌توان یالهای آن را چنان رسم کرد که فقط در رئوس همدیگر را قطع کنند؟ این کار را مطابق شکل (۲۳) تا ۹ مرحله انجام می‌دهیم (خطوط پر). اینک نوبت به آخرین یال یعنی $\{b,d\}$ رسیده. آیا آن را هم می‌توان طوری رسم کرد که یالهای دیگر را فقط در رئوس قطع کند؟



شکل (۲۲)

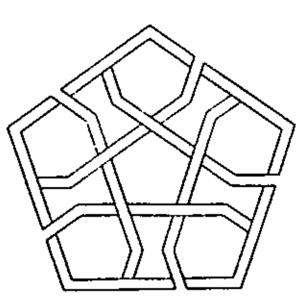


شکل (۲۳)

آزمایش می‌کنیم. ۳ راه مختلف برای رسم $\{b,d\}$ موجود است که با خط‌چین نشان داده شده، می‌بینیم در هر ۳ مورد یال $\{b,d\}$ یالهای دیگر را در نقطه‌ای به‌جز رأس قطع خواهد کرد. لذا k_5 مسطح نیست. باتوجه به‌مراحل بالا، بدیهی است که اگر از k_5 یک یال (مثلاً $\{b,d\}$) را برداریم، گراف حاصل مسطح خواهند بود.

○ یادداشت:

* در تعریفی که برای گراف در کتاب گریمالدی ارائه شده، هر رأس می‌تواند به‌وسیلهٔ یک حلقه با خودش نیز مجاور باشد، به‌همین علت در برخی تمرینات مخصوصاً به‌بی‌طوقه بودن گراف اشاره شده، ولی در این مقاله به‌علت هماهنگی با تعریف ارائه‌شده برای گراف در کتاب پیش‌دانشگاهی، بر تمایز رئوس مجاور تأکید شده و لذا در تمرینات مورد استفاده نیز بی‌طوقه بودن گراف حذف شده. چون در تعریف نهفته است.

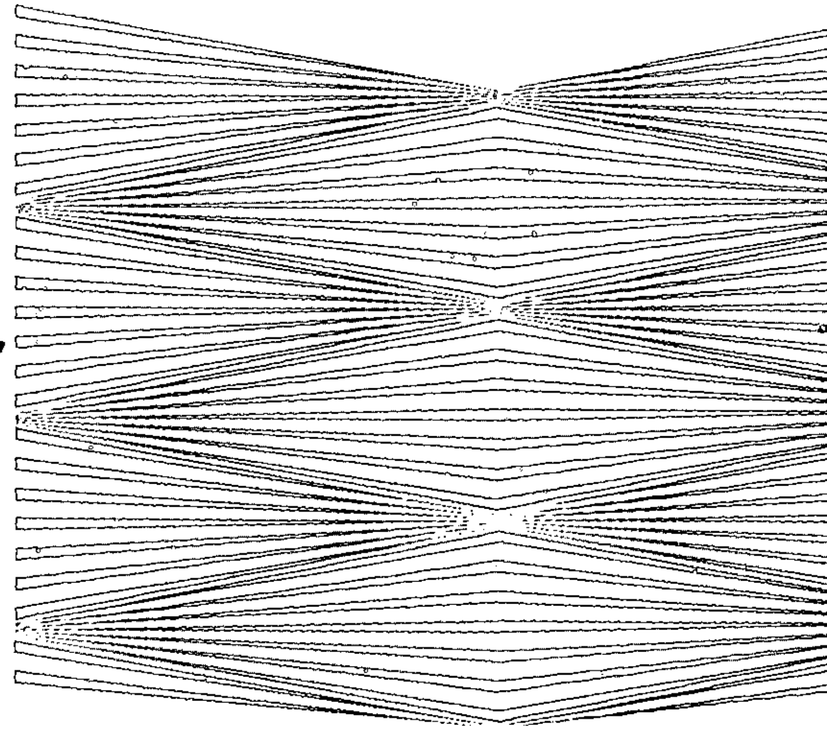


خطهای راست و صفحه‌های عمودبرهم در فضا

(قسمت دوّم)

(قسمت اوّل در شمارهٔ ۱۵ به چاپ رسیده است)

● پرویز شهریاری



§ ۴. تصویر قائم برصفحه. قضیهٔ سه عمود

۱. حالت خاص تصویر موازی از یک شکل برصفحه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر تصویر برصفحه α، به موازات خط راست l که بر α عموداست، انجام گیرد، آن وقت تصویر را، **تصویر قائم** گویند.

در تصویر قائم برصفحه، هرخط راست تصویر کننده، برصفحهٔ تصویر عمود است (بند ۳، قضیه ۲).

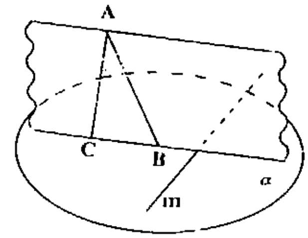
تصویر قائم، بیش از هر نوع دیگری از تصویر، درعمل کاربرد دارد. مثلاً، برای نشان دادن ویژگیهای یک قطعهٔ صنعتی، تصویر قائم آن را روی دوصفحه نشان می‌دهند: صفحهٔ افقی H و صفحهٔ قائم V. از این به‌بعد و برای سادگی کار، به جای «تصویر قائم شکل»، خواهیم گفت «تصویر شکل».

۲. اکنون به قضیه سه عمود می‌پردازیم.

وقتی که خط راست، صفحه‌ای را قطع کند، ولی برآن عمود نباشد، خط راست را، نسبت به صفحه، **مایل** می‌نامیم.

قضیه ٦. خط راست واقع برصفحه وقتی، و تنها وقتی، برمایل نسبت به این صفحه عمود است که، برتصویر مایل روی صفحه، عمودباشد.

شکل (۷)



اثبات. صفحهٔ α، $(AC)\perp\alpha$، (AB) مایل نسبت به‌صفحهٔ α و (CB) تصویر این مایل برصفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۷).

۱) m را خط راستی واقع برصفحهٔ α می‌گیریم که برخط راست CB عمود باشد. باید ثابت کنیم $m\perp(AB)$.

ازتعریف عمود برصفحه نتیجه می‌شود $m\perp(AC)$، به این ترتیب، خط راست m بردوخط متقاطع CB و AC واقع برصفحهٔ ABC عمود است و، در نتیجه، بنابرقضیهٔ ۱، برصفحهٔ ABC عمود خواهدبود؛ و از آن جا $m\perp(AB)$.

۲) $m\subset\alpha$ و $m\perp(AB)$ فرض می‌کنیم؛ چون علاوه برآن، $(AC)\perp m$، پس $m\perp(ABC)$. بنابراین $m\perp(CB)$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱۱. از نقطهٔ A، عمود AB و مایل AC رانسبت به صفحهٔ α رسم کرده‌ایم $(C\subset\alpha\ ,\ B\subset\alpha)$. ۱) مطلوب است طول تصویر پاره‌خط راست AC، به‌شرطی که $|AC|=37cm$ و $|AB|=35cm$. ۲) مطلوب است $|AC|$، به‌شرطی که $|AB|=6cm$ و $B\hat{A}C=60^\circ$. ۳) مطلوب است $|AB|$، به شرطی که $|AC|=2\sqrt{10}cm$ و $|BC|=3|AB|$.

۱۲. از یک نقطه، دومایل یکی به طول ۱۵ سانتی‌متر و دیگری به طول ۲۰ سانتی‌متر نسبت به صفحه‌ای رسم کرده‌ایم (طول هر مایل را تانقطهٔ برخورد آن باصفحه درنظر گرفته‌ایم). تصویر یکی از این پاره خطهای راست، طولی برابر ۱۶ سانتی‌متر دارد؛ طول تصویر پارخط راست دیگر راپیدا کنید.

۱۳. به کمک قضیه سه عمود، ثابت کنید، هرقطر مکعب

برصفحه‌ای عمود است که از انتهای سه یالی که دریک رأس باایـن قطر مشترک‌اند، می‌گذرد.

۱۴. خط راست a، صفحهٔ α را قطع کرده و M، یکی از نقطه‌های این صفحه است. آیا روی صفحهٔ α، خط راستی وجود دارد که از نقطهٔ M بگذرد و برخط راست a عمود باشد؟

۱۵. قاعدهٔ هرم $MABC$، مثلث قائم الزاویه‌ای است که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، طولهایی برابر ۱۰ سانتی‌متر و ۲۴ سانتی‌متر دارند. ارتفاع هرم، ۱۲ سانتی‌متر طول دارد و وتر AB را نصف می‌کند. طول هریک از ارتفاعهای وجه‌های جانبی هرم را، که از M رسم شده‌اند، پیدا کنید.

۱۶. از نقطهٔ O، محل برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای، عمود OM به‌طول ۳ سانتی‌متر را برصفحهٔ ذوزنقه رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ نقطهٔ M تا دو قاعدهٔ ذوزنقه را پیدا کنید، به‌شرطی که طول دو قاعده به نسبت $\frac{1}{2}$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد.

۱۷. قاعدهٔ یک هرم، مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ۶ و ۸ سانتی‌متر است. پای ارتفاع هرم، روی رأس قائمهٔ قاعده است و طول این ارتفاع، برابر ۳/۶ سانتی‌متر است. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ رأس هرم تا وتر مثلث قاعده.

۱۸. مثلثی باضلعهای به طول ۲۰، ۶۵ و ۷۵ سانتی‌متر، قاعده یک هرم را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، روی رأس زاویهٔ بزرگتر مثلث واقع است. طول این ارتفاع، برابر ۶۰ سانتی‌متراست. مطلوب است فاصلهٔ رأس هرم تاضلع بزرگتر قاعده.

۵. تقارن محوری

دو نقطهٔ M و M_1 از فضا را، نسبت به خط راست l، قرینهٔ یکدیگر گویند، وقتی که، این خط راست، بر پاره‌خط راست MM_1 عمود باشد و آن را نصف کند. دراین صورت، هرنقطه خط راست l، قرینهٔ خودش نسبت به l است.

تعریف. تقارن محوری، به نگاشتی از فضا برخودش گویند که، به‌ازای آن، هرنقطه‌ای، به نقطهٔ قرینهٔ آن، نسبت به خط راست مفروض l، نگاشته شود. درچنین صورتی، خط راست l را، **محور تقارن** گویند.

اگر در تقارن محوری با محور l، نقطهٔ M_1، نگارهٔ نقطهٔ M باشد، می‌نویسند:

$$S_l(M)=M_1$$

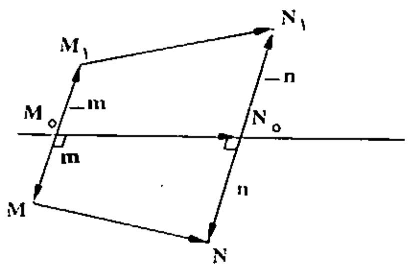
به این ترتیب $S_l(\Phi)=\Phi_1$، به معنای آن است که، در تقارن به محور l، شکل Φ به شکل Φ_1 تبدیل می‌شود.

گویند شکل Φ دارای محورتقارن l است، وقتی که قرینهٔ شکل Φ نسبت به محور l، برخودش منطبق شود: $S_l(\Phi)=\Phi$.

قضیهٔ ۷. تقارن محوری، یک تغییر مکان است.

اثبات. فرض کنید $S_l(M)=M_1$ و $S_l(N)=N_1$ (شکل ۸). ثابت می‌کنیم $|MN|=|M_1N_1|$. بردارهای $\mathbf{m}$، $\mathbf{n}$ و $\mathbf{p}$ را، آن‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، درنظر می‌گیریم. بنابر تعریف تقارن محوری داریم:

شکل (۸)



$$\mathbf{m}.\mathbf{p}=\mathbf{n}.\mathbf{p}=0$$

باتوجه به قاعدهٔ چند ضلعی (برای جمع بردارها) به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{MN}=-\mathbf{m}+\mathbf{p}+\mathbf{n} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1N_1}=\mathbf{m}+\mathbf{p}-\mathbf{n}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$|MN|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$
$$|M_1N_1|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$

بنابراین $|MN|^2=|M_1N_1|^2$ و $|MN|=|M_1N_1|$.

از قضیه ۷ نتیجه می‌شود که، تقارن محوری، هرشکل را به شکلی همنهشت با آن تبدیل می‌کند.

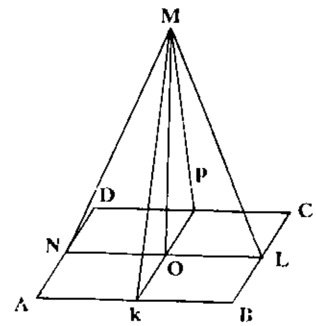
با استفاده از معیار عمود بودن خط راست و صفحه بریکدیگر و همچنین تقارن محوری، می‌توان معیارهای همنهشتی مثلثهایی را که به صورتی دلخواه در فضا قرار دارند، ثابت کرد. تنظیم این معیارها، درست به‌همان صورت هندسهٔ مسطحه است.

مسأله. مربع به‌ضلع برابر a و نقطهٔ M در بیرون صفحهٔ مربع و به‌فاصله d از هر ضلع آن داده‌شده‌است. اگر فاصلهٔ از نقطهٔ M تا صفحهٔ مربع برابر h باشد، d را محاسبه کنید.

حل. $ABCD$ رامربع مفروض می‌گیریم (شکل ۹). $[MO]\perp(ABC)$. از نقطه O، عمودهای $[OK]$، $[OL]$، $[ON]$ و $[OP]$ را برضلع‌های مربع فرود می‌آوریم و نقطه‌های K، L، N و P را به M وصل می‌کنیم. بنابر قضیه سه عمود، پاره‌خطهای راست MK، ML، MN و MP، برضلعهای متناظر مربع

عمودند. بنابر شرط مسأله، این پاره‌خطهای راست، طولهایی برابر دارند و ، بنابراین، کافی است، طول یکی از آنها را محاسبه کنیم. داریم $|AB|=a$ و $|MO|=h$ ، $|MK|=d$ را به‌دست می‌آوریم.

شکل (۹)



مثلثهای قائم الزاویه MOK ، MOL ، MON و MOP همنهشت‌اند، یعنی

$$|OK|=|OL|=|ON|=|OP|$$

بنابراین، نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محاط درمربع ABCD است، از آن‌جا $|OK|=\frac{a}{۲}$.

درمثلث MOK داریم :

$$d=\sqrt{|MO|^{۲}+|OK|^{۲}}=\sqrt{h^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴h^{۲}+a^{۲}}$$

پرسشها و مسأله‌ها

۱۹. ۱) در چهار وجهی ABCD ، وجه‌های ABC و ABD، مثلثهای متساوی الساقینی‌اند باقاعدهٔ مشترک AB . قرینهٔ چهاروجهی را نسبت به محور AB پیداکنید.

۲) منشور قائم $ABCA_۱B_۱C_۱$ مفروض است. قرینهٔ آن را نسبت به محور $AA_۱$ پیداکنید.

۲۰. قاعدهٔ یک هرم قائم، مثلث‌متساوی الاضلاعی است به ضلع ۶ سانتی‌متر؛ ارتفاع هرم، برابر ۱ سانتی‌متر است. فاصلهٔ رأس هرم تا ضلع قاعده را پیداکنید.

۲۱. پای ارتفاع هرمی، برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث قاعدهٔ هرم، منطبق است. طول این ارتفاع را به‌دست آورید، به‌شرطی که ضلعهای مثلث قاعدهٔ هرم، برابر ۶ ، ۵ و ۵ سانتی متر و فاصله رأس هرم تا یکی از ضلعهای قاعده، برابر ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲۲. مستطیل ABCD ، بــافرض $|AB|=a$ و $|BC|=b$ ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، برمحل برخورد قطرهای مستطیل واقع است و خود ارتفاع، طولی برابر d دارد. مطلوب است طول یالهای جانبی هرم و فاصلهٔ رأس هرم تا ضلعهای قاعده.

۶. فاصلهٔ نقطه تا صفحه

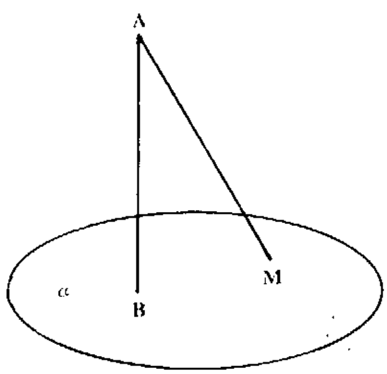
مفهوم فاصلهٔ بین دوشکل را مطرح می‌کنیم که، فاصلهٔ نقطه تا شکل، حالت خاصی از آن می‌شود.

تعریف. اگر درمیان همهٔ فاصله‌هایی که بین نقطه‌های شکل $\Phi_۱$ بانقطه‌های شکل $\Phi_۲$ به‌دست می‌آید، کمترین فاصله وجود داشته‌باشد، آن را فاصله بین دو شکل $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ گویند.

قضیهٔ ۸. فاصلهٔ یک نقطه از صفحهٔ مفروض برابر است بافاصلهٔ این نقطه تا تصویر آن براین صفحه.

اثبات. نقطهٔ A و صفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰).

شکل (۱۰)



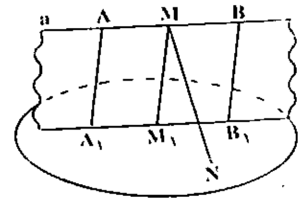
در حالت $A\notin\alpha$ ، B را تصویر A برصفحهٔ α و M رانقطهٔ دلخواه این صفحه ، متفاوت با B ، فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم: $|AB|<|AM|$.

خط راست MB را رسم می‌کنیم، دراین صورت $[AB]\perp(MB)$. درصفحهٔ MAB ، نقطهٔ B ، تصویر A برخط راست BM است، یعنی $|AB|<|AM|$. بنابراین ، $|AB|$ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ α است.

در حالت $A\in\alpha$ ، مطلب روشن‌است. در واقع، دراین حالت، فاصله A از صفحه برابر صفر و، درضمن، فاصلهٔ A از تصویر آن برصفحه هم، برابر صفر است.

مسأله. ثابت کنید، فاصلهٔ یک خط راست از صفحه‌ای که باآن موازی است، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از خط راست تا صفحهٔ مفروض.

شکل (۱۱)



حل. فرض کنید $a \parallel \alpha$ ولی $a \not\subset \alpha$ (شکل ۱۱). از نقطه‌های دلخواه A و B واقع برخط راست a، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α فرود می‌آوریم. چون دوخط راست AA_1 و BB_1 و همچنین دوخط راست AB و A_1B_1 باهم موازی‌اند، پس $|AA_1| = |BB_1|$. واین، به معنای آن است که فاصلهٔ هر نقطه از خط راست a تاصفحهٔ α، به‌جای این نقطه ارتباطی ندارد.

اکنون پاره‌خط راست MN را درنظر می‌گیریم که نقطهٔ دلخواه $M\in a$ را به نقطهٔ $N\in\alpha$ وصل کرده‌است و برصفحهٔ α عمود نیست. اگر M_1 تصویر نقطهٔ M برصفحهٔ α باشد، آن وقت بنابر قضیهٔ ۸ داریم: $|MN| > |MN_1|$.

به این ترتیب، $|MM_1|$ فاصله بین خط راست a و صفحهٔ α است.

درحالت $a\subset\alpha$ هم، درستی حکم به قوت خود باقی است؛ دراین حالت خاص، هردو فاصله‌ای که درصورت مسأله آمده است، برابر صفرند.

پرسشها و مسأله‌ها

۲۳. وجه ABC از چهاروجهی ABCD، مثلثی است متساوی‌الاضلاع باضلع به طول a و هریک از یالهای DA، DB، DC، طولی برابر b دارند. مطلوب است فاصلهٔ از رأس D تا صفحهٔ وجه ABC.

۲۴. یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. مطلوب است فاصلهٔ: ۱) از رأس A تاصفحهٔ BB_1D_1؛ ۲) از رأس A_1 تا صفحهٔ AB_1D_1.

۲۵. ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی متر است. نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از صفحهٔ مثلث و، درضمن، به‌یک فاصله از سه رأس مثلث است. فاصلهٔ اخیر را محاسبه کنید.

۲۶. لوزی به‌ضلع ۶ سانتی‌متر و زاویهٔ ۶۰ درجه داده‌شده‌است. نقطهٔ M، به‌فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از صفحهٔ لوزی و به یک فاصله از خطهای راست شامل ضلعهای آن واقع است. این فاصله را محاسبه کنید.

۲۷. ۱) روی صفحهٔ α، دوخط راست موازی باهم و به فاصلهٔ m از یکدیگر، رسم شده‌است. نقطهٔ S به‌فاصلهٔ h از صفحهٔ α و، درضمن، به‌یک فاصله از دوخط موازی واقع است. این فاصله را پیدا کنید.

۲) خطهای راست موازی a و b را، به فاصلهٔ ۴۴ سانتی‌متر از یکدیگر، روی صفحهٔ α رسم کرده‌ایم. خط راست c موازی باخطهای راست مفروض و به فاصلهٔ ۱۵ سانتی‌متر از صفحهٔ α قرار دارد. اگر فاصلهٔ c تا a برابر ۳۹ سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ بین c و b را پیدا کنید.

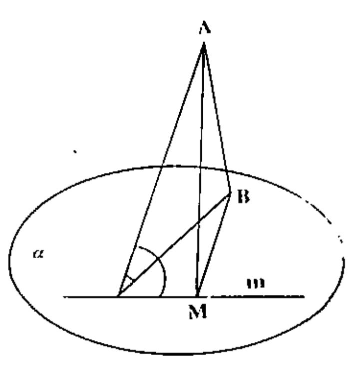
۲۸. مطلوب است مجموعهٔ نقطه‌هایی که از صفحهٔ مفروض به فاصلهٔ: ۱) برابر l؛ ۲) کوچکتر از l باشند.

۷. زاویه بین خط راست وصفحه

قضیه ۹. زاویهٔ بین خط راستی که برصفحهٔ مفروض عمود نیست و تصویر آن بر این صفحه، کوچکترین زاویه‌ای است که خط راست باهریک از خطهای راست واقع برصفحه می‌سازد.

اثبات. (AC) را مایل نسبت به صفحهٔ α و $C\in\alpha$ می‌گیریم (شکل ۱۲). عمود AB برصفحهٔ α را رسم می‌کنیم $(B\in\alpha)$. دراین صورت (BC)، تصویر مایل AC برصفحهٔ α است. زاویهٔ بین خطهای راست CA و CB را β و زاویهٔ بین خطهای راست CA و m را (که به‌دلخواه و از نقطهٔ C، روی صفحهٔ α رسم شده‌است)، φ می‌نامیم. باید ثابت کنیم $\beta<\varphi$.

شکل (۱۲)



اگر $m\perp(BC)$، بنابرقضیهٔ سه عمود $\varphi=90^\circ$. دراین حالت، قضیه درست است، زیرا $\beta<90^\circ$.

اگر $m=(BC)$، آن وقت $\varphi=\beta$ و باز هم قضیه درست است.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که خط راست m عمود بر (BC) و یا منطبق برآن نباشد. پاره‌خط راست BM را عمودبر m رسم $(M\in m)$ و M را به A وصل می‌کنیم، دراین صورت

$m \perp [AM]$ (قضیه سه عمود). در مثلثهای قائم الزاویهٔ ACB و ACM داریم:

$$\sin\beta = \frac{|AB|}{|AC|} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{|AM|}{|AC|}$$

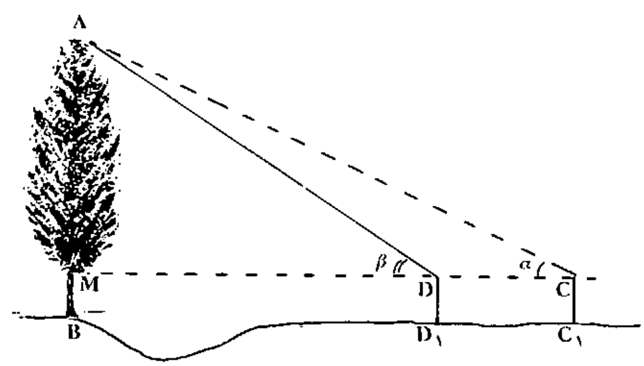
ولی $[AB] \perp \alpha$، بنابراین $[AB] < [AM]$ (بند ۶). به این ترتیب $\sin\beta < \sin\varphi$ و $\beta < \varphi$.

تعریف. زاویهٔ بین خط راست مایل نسبت به‌صفحه، باصفحه، به‌زاویهٔ بین مایل و تصویر آن برصفحه، گفته می‌شود.

زاویه بین مایل a و صفحهٔ α را بانماد $(\hat{a,\alpha})$ نشان می‌دهند که برای آن داریم: $0° < (\hat{a,\alpha}) < 90°$.

مسأله. ارتفاع [AB] را پیدا کنید، به‌شرطی که نقطه‌های A و B در دسترس نباشند شکل (۱۳).

(شکل ۱۳)



حل. پاره‌خط راست C_1D_1 را روی زمین و درجهت نقطهٔ B انتخاب می‌کنیم و طول آن را اندازه می‌گیریم؛ سپس، اندازهٔ زاویه‌های ACM و ADM را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید:

$|C_1D_1| = b$ ، $\hat{ACM} = \alpha$ ، $\hat{ADM} = \beta$. ارتفاع $|CC_1|$ را (ارتفاع ابزاری که برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مورد استفاده قرارمی‌گیرد) h می‌نامیم. باتوجه به‌قضیهٔ سینوسها در مثلث ACD داریم:

$$|AD| : \sin\alpha = |CD| : \sin\hat{CAD}$$

ولی $|CD| = b$ و $\hat{CAD} = \beta - \alpha$. در این صورت

$$|AD| = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:

$$|AM| = |AD| . \sin\beta$$

وبنابراین، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$|AB| = \frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} + h$$

مسائل مسابقه‌ای

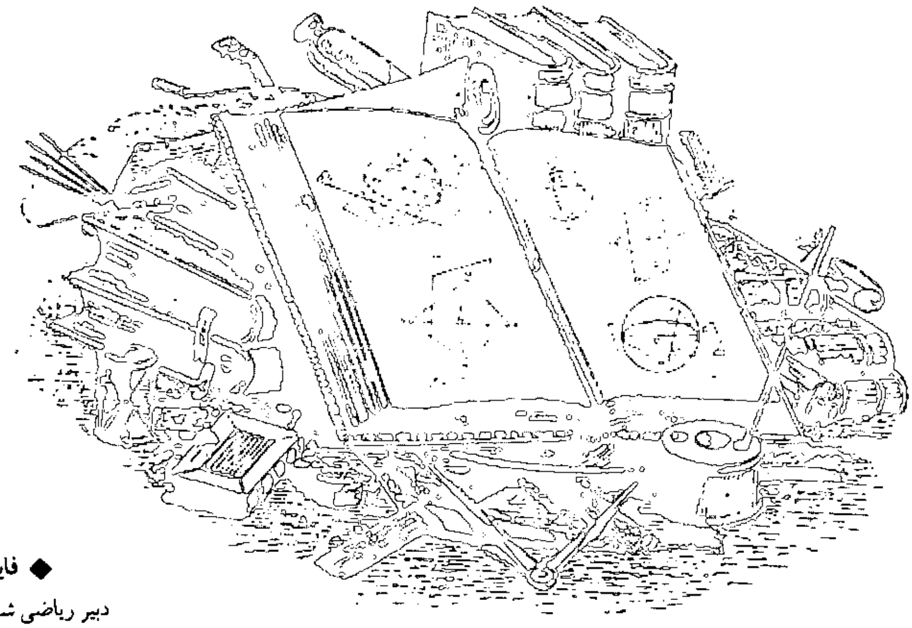
۱ـ ثابت کنید: هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ گنگ است.

۲ـ اگر $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ عددهای حقیقی دلخواه باشند ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a^2_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b^2_k\right)$$

(این نامساوی به نامساوی کوشی ـ شوارتز معروف است)

لازم به تذکر است که اولاً: حل مسائل مسابقه‌ای ۱۵ که می‌بایست در این شماره بیاید در شمارهٔ آینده چاپ خواهد شد و ثانیاً: برای پاسخگویی به‌مسائل‌مسابقه‌ای ۲ ماه فرصت‌دارید و روی پاکت نامه حتماً قیدکنید «مربوط به‌مسائل‌مسابقهٔ شمارهٔ ...»



◆ فایق رشیدزاده
دبیر ریاضی شهرستان مهاباد

گزارشی از بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه شهید باهُنر کرمان در روزهای ۸ تا ۱۱ فروردین ۷۴ میزبان بیست‌و ششمین کنفرانس ریاضی کشور بود. این کنفرانس با همکاری انجمن ریاضی ایران و با پشتیبانی مسؤولان عالی رتبهٔ کشور، وزارتخانه‌ها و استانداری کرمان برگزار شد. در این کنفرانس بیش از ۱۰۰۰ نفر از جمله عده‌ای از ریاضیدانان خارجی و ریاضیدانان ایرانی مقیم خارج از کشور شرکت داشتند. سخنرانیها در دو زمینهٔ عمومی و تخصصی ارائه شد و در این کنفرانس برای دومین بار شاهد فعالیت کارگاههای آموزش ریاضی، آنالیز عددی، هندسه و ریاضیات فازی بودیم، که استقبال دبیران ریاضی کشور از این کارگاه آموزش ریاضی، چشمگیر بود. اقدام شایستهٔ کمیتهٔ اجرایی کنفرانس انتشار کتب کارگاهها و ارائه آن به شرکت کنندگان بود. در کنار کنفرانس میزگرد نظام جدید و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران و همچنین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی برگزار شد. علاوه بر این نمایشگاه کتابهای ریاضی خارجی و نمایشگاه و فروشگاه کتابهای علوم پایه فارسی و اجرای تأتر و کنسرت موسیقی و تورهای مسافرتی ماهان و بم از فعالیتهای جنبی و مفید این کنفرانس بود.

استقبال چشمگیر از کُنسرت موسیقی گروه تنبور نوازان با صدای گرم اُستاد جلال‌الدّین محمدیان نشانهٔ تلاش اعضای کمیتهٔ اجرایی و همکاری ادارهٔ فرهنگ و ارشاد اسلامی استان کرمان است. همچنین صفهای طویل شرکت‌کنندگان کنفرانس، برای رزرو بلیط تورهای مسافرتی ماهان و بم حاکی از جذابیت آثار تاریخی استان کرمان و استقبال شرکت‌کنندگان از این برنامه ها بود.

میزگرد نظام جدید آموزش متوسطه نیز با استقبال گرم دبیران ریاضی کشور همراه بود. در این میزگرد مهندس علاقه‌مندان، تنی چند از اساتید دانشگاه و دبیران شرکت داشتند. ابتدا مهندس علاقه‌مندان هدفهای نظام جدید و مقایسهٔ آن با نظام فعلی را برای حاضران تشریح کردند. سپس اساتید دانشگاه هر یک مزایا و مشکلات نظام جدید را مورد بحث و بررسی قرار دادند. در پایان میزگرد بر این نکته تأکید شد تمام دست‌اندرکاران، اساتید و دبیران محترم، باید در پیاده کردن نظام جدید همکاری نزدیک و بیشتری داشته باشند.

یکی از تصمیم‌های خوب کنفرانس، تجلیلی بود که از چهار استاد و پژوهشگر ریاضیات به عمل آورد. در جلسهٔ عمومی کنفرانس، پیش از ظهر هشتم فروردین، آقایان دکتر جواد بهبودیان، دکتر ابوالقاسم قربانی، دکتر هادی شفیعیها و پرویز شهریاری، به‌عنوان پیش‌کسوتان ریاضی کشور به شرکت کنندگان معرفی شدند و هدیه‌هایی دریافت کردند.

حرف آخر اینکه تلاش شبانه‌روزی کمیتهٔ اجرایی کنفرانس، دبیر کنفرانس، دانشجویان دانشگاه شهید باهنر کادر خدماتی و مقامات مؤسسه‌های مختلف استان کرمان، در هر چه بهتر برگزار کردن کنفرانس قابل تقدیر و ستودنی بود. که به حق در تحقق این هدف موفق و سرافراز شدند.



رادیکال

(قسمت اول)

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به‌نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به‌ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{۲}$ است، که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که دقیقاً برابر $\sqrt{۲}$ باشد، زیرا:

$$۱/۴^{۲}=۱/۹۶<۲<۱/۵^{۲}=۲/۲۵$$

$$۱/۴۱^{۲}=۱/۹۸۸۱<۲<۱/۴۲^{۲}=۲/۰۱۶۴$$

$$۱/۴۱۴^{۲}=۱/۹۹۹۳۹۶<۲<۱/۴۱۵^{۲}=۲/۰۰۲۲۲۵$$

$$۱/۴۱۴۲^{۲}=۱/۹۹۹۹۶۱۶۴<۲<۱/۴۱۴۳^{۲}=۲/۰۰۰۲۴۴۴۹$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به‌یک عدد دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد. به‌عبارت دیگر اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در اینجا این مطلب را با روش «برهان خلف» به‌اثبات می‌رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده‌نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به‌هم، اول باشند. به‌بیان دیگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n، هر دو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}=\frac{m}{n}\Rightarrow ۲=\frac{m^{۲}}{n^{۲}}\Rightarrow m^{۲}=۲n^{۲} \qquad (۱)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش‌پذیر است، پس باید $m^{۲}$، یعنی m هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$m=۲k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

در برابری (۱)، $۲k$ را به‌جای m می‌گذاریم:

$$(۲k)^{۲}=۲n^{۲}\Rightarrow ۴k^{۲}=۲n^{۲}\Rightarrow ۲k^{۲}=n^{۲} \qquad (۲)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. ولی از آنجا که m و n را نسبت به‌هم اول گرفته بودیم، نتیجه می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بینهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بینهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{IR}$) می‌نامند.

ریشهٔ دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمتر مربع است، طول ضلع مربع چند سانتیمتر است؟

برای حل این مسأله طول ضلع مربع را x سانتیمتر فرض می‌کنیم، در این صورت مساحت مربع $x^{۲}$ خواهد بود:

$$x^{۲}=۱۶ \qquad (۱)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و ۴− وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است، زیرا:

$$۴^{۲}=۱۶ \quad \text{و} \quad (-۴)^{۲}=۱۶$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود: $x=۴$

عددهای ۴ و ۴- را ریشهٔ دوم عدد ۱۶ می‌نامند.

ریشه‌های دوم عدد $\frac{۱}{۱۶}$ عددهای $\frac{۱}{۴}$ و $-\frac{۱}{۴}$ می‌باشند، زیرا:

$$(\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \text{ و } (-\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

ریشهٔ دوم ۰ نیز ۰ است، زیرا:

$$۰^۲ = ۰$$

آیا عدد ۱۶- ریشهٔ دوم دارد؟

عدد ۱۶- ریشهٔ دوم ندارد، زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴- و یا هر عدد حقیقی دیگر ریشهٔ دوم ۱۶- باشد، باید توان دوم این عددها (۴ و ۴- و یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشهٔ دوم ۱۶- فرض می‌شود) مساوی ۱۶- شود، ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی هیچگاه عدد منفی نیست، از این‌رو عدد ۱۶- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد. و به‌همین دلیل:

اعداد منفی ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴- ریشه‌های دوم ۱۶ می‌باشند.

ریشه‌های دوم ۱۶ را با $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ نشان می‌دهیم و به‌ترتیب می‌خوانیم رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم ۰/۰۱ عبارتند از:

$$\sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱ \text{ و } -\sqrt{۰/۰۱} = -۰/۱$$

زیرا:

$$(۰/۱)\times(۰/۱) = ۰/۰۱ \text{ و } (-۰/۱)\times(-۰/۱) = ۰/۰۱$$

ریشه‌های دوم ۲ عبارتند از $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$. ($\sqrt{۲}$ همان جذر عدد ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی می‌توان حساب کرد.)

ریشه‌های دوم عدد a (a بزرگتر یا مساوی صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم مثبت a و $-\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم منفی a است.

به‌طور کلی اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^۲=a$ باشد، داریم:

$$x=\sqrt{a} \text{ و } x=-\sqrt{a} \quad (a\geq ۰)$$

به‌بیان دیگر اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد، b را ریشهٔ دوم عدد حقیقی a گویند، هرگاه $b^۲=a (a\geq ۰)$

مثال ۱: ریشه‌های دوم عددهای ۳۶، ۹ و ۱۰۰ و ۰/۰۰۰۱ و ۰/۸۱ و $\frac{۹}{۱۶}$ و $\frac{۴}{۸۱}$ و ۱ و ۲ و ۴- و ۱۰۰- و $\frac{-۱}{۹}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{۳۶}=\pm۶ \;,\; \pm\sqrt{۹}=\pm۳ \;,\; \pm\sqrt{۱۰۰}=\pm۱۰ \;,$$
$$\pm\sqrt{۰/۰۰۰۱}=\pm۰/۰۱$$
$$\pm\sqrt{۰/۸۱}=\pm۰/۹ \;,\; \pm\sqrt{\frac{۹}{۱۶}}=\pm\frac{۳}{۴} \;,\; \pm\sqrt{\frac{۴}{۸۱}}=\pm\frac{۲}{۹} \;,$$
$$\pm\sqrt{۱}=\pm۱ \;,\; \pm\sqrt{۲}\simeq\pm۱/۴۱۴۲$$

عددهای ۴- و ۱۰۰- و $\frac{-۱}{۹}$، چون عددی منفی هستند، ریشهٔ دوم ندارند.

مثال ۲: حاصل عبارتهای

$$\sqrt{۰/۰۴} \;,\; \sqrt{۱۴۴} \;,\; (\sqrt{۳۶})^۲ \;,\; \sqrt{۱۶۹}$$
$$\sqrt{-۱} \;,\; \sqrt{-۱۶} \;,\; \sqrt{-۹^۲} \;,\; \sqrt{(-۲)^۲} \;,$$
$$-\sqrt{(-۹)^۲} \;,\; \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} \;,\; \sqrt{\frac{۱۶}{۸۱}} \;,\; \sqrt{-(-۹)^۳} \;,\; \sqrt{-(-۲)^۲}$$

را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\sqrt{۱۶۹}=\sqrt{۱۳^۲}=۱۳, (\sqrt{۳۶})^۲=(۶)^۲=۳۶,$$
$$\sqrt{۱۴۴}=\sqrt{۱۲^۲}=۱۲, \sqrt{۰/۰۴}=\sqrt{(۰/۲)^۲}=۰/۲,$$
$$\sqrt{\frac{۱۶}{۸۱}}=\sqrt{\frac{۴^۲}{۹^۲}}=\sqrt{(\frac{۴}{۹})^۲}=\frac{۴}{۹},$$
$$\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۵^۲}{۲^۲}}=\sqrt{(\frac{۵}{۲})^۲}=\frac{۵}{۲},$$
$$-\sqrt{(-۹)^۲}=-\sqrt{۸۱}=-۹ ; \sqrt{(-۲)^۲}=\sqrt{۴}=\sqrt{۲^۲}=۲$$
$$\sqrt{-(-۹)^۳}=\sqrt{۹^۳}=\sqrt{(۳^۲)^۳}=\sqrt{(۳^۳)^۲}=۳^۳=۲۷$$

عددهای $\sqrt{-۸۱}=\sqrt{-۹^۲}, \sqrt{-۱۶}, \sqrt{-۱}, \sqrt{-۴}=\sqrt{-(-۲)^۲}$ غیرحقیقی می‌باشند. زیرا عددهای منفی جذر و ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

توجه: ریشهٔ دوم مثبت عدد $(-۲)^۲$ و یا ۴ برابر ۲ است، یعنی:

$$\sqrt{(-۲)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

و ریشهٔ دوم منفی عدد $(-۲)^۲$ و یا ۴ برابر ۲- است، یعنی:

$$-\sqrt{(-۲)^۲}=-\sqrt{۴}=-۲$$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-۹)^۲}$ و $\sqrt{-۹^۲}$ یکی نیست.

زیرا:

$$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9\ ,\ \sqrt{-9^2}=\sqrt{-81}$$

(عدد ۸۱− ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.)

یعنی ریشهٔ دوم مثبت $(-9)^2$ برابر ۹ است و -9^2 ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.

محاسبهٔ $\sqrt{x^2}$

برای مثال عبارت $\sqrt{x^2}$ را به‌ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم:

$$x=4 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{4^2}=4$$
$$x=0/2 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{0/2^2}=0/2$$
$$x=-5 \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$$
$$x=\frac{-2}{3} \quad : \quad \sqrt{x^2}=\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

با دقت در محاسبات اخیر ملاحظه می‌شود که در محاسبهٔ $\sqrt{x^2}$ اگر به‌جای x اعداد مثبت یا صفر قرار دهیم، $\sqrt{x^2}=x$ است و اگر به‌جای x عددهای منفی قرار دهیم، $\sqrt{x^2}=-x$ می‌باشد:

اگر x عددی مثبت یا صفر باشد ($x\geq 0$)، داریم: $\sqrt{x^2}=x$

و اگر x عددی منفی باشد ($x<0$)، داریم: $\sqrt{x^2}=-x$

برای مثال:

$$\sqrt{(+5)^2}=+5\ ,\ \sqrt{(-7)^2}=-(-7)=7$$
$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2}=-(-\sqrt{2})=\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{(+\frac{4}{9})}=+\frac{2}{3}$$
$$-\sqrt{(-\frac{5}{7})^2}=-\left[-(-\frac{5}{7})\right]=-\frac{5}{7}\ ,\ -\sqrt{(-5)^2}=-(-(-5))=-5$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید:

1) $5\sqrt{9}+\sqrt{(-4)^2}-4\sqrt{(-3)^2}$

2) $2\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{(-\frac{5}{6})^2}$

3) $4\sqrt{(0/01)^2}-4\sqrt{(-0/01)^2}-20\sqrt{\frac{1}{100}}+\sqrt{4}$

4) $\sqrt{1\frac{16}{9}}-\sqrt{(-\frac{5}{9})^2}$

حل:

1) $5\sqrt{9}+\sqrt{(-4)^2}-4\sqrt{(-3)^2}=5(3)-(-4)-4(-(-3))$
$=15+4-12=7$

2) $2\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{(-\frac{5}{6})^2}=2(\frac{5}{6})-\left[-(-\frac{5}{6})\right]=\frac{10}{6}-\frac{5}{6}$
$=\frac{10-5}{6}=\frac{5}{6}$

3) $4\sqrt{(0/01)^2}-4\sqrt{(-0/01)^2}-20\sqrt{\frac{1}{100}}+\sqrt{4}$
$=4(0/01)-4(-(-0/01))-20(\frac{1}{10})+2$
$=0/04-0/04-2+2=0$

4) $\sqrt{1\frac{16}{9}}-\sqrt{(-\frac{5}{9})^2}=\sqrt{\frac{25}{9}}-\left[-(-\frac{5}{9})\right]$
$=\frac{5}{3}-\frac{5}{9}=\frac{15-5}{9}=\frac{10}{9}$

مثال ۴: کدام‌یک از تساویهای زیر به‌ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است.

1) $-\sqrt{x}=7$ 2) $\sqrt{x}+4=0$

3) $\sqrt{(-x^2)^2}=-x^2$ 4) $\sqrt{x^4}=x^2$

حل: فقط تساوی $\sqrt{x^4}=x^2$ درست است. زیرا در تساوی $-\sqrt{x}=7$ طرف اول تساوی یعنی $-\sqrt{x}$، به‌ازای هر x حقیقی مثبت، همواره منفی است و طرف دوم عددی است مثبت که در نتیجه این تساوی در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است. تساوی $\sqrt{x}+4=0$ نیز در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است، زیرا طرف اول تساوی یعنی عبارت $\sqrt{x}+4$ به‌ازای هر x حقیقی مثبت، همواره مثبت و مخالف صفر است. همچنین تساوی $\sqrt{(-x^2)^2}=-x^2$ فقط به‌ازای $x=0$ برقرار است. زیرا طرف اول تساوی یعنی $\sqrt{(-x^2)^2}=\sqrt{x^4}=x^2$، همواره مثبت است و طرف دوم تساوی یعنی $-x^2$، همواره منفی است. بدیهی است تساوی $\sqrt{x^4}=x^2$ به‌ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است، زیرا:

$$\sqrt{x^4}=\sqrt{(x^2)^2}=x^2$$

مثال ۵: عبارت $\sqrt{(x^2-1)^2}$ را به‌ازای $x=0\ ,\ x=-2\ ,\ x=1\ ,\ x=\sqrt{2}\ ,\ x=-\sqrt{3}\ ,\ x=4\ ,\ x=-\frac{1}{2}$ و $x=0/1$ حساب کنید.

حل:

$$x=0:\ \sqrt{(0-1)^2}=\sqrt{(-1)^2}=-(-1)=1$$

$$x=-2:\ \sqrt{(4-1)^2}=\sqrt{3^2}=3$$

$$x=1:\ \sqrt{(1-1)^2}=\sqrt{0^2}=0$$

$$x=\sqrt{2}:\ \sqrt{(2-1)^2}=\sqrt{1^2}=1$$

$$x=-\sqrt{3}:\ \sqrt{(3-1)^2}=\sqrt{2^2}=2$$

$$x=4:\ \sqrt{(16-1)^2}=\sqrt{15^2}=15$$

$$x=-\frac{1}{2}:\ \sqrt{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$x=0/1:\ \sqrt{(0/01-1)^2}=\sqrt{(-0/99)^2}=-(-0/99)=0/99$$

قدرمطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی و حمید ۲۰۰ ریال مقروض است. در اینجا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ در حالی که علی ۲۰۰+ ریال و حمید ۲۰۰− ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) موردنظر نباشد، گوییم با قدرمطلق عدد روبرو هستیم. برای نشان دادن قدرمطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی که در دوطرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$|-200|=200 \quad \text{و} \quad |+200|=200$$

به‌بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد، مقدار عددی آن، با علامت مثبت است. زیرا وقتی می‌نویسیم ۲۰۰، منظور ما در واقع ۲۰۰+ است.

مثال ۱: قدرمطلق عددهای $-\sqrt{2}$ ، $+\sqrt{2}$ ، $7-\sqrt{5}$ ، $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{5}$ را بیابید.

حل:

$$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2} \quad \text{و} \quad |+\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

می‌دانیم $7>\sqrt{5}$ ؛ پس: $7-\sqrt{5}>0$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $7-\sqrt{5}$ با خودش برابر است:

$$|7-\sqrt{5}|=7-\sqrt{5}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ ؛ پس: $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ ، بنابراین قدرمطلق عدد $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

و همین‌طور:

$$\sqrt{5}>2 \Rightarrow \sqrt{5}-2>0 \Rightarrow |\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$$

با توجه به‌مثال (۱)، قدرمطلق عدد حقیقی a را می‌توان به‌شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases} \qquad (1)$$

تعبیر تساوی (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر است. ولی اگر a عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{9}$ با ریشهٔ دوم ۹ فرق دارد:

ریشهٔ دوم عدد ۹، می‌تواند ۳+ یا ۳− باشد، ولی $\sqrt{9}$ فقط برابرِ ۳ یعنی قدرمطلق ۳+ و ۳− می‌باشد:

$$\sqrt{9}=\sqrt{(\pm 3)^2}=|\pm 3|=3$$

به‌این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^2}=|a| \qquad (2)$$

تساوی (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت، همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

۱) $|-\sqrt{2}|$

۲) $\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right|$

۳) $\left|-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right|$

۴) $|7-\sqrt{50}|$

۵) $\left|\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-5)^2}\right|$

۶) $\left|\,|3-\sqrt{10}|-|4+\sqrt{10}|\,\right|$

۷) $\sqrt{(\sqrt{3}-4)^2}$

حل: با توجه به‌تعریف قدرمطلق داریم:

۱) $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$

۲) $\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{4-9}{6}\right|=\left|\frac{-5}{6}\right|=\frac{5}{6}$

۳) $\left|-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right|=\left|\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right|=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$

۴) $|7-\sqrt{50}|=|-(\sqrt{50}-7)|=|\sqrt{50}-7|=\sqrt{50}-7$

۵) $\left|\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-5)^2}\right|=\left|\,|-3|-|-5|\,\right|=|3-5|=|-2|=2$

۶) $\left|\,|3-\sqrt{10}|-|4+\sqrt{10}|\,\right|$

$= \left| |-(\sqrt{10}-3)| - (4+\sqrt{10}) \right|$

$= \left| |\sqrt{10}-3| - 4 - \sqrt{10} \right| = \left| \sqrt{10}-3-4-\sqrt{10} \right|$

$= |-7| = 7$

۷) $\sqrt{(\sqrt{3}-4)^2} = |\sqrt{3}-4| = |-(4-\sqrt{3})|$
$= |4-\sqrt{3}| = 4-\sqrt{3}$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

۱) $\sqrt{(xy)^2}=\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{x^2}.\sqrt{y^2} \Rightarrow |x.y|=|x|.|y|$

۲) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y\neq 0)$

۳) $\sqrt{x^{2n}}=\sqrt{(x^n)^2}=(\sqrt{x^2})^n$
$\Rightarrow |x^n|=|x|^n \quad (n\in IN)$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|-5x^2|$ و $\left|\frac{-7}{x^4}\right|$ و $\frac{|x|}{x}$ و $|(-13)^{75}|$ را پیدا کنید $(x\neq 0)$.

حل:

۱) $|-5x^2| = |-5|\,|x^2| = 5x^2$

۲) $\left|\frac{-7}{x^4}\right| = \frac{|-7|}{|x^4|}=\frac{7}{x^4}$

۳) $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x>0 \\ \frac{-x}{x} & x<0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

۴) $\left|(-13)^{75}\right| = |(-13)|^{75} = 13^{75}$

ریشهٔ n ام یک عدد

به‌همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشهٔ دوم را تعریف کردیم؛ می‌توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان nام (n عدد طبیعی)، ریشه‌های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشهٔ nام را تعریف کرد.

مثال:

از $125=5^3$ نتیجه می‌شود $5=\sqrt[3]{125}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ سوم ۱۲۵ برابر ۵ است.»

از $16=2^4$ نتیجه می‌شود $2=\sqrt[4]{16}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ چهارم ۱۶ برابر ۲ است.»

از $243=3^5$ نتیجه می‌شود $3=\sqrt[5]{243}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است.»

از $64=2^6$ نتیجه می‌شود $2=\sqrt[6]{64}$ و می‌خوانیم «ریشهٔ ششم ۶۴ برابر ۲ است.»

به‌طور کلی:

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n\geq 2)$ و عددهای حقیقی a و b، اگر $a^n=b$ باشد، و n عددی فرد باشد:

$a=\sqrt[n]{b}$

و اگر n عددی زوج و $b\geq 0$ باشد:

$|a|=\sqrt[n]{b}$

برای مثال:

$\sqrt[3]{-8}=-2$ ، زیرا $-8=(-2)^3$ است.

$\sqrt[5]{32}=2$ ، زیرا $32=2^5$ است.

$\sqrt[6]{64}=2$ ، زیرا $64=2^6$ است.

$\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$ ، زیرا $\frac{81}{16}=\left(\frac{3}{2}\right)^4$ است.

عبارتهایی مانند: $\sqrt[100]{-1},\ \sqrt[74]{-2},\ \sqrt{-81},\ \sqrt[10]{-10^{10}},$

$\sqrt[8]{-2^8},\ \sqrt[4]{-16},\ \sqrt[6]{-64}$

عدد حقیقی نیستند. زیرا عددهای منفی ریشهٔ زوج ندارند.

مثال ۶: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$

۲) $\sqrt{(-3)(-3)^3}-\sqrt{81}$

۳) $2+\sqrt[3]{-8}$

۴) $2\sqrt{5^2}-\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{625}$

۵) $-\sqrt[11]{(-7)(-7)^2(-7)^3(-7)^5}$

۶) $-\sqrt[3]{6\times(-4)(-9)}$

۷) $\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt{(-4)^2}$

۸) $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[6]{2\times 4\times 8}$

۹) $\sqrt[3]{-8}-\sqrt{4}$

۱۰) $2\sqrt[3]{64}-\sqrt{16}$

حل:

۱) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$

۲) $\sqrt{(-3)(-3)^3}-\sqrt{81}=\sqrt{(-3)^4}-9=(-3)^2-9=9-9=0$

۳) $2+\sqrt[3]{-8}=2+\sqrt[3]{(-2)^3}=2-2=0$

۴) $2\sqrt{5^2}-\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{625}=2\times 5-\sqrt[4]{3^4}-\sqrt[4]{5^4}$
$=10-3-5=2$

۵) $-\sqrt[11]{(-7)(-7)^2(-7)^3(-7)^5} = -\sqrt[11]{(-7)^{11}}$
$=-(-7)=7$

۶) $-\sqrt[3]{6\times(-4)(-9)} = -\sqrt[3]{6\times 36} = -\sqrt[3]{6^3} = -6$

۷) $\sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[5]{2^5} - \sqrt[4]{16} = 2 - \sqrt[4]{2^4} = 2-2=0$

۸) $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[6]{2\times4\times8} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[6]{2\times2^2\times2^3}$
$= 2\times\sqrt[6]{2^6} = 2\times2=4$

۹) $\sqrt[3]{-8}-\sqrt{4} = \sqrt[3]{(-2)^3}-\sqrt{2^2} = -2-2=-4$

۱۰) $2\sqrt[3]{64}-\sqrt{16} = 2\sqrt[3]{4^3}-\sqrt{4^2}$
$= 2\times4-4=8-4=4$

تعریف

هرگاه عدد حقیقی k توان nام عدد حقیقی a باشد، k را توان nام کامل a می‌نامند. به‌طور مثال: «۲۵ توان دوم کامل ۵+ یا ۵−» و «۸ توان سوم کامل ۲» و «۶۲۵ توان چهارم کامل ۵+ یا ۵−» و «۳۲ توان پنجم کامل ۲» و «۶۴ توان ششم کامل ۲+ یا ۲−» می‌باشد. به‌همین ترتیب اگر عبارت جبری D توان nام عبارت جبری A باشد، D را توان nام کامل A می‌نامند. به‌طور مثال:
«$a^2+2ab+b^2$ یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا $-(a+b)$» و «$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$» و «x^{74} توان هفتادوچهارم کامل x یا $-x$» و «$a^{12}b^6c^{18}$ توان ششم کامل (a^2bc^3)» می‌باشد. بنابراین هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجهٔ رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید. به‌طور مثال:

$$\sqrt[6]{7^6}=7,\ \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2,\ \sqrt[7]{5^7}=5,$$
$$\sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3$$
$$\sqrt[75]{(x^2+1)^{75}}=x^2+1,$$
$$\sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{35}}=\sqrt[5]{(a^2b^4c^7)^5}=a^2b^4c^7$$

توجه:

۱) اگر فرجهٔ رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می‌آید نمی‌تواند منفی باشد. به‌طور مثال:

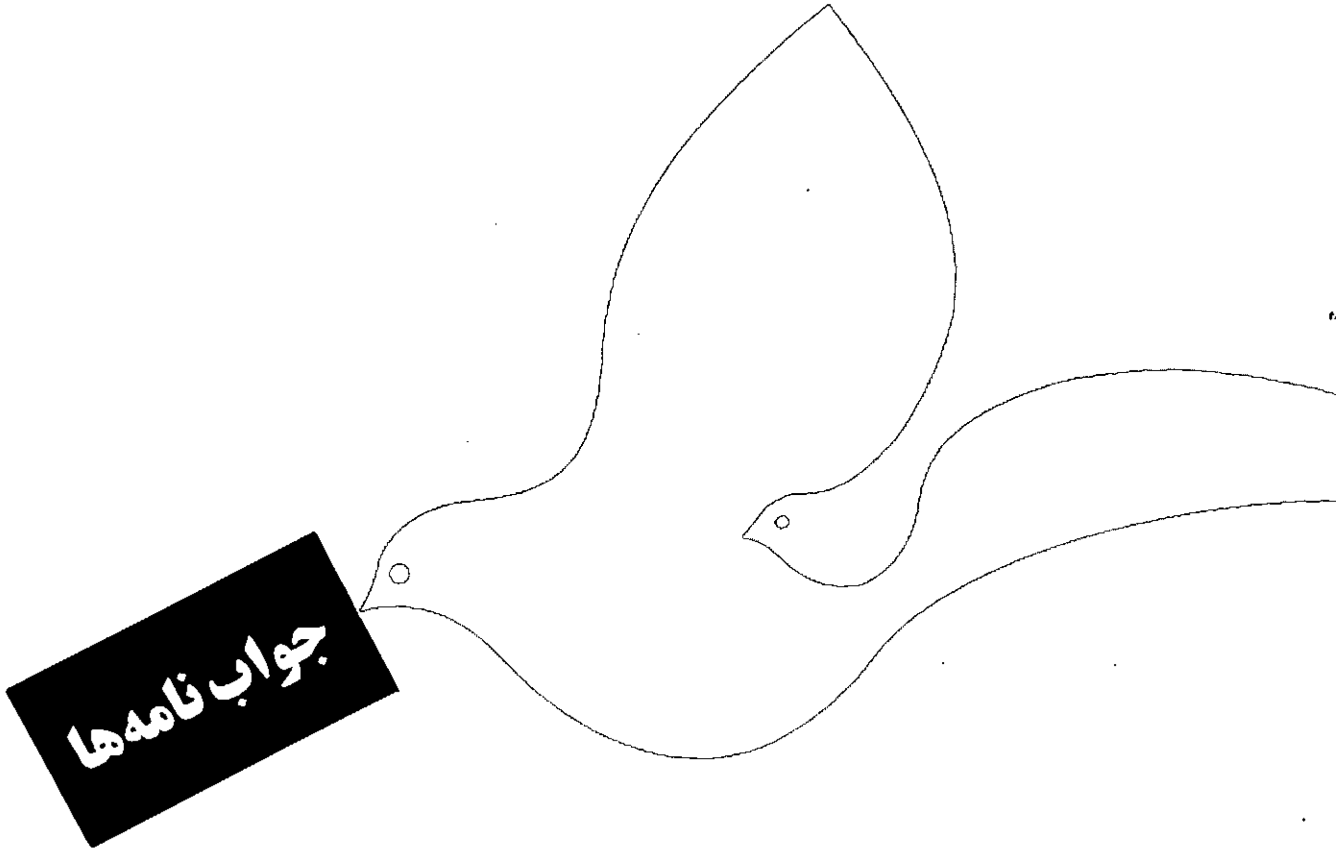
$$\sqrt[8]{(-2)^8}=-(-2)=2,\ \sqrt[10]{(-10)^{10}}=-(-10)=10,$$
$$\sqrt[74]{(-2)^{74}}=-(-2)=2$$
$$\sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3}=\sqrt[6]{(-4)^6}=-(-4)=4,$$
$$\sqrt[2k]{(-5)^{2k}}=-(-5)=5\quad (k\in IN)$$
$$\sqrt[4k]{(-a)^{8k}}=\sqrt[4k]{\left((-a)^2\right)^{4k}}=\sqrt[4k]{(a^2)^{4k}}=a^2,$$
$$\sqrt[2k]{x^{4k}}=\sqrt[2k]{(x^2)^{2k}}=x^2$$
$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1,$$
$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{40}}=\sqrt[4]{(a^2b^4c^{10})^4}=a^2b^4c^{10}$$

۲) اگر اعداد و یا عبارات جبری زیر رادیکال مضربی صحیح از فرجهٔ رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می‌نامند. به‌طور مثال:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[5]{34},\ \sqrt{x^2+1},\ \sqrt[4]{(x^2+1)^3},\ \sqrt[74]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) بی‌معنی است. برای مثال تمام اعداد و عبارات رادیکالی زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی (IR) بی‌معنی می‌باشند:

$$\sqrt{-4},\ \sqrt[4]{-81},\ \sqrt[6]{-64},\ \sqrt[8]{-2^8},$$
$$\sqrt[20]{-5^{20}},\ \sqrt[100]{-10^{100}},$$
$$\sqrt[4]{-\sqrt{4}},\ \sqrt[74]{-1},\ \sqrt[2k]{-2^{2k}}\ (k\in IN),$$
$$\sqrt[2k]{-5^{2k}},\ \sqrt[4k]{-(-2)^{4k}},\ \sqrt[5]{2\sqrt[4]{-16}},$$
$$\sqrt[4]{-(x^2+1)^4}\ (x\in IR),\ \sqrt{-(x^2+4)},$$
$$\sqrt[8]{-(x^4+2)},\ \sqrt[6]{-4x^2-8},$$
$$\sqrt{-(x^4+2x^2+1)},\ \sqrt[10]{\frac{-1}{2x^2+1}},\ \sqrt[4]{\frac{-16}{(x^2+1)^4}},$$
$$\sqrt[74]{\frac{-1}{x^{74}}},\ \sqrt{-\sqrt[4]{(x^2+1)^4}}$$



خانم نیکتا محتاج؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در شماره‌های آینده مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل بادرستانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای اکبر ترابی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (سیاهکل)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد. باز هم از نامه‌هایی که برای ما ارسال داشته‌اید، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

آقای ارسلان حجت‌انصاری (گیلان)

ضمن تشکر از مطلب شما در مورد «قضیهٔ فرما» به عرض می‌رسانیم که روش اثبات شما در رابطه با این قضیه بسیار خاص است، و قضیه به ازای اعداد خاصی که مورد نظر نیست، بررسی شده است. شما یکی از اعداد را به فرم $x = m(z-y)$ گرفته‌اید و مسأله را از عمومیت خود خارج کرده‌اید. بدیهی است که برای اثبات قضیه چنین روشهایی مورد نظر نیست. در این جا به اطلاع خوانندگان می‌رسانیم که مجله ریاضی دانش‌آموزی «برهان» از پاسخگویی به مقالات و مسایلی که از سطح دانش‌آموزان دبیرستان بالاتر باشد، معذور است. زیرا این کار جزو اهداف مجله نیست.

آقای سید جواد حسینی؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (قم)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای مجید کریمی مقدم؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های بعدی مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ایمان عشایری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (ساری)

ضمن تشکر از نامهٔ شما که حاوی مقاله‌ای با عنوان «محاسبهٔ مجموع سری $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$» است، به عرض شما می‌رسانیم که این‌گونه مقالات اولاً در سطح دانش‌آموزان دبیرستان نیست و درثانی در این مورد روشهای بسیاری در کتب و مجلات ریاضی می‌توان یافت.

آقای ناصر و الاناصر سردرودی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تبریز)

از مطلب ارسالی شما با عنوان «بازی با اعداد» متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای سید محمد شعاری شعار؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (رشت)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای مجید بالو؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آمل)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم.

آقای یاسر علمی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (مشهد)

از مطالب ارسالی شما متشکریم. از آنها در جای مناسب استفاده خواهیم کرد.

آقای فرهاد شریف (مشهد)

از مطالب ارسالی شما در رابطه با «اعداد تام» و «قضیهٔ ویلسون» متشکریم. ان‌شاءالله در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد. موفق و پیروز باشید.

آقای ابراهیم فاتح (سقز)

از ارسال نامهٔ شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز بود، متشکریم. در صورت لزوم ودر جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای حمید بخشی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (لنگرود)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم سهیلا جعفری (داراب)

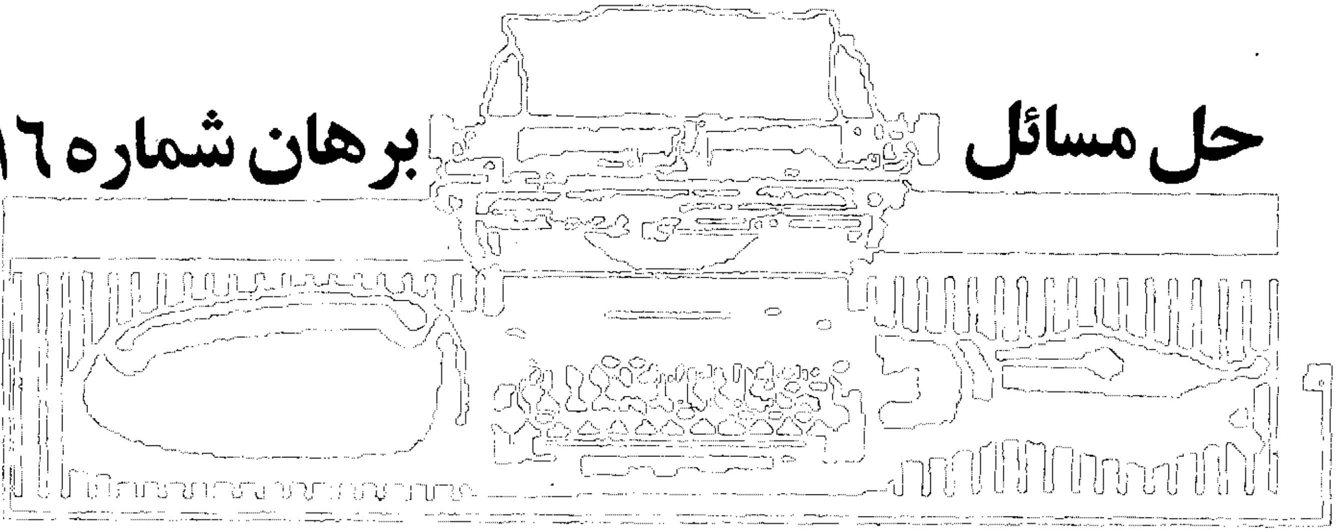
از ارسال نامهٔ شما که حاوی مطلبی دربارهٔ «توزیع اعداد اول» است، متشکریم. در جواب باید بگوییم که یک فرمول یا یک رابطه را که به ازای برخی از اعداد، عدد اولی به دست دهد، نمی‌توان یک فرمول جدیدی برای توزیع اعداد اول دانست. فرمول: $P(n)=n^2-n+41$ کلی نیست و فقط به ازای اعداد ۱ تا ۴۰ عددی اول به‌دست می‌دهد و پس از آن اعدادی یافت می‌شود که به ازای آنها حاصل عددی اول نیست، مانند $n=41$ که داریم: $P(41)=41\times41$. فرمولی را که شما ارائه داده‌اید فقط به ازای پنج عدد اولیه مورد امتحان قرار گرفته است و پس از آن امکان وجود موارد نقض بسیار است. بهتر است اعداد بعدی را نیز امتحان کنید و موارد نقض را مشاهده نمایید. متذکر می‌شویم که از نظر تئوری اعداد، برای توزیع اعداد اول، فرمولی مورد قبول است که به ازای جمیع مقادیر طبیعی؛ عددی اول حاصل شود، و مورد نقض نیز نداشته باشد. با این حال فرمول شما را عیناً در این جا می‌آوریم:

$$P(k)=25k^2+(5k-1)^2$$

یا

$$P(k)=(5k+2)^2+(5k+3)^2$$

حل مسائل برهان شماره ۱۶



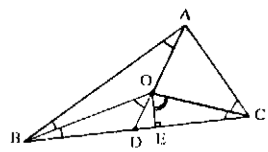
حل مسائل ریاضیات سال اول

۱ ـ باتوجه به‌اینکه نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC است، در مثلث قائم‌الزاویه OEC داریم:

$$\widehat{COE}=۹۰^\circ-\widehat{OCE}=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}$$

اما
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰^\circ$$

پس
$$\widehat{COE}=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}-\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}\quad(۱)$$



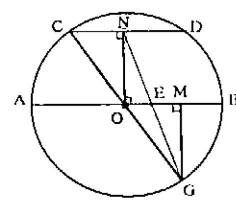
از طرفی،زاویهٔ BOD ، زاویهٔ خارجی مثلث OAB است پس:

$$\widehat{BOD}=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}\quad(۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که: $\widehat{BOD}=\widehat{COE}$

۲ ـ از نقطهٔ O به‌نقاط N و C و G وصل می‌کنیم، چون نقطهٔ N وسط وتر CD است، پس ON عمودمنصف این وتر می‌باشد و داریم:

$$NC=\frac{CD}{۲}=\frac{R}{۲}$$



از آنجا دو مثلث قائم‌الزاویه ONC و OMG به‌دلیل تساوی وتر و یک ضلع ($NC=OM=\frac{R}{۲}$ ، $OC=OG=R$، و $\widehat{ONC}=\widehat{OMG}=۹۰^\circ$) برابرند. پس $ON=MG$ حال اگر نقطهٔ تقاطع NG با قطر AB را E بنامیم، دو مثلث قائم‌الزاویه ONE و MGE به‌حالت تساوی یک ضلع و یک زاویهٔ حاده برابرند ($\widehat{NOE}=\widehat{GMO}=۹۰^\circ$, $ON=MG$, $\hat{E}_۱=\hat{E}_۲$). پس $NE=EG$ یعنی نقطهٔ E وسط پاره‌خط NG است. یا به‌عبارت دیگر پاره‌خط NG به‌وسیلهٔ قطر AB نصف شده است.

۳ ـ چون گزاره‌های $(p\Rightarrow q)$ و $(\sim p\Rightarrow q)$ هر دو ارزش درست دارند و همواره یکی از دو گزارهٔ p و $\sim p$ ارزش درست دارند، q نمی‌تواند ارزش نادرست داشته باشد زیرا در این صورت یکی از دو گزارهٔ $(p\Rightarrow q)$ یا $(\sim p\Rightarrow q)$ ارزش نادرست، خواهد داشت که خلاف فرض است:

$$q\equiv T\Rightarrow\sim q\equiv F\Rightarrow[\sim q\Rightarrow(p\Rightarrow r)]\equiv T$$

(گزارهٔ داده‌شده به‌انتفای مقدم ارزش درست دارد).

۴ ـ طبق فرض داریم $A\subseteq B$ و برای اثبات این که $A=B$ کافی است ثابت کنیم $B\subseteq A$. از طرفی چون $A\subseteq B$ پس $A-B=\phi$ یا $A\cap B'=\phi$ و:

$$\text{طبق فرض}:\ \underbrace{(A\cap B')}_{\phi}\cup(A'\cap B)=A\Rightarrow A'\cap B=A$$

$$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\cup A\Rightarrow\underbrace{(A\cup A')}_{M}\cap(A\cup B)=A$$

$$\Rightarrow(A\cup B)=A\Rightarrow B\subseteq A$$

۵ ـ برای اثبات $A=B$ ،ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$

$$\text{طبق فرض}:\ [(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=\phi$$

$$\Rightarrow A\cup[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=A\cup\phi$$

$$\xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}[\underbrace{A\cup(A\cap B')}_{\text{جذب}}]\cup(A'\cap B)=A$$

$$\Rightarrow A\cup(A'\cap B)=A\xRightarrow{\text{پخشی}}\underbrace{(A\cup A')}_{M}\cap(A\cup B)=A$$

$$\Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A\quad(۱)$$

$$\text{طبق فرض}:\ [(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=\phi$$

$$\Rightarrow[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cup B=\phi\cup B$$

$$\xRightarrow{\text{شرکت‌پذیری}}(A\cap B')\cup[\underbrace{(A'\cap B)\cup B}_{\text{جذب}}]=B$$

$$\Rightarrow(A\cap B')\cup B=B$$

$$\xRightarrow{\text{پخشی}}(A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{M}=B$$

$$\Rightarrow(A\cup B)=B\Rightarrow A\subseteq B\quad(۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\Rightarrow A=B$$

۶ ـ طرفین تساوی را به‌توان ۳ می‌رسانیم:

$$x+\frac{۱}{x}=t$$

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳x.\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x})=t^۳$$

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳(۱)(t)=t^۳\Rightarrow\frac{x^۶+۱}{x^۳}=t^۳-۳t$$

۷ ـ

$$(\sqrt[۴]{۲}-۱)^۶(\sqrt[۴]{۲}+۱)^۶(۳+۲\sqrt{۲})^۳=$$

$$((\sqrt[۴]{۲}-۱)(\sqrt[۴]{۲}+۱))^۶(۳+۲\sqrt{۲})^۳=$$

$$(\sqrt{۲}-۱)^۶[۳+۲\sqrt{۲}]^۳=[(\sqrt{۲}-۱)^۲]^۳[۳+۲\sqrt{۲}]^۳=$$

$$(۲+۱-۲\sqrt{۲})^۳(۳+۲\sqrt{۲})^۳=(۳-۲\sqrt{۲})^۳(۳+۲\sqrt{۲})^۳=$$

$$((۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲}))^۳=(۹-۸)^۳=(۱)^۳=۱$$

۸ ـ

$$ab-۵b-۴a+۲۰=۰$$

$$a(b-۴)-۵(b-۴)=۰$$

$$(b-۴)(a-۵)=۰\Rightarrow b=۴\text{ یا }a=۵$$

اگر $b=۴$ ، آنگاه رابطه $ab-۵b-۴a+۲۰=۰$ برقرار است، پس می‌نیمم $(a+b)$ باتوجه به‌شرط $a,b\geq۰$ برابر (۴) است.

حل مسائل ریاضیات سال دوم ریاضی

۱ ـ حل از آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز سال چهارم ریاضی از تهران.

پای ارتفاعات رأسهای A و B و C را به‌ترتیب A' و B' و C' می‌نامیم و فرض می‌کنیم $S_{HBC}=S_۱$ و $S_{HAB}=S_۲$ و $S_{HAC}=S_۳$ باشد. در این صورت داریم:

$$S_۱+S_۲+S_۳=S$$

و

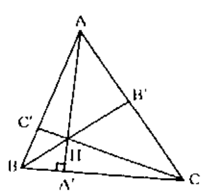
$$BC.AH+AB.CH+AC.BH=$$

$$BC(AA'-HA')+AB(CC'-HC')+AC(BB'-HB')=$$

$$BC.AA'+AB.CC'+AC.BB'-$$

$$(BC.HA'+AB.HC'+AC.HB')=$$

$$۲S+۲S+۲S-۲(S_۱+S_۲+S_۳)=۶S-۲S=۴S$$



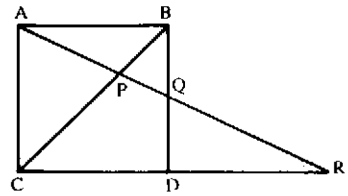
۲ ـ باید ثابت کنیم $AP^۲=PR.PQ$ داریم:

$$AB\parallel DR\Rightarrow\triangle ABP\sim\triangle PDR\Rightarrow\frac{AP}{PR}=\frac{PB}{PD}\quad(۱)$$

$$AD\parallel BQ\Rightarrow\triangle ADP\sim\triangle BPQ\Rightarrow\frac{PQ}{AP}=\frac{PB}{PD}\quad(۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AP}{PR}=\frac{PQ}{AP}\Rightarrow AP^۲=PR.PQ$$



۳ ـ الف) عمل Δ در مجموعه‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم:

$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$

سمت راست حکم $=[(A\times B)-(A\times C)]\cup[(A\times C)-(A\times B)]$

$=[A\times(B-C)]\cup[A\times(C-B)]=A\times[(B-C)\cup(C-B)]$

$=A\times(B\Delta C)$

ب) ثابت می‌کنیم:

$(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$

سمت راست حکم $=[(A\times C)-(B\times C)]\cup[(B\times C)-(A\times C)]$

$=[(A-B)\times C]\cup[(B-A)\times C]=[(A-B)\cup(B-A)]\times C$

$=(A\Delta B)\times C$

(توجه داریم که عمل × نسبت به ∪ از چپ و راست توزیع‌پذیر است)

۴ ـ برای اثبات پوششی بودن تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\ge -1\\ -x^2+1, & x\le 1\end{cases}$$

می‌بایست ثابت کنیم $R_f=\mathbb{R}$. اگر هر ضابطه تابع را در حکم یک تابع فرض کنیم، مثلاً فرض کنیم $f_1(x)=x^2+1$ و $f_2(x)=-x^2+1$ واضح است که $R_{f_1}\cup R_{f_2}=R_f$ از طرفی داریم:

$R_{f_1}: y_1=x^2+1\Rightarrow x^2=y_1-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{y_1-1}$

$y_1-1\ge 0\Rightarrow y_1\ge 1\Rightarrow R_{f_1}=\{x|x\ge 1\}$

$R_{f_2}: y_2=-x^2+1\Rightarrow x^2=1-y\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y}$

$1-y\ge 0\Rightarrow 1\ge y\Rightarrow R_{f_2}=\{x|x\le 1\}$

$R_{f_1}\cup R_{f_2}=\mathbb{R}$

تابع فوق یک‌به‌یک نیست زیرا اشتراک بردهای ضابطه‌ها تهی نیست و مثلاً $1\in(R_{f_1}\cap R_{f_2})$

$x^2+1=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$

$-x^2+1=1\Rightarrow -x^2=0\Rightarrow x=0$

$f(0)=0^2+1=1$ تابع یک به یک نیست.

$f(0)=-0^2+1=1$

۵ ـ

$(x+y-3)^2+(y+z-5)^4+(z+x-4)^6=0$

تساوی وقتی برقرار است که هر پرانتز مساوی صفر باشد

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y-3=0\\y+z-5=0\\z+x-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=3\\y+z=5\\z+x=4\end{cases}$$

گرچه این دستگاه به‌راحتی قابل حل است ولی اگر معادله (۲) را در (۲) و معادله (۳) را در (۳) ضرب کنیم سپس، سه معادله را جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x+y=3\\2y+2z=10\\3z+3x=12\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y+4x+5z=25$$

۶ ـ

$tg\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \Rightarrow tg\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-2}{1+2m}\right|=1$

$\Rightarrow \frac{m-2}{1+2m}=\pm 1\Rightarrow\begin{cases}1+2m=m-2\Rightarrow m=-3\\ m-2=-1-2m\Rightarrow m=\frac{1}{3}\end{cases}$

اگر $m=-3\Rightarrow\begin{cases}y=-3x+1\\y=2x-3\end{cases}\Rightarrow 2x-3=-3x+1\Rightarrow x=\frac{4}{5}$

اگر $m=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+1\\y=2x+\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow 2x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x+1\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

۷ ـ

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(100+140)=120n$

از طرفی مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب $(n-2)\times 180°$ است.

$\Rightarrow 120n=180(n-2)\Rightarrow 2n=3n-6\Rightarrow \boxed{n=6}$

پس n ضلعی مسأله شش ضلعی است.

۸ ـ با استفاده از اتحاد $\sin^2x=1-\cos^2x$، داریم:

$a\sin^2x-b\cos^2x=a(1-\cos^2x)-b\cos^2x$

$=a-a\cos^2x-b\cos^2x$

$=a-(a+b)\cos^2x=a-b$

$\Rightarrow(a+b)\cos^2x=b\Rightarrow\cos^2x=\frac{b}{a+b}\Rightarrow\frac{\cos^2x}{b}=\frac{1}{a+b}$ (۱)

به‌همین ترتیب داریم:

$\sin^2x=\frac{a}{a+b}\Rightarrow\frac{\sin^2x}{a}=\frac{1}{a+b}$ (۲)

از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$\frac{\cos^2x}{b}=\frac{\sin^2x}{a}=\frac{1}{a+b}$

$\Rightarrow\frac{\cos^4x}{b^2}=\frac{\sin^4x}{a^2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\lambda$

$\frac{\cos^4x}{b^2}=\lambda\Rightarrow\frac{\cos^8x}{b^4}=\lambda^2\Rightarrow\frac{\cos^8x}{b^3}=b\lambda^2$ (۳)

$\frac{\sin^4x}{a^2}=\lambda\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^4}=\lambda^2\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^3}=a\lambda^2$ (۴)

از جمع روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=(a+b)\lambda^2=(a+b)\times\frac{1}{(a+b)^4}$

$=\frac{1}{(a+b)^3}\Rightarrow\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$

۹ ـ با استفاده از تساوی $(\cos x)^0=1$ با فرض $x\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$ داریم:

(۱) $(\cos x)^{\sin^2x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=(\cos x)^0$

$\Rightarrow\sin^2x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(\sin x-1)(\sin x-\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow\sin x-1=0$ یا $\sin x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\sin x=1$ یا $\sin x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ یا $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

یا:

$\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$

(۲) $3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\pi$

$\Rightarrow \mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9}=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow tg(\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-5x+9})=tg\frac{\pi}{3}$

$\sqrt{x^2-5x+9}=\sqrt{3}\Rightarrow x^2-5x+9=3$

$\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=2$ یا $x=3$

حل مسائل ریاضیات سال سوم ریاضی

۱ ـ حل از آقای امیرحسین بسطامی دانش‌آموز چهارم ریاضی از تهران

فرض می‌کنیم:

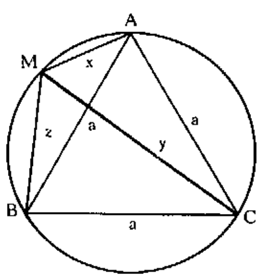
$AB=AC=BC=a\ ,\ MC=z\ ,\ MB=y\ ,\ MA=x$

باشد. بنا به‌رابطهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی MABC داریم:

$MB.AC=MA.BC+MC.AB\Rightarrow$

$y.a=x.a+z.a\Rightarrow$

$a.y=a(x+z)\Rightarrow y=x+z$ (۱)



با فرض فوق داریم:

$MA^4+MB^4+MC^4=x^4+y^4+z^4$ (۲)

در رابطهٔ (۲) به‌جای y از رابطهٔ (۱) مقدار می‌گذاریم خواهیم داشت:

$MA^4+MB^4+MC^4=x^4+z^4+(x+z)^4=$

$2(x^4+z^4+2x^3z+3x^2z^2+2xz^3)=$

$2(x^2+xz+z^2)^2$ (۳)

اما در مثلث AMC اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{AMC}=120°$ است پس:

$AC^2=AM^2+MC^2+MA.MC\Rightarrow a^2=x^2+z^2+xz$ (۴)

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$MA^4+MB^4+MC^4=2(a^2)^2=2a^4=Cte$

۲ ـ می‌خواهیم ثابت کنیم:

$r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=P^2$

داریم:

$r_a=\frac{S}{P-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}$

از آنجا خواهیم داشت:

$\frac{S}{P-a}.\frac{S}{P-b}+\frac{S}{P-a}.\frac{S}{P-c}+\frac{S}{P-b}.\frac{S}{P-c}=$

$\frac{S^2(P-c+P-b+P-a)}{(P-a)(P-b)(P-c)}=\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)(3P-2P)}{(P-a)(P-b)(P-c)}$

$=P\times P=P^2$

۳ ـ الف) داریم: $h_a=\frac{2S}{a}$ و $r=\frac{S}{P}$ از آنجا:

$h_a=3r\Rightarrow\frac{2S}{a}=\frac{3S}{P}\Rightarrow 2P=3a\Rightarrow a+b+c=3a$

اما بنا به‌فرض $b+c=2a$ پس:

$a+2a=3a\Rightarrow 3a=3a$

ب) داریم $h_a=\frac{2S}{a}$ و $r_a=\frac{S}{P-a}$ از آنجا:

$r_a=h_a\Rightarrow\frac{S}{P-a}=\frac{2S}{a}\Rightarrow\frac{1}{P-a}=\frac{2}{a}$

$\Rightarrow 2P-2a=a\Rightarrow a+b+c=3a\Rightarrow a+2a=3a\Rightarrow 3a=3a$

بنابراین روابط الف و ب برقرارند.

۴ ـ برای اثبات این که اعضای مجموعهٔ $\{\sin 2x,\ tgx,\ x^2\}$

وابستهٔ خطی‌اند کافی است ترکیبی خطی از آنها تشکیل داده که مساوی با صفر باشد و همهٔ ضرایب آن ترکیب خطی با هم صفر نباشند:

می‌دانیم $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ یا $\sin 2x = 2\operatorname{tg}x\cos^2 x$

$\Rightarrow \sin 2x - 2\cos^2 x\operatorname{tg}x + 0x^2 = \bar{0}$

و به‌ازای هر $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ضرایب ترکیب خطی فوق برای $\operatorname{tg}x$ و $\sin 2x$ همواره ناصفر بوده پس وابستهٔ خطی‌اند.

۵ ـ عمل * در جبر بول به‌صورت $a*b=(a+b).(a'+b')$ تعریف شده است. حال به‌اثبات قسمتهای مختلف مسأله می‌پردازیم:

الف) $a*a=(a+a).(a'+a')=a.a'=0$

ب) $a*1=(a+1).(a'+1')=1.(a'+0)=1.a'=a'$

ج) $a*a'=(a+a').(a'+a)=1.1=1$

د) $a*0=(a+0).(a'+0')=a.(a'+1)=a.1=a$

هـ) سمت چپ $=a.(b*c)=a.[(b+c).(b'+c')]$

$=a.(bb'+bc'+cb'+cc')=a.(bc'+cb')$

سمت راست $=(a.b)*(a.c)=[(ab)+(ac)].[(ab)'+(ac)']$

$=[(ab)+(ac)].[(a'+b')+(a'+c')]$

$=\underbrace{(aba')}_{0}+\underbrace{(abb')}_{0}+\underbrace{(aba')}_{0}+abc'+\underbrace{aca'}_{0}+acb'+\underbrace{aca'}_{0}+\underbrace{acc'}_{0}$

$=abc'+acb'=a.(bc'+cb')$

۶ ـ اگر بخواهیم مجموع دو رقم اول و چهارم عدد ۴ رقمی، ۱۰ باشد می‌توانیم از زوج مرتبهای مجموعهٔ زیر استفاده کنیم

$A=\{(6,4),(4,6),(3,7),(7,3),(8,2),(2,8),(9,1),(1,9)\}$

و اگر بخواهیم مجموع دو رقم وسط ۴ باشد، از زوج مرتبهای مجموعهٔ $B=\{(1,3),(3,1),(4,0),(0,4)\}$، می‌توان استفاده کرد (تکرار ارقام مجاز نیست).

برای استفاده از (۱،۹) چهار حالتِ استفاده از اعضای مجموعهٔ B امکان‌پذیر است و همین‌طور برای (۹،۱). برای زوج مرتبهای (۸،۲) و (۲،۸) نیز به‌همین صورت است، ولی برای استفاده از هر یک از زوج مرتبهای (۷،۳) یا (۳،۷) فقط دو عضو از B را می‌توان به‌کار برد یعنی (۴،۰) و (۰،۴) را می‌توان به‌کار گرفت و اگر به‌این ترتیب محاسبه شود در مجموع ۲۴ عدد ۴ رقمی با شرایط فوق می‌توان ساخت.

۷ ـ در بسط $(1+x)^n$، مجموع ضرایب توانهای فرد x مساوی $(\frac{2^n}{2})$ و مجموع ضرایب توانهای زوج x مساوی $(1-\frac{2^n}{2})$ است. در بسط $(1-x)^6$، مجموع ضرایب توانهای فرد x، $(-\frac{2^6}{2})$ یعنی (-32) و مجموع ضرایب توانهای زوج x مساوی $(1-\frac{2^6}{2})$ یعنی $(+31)$ است $(+31)-(-32)=63$ پس مجموع ضرایب توانهای زوج x، (۶۳) واحد از مجموع ضرایب توانهای فرد (x) بیشتر است.

۸ ـ

$f(x+y,x-y)=2\sin x\sin y$

$\Rightarrow f(x+y,x-y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)$

حال در سراسر رابطهٔ بالا به‌جای $(x+y)$، x و به‌جای $(x-y)$، y را قرار می‌دهیم.

$\Rightarrow f(x,y)=\cos y-\cos x$

$\Rightarrow f(\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{2\pi}{3}=0-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

۹ ـ

$y=x^3+mx^2-4$

$y'=3x^2+2mx=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2m}{3} \end{cases}$

$x=0$ نمی‌تواند طول ماکزیمم باشد زیرا y آن (-4) است در صورتی که y ماکزیمم صفر است. پس $x=-\frac{2m}{3}$ طول ماکزیمم است و عرض آن صفر است.

$\Rightarrow M \left| \begin{matrix} -\frac{2m}{3} \\ 0 \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{در تابع}} 0=-\frac{8m^3}{27}+\frac{4m^3}{9}-4 \Rightarrow -8m^3+12m^3$

$=4\times 27 \Rightarrow 4m^3=4\times 27 \Rightarrow m^3=27 \Rightarrow \boxed{m=3}$

۱۰ ـ

۱) $7\cos^2 x+5\sin^2 x=2\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 7\cos^2 x+3\sin^2 x-\sin x\cos x=\frac{9}{2}$

دو طرف تساوی را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحاد $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$7+3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x=\frac{9}{2}(1+\operatorname{tg}^2 x) \Rightarrow \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x-5=0 \Rightarrow (3\operatorname{tg}x+5)(\operatorname{tg}x-1)=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=1$ یا $\operatorname{tg}x=-\frac{5}{3}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ یا $x=k\pi+\operatorname{Arctg}(-\frac{5}{3})$

۲) $3\sin 2x-3\sqrt{3}\cos 2x=6$

با استفاده از اتحادهای $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ و $\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. خواهیم داشت:

$3(\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x})-3\sqrt{3}(\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x})=6$

دو طرف تساوی را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم:

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}(1-\operatorname{tg}^2 x)=2(1+\operatorname{tg}^2 x)$

$\Rightarrow 2\operatorname{tg}x-\sqrt{3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x=2+2\operatorname{tg}^2 x$

$(2-\sqrt{3})\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+2+\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=\frac{1\pm\sqrt{1-(4-3)}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{5\pi}{12}}$

۳) $2\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})+\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{12}-x)=2$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})-\operatorname{cotg}(x-\frac{\pi}{12})=2$

دو طرف تساوی را در $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})$ ضرب می‌کنیم:

$3\operatorname{tg}^2(x-\frac{\pi}{12})-1=2\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})$

$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2(x-\frac{\pi}{12})-2\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})-1=0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=\frac{1\pm 2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=1$

یا $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{12})=-\frac{1}{3} \Rightarrow x-\frac{\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{4}$

یا $x-\frac{\pi}{12}=k\pi+\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{3})$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$ یا $x=k\pi+\frac{\pi}{12}+\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{3})$

۱۱ ـ

$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \end{cases}$

$\frac{\cos x}{\cos y}=2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=$

$\frac{2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{-(\sqrt{3}-1)}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=1$

$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}, y=k\pi+\frac{\pi}{12}$

۱۲ ـ با استفاده از تساویهای $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$، داریم:

$a\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=(b-c)\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow 2R\sin\hat{A}\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=2R(\sin\hat{B}-\sin\hat{C})\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \sin\hat{A}\sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=2\sin\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})[\sin\hat{A}-2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}]=0$

$\Rightarrow \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})=0$ یا $\sin\hat{A}=2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}$

با استفاده از تساوی $\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\cos\frac{\hat{A}}{2}$، خواهیم داشت:

$\sin\hat{A}=2\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \Rightarrow \sin\hat{A}=\sin(\hat{B}+\hat{C})$

$\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$ یا $\hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{C})$ (مثلث غیرمشخص)

$\Rightarrow \boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi}$

۱۳ ـ

```
DECLARE FUNCTION FACT (N)
DECLARE FUNCTION EXPAND (C1, N, I)
CLS
DO
  INPUT "Enter a number for power N :"; N
LOOP UNTIL (INT(N) = N AND SGN(N) = 1)
PRINT "(x-y+z)^"; N; "=";
FOR I = 0 TO N
   C1 = FACT(N) / (FACT(I) * FACT(N - I))
   CAL = EXPAND(C1, N, I)
NEXT
END


FUNCTION EXPAND (C1, N, I)
 IF N = I THEN
   PRINT "Z^"; I
   EXIT FUNCTION
 END IF
 FOR J = 0 TO N - I
  C2 = FACT(N - I) / (FACT(J) * FACT(N - I - J))
  IF N - I - J = 0 THEN
    IF I = 0 THEN
      IF C1 * C2 = 1 THEN
        PRINT "y^"; J; "+";
      ELSE
        PRINT C1 * C2; "y^"; J; "+";
      END IF
    ELSE
     IF C1 * C2 = 1 THEN
       PRINT "y^"; J; "Z^"; I; "+";
     ELSE
       PRINT C1 * C2; "y^"; J; "Z^"; I; "+";
     END IF
    END IF
   ELSEIF J = 0 THEN
    IF I = 0 THEN
     IF C1 * C2 = 1 THEN
       PRINT "X^"; N - I - J; "
     ELSE
       PRINT C1 * C2; "X^"; N - I - J; "+";
     END IF
    ELSE
```

```
      IF C1 * C2 = 1 THEN
        PRINT "X^"; N - I - J; "Z^"; I; "+";
      ELSE
        PRINT C1 * C2; "X^"; N - I - J; "Z^"; I; "+";
      END IF
    END IF
    ELSEIF I = 0 THEN
     IF C1 * C2 = 1 THEN
       PRINT "X^"; N - I - J; "Y^"; J; "+";
     ELSE
       PRINT C1 * C2; "X^"; N - I - J; "Y^"; J; "+";
     END IF
    ELSE
    IF C1 * C2 = 1 THEN
      PRINT "X^"; N - I - J; "Z^"; I; "+";
    ELSE
      PRINT C1 * C2; "X^"; N - I - J; "Y^"; J; "Z^"; I; "+";
    END IF
   END IF
  NEXT
END FUNCTION

FUNCTION FACT (N)

FUNCTION FACT (N)
  IF N = 0 THEN
     FACT = 1
     EXIT FUNCTION
  ELSE
     F = 1
     FOR I = 1 TO N
       F = F * I
     NEXT
     FACT = F
  END IF
END FUNCTION
```

منطق این برنامه، بر این اصل استوار است که در بسط سه جمله‌ای :

$$(x+y+z)^n = [(x+y)+z]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x+y)^{n-i} \cdot z^i$$

است که در آن، c1 ضریب هر جمله از بسط $[(x+y)+z]^n$، c2 ضریب هر جمله از بسط $(x+y)^n$ و c1 * c2 ضریب نهایی هر جمله از بسط $(x+y+z)^n$ است.

حل مسائل ریاضیات سال چهارم ریاضی

۱ ـ بردار $(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})$ را $\vec{w}$ می‌نامیم و تصاویر بردار $\vec{u}=\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$ را که بردار یکه در راستای $\vec{w}$ است پیدا می‌کنیم.

$\vec{a}(-1,2,3)\Rightarrow 2\vec{a}(-2,4,6),\vec{b}(3,0,-2)\Rightarrow 2\vec{b}(6,0,-4)$

$\Rightarrow(2\vec{a}-3\vec{b})(-11,4,12),2\vec{b}(6,0,-4)\Rightarrow\vec{a}+2\vec{b}(5,2,1)$

$\Rightarrow\vec{w}=(2\vec{a}-3\vec{b})\wedge(\vec{a}+2\vec{b})(-28,49,-42)$

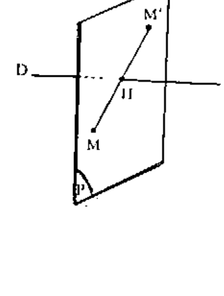
$\Rightarrow|\vec{w}|=\sqrt{784+2401+1764}=\sqrt{4949}=7\sqrt{101}$

$\Rightarrow\vec{u}=\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}\left(-\dfrac{28}{7\sqrt{101}},\dfrac{49}{7\sqrt{101}},\dfrac{-42}{7\sqrt{101}}\right)$

$\Rightarrow\vec{u}\left(\dfrac{-4\sqrt{101}}{101},\dfrac{7\sqrt{101}}{101},\dfrac{-6\sqrt{101}}{101}\right)$

۲ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را که از نقطه M بر خط D عمود می‌شود می‌نویسیم و نقطه تقاطع آن را با صفحهٔ P نقطهٔ H می‌نامیم، سپس مختصات نقطهٔ M′ قرینهٔ نقطه M نسبت به‌نقطهٔ H را به‌دست می‌آوریم.

$$D:\begin{cases}x-y-4z+12=0\Rightarrow\vec{v_1}(1,-1,-4)\\2x+y-2z+3=0\Rightarrow\vec{v_2}(2,1,-2)\end{cases}$$



بردار نرمال صفحه P و بردار هادی خط D $\Rightarrow\vec{V_D}=\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}(6,-6,3)$

$M(4,1,6)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Rightarrow6(x-4)-6(y-1)+3(z-6)=0$

$6x-6y+3z-36=0$

$\Rightarrow2x-2y+z-12=0$ معادلهٔ صفحهٔ P

$$\begin{cases}2x-2y+z-12=0\\x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-6z+15=0\\6x-3z-6=0\end{cases}$$

$\Rightarrow x=3,z=4\Rightarrow y=-1\Rightarrow H(3,-1,4)$

$$\left.\begin{array}{l}x_M+x_{M'}=2x_H\Rightarrow4+x_{M'}=6\Rightarrow x_{M'}=2\\y_M+y_{M'}=2y_H\Rightarrow1+y_{M'}=-2\Rightarrow y_{M'}=-3\\z_M+z_{M'}=2z_H\Rightarrow6+z_{M'}=8\Rightarrow z_{M'}=2\end{array}\right\}\Rightarrow M'\begin{vmatrix}2\\-3\\2\end{vmatrix}$$

۳ ـ می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ از خط $D:\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{R}$ از دستور $M_1H=\dfrac{|\overrightarrow{M_1A}\wedge\vec{V}|}{|\vec{V}|}$ محاسبه می‌شود که در آن A نقطه‌ای دلخواه از خط D و $\vec{V}$ بردار هادی این خط است (صفحهٔ ۵۸ برهان ۱۴). پس برای یافتن معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یکی از نقاط این مکان هندسی یعنی نقطه‌ای باشد، که از خط D به‌فاصلهٔ ثابت ۴ واقع است.

در این صورت داریم:

$$D:\begin{cases}x=t-1\\y=2t+2\\z=-t-2\end{cases}\Rightarrow\vec{V_D}\begin{vmatrix}1\\2\\-1\end{vmatrix},\ t=0\Rightarrow$$

$$A\begin{vmatrix}x=-1\\y=2\\z=-2\end{vmatrix},\ M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{MA}\begin{vmatrix}x+1\\y-2\\z+2\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$\overrightarrow{MA}\wedge\vec{V}(-y-2z-1,x+z+3,2x-y+5)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{V}|=$

$\sqrt{(-y-2z-1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2}$

$|\vec{V}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$, $MH=4\Rightarrow$

$4=\dfrac{\sqrt{(+y+2z+1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2}}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow(y+2z+1)^2+(x+z+3)^2+(2x-y+5)^2=96$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده که یک رویهٔ استوانه‌ای دوار است.

۴ ـ طبق فرض داریم، $p*q\equiv(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ در این صورت قسمتهای مختلف مسأله را ثابت می‌کنیم:

الف) $p*\sim p\equiv(p\vee\sim p)\wedge(\sim p\vee\sim(\sim p))\equiv T\wedge(\sim p\vee p)$

$\equiv T\wedge T\equiv T$

$p*p\equiv(p\vee p)\wedge(\sim p\vee\sim p)\equiv p\wedge\sim p\equiv F$

$p*F\equiv(p\vee F)\wedge(\sim p\vee T)\equiv p\wedge T\equiv p$

ب) سمت چپ $\equiv p\wedge(q*r)\equiv p\wedge[(q\vee r)\wedge(\sim q\vee\sim r)]$

$\equiv p\wedge[\underbrace{(q\wedge\sim q)}_{F}\vee(r\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim r)\vee\underbrace{(r\wedge\sim r)}_{F}]$

$\equiv p\wedge[(r\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim r)]$

سمت راست $\equiv(p\wedge q)*(p\wedge r)\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$

$\wedge[(\sim p\vee\sim q)\vee(\sim p\vee\sim r)]\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$

$\wedge(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\equiv[\overbrace{(p\wedge q)\wedge\sim p}^{F}]\vee[\overbrace{(p\wedge q)\wedge\sim q}^{F}]$

$\vee[(p\wedge q)\wedge\sim r]\vee[\overbrace{(p\wedge r)\wedge\sim p}^{F}]\vee[(p\wedge r)\wedge\sim q]$

$\vee[\underbrace{(p\wedge r)\wedge\sim r}_{F}]\equiv[p\wedge(q\wedge\sim r)]\vee[p\wedge(r\wedge\sim q)]$

سمت چپ $\equiv p\wedge[(q\wedge\sim r)\vee(r\wedge\sim q)]\equiv$

۵ ـ طبق فرض داریم: $a\overset{m}{\equiv}b$ ، $a\overset{n}{\equiv}c$ می‌خواهیم ثابت کنیم $b\overset{(m,n)}{\equiv}c$

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a-b=mk\Rightarrow a=mk+b\\a\overset{n}{\equiv}c\Rightarrow a-c=nk'\Rightarrow a=nk'+c\end{array}\right\}\Rightarrow mk+b=nk'+c$$

$\Rightarrow b-c=nk'-mk$ (1)

از طرفی اگر فرض کنیم $(m,n)=d$ در این صورت خواهیم داشت:

$$(m,n)=d\ \begin{cases}d|m\Rightarrow d|mk\\d|n\Rightarrow d|nk'\end{cases}\Rightarrow d|nk'-mk$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}d|b-c\Rightarrow b\overset{d}{\equiv}c$

۶ ـ بدون بسط و فقط با استفاده از خواص دترمینان داریم:

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\b&0&0&a\\0&b&a&0\end{vmatrix}\overset{\text{سطر ۲ + سطر ۳}}{=}\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a+b&0&0&a+b\\b&0&0&a\\0&b&a&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ستون ۲ + ستون ۳}}{=}\begin{vmatrix}0&a+b&b&0\\a+b&0&0&a+b\\b&0&0&a\\0&a+b&a&0\end{vmatrix}=(a+b)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&1\\b&0&0&a\\0&1&a&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{قرینه ستون ۱ + ستون ۴}}{\overset{\text{قرینه سطر ۱ + سطر ۴}}{=}}(a+b)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\b&0&0&a-b\\0&0&a-b&0\end{vmatrix}=(a+b)^2(a-b)^2$$

$$\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\b&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

b ـ برابر ستون ۴ را به ستون اول.

جای دو ستون اول و دوم تعویض شود.

$$=(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}0&1&b&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

جای دو ستون سوم و چهارم تعویض شود.

$$=-(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}1&0&b&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$=+(a^2-b^2)^2\begin{vmatrix}1&0&0&b\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2$$

۷ ـ

$-\sin^2\pi x\geq0\Rightarrow\sin\pi x=0\Rightarrow\pi x=k\pi\Rightarrow x=k$

چون در مثلثات $K\in Z$ پس دامنه این رادیکال یعنی Z، $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ می‌باشد.

اگر $x\in z\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2}-4x+4+0=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

دامنه رادیکال بزرگ هم z را می‌پذیرد پس $D_f=Z$

اما قیانه معادله تابع چنین است:

$f(x)=\sqrt{x^2}-4x+4+0-\sqrt{0}\Rightarrow f(x)=|x-2|$

چون $x\in z$ و قدرمطلقها مثبت یا صفرند پس برد تابع: $Z^+\cup\{0\}$

۸ ـ $a>0$،

$x^4+y^2=a^2x^2\Rightarrow y^2=a^2x^2-x^4$

$\Rightarrow y^2=x^2(a^2-x^2)\Rightarrow y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$

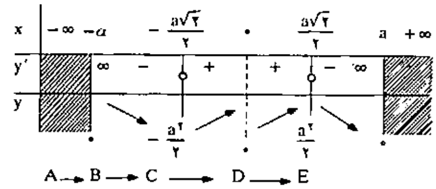
باید منحنی به‌معادلهٔ $y=x\sqrt{a^2-x^2}$ را رسم کنیم سپس قرینه شکل را

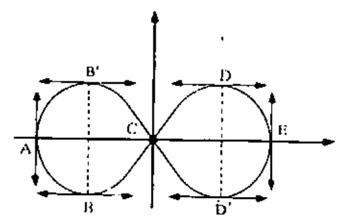
نسبت به محور xها رسم کنیم.

$a^2-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq a^2\Rightarrow -a\leq x\leq a\Rightarrow D_f=[-a,a]$

$y'=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\times x\Rightarrow y'=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=0\Rightarrow$

$x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$





۹ ـ

$$I=\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}\ ,\ \cos x$$

cos x را در مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int\frac{dx}{\frac{\cos^2 x}{\cos x}\sqrt{\cos 2x}}$$

حال $\cos x$ مخرج را به‌داخل رادیکال می‌بریم:

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}}}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}}$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}=\int\frac{(1+tg^2 x)dx}{\sqrt{1-tg^2 x}}$$

$u=tgx\Rightarrow du=(1+tg^2 x)dx$

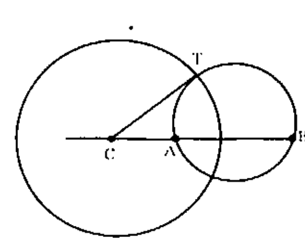
$$\Rightarrow I=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=Arcsin u+C=Arcsin(tgx)+C$$

❑ حل مسائل ریاضیات سال دوم تجربی

۱ ـ بنا به‌رابطه‌های طولی در دایره داریم:

$CT^2=CA.CB$ اما $CA.CB$

مقدار ثابتی است زیرا نقاط A و B و C ثابت می‌باشند. پس CT^2 و از آنجا CT مقدار ثابتی می‌باشد که چون نقطهٔ C ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ T دایره‌ای به‌مرکز C و به‌شعاع $R=\sqrt{CA.CB}$ است.



۲ ـ بنا به‌رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$AH^2=BH.CH$ از آنجا:

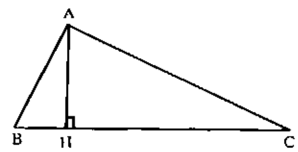
$(m\sqrt{2})^2=(m-1)(2m+3)\Rightarrow 2m^2=2m^2+m-3\Rightarrow m=3\Rightarrow$

$AH=3\sqrt{2}\ ,\ BH=3-1=2\ ,\ CH=2m+3=6+3=9\Rightarrow$

$BC=11\ ,\ AB^2=AH^2+BH^2=18+4=22\Rightarrow AB=\sqrt{22},$

$AC^2=AH^2+CH^2=18+81=99\Rightarrow AC=3\sqrt{11}$

مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{22}\times 3\sqrt{11}=\frac{33\sqrt{2}}{2}$



۳ ـ

$2x^3-3x^2y-8x-4y+y^3=2x^3+x^2y-8x-4y+y^3-4x^2y$

$=x^2(2x+y)-4(2x+y)+y(y^2-4x^2)$

$=(2x+y)(x^2-4)+y(y-2x)(y+2x)$

$=(2x+y)(x^2-4+y^2-2xy)$

$=(2x+y)[(x-y)^2-4]$

$=(2x+y)(x-y-2)(x-y+2)$

۴ ـ

$\frac{mx-1}{2x-3}=mx-2\Rightarrow mx-1=(2x-3)(mx-2)$

$\Rightarrow mx-1=2mx^2-3mx-4x+6$

$\Rightarrow 2mx^2-4(m+1)x+7=0$

$\Delta'_x=4(m+1)^2-14m=4m^2-6m+4$

$\Delta'_m=9-16=-7<0$

چون مبین سه‌جمله‌ای Δ'_x منفی است، پس علامت سه‌جمله‌ای موافق علامت $a=4$ و مثبت است:

$\forall m\in IR\ ,\ 4m^2-6m+4>0$

بنابراین به‌ازای هر $m\in IR$ مبین معادله (Δ'_x) همواره مثبت است و درنتیجه معادله به‌ازای هر عدد حقیقی غیر صفر m دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۵ ـ

$2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{n-1}=65535$

$\frac{2^n-1}{2-1}=65535$

$2^n-1=65535\Rightarrow 2^n=65536$

$\Rightarrow 2^n=2^{16}\Rightarrow \boxed{n=16}$

۶ ـ

$A=\log^2 5+\log^2 8+2\log 5\log 8-4\log 4$

$=(\log 5+\log 8)^2-4\log 4$

$=(\log 5+3\log 2)^2-8\log 2$

$=\log^2 5+9\log^2 2+6\log 5\log 2-8\log 2$

$=\log^2 5+\log^2 2-2\log 5\log 2+8\log^2 2+8\log 5\log 2-8\log 2$

$=(\log 5-\log 2)^2+8(\log^2 2+\log 5\log 2-\log 2)$

$=(\log\frac{10}{2}-\log 2)^2+8[\log 2(\log 2+\log 5)-\log 2]$

$=(1-2\log 2)^2+8(\log 2\log 10-\log 2)$

$=(1-\log 4)^2+8(\log 2-\log 2)$

$=(1-\log 4)^2\Rightarrow \boxed{A=(1-\log 4)^2}$

۷ ـ

$\log_a^x=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_x^a=2\qquad(1)$

$\log_b^x=\frac{1}{3}\Rightarrow\log_x^b=3\qquad(2)$

$\log_c^x=\frac{1}{4}\Rightarrow\log_x^c=4\qquad(3)$

از جمع تساویهای (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$\log_x^a+\log_x^b+\log_x^c=9\Rightarrow\log_x^{abc}=9$

$\log_x^x=1\Rightarrow\log_x^{abc}+\log_x^x=9+1\Rightarrow\boxed{\log_x^{abcx}=10}$

۸ ـ

$$A=\frac{1+\sqrt{3}tg10^\circ}{\sqrt{3}-tg10^\circ}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}tg10^\circ}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-tg10^\circ}{\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+tg10^\circ}{1-\frac{tg10^\circ}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+tg10^\circ}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tg10^\circ}=$$

$$\frac{tg30^\circ+tg10^\circ}{1-tg30^\circ tg10^\circ}=tg(30^\circ+10^\circ)$$

$\Rightarrow\boxed{A=tg40^\circ}\simeq 0/839$

۹ ـ با استفاده از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x}$، داریم:

$2^{\sin^2 x}+2^{\frac{1}{1+tg^2 x}}=3$

$\Rightarrow 2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3\Rightarrow 2^{1-\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$

$\Rightarrow\frac{2}{2^{\cos^2 x}}+2^{\cos^2 x}=3$

با فرض $y=2^{\cos^2 x}$، خواهیم داشت:

$\frac{2}{y}+y=3\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow(y-1)(y-2)=0$

$\Rightarrow y=1$ یا $y=2\Rightarrow 2^{\cos^2 x}=1$ یا $2^{\cos^2 x}=2$

$\Rightarrow\cos^2 x=0$ یا $\cos^2 x=1\Rightarrow\cos x=0$ یا $\cos x=\pm 1$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ یا $x=2k\pi$ یا $x=2k\pi\pm\pi$

۱۰ ـ

با استفاده از اتحاد $tgx=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$، داریم:

$$tgx=\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 80^\circ}=$$

$$\frac{\sin 80^\circ}{1+\cos 80^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=tg40^\circ\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}\times\frac{\cos 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}=tg20^\circ$$

$\Rightarrow tgx=tg20^\circ\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{9}}$

❑ حل مسائل ریاضیات سال سوم تجربی

۱ ـ با شرایط داده شده در مسأله داریم:

$A(-1,0)\ .\ y=x^2+1\Rightarrow y'=2x\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=1$

$\Rightarrow B(0,1)\ .\ C(2,2)\Rightarrow$

مرکز ثقل مثلث G $\begin{cases}x=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-1+0+2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{0+1+2}{3}=1\end{cases}$

$\Rightarrow G=(\frac{1}{3}, 1)$

$$OG=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+1}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

اندازهٔ بردار مکان نقطهٔ G

۲ ـ نخست ثابت می‌کنیم که برای هر نقطهٔ O در صفحهٔ مثلث ABC همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=0 \qquad (1)$$

داریم:

$$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB}.(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=0$$

$\Rightarrow 0=0$

حال برای اثبات همرس بودن سه ارتفاع مثلث ABC ، دو ارتفاع 'BB و 'CC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم و از O به رأس A وصل می‌کنیم. داریم:

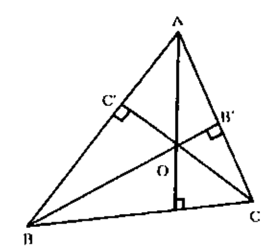
$$\overrightarrow{OB}\perp C\Rightarrow\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CA}=0 \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=0 \qquad (3)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}=0 \qquad (4)$$

از مقایسه این رابطه با رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$$



بنابراین ارتفاع رأس A نیز از نقطهٔ O می‌گذرد. پس سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

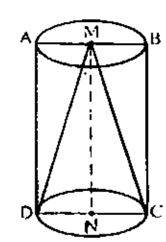
۳ ـ حجم حاصل از دوران مثلث ADM حول خط MN برابراست با تفاضل حجم استوانه به‌ارتفاع AD=۸ و شعاع قاعدهٔ $AM=\frac{4}{2}=2$ و مخروط به‌ارتفاع MN=۸ و شعاع قاعدهٔ DN=۲ بنابراین:

حجم استوانه $=\pi\times DN^2\times AD=\pi\times 4\times 8=32\pi$

حجم مخروط $=\frac{1}{3}\pi\times DN^2\times AD=\frac{1}{3}\pi\times 4\times 8=\frac{32\pi}{3}$

حجم حاصل از دوران مثلث AMD حول MN $=32\pi-\frac{32\pi}{3}$

$=\frac{64\pi}{3}$



در نتیجه حجم حاصل از دوران مثلث AMD حول خط MN دو برابر حجم حاصل از دوران مثلث MDN حول خط MN است. و این نشان می‌دهد که اگر یک استوانهٔ دوار و یک مخروط دوار شعاع قاعده‌شان برابر، و ارتفاعشان نیز برابر باشد. حجم مخروط، $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

۴ ـ دامنهٔ تابع:

$$f(x)=\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{4-4x^2}$$

$$D_f=\{x|3x^2-3\geq 0 \text{ و } 4-4x^2\geq 0\}=\{x|3x^2\geq 3 \text{ و } 4x^2\leq 4\}$$

$$=\{x|x^2\geq 1 \text{ و } x^2\leq 1\}=\{x|x^2=1\}=\{-1 \text{ و } 1\}$$

برد تابع:

$$f(-1)=0 \text{ و } f(1)=0 \Rightarrow R_f=\{0\}$$

۵ ـ مختصات نقاط تقاطع از دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ y=\sin x+2 \end{cases} \Rightarrow \sin x+2=\frac{3}{2}\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\Rightarrow k=0:\ A\left|\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{6} \\ y=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

(A مختصات یکی از نقاط تقاطع می‌باشد.)

$$y'=\cos x\Rightarrow m=\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } m_A=0$$

$$\Rightarrow tg\omega=\left|\frac{m_A-m}{1+m_A.m}\right|=\left|\frac{0-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+(0)(\frac{-\sqrt{3}}{2})}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega=Arctg\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

۶ ـ اگر نقطهٔ مفروض B(x,y)، نزدیکترین نقطهٔ منحنی موردنظر به‌نقطهٔ A باشد، در این صورت داریم:

$$V=AB=\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2},\ y^2=x^2-2$$

$$\Rightarrow V=\sqrt{(3-x)^2+y^2}=\sqrt{9+x^2-6x+x^2-2}=\sqrt{2x^2-6x+7}$$

$$\Rightarrow V'=\frac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+7}}\Rightarrow V'=0\Rightarrow 4x-6=0$$

$$\Rightarrow 4x=6\Rightarrow x=\frac{3}{2}:\ y^2=(\frac{3}{2})^2-2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$$

پس مسأله دارای دو جواب است:

$$M_1\left|\begin{array}{l}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{array}\right. \quad \text{یا} \quad M_2\left|\begin{array}{l}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

ـ ۷

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3}{4x^2+6x}-\frac{3x^2}{3x+2}\right) \quad (\text{صورت مبهم } \infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+3}-\frac{3x^2}{3x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2(3x+2)-3x^2(2x+3)}{(2x+3)(3x+2)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-9x^2}{6x^2+13x+6}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^2}{x^2(6+\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2})}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{6+\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2}}\right)=-\frac{5}{6}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{Arctgx}{5x}\right)=\frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

با فرض Arc tgx=t یا x=tgt و با توجه به $\begin{cases}x\to 0\\ t\to 0\end{cases}$ ، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{Arctgx}{5x}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{5tgt}\right)=\frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{tgt}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\times 1=\frac{1}{5}$$

۸ ـ تابع f در $x_0=1$ پیوسته است، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{k-kx}{\sin(x-1)}\right)=-k\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{\sin(x-1)}\right)$$

با فرض t=x−۱ و با توجه به $\left|\begin{array}{l}x\to 1^-\\ t\to 0^-\end{array}\right.$ ؛ خواهیم داشت:

$$-k\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{\sin(x-1)}\right)=-k\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{t}{\sin t}\right)=-k\times 1=-k$$

$$f(1)=2\Rightarrow -k=2\Rightarrow \boxed{k=-2}$$

ـ ۹

$$1)\quad \sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

می‌دانیم:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}\Rightarrow\sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\sin\frac{C}{2} \text{ و} \qquad (2)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\text{طرف اول}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2})$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2)\quad \sin A+\sin B-\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\text{طرف اول}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$$

$$=2\cos\frac{C}{2}(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2})$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ـ ۱۰

$$1)\quad 4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})=1$$

$$\Rightarrow\frac{4}{2}|\cos(x+\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}|=1$$

$$\Rightarrow 2(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x)=1$$

$$\Rightarrow 2(\frac{1}{2}-\cos 2x)=1\Rightarrow\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$$

۲) $\cos 5x \cos 3x - \sin x \sin 3x = 1$

با استفاده از تساویهای زیر:

$$\cos 5x \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos(5x+3x) + \cos(5x-3x)] = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$$

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) - \cos(x+3x)] = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Rightarrow \cos 4x = 1$$

یا $\cos 4x = -\frac{3}{2}$

می‌دانیم تساوی $\cos 4x = -\frac{3}{2}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است. بنابراین:

$$\cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{K\pi}{2}}$$

۱۱ ـ با استفاده از اتحادهای زیر:

$$4\sin(60°-x)\sin x \sin(60°+x) = \sin 3x \qquad (1)$$

$$4\cos(60°-x)\cos x.\cos(60°+x) = \cos 3x \qquad (2)$$

خواهیم داشت:

$$P = \cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80°$$

$$= \cos 60°[\cos(60°-20°)\cos 20° \cos(60°+20°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{4}\cos(3\times 20°)] = \frac{1}{8}\cos 60° = \frac{1}{16} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{16}}$$

$$S = \sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$$

$$= \sin 60°[\sin(60°-20°)\sin 20° \sin(60°+20°)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{1}{4}\sin(3\times 20°)] = \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60°$$

$$= \frac{3}{16} \Rightarrow \boxed{S = \frac{3}{16}}$$

❑ حل مسائل ریاضیات چهارم تجربی

۱ ـ

$$\begin{cases} y = -x & \text{(نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم)} \\ 7x - 4y = 55 \end{cases} \Rightarrow 7x - 4(-x) = 55$$

$$\Rightarrow 11x = 55 \Rightarrow x = 5 \ , \ y = -5$$

$$\Rightarrow -5 = K(5) + 10 \Rightarrow 5K = -15 \Rightarrow \boxed{k = -3}$$

۲ ـ می‌دانیم برای رابطهٔ $f(x,y) = C$ داریم:

$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$ (f'_x مشتق نسبت x و f'_y مشتق نسبت y است)

بنابراین:

$$(y-2x)^2 = 2y - x + 1 \Rightarrow f(x,y) = (y-2x)^2 - 2y + x = 1$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2(-2)(y-2x)+1}{2(1)(y-2x)-2} = \frac{4y-8x-1}{2y-4x-2}$$

۳ ـ مختصات مرکز دایره‌ای به‌شعاع R که بر محورهای مختصات مماس است و از نقطهٔ $M(2و1)$ واقع در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات می‌گذرد، چنین است: $O'(R,R)$

همچنین معادلهٔ استاندارد دایره چنین است:

$O'(\alpha\beta)$ (مرکز دایره): $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ (R شعاع دایره)

بنابراین:

$$O'(R,R): (x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

و چون دایرهٔ موردنظر از نقطهٔ $M(2 و 1)$ می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$M(1 و 2): (1-R)^2 + (2-R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$\Rightarrow (R-1)(R-5) = 0 \Rightarrow R = 1$ یا $R = 5$

پس مسأله دارای دو جواب است:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ یا $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

۴ ـ

$$y = \frac{7}{x^3} + 2x\sqrt{3x^2+4} = 7x^{-3} + \frac{1}{3}(6x)(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{7x^{-2}}{-2} + \frac{1}{3}\frac{(3x^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{7}{2x^2} + \frac{2}{9}(3x^2+4)\sqrt{3x^2+4} + C$$

۵ ـ می‌دانیم $V_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y^2 dx = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3\cos^2 x - 3\cos x)dx$

$$= 3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^2 x - \cos x)dx = 3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{1+\cos 2x}{2} - \cos x)dx$$

$$= 3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} - \cos x\right)dx = 3\pi\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} - \sin x\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 3\pi\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi}{4} - \sin\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 3\pi(\frac{\pi}{4}+1) \Rightarrow \boxed{V_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3\pi(\frac{\pi}{4}+1)}$$

۶ ـ

۱) $\cot g(x - \frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = 2 \Rightarrow$

$$\cot g(x - \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2$$

دو طرف معادله را در $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ ضرب می‌کنیم:

$$1 + \operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{4}) - 2\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) - 1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

۲) $\sqrt{6}(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}\sin 2x = 2\sqrt{3}$

با فرض $y = \sin x + \cos x$، داریم:

$$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = y^2 - 1$$

بنابراین:

$$\sqrt{6}y + \sqrt{3}(y^2 - 1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y^2 + \sqrt{6}y - 3\sqrt{3} = 0$$

$\Rightarrow y^2 + \sqrt{2}y - 4 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ یا $y = -2\sqrt{2}$ (غ ق ق)

(زیرا: $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2K\pi + \frac{\pi}{4}}$$

۷ ـ با استفاده از رابطهٔ:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

و فرض مسأله:

$$a^2b + a^2c = b^3 + c^3 \Rightarrow a^2(b+c) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - bc + c^2$$

خواهیم داشت:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = b^2 - bc + c^2$$

$$\Rightarrow 2\cos\widehat{A} = 1 \Rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{A} = 60°}$$

$$b = 2, c = 1: a^2 = 2^2 - 2\times 1 + 1 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin 60°} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow 2R = 2 \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: سفره را لوله کرده، لیوان را به آرامی با قسمت لوله شده هل دهید.

جواب ۲: عقل سلیم می‌گوید اگر هر گلوله دارای شانس به خطا رفتن باشد، شانسی برای به خطا رفتن هر چهار گلوله وجود دارد. همچنین، هدف مورد بحث می‌تواند توسط یک، دو، سه، یا هر چهار گلوله مورد اصابت قرار گیرد.

لابلاس یادآوری می‌کند «با محاسبه تأیید کنید.» زیرا عقل سلیم، با هوشی چون هوش جواد نیز، گاهی آدمی را به اشتباه می‌اندازد. (کسی که اعلام کرد که در انداختن دو تاس احتمال *دوازده* درست به اندازهٔ احتمال *یازده* است، ریاضیدانی کمتر از لایب‌نیتز، یکی از به وجود آورندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، نبوده است!)

از آنجا که هر گلوله در نخوردن به هدف ۳ شانس در ۴ دارد، احتمال به هدف نخوردن هر چهار عبارت است از:

$$\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۸۱}{۲۵۶}$$

و احتمال اینکه تیری به هدف بخورد عبارت است از:

$$۱-\frac{۸۱}{۲۵۶}=\frac{۱۷۵}{۲۵۶}$$

(۱۷۵ شانس فوق شامل به هدف خوردنهای یک، دو، سه، و هر چهار گلوله است.)

جواب ۳: اگر میخی به دو میخ دیگر بسته شده باشد، بازیکنی که بعد به بازی می‌پردازد بازی را، با وصل کردن این میخها به هم، می‌برد. بنابراین، بازی، تا زمانی که حداقل دو میخ «آزاد» (یعنی، میخهایی که تنها به یک میخ دیگر وصل شده‌اند) موجودند، ادامه خواهد یافت. این وضعیت $\frac{n}{۲}$ حرکت، به ازای n ی که تعداد زوجی از میخها باشد، و $\frac{(n-۱)}{۲}$ حرکت، به ازای n فرد، خواهد داشت. بنابراین، بازیکن اوّل در صورتی که n بخشپذیر بر ۴ (یعنی $\frac{n}{۲}$ زوج) باشد یا در صورتی که n، چون بر ۴ تقسیم شود، باقی‌مانده ۱ ی داشته باشد، می‌برد. در صورتی که باقی‌ماندهٔ مزبور ۲ یا ۳ باشد، بازیکن دوم برنده است.

جواب ۴:

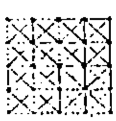
۱۶ مربع ۱×۱

۹ مربع ۲×۲

۴ مربع ۳×۳

۱ مربع ۴×۴

۹ مربع $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$

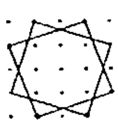


۱ مربع $۲\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}$

۸ مربع $\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}$



۲ مربع $\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}$



و در مجموع ۵۰ مربع می‌توان ساخت.

Borhan
Vol. 5 No. 3
Serial numbers: 17 Spring 1996

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. Limit — A. Ghandehari
2. Linear Transformations — H. R. Amiri
3. Aplication of Determinant — S. Jafari
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
5. The Story of "Lion and mouse" in Geometry — A. Sharafeddin
6. Exponent — S. M. R. Hashemi mosavi
7. Answers to letters.
8. Problems.
9. Simultaneously Compute of Series ... — M. Rahim
10. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
11. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
12. Proof of inequalities — M. A. Salahshoor
13. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
14. A brief history of mathematics magazins in Iran. — P. Shahriari
15. lines and orthogonal planes (Part Two) — H. R. Amiri
16. Contest problem
17. Graph (part one) — S. Akbarizadeh
18. Acquaintance with Famous Mathematicians — G. R. Yassipour
The Report of 26th Annual Iranian Mathematics Conferenc — F. Rashidzadeh
20. Radical — S. M. R. Hashemi mosavi

کد ۴۰۳/۱

کوشیار گیلی*

کیا ابوالحسن کوشیار بن لبان بن باشهری گیلانی

ریاضیدان و منجم ایرانی (در حدود ۳۳۰ ـ اوایل سدهٔ پنجم)

سوتر دورهٔ زندگانی کوشیار را تقریباً بین سالهای ۳۶۰ تا ۴۲۰ ذکر کرده و مؤلفان مغرب زمین از او تقلید کرده‌اند. امّا این تاریخ دقیق نیست. زیرا کوشیار در کتاب زیج خود مثال مولودی از سال ۳۳۲ یزدگردی، مطابق با ۳۵۲ـ۵۳ هجری قمری آورده است. پس وی این زیج را در سال ۳۵۳ نوشته و لابد در آن هنگام در حدود بیست تا سی سال داشته است.

آثار موجود ریاضی وی

۱ـ کتاب فی اصول حساب الهند

کتاب اصول حساب‌الهند کوشیار (خواهد آمد) از این جهت در تاریخ ریاضیات مهم و مورد توجه است که در بین کتابهای حسابی که از دورهٔ اسلامی به دست ما رسیده، قدیمترین کتابی است که در آن دستگاه شمار باارزش مکان تشریح شده و در آن ارقام هندی به کار رفته است. این کتاب از حیث تأثیری که در بسط مفاهیم و اصطلاحات ریاضی داشته نیز مهم است.

این کتاب در دو مقاله است. در مقالهٔ اول آن مؤلف چهار عمل اصلی حساب و استخراج جذر را در دستگاه شمار اعشاری شرح داده و در مقالهٔ دوم کسرها را در دستگاه شمار شصتگانی و با به کاربردن ارقام هندی توضیح داده است.

۲ـ عیون‌الاصول فی‌الحساب

یک نسخهٔ نفیس از کتاب کوشیار باعنوان عیون‌الاصول فی‌الحساب در جزو مجموعه‌ای (به شمارهٔ ۲۰۹۲/۴) در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است.

این کتاب بسیار فشرده و مختصر و در دوازده باب است و ترجمهٔ فارسی عنوان بابهای آن به شرح زیر می‌باشد:

باب اول در صورتهای حروف، باب دوم در افزودن عدد بر عدد، باب سوم در کاستن عدد از عدد، باب چهارم در ضرب، باب پنجم در حاصل‌ضرب، باب ششم در تقسیم، باب هفتم در حاصل‌قسمت، باب هشتم در جذر، باب نهم در حاصل جذر، باب دهم در کعب، باب یازدهم در حاصل کعب، باب دوازدهم در میزان.

۳ـ زیج جامع

بیرونی در کتاب افرادالمقال فی امرالظلال به این زیج اشاره کرده است. عکس نسخهٔ خطی این زیج به شمارهٔ ۵۱۰ تا ۵۱۳ (چهار جزء) و فیلم آن نیز در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است. علاوه براین نسخه‌های خطی آن در برلین و استانبول نیز هست.

دو مقالهٔ اول و دوم این زیج مربوط به نجوم عملی و دو مقالهٔ سوم و چهارم آن در نجوم نظری است. در آخر مقالهٔ سوم یک باب مفرد هست با عنوان «جوامع علم الهیئه».

---

* از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، نشر دانشگاهی

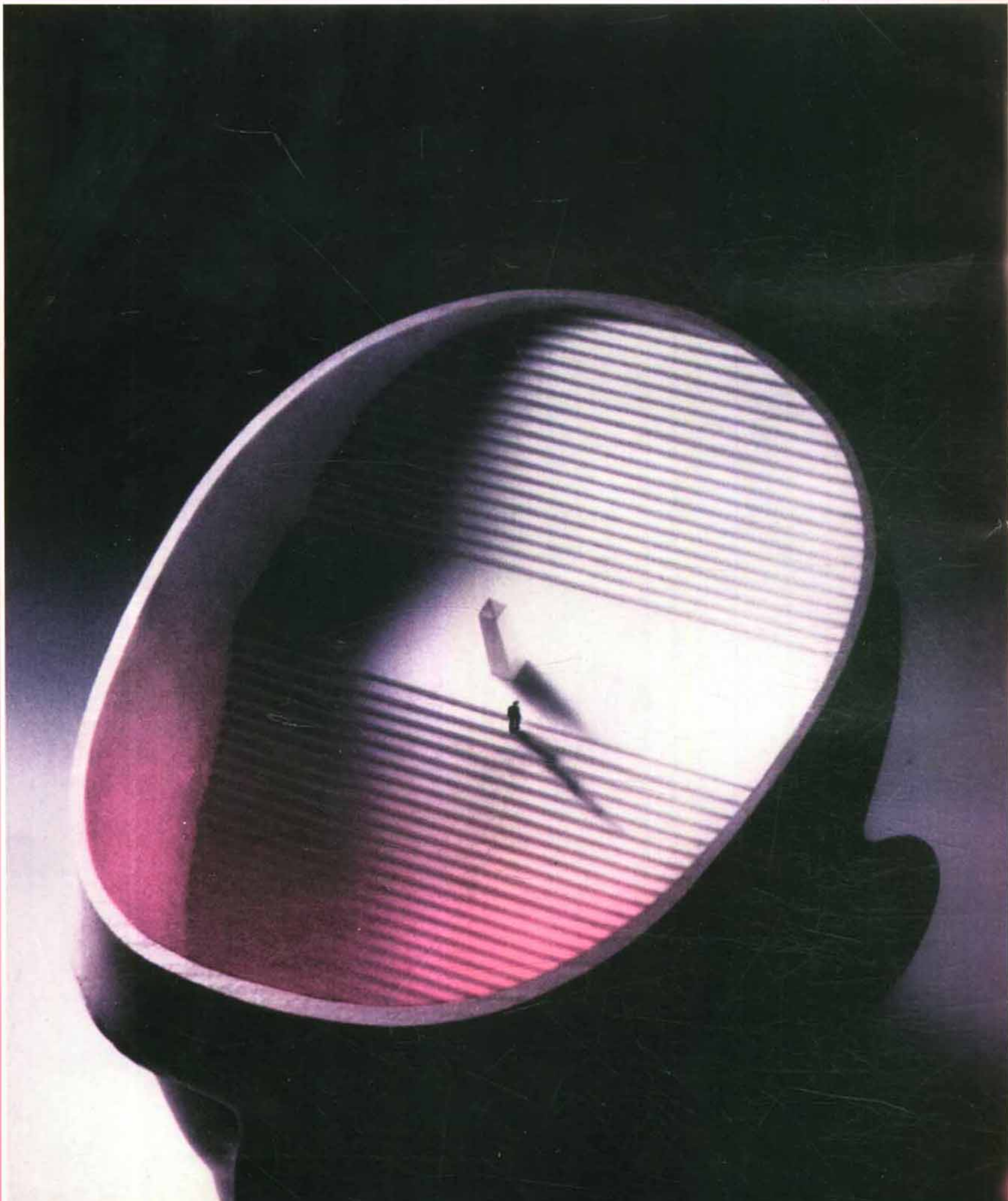
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۸

سال ششم، پاییز ۱۳۷۵ شماره اول، بهاء ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه، وابسته به وزارت آموزش و پرورش

❑ صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

❑ سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

❑ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❑ طراح و صفحه‌آرا: احمد پیرحسینلو ❑ رسّام: سیّدجعفر طرازانی ❑ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

◆ حرف اوّل ۱
◆ شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۸)/ پرویز شهریاری ۲
◆ رسم نمودار تابع 'f از روی نمودار تابع f / احمد قندهاری ۹
◆ آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۴)/ حمیدرضاامیری ۱۷
◆ رادیکال (قسمت دوّم)/ سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی ۱۹
◆ در اظهارنظر شتاب نکنیم/ احمد شرف‌الدّین ۲۳
◆ ریاضیات گسسته (قسمت سوّم)/ غلامرضا یاسی‌پور ۲۵
◆ تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۱۷) ۲۹
◆ تجزیه چند جمله‌ایها از طریق ریشه‌یابی/ رضا پیکر ۳۲
◆ در پیرامون منظومه شمسی/ حسن نصیرنیا ۳۷
◆ مبانی‌کامپیوتروبرنامه‌نویسی‌با BASIC(۷)/ حسین‌ابراهیم‌زاده‌قُلزم ۳۸
◆ مکان هندسی (قسمت هشتم)/ محمدهاشم رستمی ۴۲
◆ نکته‌ای هندسی برای ساختن جویها/ احمد شرف‌الدین ۴۸
◆ معرفی یک‌اتحادمثلثاتی‌وکاربردهایی‌ازآن/ حسین حیدری‌دلوئی ۴۹
◆ مقالات‌کوتاه‌ازمجلات‌ریاضی‌معتبر جهان (۱۵)/غلامرضایاسی‌پور ۵۲
◆ کاربرد دترمینان (قسمت دوّم)/ سیامک جعفری ۵۵
◆ طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۶)/ غلامرضایاسی‌پور ۶۱
◆ مشاهیر ریاضی جهان ۶۴
◆ ریاضیات و کاربردهای آن/ پرویز امینی ۶۶
◆ گراف (قسمت دوّم)/ سیمین اکبری‌زاده ۶۹
◆ معرفی کتاب ۷۴
◆ جواب نامه‌ها ۷۶
◆ حل مسائل مسابقه‌ای برهانهای ۱۵ و ۱۶ ۷۸
◆ مسائل برای حل ۸۱
◆ جوابهای تفریح اندیشه ۸۶

■ سال ششم، پاییز ۱۳۷۵ شمارهٔ اوّل

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل‌مسابقه‌ای (برای‌دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح‌معماهای‌ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.** ■ **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**

■ **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.** ■ **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹
صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

دوگوهر گرانبها

این بار **حرف اول** را به اساسی‌ترین و مهمترین فرع از فروع دین، یعنی «**امربه معروف و نهی از منکر**» اختصاص می‌دهیم، به‌راستی‌که این دو وظیفهٔ مهمّ **حرف اول** را می‌زنند و جالب است بدانید که قبولی نماز و دیگر عبادات درگرو انجام این دو فریضهٔ دینی است. پیامبر اکرم(ص) فرمودند: «امربه معروف و نهی از منکر، پس از ایمان به خدا و صلهٔ رحم، از همهٔ کارها برتر است.»

امّا انجام این دو امر مهمّ چه‌وقت جایز و واجب می‌شود و ترک آن موجبِ چه عواقبی است؟

عزیزان دانش‌آموز، سازندگانِ ایران اسلامی، آیا به نظر شما بی‌بندوباری می‌تواند به عنوان آزادی مطرح شود؟ و آیا اصولاً شخص بی‌بند و بار می‌تواند به حکم این‌که دلش می‌خواهد آزاد باشد، به آزادی دیگران لطمه بزند؟ یک نفر آزاد باشد و چند نفر ـ غیر از خودش ـ گرفتارِ عواقبِ بَد آزادیِ او؟ این چه اصلی است و تابعِ چه منطقی است؟

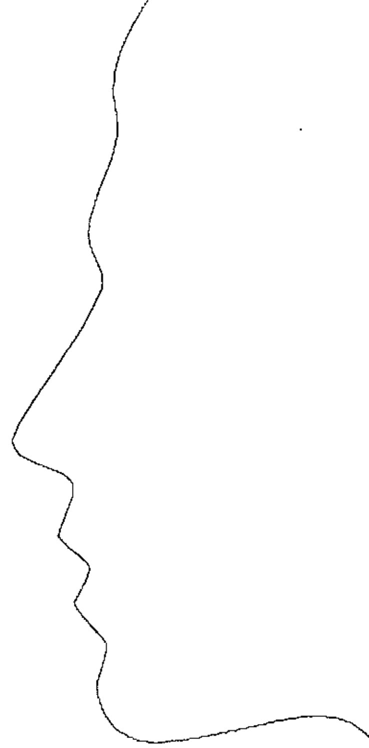
وقتی تعدادی از زنان و مردان در جامعهٔ اسلامی، شؤونات اسلامی را رعایت نمی‌کنند و با هر وضعیتی که دلشان بخواهد آرامش روحی و روانی مردم را به هم می‌زنند و علناً به اسلام و جامعه اسلامی دهن‌کجی می‌کنند، می‌توان ساکت بود؟ می‌توان سالم زندگی کرد؟ آیا این سلب آزادی از مسلمانان نیست که در کوچه و خیابان باید به‌خاطر آزادیِ دیگران در **قیدوبند** باشند؟

آیا می‌توان کلام امیرمؤمنان علی(ع) را نادیده گرفت که فرمودند: «کسی که نهی از منکر را با قلب و زبان و عمل ترک کند، چنین کسی مرده‌ای در میان زندگان است.» و آیا نباید هراس داشته‌باشیم که عواقب ترکِ امربه معروف و نهی‌ازمنکر و حتی بی‌تفاوتی نسبت به آن، جامعهٔ اسلامیِ عزیزمان راکه با خون شهیدانمان آبیاری شده به انحراف اخلاقی کشانده و تهاجم و شبیخون فرهنگی غرب پیروز شود!؟ بر همه مسلمانان واجب است که در هر مقام و جایگاهی که قرار دارند و با هر وسیله و ابزاری که می‌توانند ـ البته با رعایت شرایط دقیقِ اسلامیِ آن ـ به امربه معروف و نهی ازمنکر بپردازند تا مصداقِ این حدیث شریف از حضرت رسول‌اکرم(ص) قرار نگیریم که فرمودند: «هرگاه امت من (دو وظیفه) امربه معروف و نهی ازمنکر را به یکدیگر واگذار کنند، از طرف خداوند اعلام بلا می‌شود.»

عزیزان، پس بیایید امربه معروف و نهی ازمنکر را جدّی بگیریم که بنا به فرموده پیامبر عزیز(ص): «کسی که امربه معروف و نهی ازمنکر کند، جانشین و نمایندهٔ خدا در زمین و جانشین و نمایندهٔ رسول‌خدا و قرآن می‌باشد.»

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۸)



○ پرویز شهریاری

با همهٔ آن‌چه که دربارهٔ شکل و امکان فریب‌خوردن از آن گفتیم، شکل وسیلهٔ اصلی شناخت مسأله و پیدا کردن روش حل آن است. هیچ مسأله یا قانون ریاضی، هر قدر انتزاعی باشد، بدون نوعی تجسم عینی، قابل درک نیست ؛ و شکل، یکی از امکانهایی است که می‌تواند به عینی‌تر شدن مفهوم یک مسأله یا یک قانون ریاضی کمک کند. همهٔ دشواریها و گمراهیهایی که ممکن است ناشی از شکل باشد، در تجزیه و تحلیل نهایی منجر به این نکته می‌شود که شکل را درست رسم نکرده‌ایم و یا، به‌دلیل اشتباه چشم و اشتباه ناشی از ابزارهای رسم، نتوانسته‌ایم با دقت رسم کنیم. به همین مناسبت، وقتی از شکل برای حل مسأله‌ای یاری می‌گیریم، باید همیشه خود را در برابر سه پرسش قرار دهیم :

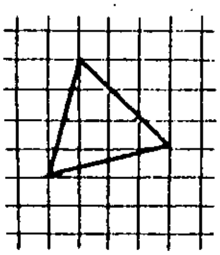
۱) آیا شکل را درست و، تا حد امکان، دقیق رسم کرده‌ایم؟

۲) آیا رابطهٔ بین عنصرها در شکل و بستگی ظاهری بین این عنصرها (که در دید نخست به ما تلقین می‌شود) در واقع وجود دارند و آیا با استدلال منطقی و براساس آگاهیهایی که از ریاضیات داریم، قابل اثبات هستند؟

۳) آیا نتیجه‌گیری ناشی از شکل، با تجربه و با عقل سلیم سازگار است؟

هیچ‌چیز بهتر از مثال، نمی‌تواند مطلب را روشن کند.

ساده‌ترین نوع مثلث، مثلثی است که سه ضلع برابر داشته باشد (مثلث متساوی‌الاضلاع). برای رسم چنین مثلثی، به‌شرط در اختیار داشتن پرگار یا گونیای با زاویهٔ ۶۰ درجه، به دشواری برنمی‌خوریم. ولی آیا بدون این ابزارها می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی را رسم کرد که به‌طور مثال، رأسهای آن، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی باشد؟ پاسخ این پرسش منفی است. مثلثی که در شکل ۱ می‌بینید، به مثلث متساوی‌الاضلاع بسیار نزدیک است، ولی متساوی‌الاضلاع نیست (یعنی چشم نمی‌تواند بسادگی تشخیص دهد که، سه ضلع این مثلث، با هم برابر نیستند). در واقع، طول ضلعهای این مثلث، نسبت به‌هم، کمتر از ۳ درصد اختلاف دارند.



شکل (۱)

مثلث متساوی‌الاضلاع با همهٔ سادگی خود، ویژگیهای جالب زیادی دارد که، اثبات برخی از آنها، چندان ساده نیست. برخی از این ویژگیها، در آغاز موجب شگفتی می‌شوند. سیاههٔ کوتاهی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع را در اینجا آورده‌ایم، ولی این سیاهه را می‌توان ادامه داده، اندیشهٔ هندسی خود را دربارهٔ این ویژگیها بیازمایید و تلاش کنید، درستی آنها

را ثابت کنید :

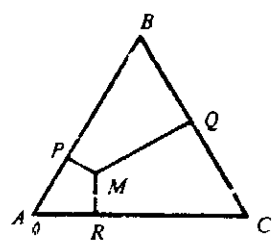
۱. مثلث متساوی‌الاضلاع، تنها مثلثی است که سه محور تقارن دارد.

۲. در بین مثلثهای با محیط برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع، بیشترین مساحت را دارد.

۳. اگر طول شعاع دایرهٔ محاط در مثلث را r وطول شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث را R بنامیم، بیشترین مقدار نسبت $\frac{r}{R}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.

۴. اگر نقطهٔ M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب وعمودهای MP، MQ و MR را بر ضلعهای مثلث فرود آوریم (شکل ۲)، مجموع طولهای این سه عمود، به‌جای نقطهٔ M بستگی ندارد و، در هر حال، برابر طول ارتفاع مثلث است. بجز این، همیشه داریم :

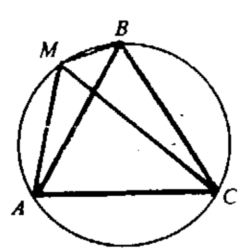
$$|AP|+|BQ|+|CR|=|BP|+|CQ|+|AR|,$$
$$|AP|^2+|BQ|^2+|CR|^2=|BP|^2+|CQ|^2+|AR|^2$$



شکل (۲)

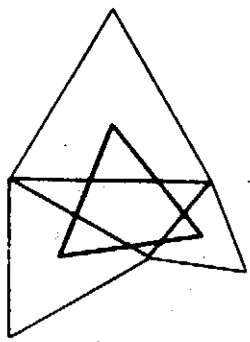
۵. اگر نقطهٔ M را روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کنیم، مجموع فاصله‌های این نقطه تا دو رأس نزدیکتر مثلث، برابر است با فاصلهٔ این نقطه تا رأس سوم (شکل ۳) :

$$|MA|+|MB|=|MC|$$



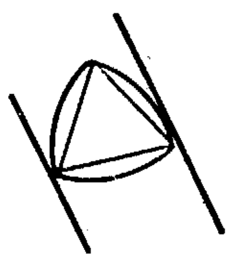
شکل (۳)

۶. و این قضیه که منتسب به ناپلئون است : اگر روی ضلعهای یک مثلث و در بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی بسازیم، مثلثی هم که رأسهای در نقطه‌های برخورد این سه مثلث باشد، متساوی‌الاضلاع است (شکل ۴).



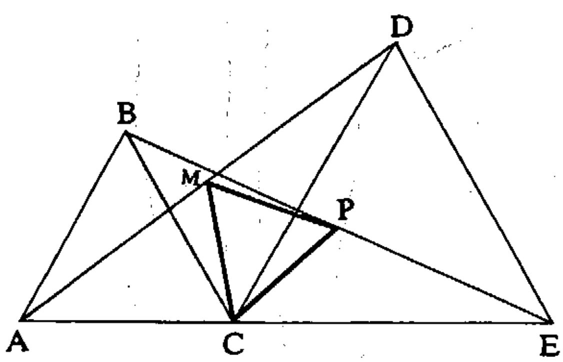
شکل (۴)

۷. فرانتس ره‌لُو، آلمانی و متخصص مکانیک متوجه شد : اگر به مرکز هر رأس مثلث متساوی‌الاضلاع و با شعاع برابر طول ضلع مثلث، کمانی از دایره را رسم کنیم که دو رأس دیگر مثلث را به هم وصل کند، یک منحنی بسته به‌دست می‌آید (به‌نام **مثلث ره‌لُو**) که پهنایی ثابت دارد، یعنی اگر دو خط راست موازی بر این منحنی رسم کنیم، فاصلهٔ بین آنها، همیشه برابر با طول ضلع مثلث می‌شود.



شکل (۵)

۸. در بین مثلثهای با محیط برابر، مجموع طولهای میانه‌ها، در مثلث متساوی‌الاضلاع، کمترین مقدار است.

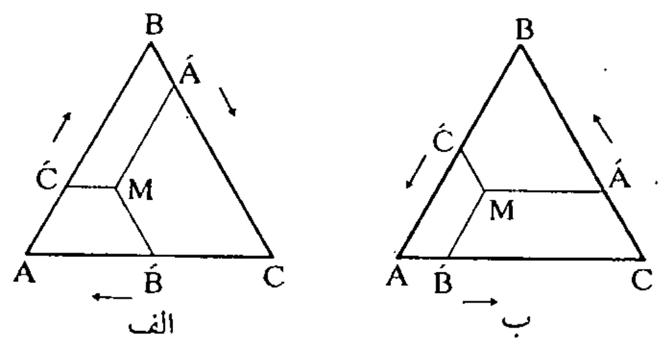


شکل (۶)

۹. روی پاره‌خط راست AE، نقطهٔ دلخواه ۳ را انتخاب و مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC و CDE را دریک طرف پاره‌خط راست AE رسم کرده‌ایم (شکل ۶). وسط پاره‌خط راست AB را M و وسط پاره‌خط راست BE را P می‌نامیم. ثابت کنید، مثلث CMP متساوی‌الاضلاع است.

۱۰. نقطهٔ M را در درون مثلث ABC انتخاب و از آنجا، خطهای راستی موازی ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. اگر نقطه‌های برخورد این خطهای راست را با ضلعها با A' و B' و C' نشان دهیم، ثابت کنید، مجموع $|MA'|+|MB'|+|MC'|$ برابر است با طول ضلع مثلث اصلی.

دربارهٔ رسم شکل برای این مسأله، اندکی توضیح بدهیم. وقتی از نقطهٔ M موازی ضلع BC رسم کنیم، دو ضلع AB و AC را قطع می‌کند، کدام نقطهٔ برخورد را در نظر بگیریم و با چه نامی (A'، B' یا C')؟ همین دشواری، برای خطهای راست موازی AC و AB هم پیش می‌آید. معمول است که در صورت مسأله، با رسم شکل و یا با توضیح، وضع را روشن می‌کنند، ولی در اینجا نه شکلی داده‌اند و نه توضیحی.

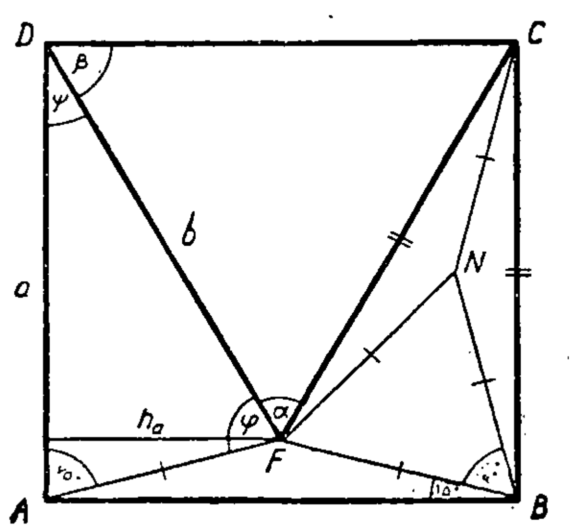


شکل (۷)

در این‌گونه موردها، باید روی محیط مثلث، جهتی را در نظر گرفت؛ در شکل ۷ ــ الف، جهت را از A به B، B به C و C به A (جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و در شکل ۷ ــ ب، از A به C، C به B و B به A (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت یا جهت مثلثاتی) در نظر گرفته‌ایم. وقتی از M موازی یکی از ضلعها رسم می‌کنیم باید در جهت همان ضلع حرکت کنیم: فرض کنیم می‌خواهیم از نقطهٔ M موازی با ضلع AB رسم کنیم؛ در این‌صورت در شکل الف، باید در جهت از A به B، یعنی به سمت برخورد با ضلع BC و در شکل ب، در جهت از B به A و به سمت برخورد با AC حرکت کنیم: در حالت الف، نقطهٔ برخورد را A' (هم نام با نقطهٔ آغاز $\overrightarrow{AB}$) و در حالت ب، نقطهٔ برخورد را B' (هم نام با نقطهٔ آغاز $\overrightarrow{BA}$) می‌نامیم. به این ترتیب، در هر دو حالت، A' روی ضلع BC، B' روی ضلع AC و C' روی ضلع AB قرار می‌گیرد. اثبات حکم مسأله، برای هر یک از حالتهای الف و ب دشوار نیست.

اکنون خودتان روشن کنید، در مسألهٔ ۴ و برای برابریهای مورد نظر مسأله، پاره‌خطهای راست سمت چپ و سمت راست برابریها را چگونه انتخاب کرده‌ایم؟

۱۱. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث متساوی‌الساقین ABF را در درون مربع طوری رسم کرده‌ایم که، هر زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ AB در آن، برابر ۱۵ درجه باشد. ثابت کنید FCD، مثلثی متساوی‌الاضلاع است.



شکل (۸)

این، یکی از مسأله‌های مشهوری است که اغلب، و هر چند سال یکبار، در دست دانش‌آموزان دیده می‌شود و همه‌جا، به‌دنبال راه‌حل آن هستند؛ در حالی که با استفاده از برهان خُلف، خیلی زود به‌نتیجه می‌رسد. دربارهٔ برهان خلف، اندکی بعد، صحبت خواهیم کرد و، در اینجا، راه‌حل مسأله را می‌آوریم.

تقارن شکل، روشن می‌کند که مثلث FCD متساوی‌الساقین است، یعنی $|FC|=|FD|$. بنابراین، برای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث FCD، باید ثابت کنیم طول پاره‌خط راست FD با طول ضلع مربع برابر است.

این نام‌گذاریها را می‌پذیریم: $|AD| = a$، $|FD| = b$،

. $A\hat{F}D=\varphi$ ، $C\hat{D}F=\beta$ ، $D\hat{F}C=\alpha$

اگر مثلث FCD متساوی الاضلاع نباشد، یا $b>a$ و یا $b<a$. اگر $b>a$ ، آن‌وقت $\varphi<۷۵^\circ$ (در هر مثلث، ضلع کوچکتر، روبروی زاویهٔ کوچکتر است) و در نتیجه $\alpha>۶۰^\circ$ (زاویه‌های به رأس نقطهٔ F رابررسی کنید) و، بنابراین $\beta<۶۰^\circ$ ؛ از آنجا (با توجه به مثلث FCD) به‌دست می‌آید $b<a$. با فرض $b>a$ ، به نابرابری مخالف آن، یعنی $b<a$ رسیدیم که ممکن نیست ؛ پس b نمی‌تواند از a بزرگتر باشد. به همین ترتیب، با فرض $b<a$ ، به نابرابری $b>a$ می‌رسیم ؛ یعنی در حالت $b\neq a$ ، ضمن ارزیابی زاویه‌ها، فرض ما نقض می‌شود. تنها یک حالت باقی می‌ماند : $b=a$.

مسأله را می‌توان، بدون استفاده از روش برهان خُلف و به‌طور مستقیم هم، حل کرد.

روی ضلع BC و در درون مربع ABCD، مثلث CNB را برابر مثلث BFA می‌سازیم (شکل ۸ را ببینید). در این صورت، برای مثلث BNF داریم : $|BN|=|BF|$ (به‌عنوان ضلعهای متناظر دو مثلث برابر) و $N\hat{B}F=۶۰^\circ$. بنابراین

$$|NC|=|NB|=|NF|,\quad C\hat{N}B=C\hat{N}F=۱۵۰^\circ$$

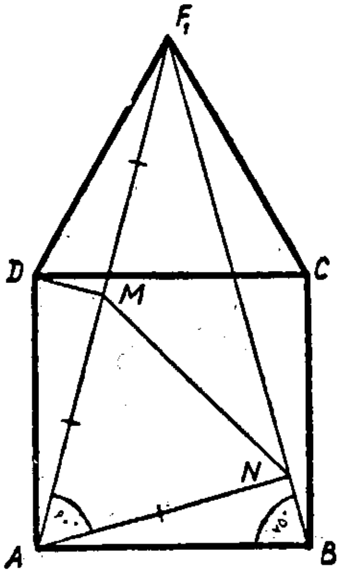
یعنی مثلثهای CNB و CNF برابرند، بنابراین $|CF|=a$ و مثلث FCD متساوی الاضلاع است. برای این‌که، استدلال ما، کمبودی نداشته باشد، می‌گوییم که، نقطهٔ N ، تنها می‌تواند در درون مثلث FBC قرار گیرد، زیرا در غیر این‌صورت، زاویهٔ FNC برابر ۲۱۰ درجه می‌شود که ممکن نیست.

دربارهٔ این مسأله، بیشتر می‌اندیشیم. آیا عکس این مسأله قابل حل است؟ عکس مسأله را در اینجا تنظیم کرده‌ایم، ولی حل آن را به عهدهٔ شما می‌گذاریم :

۱۲. روی ضلع CD و در درون مربع ABCD، مثلث متساوی‌الاضلاع FCD را ساخته‌ایم. مقدار زاویه‌های مثلث ABF را پیدا کنید (شکل ۸).

همچنین، می‌توان براساس اندیشه‌ای که در مسألهٔ ۱۱ وجود دارد، مسألهٔ دیگری طرح و حل کرد :

۱۳. روی ضلع CD از مربع ABCD و در بیرون مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع DCF_1 را ساخته‌ایم (شکل ۹). مقدار زاویه‌های مثلث ABF_1 را پیدا کنید.



شکل (۹)

مثلث BCF_1 را در نظر می‌گیریم. با توجه به شرط مسأله داریم :

$$|BC|=|CF_1|,\ B\hat{C}F_1=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

بنابراین

$$F_1\hat{B}C=۱۵^\circ,\ F_1\hat{B}A=۷۵^\circ$$

و چون نقطهٔ F_1 ، روی محور تقارن مربع است، پس

$$F_1\hat{A}B=۷۵^\circ,\ A\hat{F_1}B=۳۰^\circ$$

عکس مسألهٔ ۱۳، چنین است :

۱۴. روی ضلع AB از مربع ABCD، مثلث متساوی‌الساقین ABF_1 را با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ برابر ۷۵ درجه طوری ساخته‌ایم که نقطهٔ F_1 و ضلع CD در یک سمت ضلع AB واقع باشند. ثابت کنید، مثلث DCF_1 متساوی‌الاضلاع است (شکل ۹).

اگر در مثلثهای AF_1D و ABF_1 ، ارتفاعهای DM و AN را رسم کنیم، با محاسبهٔ مقدار زاویهٔ MAN و توجه به برابری مثلثهای AMD و ABN ، روشن می‌شود که مثلث MAN متساوی‌الاضلاع است. از مثلث ANF_1 به‌دست می‌آید :

$$|AN|=\frac{1}{۲}|AF_1|\quad \text{یا}\quad |AM|=\frac{1}{۲}|AF_1|$$

بنابراین، DM ، میانه و ارتفاع مثلث AF_1D است، یعنی

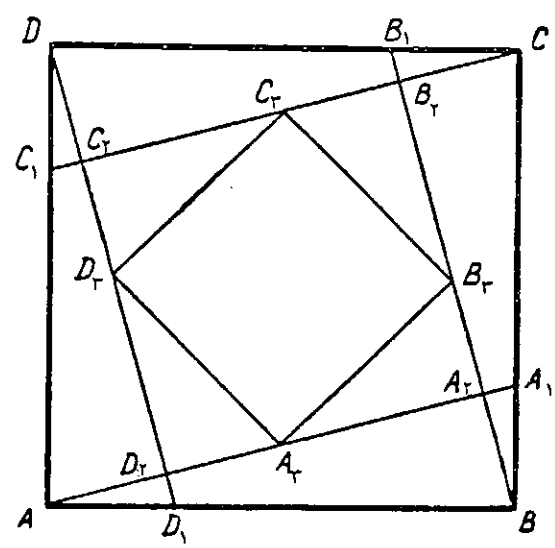
$$D\hat{A}F_1=D\hat{F_1}A=۱۵^\circ ;$$

$$F_1\hat{D}C=A\hat{D}F_1-A\hat{D}C=۶۰^\circ$$

با توجه به مقدار زاویهٔ F_1DC و با توجه به متقارن بودن شکل، قانع می‌شویم که، مثلث CF_1D، متساوی‌الاضلاع است.

بر پایهٔ اندیشه‌ای که در طرح مسألهٔ ۱۱ به‌کار رفته است، با اندکی دقت و صرف وقت، می‌توان مسأله‌های بسیاری طرح کرد که، برخی از آنها، اندیشه‌های تازه‌ای را در برداشته باشند. برای نمونه، یکی از این گونه مسأله‌ها را می‌آوریم:

۱۵. مربع ABCD را، به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم (واحد بودن طول ضلع مربع، تنها برای سادگی کار است و نقش اساسی در تنظیم مسأله ندارد). پاره‌خطهای راست AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 را در درون مربع طوری رسم می‌کنیم که، به‌ترتیب، با ضلعهای AB، BC، CD و DA، زاویه‌ای برابر ۱۵ درجه بسازند. ثابت کنید، از برخورد این پاره‌خطهای راست، مربع $A_2B_2C_2D_2$ به‌دست می‌آید که مساحتی برابر نصف مساحت مربع ABCD دارد (شکل ۱۰).



شکل (۱۰)

می‌بینید، این مسأله، با مسألهٔ ۱۱، بکلی فرق دارد؛ ولی در واقع، بر پایهٔ همان اندیشهٔ جدا کردن زاویهٔ ۱۵ درجه (یا ۷۵ درجه) از زاویه‌های مربع پدید آمده است.

اگر به این نکته توجه کنیم که $tg15^\circ = 2-\sqrt{3}$، محاسبهٔ مساحت مربع $A_2B_2C_2D_2$ به‌سادگی به‌دست می‌آید (اثبات مربع بودن $A_2B_2C_2D_2$، با محاسبهٔ زاویه‌ها و طول ضلعها، دشوار نیست). در واقع

$$S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD} - 4S_{AA_2B}$$

در ضمن داریم:

$$|A_1B| = 2-\sqrt{3};\quad |A_2B| = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$|AA_2| = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

و بنابراین

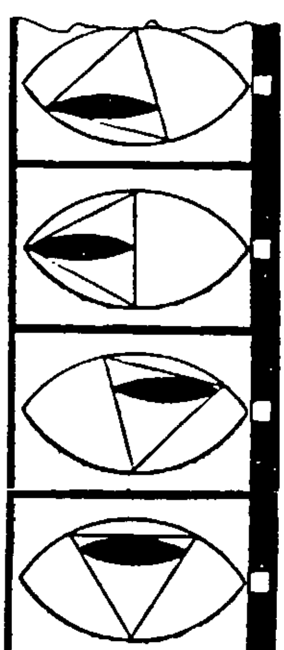
$$S_{AA_2B} = \frac{|AA_2|.|A_2B|}{2} = \frac{1}{8};$$

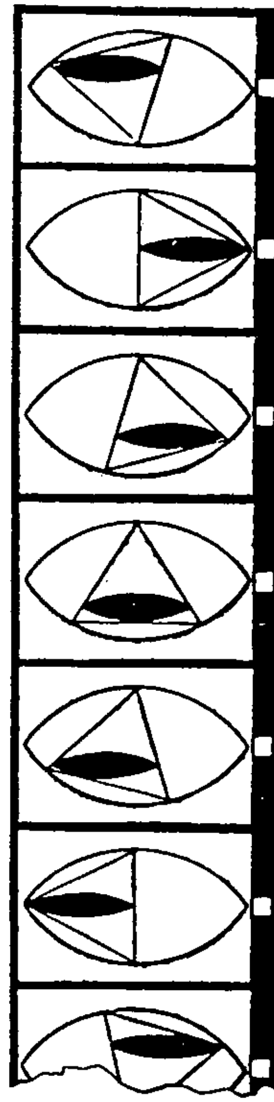
$$S_{A_2B_2C_2D_2} = 1 - 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

جالب است، اگر وسط پاره‌خطهای راست AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 را، به ترتیب، A_3، B_3، C_3 و D_3 بنامیم، آن وقت $A_3B_3C_3D_3$ هم، یک مربع است که مساحتی برابر $2-\sqrt{3}$ دارد (ثابت کنید!).

در پایان این بحث که به برخی از ویژگیهای مثلث متساوی‌الاضلاع اختصاص داشت، ویژگی دیگری را، که هم جالب و هم شگفتی‌آور است، می‌آوریم (آیا می‌توانید راهی برای اثبات این ویژگی پیدا کنید؟).

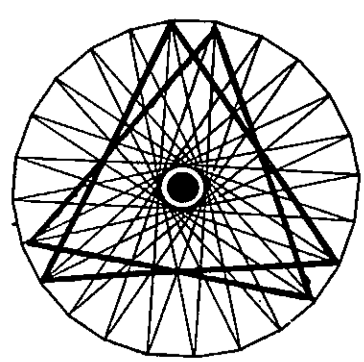
می‌دانیم، مثلث متساوی‌الاضلاع را، می‌توان در دایره‌ای که بر آن محیط شده است، چرخاند (شکل ۱۲ را، که در ضمن شکلی زیباست ببینید). ولی گمان می‌کنم، برای شما نامنتظر باشد که مطلع شوید:





شکل (۱۱)

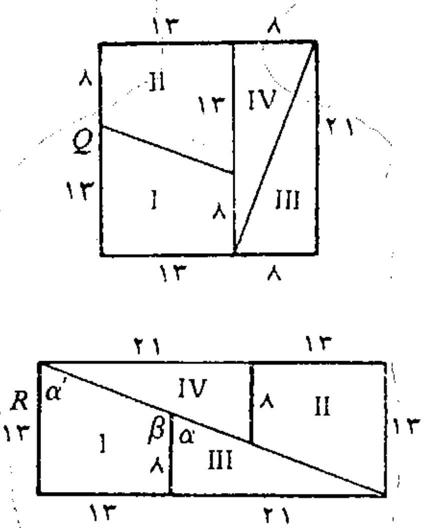
۱۶. اگر دو انتهای دو کمان ۱۲۰ درجه، از دو دایره‌ای که شعاعهای برابر دارند، طوری روی‌هم قرار دهیم که یک منحنی بسته به‌وجود آورند، مثلث متساوی‌الاضلاعی را که در آن محاط شده باشد، می‌تواند چرخاند (در شکل ۱۲، چند حالت از مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی، نشان داده شده است).



شکل (۱۲)

برای این که ببینیم، عدم دقت در رسم شکل و یا عدم توانایی در رسم دقیق شکل، چه نتیجه‌های خنده‌داری ممکن است به‌بار آورد، یک مسألهٔ ساده را، که به ساختمان یک شکل هندسی مربوط می‌شود، به‌صورتی کوتاه شده، از کتاب «اشتباه استدلالهای هندسی» می‌آوریم.

۱۷. آیا مساحت مربع با ضلع به طول ۲۱ سانتی‌متر، با مساحت مستطیل با ضلعهای ۳۴ و ۱۳ سانتی‌متر برابر است؟ به زبان دیگر، آیا ۴۴۲= ۴۴۱؟



شکل (۱۳)

مربع Q را به دو مستطیل ۲۱×۱۳ و ۲۱×۸ بخش می‌کنیم (شکل ۱۳). مستطیل اول را به دو ذوزنقهٔ قایم الزاویه برابر، با قاعده‌های ۱۳ و ۸ و مستطیل دوم را به دو مثلث قایم‌الزاویه برابر، با ضلعهای مجاور به زاویه قایمه ۸ و ۲۱ تقسیم می‌کنیم. با چهار بخشی که به‌دست می‌آید، مستطیل R را، آن گونه که در شکل ۱۳ دیده می‌شود، می‌سازیم (بخشهای برابر را، در مربع Q و مستطیل R، با عددهای رومی مشخص کرده‌ایم). مساحت این مستطیل، برابر ۳۴×۱۳، یعنی ۴۴۲ سانتی‌متر مربع است، در حالی که مساحت مربع، که از همین بخشها درست شده است، برابر ۲۱×۲۱ ، یعنی ۴۴۱ سانتی‌مترمربع می‌شود. این یک سانتی‌مترمربع، کجا رفته است؟ خودتان آزمایش کنید. روی یک کاغذ شطرنجی، مربع Q را ببرید و آن را، با دقت، به چهار بخش مورد نظر تقسیم کنید؛ سپس، از بخشهایی که به‌دست آورده‌اید، مستطیل R را بسازید.

اکنون به جستجوی اشتباه خود می‌پردازیم. وقتی

می‌گوییم از بخشهای I، II، III و IV (در مربع)، می‌توان مستطیلی درست کرد، به‌چشم خود و یا به آزمایشی که، با کاغذهای بریده، انجام دادیم، اعتماد کردیم. ضمن این که شکلهای I و III (یا II و IV) را پهلوی هم قرار دادیم، پذیرفتیم که مثلثی پدید می‌آید، یعنی پذیرفتیم که، ساق مایل ذوزنقهٔ I و وتر مثلث III، در یک راستا قرار می‌گیرند و در نقطهٔ مشترک خود، دارای «شکستگی» نیستند. ولی روشن است، تکیه بر «دیدن» و اعتماد به «چشم» (که در تجربهٔ زندگی ما، در موردهای زیادی، دچار اشتباه شده است)، نمی‌تواند قانع‌کننده باشد و به‌جای استدلال هندسی به‌کار رود.

[باید گفت که این اشتباه، یعنی اعتماد به آن چه دیده می‌شود، ریشهٔ تاریخی ژرفی دارد. خیلی طول کشید تا انسان هوشمند، با پیچیده‌تر شدن زندگی و ضمن نیازی که به محاسبه‌های دقیقتر پیدا کرد، متوجه شد که باید از خرد خود یاری بخواهد واستدلال منطقی را به جای «مشاهده» قرار دهد. در کاوشهایی که در معبدی از هند باستان انجام گرفته است، و به هزار سال پیش از میلاد مربوط می‌شود، برخی نوشته‌های ریاضی پیدا شده است که، در بین آنها، یک شکل هندسی هم دیده می‌شود که بر دیوار معبد نقش بسته است. شکل، دربارهٔ محاسبهٔ مساحت دایره است؛ ولی به‌جای اثبات، در کنار شکل نوشته شده است: «دیده می‌شود».]

کشف همین کمبود، برای نارسایی اثبات کافی است و تا وقتی این کمبود برطرف نشود، هرگونه بحثی دربارهٔ آن بی‌معناست.

اگر بتوانیم ثابت کنیم، زاویه‌های α و β در شکل ۱۳، مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند، یا به جای آن ثابت کنیم، دو زاویهٔ α و α' در همان شکل، با هم برابرند، آن وقت «نبودن شکستگی» را ثابت کرده‌ایم. آیا این اثبات ممکن است؟ روشن است که، باید به این پرسش، پاسخ منفی بدهیم، زیرا پاسخ مثبت به معنای برابری دو عدد ۴۴۱ و ۴۴۲ است.

ولی می‌توان ثابت کرد، دو زاویهٔ α و α' با هم برابر نیستند و، در ضمن، روشن کرد، کدام بزرگتر است! در مثلث III شکل ۱۳، می‌توان تانژانت زاویهٔ α را محاسبه کرد:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{۲۱}{۸}$$

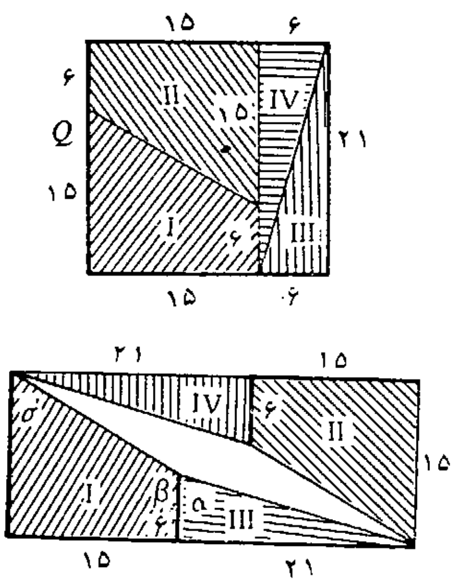
اگر در ذوزنقهٔ I، از رأس زاویهٔ β، عمودی بر قاعدهٔ بزرگتر رسم کنیم، مثلث قایم‌الزاویه‌ای به دست می‌آید که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قایمه در آن، برابر ۱۳ و ۵ سانتی‌متر است؛ درنتیجه

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{۱۳}{۵}$$

و چون $\frac{۱}{۴۰} = \frac{۲۱}{۸} - \frac{۱۳}{۵}$ و یا $\frac{۲۱}{۸} > \frac{۱۳}{۵}$، پس $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha'$ و از آن‌جا

$$\alpha > \alpha' \ , \ \alpha + \beta > ۱۸۰^\circ$$

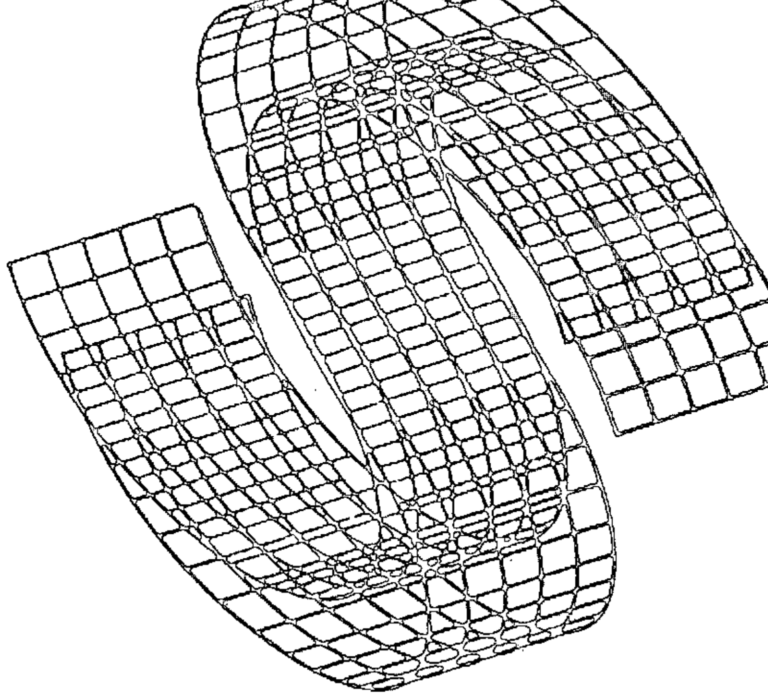
اکنون دیگر، وضع شکل ۱۳ روشن می‌شود: بخشهای I، II، III و IV را می‌توان در درون مستطیل جا داد، ولی آنها نمی‌توانند سطح مستطیل را، به‌طور کامل، بپوشانند و «شکافی» به شکل یک متوازی‌الاضلاع باریک، در طول قطر مستطیل به‌وجود می‌آورند. جای شگفتی نیست که متوجه این «شکاف» نمی‌شویم، زیرا در امتداد ۳۶/۴۰۰۰ سانتی‌متر (طول قطر مستطیل)، سطحی برابر یک سانتی‌متر مربع دارد و این کمتر از آن است که بتوان، ضمن تبدیل مربع Q به مستطیل R، متوجه آن شد.



شکل (۱۴)

اگر بخواهید شکلی داشته باشیم که این شکاف، در آن، بروشنی دیده شود، عددهای شکل ۱۳ را، شبیه شکل ۱۴، تغییر دهید، در این صورت، «شکاف» مساحتی برابر ۹۹ سانتی‌متر مربع پیدا می‌کند که در برابر ۵۴۰ سانتی‌متر مربع (مساحت مستطیل)، می‌تواند عرض اندام کند و دیده شود.

تا بعد



رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f

● احمد قندهاری

۱ــ ابتدا در توابع کثیرالجمله رابطهٔ بین منحنی تابع f و منحنی تابع f' را به‌صورت شهودی بررسی می‌کنیم. سپس نتایج را بیان می‌کنیم.

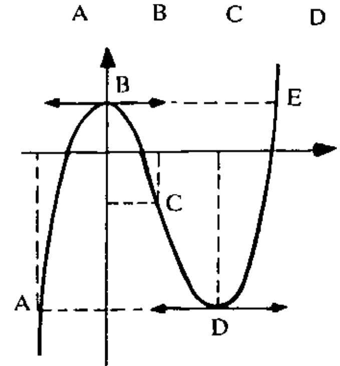
مثال: تابع f به معادله $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را رسم می‌کنیم:

طولهای اکسترمم تابع f

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$$

طول نقطهٔ عطف تابع f $\quad f''(x)=۶x-۶=۰\Rightarrow x=۱$

x	$-\infty$	-۱	⓪	۱	②	۳	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	۰	−	− ۰ +	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-۳ ↗	۱ ↘	-۱ ↘	-۳ ↗	۱ ↗	$+\infty$
		A	B	C	D	E	



حال تابع f' به معادله $U(x)=f'(x)=۳x^{۲}-۶x$ را رسم می‌کنیم.

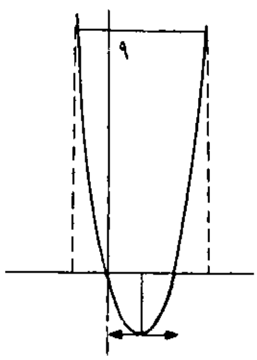
طول نقطه عطف تابع f برابر است با طول نقطه اکسترمم تابع f':

$$U'(x)=۶x-۶=۰\Rightarrow x=۱$$

$$U(x)=۰\Rightarrow ۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰$$

طولهای اکسترمم تابع f برابر است با طولهای نقاط تقاطع تابع f' با محور x ها: $\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۰	①	۲	۳	$+\infty$
$U'(x)$	−	−	− ۰	+	+	+	
$U(x)$	$+\infty$ ↘	۹ ↘	۰ ↘	-۳ ↗	۰ ↗	۹ ↗	$+\infty$



۱ـ به‌طوری که ملاحظه شد $x=0$ و $x=2$ طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f است که برابر طولهای نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور xهاست: پس می‌توان گفت:

نتیجه (۱): طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر است با طولهای نقاط تقاطع منحنی تابع f' با محور xها. به شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f، $f'(x)$ مساوی صفر باشد.

۲ـ اگر کمی توجه کنیم ملاحظه می‌کنیم که طول نقطه عطف تابع f برابر (۱) است از طرفی طول نقطه اکسترمم منحنی تابع f' برابر (۱) است. پس می‌توان گفت:

نتیجه (۲): طولهای نقاط عطف منحنی تابع f برابر است با طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f'.

۳ـ به‌طوری که در شکل تابع f ملاحظه می‌شود تقعّر قطعه منحنی $\widehat{ABC}$ به‌طرف پایین است پس y'' تابع f در فاصله طولهای نقاط C و A یعنی در فاصله $[-1,1]$ منفی است. از طرفی y'' تابع f همان U' است پس U' در این فاصله منفی است بنابراین تابع U در این فاصله اکیداً نزولی است.

نتیجه (۳): اگر تقعّر منحنی تابع f در فاصله $[a,b]$ به سمت پایین (جهت منفی محور yها) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴ـ هم‌چنین می‌توان گفت که تقعّر قطعه منحنی $\widehat{CDE}$ در تابع f به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) است. پس y'' در فاصله طولهای نقاط E و C یعنی در فاصله $[1,3]$ مثبت است. از طرفی y'' همان U' است. پس U' در این فاصله مثبت است درنتیجه تابع U در این فاصله اکیداً صعودی است.

نتیجه (۴): اگر تقعّر منحنی تابع f در فاصله $[c,d]$ به سمت بالا (جهت مثبت محور yها) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵ ـ باز به شکل منحنی تابع f توجه کنیم. منحنی تابع f روی قطعه منحنی $\widehat{AB}$ اکیداً صعودی است یعنی تابع f در فاصله طولهای این دو نقطه یعنی فاصله $[-1,0]$ اکیداً صعودی است. پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. یعنی $f'\geq 0$ بنابراین $U(x)\geq 0$ درنتیجه نمودار تابع $U(x)$ در فاصله $[-1,0]$ بالای محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجه (۵): اگر منحنی تابع f در فاصله $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد. آنگاه عبارت $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است. بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است در این فاصله بالای محور xها یا روی محور xهاست.

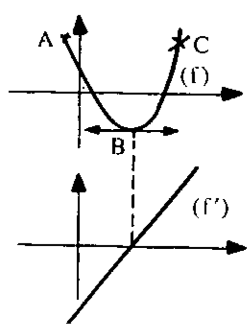
۶ ـ منحنی تابع f روی قطعه منحنی $\widehat{BCD}$ اکیداً نزولی است یعنی تابع f در فاصله طولهای نقاط D و B یعنی فاصله $[0,2]$ اکیداً نزولی است، پس عبارت $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $U(x)$ است در این فاصله زیر محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجه (۶): اگر منحنی تابع f در فاصله $[b,c]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است. بنابراین نمودار f' در این فاصله پایین محور xها یا روی محور xهاست.

با توجه به شش نتیجه فوق تمرینهای زیر را حلّ می‌کنیم.

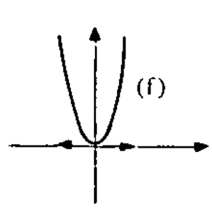
در مثالهای زیر سعی شده است که محور yها در دو نمودار تابع f و f' در یک امتداد باشد تا از نتایج گفته شده بهتر بهره‌گیری شود.

مثال (۱): فرض می‌کنیم نمودار یک تابع درجه دوّم به‌صورت شکل مقابل باشد. با توجه به مطالب گفته شده، منحنی مشتق آن را رسم می‌کنیم.

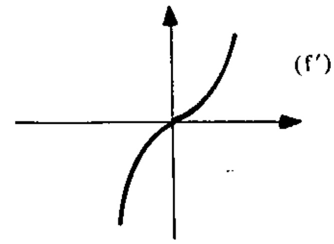


توضیح: تقعّر منحنی f به طرف بالاست پس تابع f'، اکیداً صعودی است و طول نقطه B (نقطه مینیمم تابع f) برابر طول نقطه تقاطع منحنی f' با محور xها است. با توجه به این‌که تابع درجه دوّم است، مشتق آن تابعی از درجه اول خواهد شد و نمودار آن یک خط راست است.

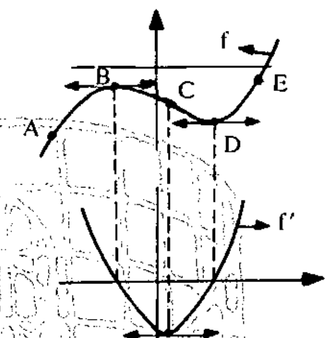
مثال (۲): فرض می‌کنیم تابع f به معادله $f(x)=x^{2n}$، $n\geq 2, n\in N$ باشد. نمودار این تابع به‌صورت زیر است.



تابع f' به‌صورت یک منحنی است، و اکیداً صعودی است و از مبداء مختصات می‌گذرد.



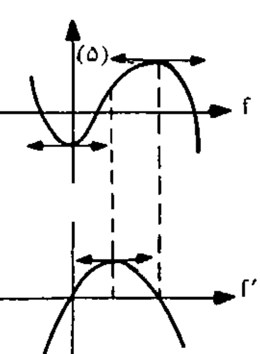
مثال (۳) : فرض می‌کنیم نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل باشد. با توجه به مطالب گفته شده نمودار f' چنین است.



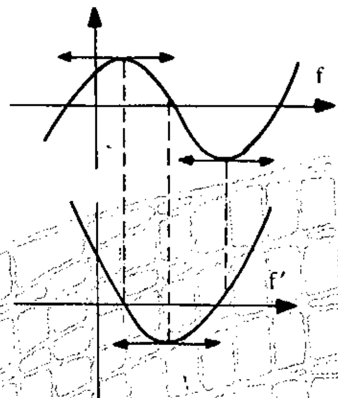
توضیح : طولهای نقاط B و D برابر طولهای نقاط تقاطع منحنی f' با محور xهاست. نقطه C، نقطه عطف منحنی تابع f است که طول آن برابر طول اکسترمم منحنی تابع f' است.

تقعّر قطعه منحنی $\widehat{ABC}$ به‌طرف پایین است. پس منحنی تابع f' در فاصله طولهای نقاط C و A اکیداً نزولی (با توجه به نتیجه (۳)) و تقعّر قطعه منحنی $\widehat{CDE}$ به‌طرف بالاست پس منحنی تابع f' در فاصله طولهای نقاط E و C اکیداً صعودی است (با توجه به نتیجه (۴)).

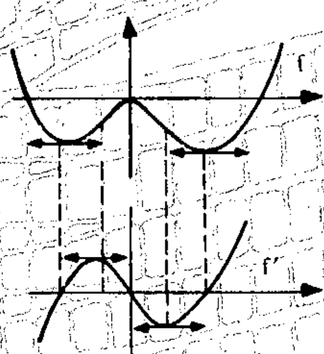
مثال (۴) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است و نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال (۵) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.



مثال (۶) : نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. نمودار مشتق آن در زیر شکل منحنی f رسم شده است.

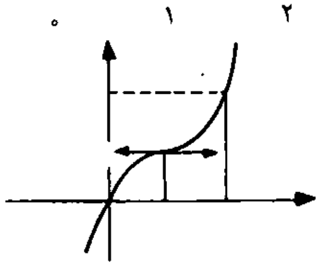


۷ـ حال تابع f به معادله $f(x)=(x-1)^3+1$ را درنظر می‌گیریم.

جدول تغییرات و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ضمناً $D_f=R$ و تابع در R پیوسته است. طول نقطه عطف تابع f=ریشه مضاعف $y'=0$

$$f'(x)=3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	o	+	+
$f(x)$	↗ $-\infty$	↗ ۰	۱ ↗	۲ ↗	$+\infty$

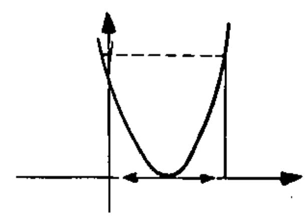


حال منحنی تابع f' به معادله $U(x) = ۳(x - ۱)^۲$ را درنظر می‌گیریم. این تابع هم در R پیوسته است.

طول نقطه عطف تابع f = طول اکسترمم تابع f'

$U'(x) = ۶(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
U'		−		−	۰	+		+	
U	$+\infty$	↘	۳	↘	۰	↗		↗	$+\infty$

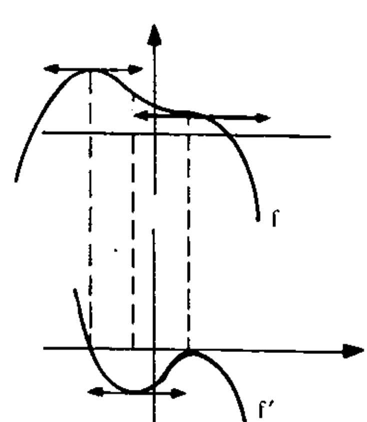


توجه کنید: $x = ۱$ طول نقطه عطف تابع f است. پس بنا به نتیجه (۲) $x = ۱$ طول نقطه اکسترمم تابع f' است.

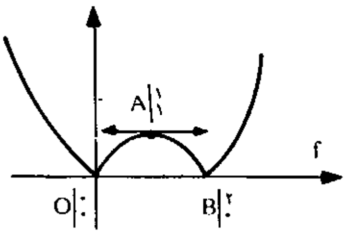
چون $x = ۱$ ریشه مضاعف مشتق تابع f است. پس $x = ۱$ طول نقطه عطفی از تابع f است که خط مماس بر منحنی در نقطه عطف موازی محور x هاست بنابراین ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه صفر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $x = ۱$ طول نقطه اکسترمم تابع f' است که عرض این اکسترمم صفر است.

نتیجه (۷): اگر $x = a$ طول نقطه عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور x ها باشد، آنگاه نقطه $M\begin{vmatrix} a \\ ۰ \end{vmatrix}$ نقطه اکسترمم منحنی تابع f' است.

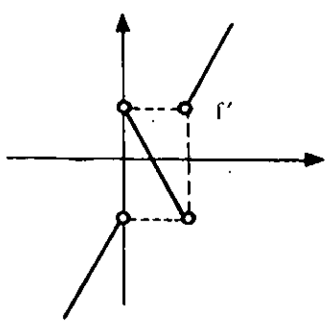
مثال (۷): اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر شد آنگاه نمودار تابع مشتق به‌صورت زیر است.



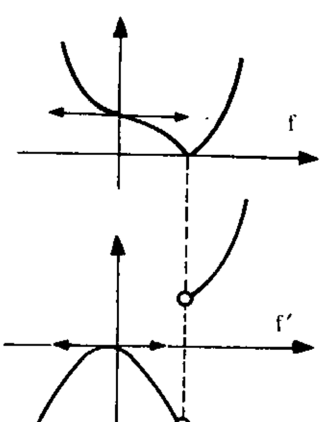
۸ ــ تابع f به معادله $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است.



توجه کنید: این تابع در نقطه A ماکزیمم نسبی است، لذا طول نقطه A برابر طول نقطه تقاطع منحنی f' با محور x هاست. این تابع در نقاط O و B مینیمم نسبی است، نظر به‌این‌که تابع f در نقاط O و B مشتق‌پذیر نیست، لذا تابع f' در نقاط به طولهای (صفر و ۲) ناپیوسته است. و درنتیجه نمودار تابع f' چنین است.



مثال (۸): اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد. آنگاه نمودار مشتق تابع f چنین است.



۹ــ تابع کسری به معادله $n \in N$ ، $y = \frac{(ax + b)^n}{(a'x + b')^n}$ را درنظر می‌گیریم.

این تابع کسری یک مجانب افقی به معادله $y = \frac{a}{a'}$ دارد. می‌خواهیم نشان دهیم، تابع y' یک مجانب افقی به معادله

y = ۰ دارد. زیرا

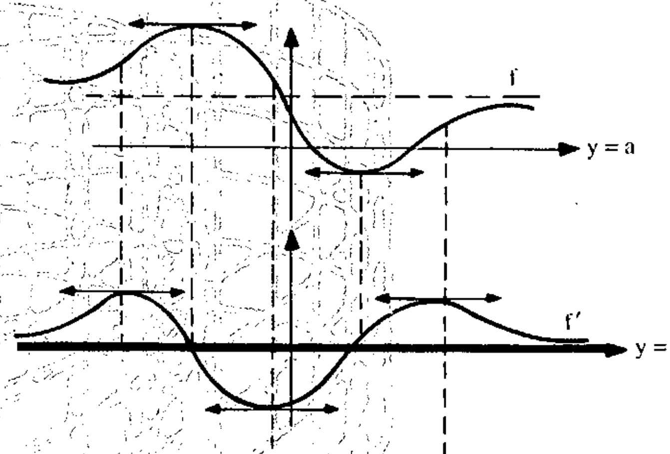
$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b')^n - a'n(a'x+b')^{n-1}(ax+b)^n}{(a'x+b')^{2n}}$$

$$y' = \frac{an(ax+b)^{n-1}(a'x+b') - a'n(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+1}}$$

ملاحظه می‌کنیم در تابع y' درجه مخرج بیشتر از درجه صورت است. پس اگر $x \to \infty$ آنگاه $y' \to 0$ پس خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجه (۹) : اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آنگاه، خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f' خواهد بود.

مثال (۹) :اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه، نمودار تابع f' چنین است.



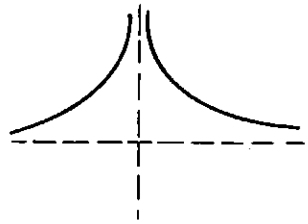
توجه : منحنی تابع f سه نقطه عطف دارد. پس منحنی تابع f' سه اکسترمم دارد.

تذکر : اگر معادله تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$، $n \in N$ باشد و $g(a), g'(a) \neq 0$ آنگاه خط $x = a$ معادلهٔ مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را انفصال ساده گوییم.

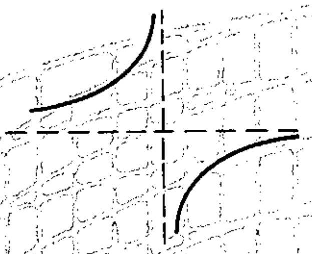
اگر $x \to a \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$

اگر معادله تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$، $n \in N$ باشد، و $g(a), g'(a) \neq 0$ آنگاه خط $x = a$، معادله مجانب قائم منحنی تابع f است. نوع انفصال ایجاد شده را انفصال مضاعف گوییم.

اگر $x \to a \Rightarrow f(x) \to +\infty$ یا $f(x) \to -\infty$



خط $x = a$ ، انفصال مضاعف نمودار است.



خط $x = a$ ، انفصال ساده نمودار است.

۱۰ــ اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادله $x = a$ داشته باشد (انفصال ساده) آنگاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله $x = a$ خواهد شد که $x = a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

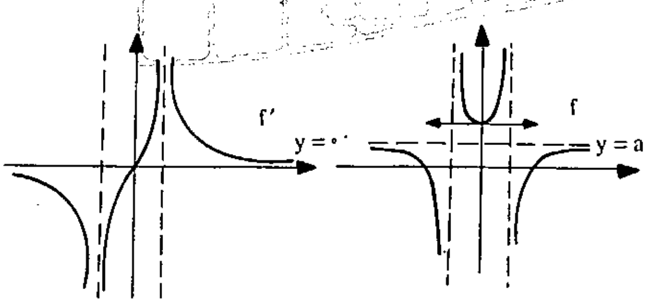
اثبات : فرض می‌کنیم معادله تابع f به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq 0$

می‌دانیم که خط $x = a$ انفصال ساده تابع f است. پس از مشتق‌گیری نسبت به x داریم :

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) + g(x)}{(x-a)^{2n}}$$

به طوری که دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله $x = a$ است چون توان $(x-a)$ در مخرج زوج است پس انفصال حاصل، انفصال مضاعف است.

مثال (۱۱) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد آنگاه منحنی تابع f' با توجه به مطالب گفته شده به‌صورت مقابل است.



توضیح : مجانبهای قائم به انفصالهای مضاعف تبدیل شده است مجانب افقی تابع که به‌صورت $y = k > 0$ است به $y = 0$ تبدیل شده است.

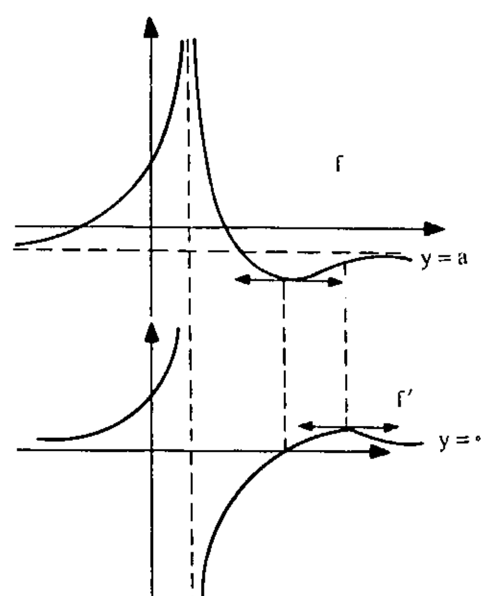
۱۱ــ اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به‌صورت $x = a$ باشد و $x = a$ انفصال مضاعف تابع f باشد، آنگاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادله $x = a$ هست ولی انفصال حاصل در منحنی f'، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات : فرض می‌کنیم معادله منحنی تابع f به‌صورت $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$، $n \in N$ و $g(a), g'(a) \neq 0$، پس منحنی تابع f در $x = a$ انفصال مضاعف خواهد بود امّا پس از مشتق‌گیری نسبت به x خواهیم داشت :

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - 2ng(x)}{(x-a)^{2n+1}}$$

ملاحظه می‌شود که عامل $(x-a)$ در تابع f' دارای توان فرد است. پس خط $x = a$ مجانب قائمی است که انفصال حاصل از آن، انفصال ساده خواهد بود.

مثال (۱۱) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد، آنگاه منحنی تابع f' چنین خواهد شد :



۱۲ــ اگر در توابع کسری، معادله مجانب مایل منحنی تابع به‌صورت $y = ax + b$ باشد، آنگاه منحنی تابع f' دارای مجانب افقی به معادله $y = a$ است.

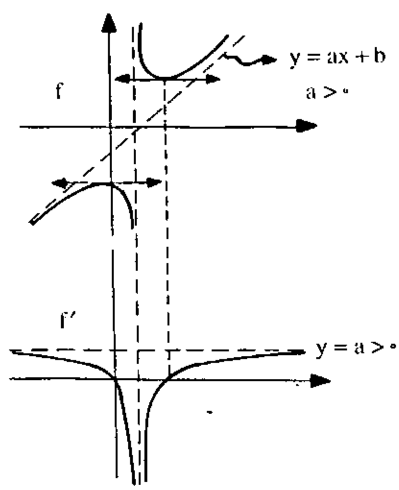
اثبات : فرض می‌کنیم معادله تابع f به‌صورت $f(x) = ax + b + \dfrac{g(x)}{h(x)}$ باشد، و درجه $h(x)$ حداقل یک واحد بیشتر از درجه $g(x)$ است.

اگر از معادله تابع f مشتق بگیریم خواهیم داشت :

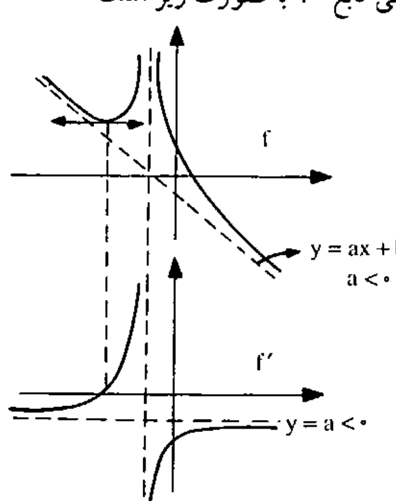
$$f'(x) = a + \frac{g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}{(h(x))^2}$$

اگر درجه $g(x)$، n و درجه $h(x)$، $n+1$ باشد $n \in N$، آنگاه درجه صورت کسر $f'(x)$ مساوی $2n$ و درجه مخرج آن $(2n+2)$ است. پس اگر $x \to \infty$، آنگاه حد کسر صفر می‌شود و $f'(x) = a$ حد، که همان مجانب افقی منحنی تابع f' است.

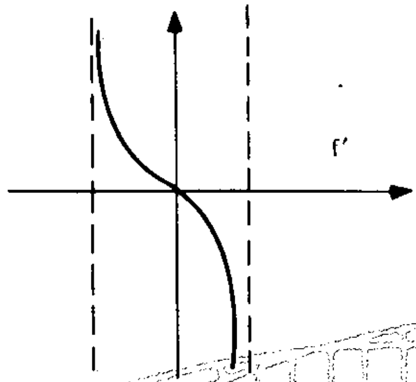
مثال (۱۲) : اگر منحنی تابع f به‌صورت مقابل باشد، آنگاه منحنی تابع f' به‌صورت زیر است :



مثال (۱۲)′ : اگر منحنی تابع f به‌صورت زیر باشد، آنگاه منحنی تابع f' به‌صورت زیر است.



۱۳ـ در توابع رادیکالی اگر D_f فاصله $[a,b]$ نباشد $a,b \in R$ و $a < b$، آنگاه منحنی f' مجانب افقی خواهد داشت.

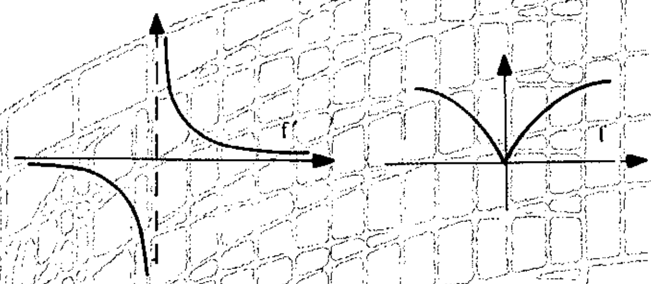


همچنین اگر $x = a$ ریشه داخل رادیکال باشد، آنگاه $x = a$ مجانب قائم منحنی تابع f' خواهد شد.

مثال: تابع به معادله $f(x) = \sqrt{x-a}$ را درنظر می‌گیریم.

خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}$$



اولاً: تابع مشتق دارای مجانب افقی به معادله $f'(x) = 0$ خواهد شد زیرا:

اگر $x \to +\infty \Rightarrow f'(x) \to 0$

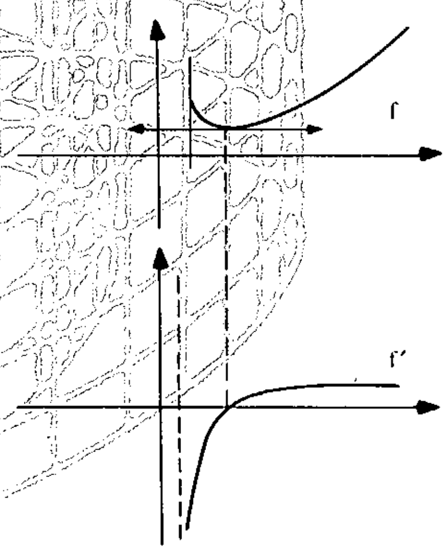
ثانیاً: $x = a$ مجانب قائم تابع f' است زیرا

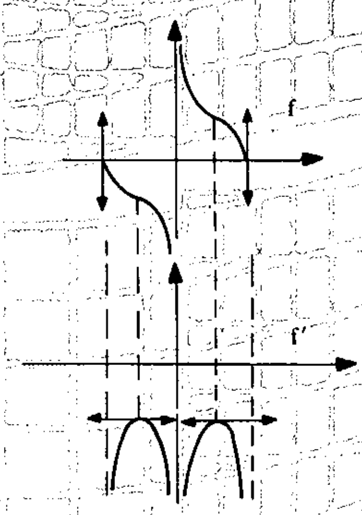
اگر $x \to a^+ \Rightarrow f'(x) \to +\infty$

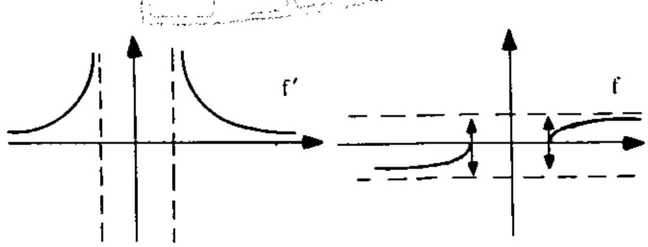
نکات گفته شده قبلی در توابع رادیکالی هم صادق است.

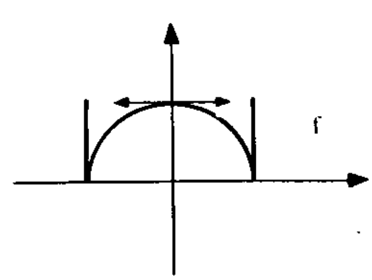


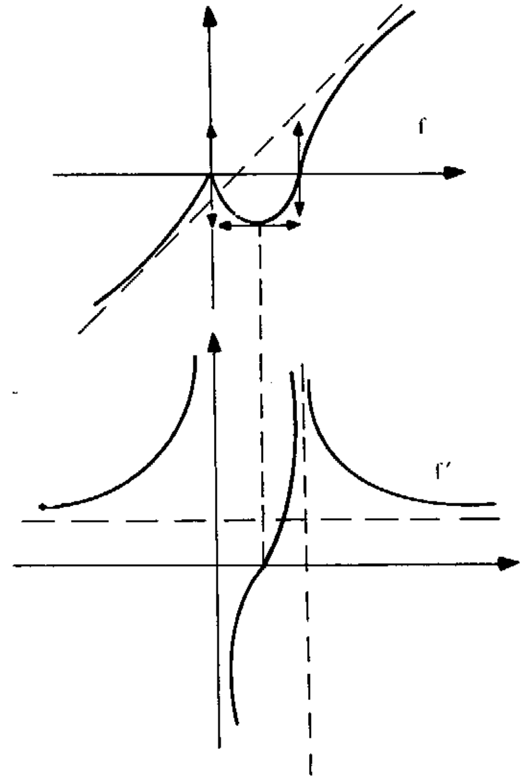
مثال: نمودار چند تابع مانند f رسم شده است. به کمک نکات بیان شده نمودار f' آنها رسم خواهد شد.

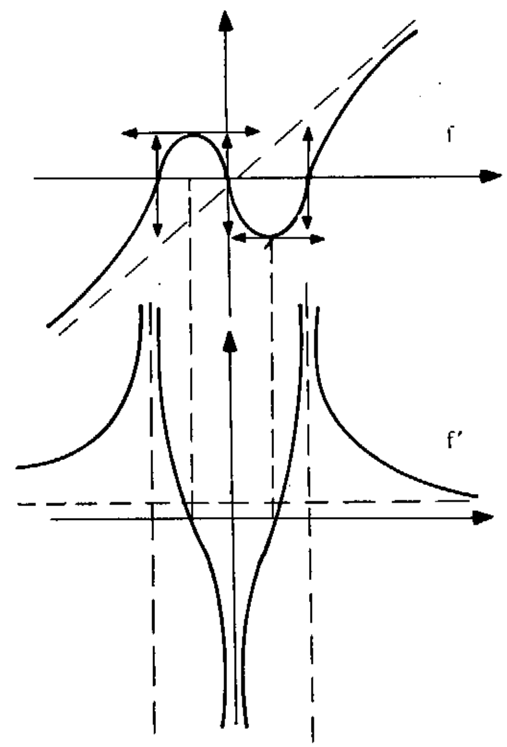


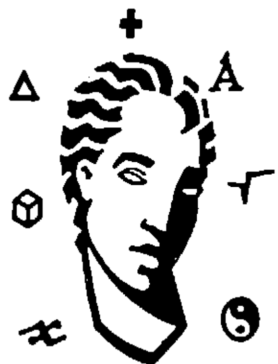












تفریح اندیشهٔ ۱

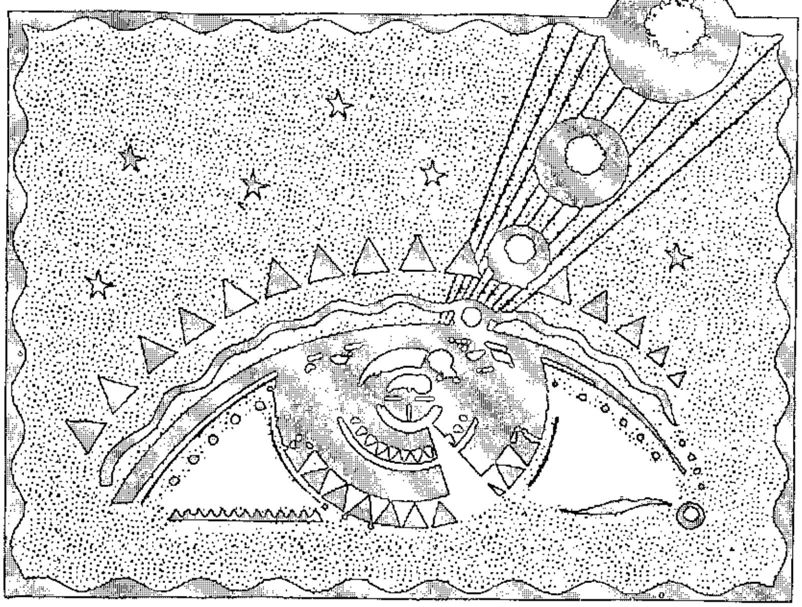
زاد و ولد

مسألهٔ زیر را فیبوناتچی پیزایی «Fibonacci of Pisai»، یکی از ریاضیدانهای بزرگ قرون وسطی، مطرح کرده است. راه حل این مسأله دارای پیامدهای قابل توجهی است.

«با شروع از یک جفت خرگوش، که در اولین ماه، و هر ماه بعد از آن، یک جفت خرگوش تولید می‌کنند، در پایان یک سال چند جفت خرگوش خواهیم داشت اگر هر جفت جدید در هر تولید بعدی، با شروع از دومین ماهشان، هر ماه یک جفت خرگوش تولید کنند، و مرگ و میری نیز رخ ندهد؟



جواب در صفحه ۸۶



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

از کتاب:
Mathematical Analysis
نوشتهٔ
K. G. Binmore

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۴)

حمیدرضا امیری

● معادلات درجهٔ دوم

درصورتی که $y>۰$ معادلهٔ $x^۲=y$ دارای دو جواب است. ما جواب مثبت را با $\sqrt{y}$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب منفی $-\sqrt{y}$ می‌باشد. بعلاوه توجه داریم که هیچ ابهامی راجع به این نمادها وجود ندارد و $\pm\sqrt{y}$ به‌سادگی این مفهوم را می‌رساند که «$\sqrt{y}$ یا $-\sqrt{y}$».

یک معادلهٔ درجه دوم در حالت کلّی به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشد که در آن $a\neq۰$. با ضرب طرفین در $۴a$ خواهیم داشت:

$$۴a^۲x^۲+۴abx+۴ac=۰$$

$$(۲ax+b)^۲-b^۲+۴ac=۰$$

$$(۲ax+b)^۲=b^۲-۴ac$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که معادلهٔ درجه دوم، اگر $b^۲-۴ac<۰$ فاقد جواب حقیقی بوده و اگر $b^۲-۴ac=۰$ یک جواب حقیقی دارد و اگر $b^۲-۴ac>۰$ دارای دو جواب حقیقی می‌باشد. اگر $b^۲-۴ac\geq۰$،

$$۲ax+b=\pm\sqrt{(b^۲-۴ac)}$$

1.10 Quadratic equations

If $y>0$, the equation $x^2=y$ has two solutions. We denote the *positive* solution by $\sqrt{y}$. The *negative* solution is therefore $-\sqrt{y}$. We note again that there is no ambiguity about these symbols and that $\pm\sqrt{y}$ simply means '$\sqrt{y}$ or $-\sqrt{y}$'.

The general quadratic equation has the form

$$ax^2+bx+c=0$$

where $a\neq 0$. Multiply through by $4a$. We obtain

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

It follows that the quadratic equation has no real solutions if $b^2-4ac<0$, one real solution if $b^2-4ac=0$ and two real solutions if $b^2-4ac>0$. If $b^2-4ac\geqslant 0$,

$$2ax+b=\pm\sqrt{(b^2-4ac)}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

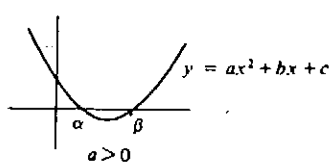
The roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ are therefore

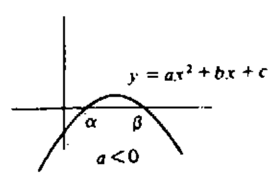
$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\quad\text{and}\quad\beta=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

It is a simple matter to check that, for all values of x,

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

With the help of this formula, we can sketch the graph of the equation $y=ax^2+bx+c$.





$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

و

$$\beta = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

این موضوع (مطلب) به‌راحتی قابل بررسی است که، برای هر مقدار x

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

به کمک این فرمول، می‌توانیم نمودار معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ را رسم کنیم.

1.11 *Example* A nice application of the work on quadratic equations described above is the proof of the important *Cauchy–Schwarz inequality*. This asserts that, if $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are any real numbers, then

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Proof For any x,

$$0 \leqslant (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2$$
$$= (a_1^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$
$$= Ax^2 + 2Bx + C.$$

Since $y = Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0$ for *all* values of x, it follows that the equation $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ cannot have two (distinct) roots. Hence

$$(2B)^2 - 4AC \leqslant 0$$

i.e. $B^2 \leqslant AC$

which is what we had to prove.

مثال: یک کاربرد زیبا از کار روی معادلات درجه دوم که در بالا توصیف شد، اثبات نامساوی مهمی است به‌نام *نامساوی کوشی ــ شوارتز*. ادعا می‌کنیم که، اگر $a_1, a_2, \cdots, a_n$ و $b_1, b_2, \cdots, b_n$ اعداد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

اثبات: برای هر x داریم :

$$0 \le (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$
$$= (a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$
$$= Ax^2 + 2Bx + C$$

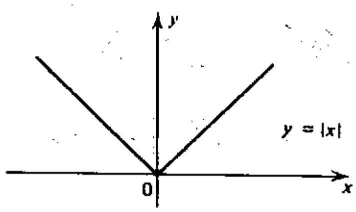
چون برای همهٔ مقادیر x ، $y = Ax^2 + 2Bx + C \ge 0$، این

نتیجه حاصل می‌شود که معادلهٔ $Ax^2 + 2Bx + c = 0$ نمی‌تواند دو ریشهٔ (متمایز) داشته باشد. بنابراین $(2B)^2 - 4AC \le 0$ یعنی $B^2 \le AC$ که این (نامساوی) اثبات را برای ما حاصل می‌کند.

1.14 Modulus

Suppose that x is a real number. Its *modulus* (or *absolute value*) $|x|$ is defined by

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqslant 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$



Thus $|3| = 3$, $|-6| = 6$ and $|0| = 0$. Obviously $|x| \geqslant 0$ for all values of x.
It is sometimes useful to note that $|x| = \sqrt{x^2}$.

1.15 *Theorem* For any real number x,

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Proof Either $x \geqslant 0$ or $x < 0$. In the first case, $-|x| \leqslant 0 \leqslant x = |x|$. In the second case, $-|x| = x < 0 < |x|$.

1.16 *Theorem* For any real numbers a and b

$$|ab| = |a|.|b|$$

Proof The most elegant proof is the following.

$$|ab| = \sqrt{((ab)^2)} = \sqrt{(a^2b^2)} = \sqrt{(a^2)}.\sqrt{(b^2)} = |a|.|b|.$$

● قدر مطلق

فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد. قدر مطلق x(|x|)را به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

بنابراین ۳ = |۳|، ۶ = |۶-| و ۰ = |۰|. بدیهی است که برای هر مقدار x، $|x| \ge 0$.

در بسیاری اوقات مفید است که از تساوی $|x| = \sqrt{x^2}$ استفاده کنیم.

۱.۱۵ قضیه: برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$-|x| \le x \le |x|$$

اثبات: دو حالت $x \ge 0$ یا $x < 0$ (را درنظر می‌گیریم). در حالت اول، $-|x| \le 0 \le x = |x|$. در حالت دوم، $-|x| = x < 0 < |x|$.

۱.۱۶ قضیه: برای هر دو عدد حقیقی مانند a و b،

$$|ab| = |a|.|b|$$

اثبات: زیباترین اثبات در زیر آمده است :

$$|ab| = \sqrt{\left((ab)^2\right)} = \sqrt{(a^2b^2)} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a|.|b|$$

رادیکال

(قسمت دوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $۲۰=۴\times۵=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}$ و $۲۰=\sqrt{۴۰۰}$، بنابراین:

$$\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}=\sqrt{۱۶\times۲۵}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

همچنین:

$$\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴\ ,\ \sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}=(-۲)\times۲=-۴$$

بنابراین:

$$\sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{(-۸)\times۸}=\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n\geq۲)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (۱)$$

و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:

$$\sqrt[n]{|a|}\times\sqrt[n]{|b|}=\sqrt[n]{|ab|}$$

مثال ۸: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}$

۲) $\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷}\times\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}$

۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۶}\times\sqrt{\frac{۵}{۷}}\times\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۰}$

۵) $\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{\frac{۳}{۵}}\times\sqrt[۵]{\frac{۵}{۹}}\times\sqrt[۵]{۲۷}$

۶) $\sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}}\times\sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}$

۷) $\sqrt[۳]{a^۲+b^۲}\times\sqrt[۳]{a^۴+۲a^۲b^۲+b^۴}$

۸) $\sqrt[۵]{x}\times\sqrt[۵]{x^۲}\times\sqrt[۵]{x^۲}$

۹) $\sqrt[۳]{a^۲bc}\times\sqrt[۳]{ab^۲c}\times\sqrt[۳]{c}$

۱۰) $\sqrt[۵]{a^۲b^۳}\times\sqrt[۵]{a^۳b^۲}$

۱۱) $\sqrt[۷]{a^۲b^۳c}\times\sqrt[۷]{a^۳b^۲c^۴}\times\sqrt[۷]{a^۲b^۲c^۲}$

۱۲) $\sqrt[۳]{a-b}\times\sqrt[۳]{a^۲+ab+b^۲}\times\sqrt[۳]{(a^۳-b^۳)^۲}$

حل:

۱) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}=\sqrt{۲\times۱۸}=\sqrt{۳۶}=۶$

۲) $\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۴\times۷\times۲}=\sqrt{۱۴\times۱۴}=\sqrt{۱۴^۲}=۱۴$

۳) $\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}$

$$=\sqrt[۳]{(۹-\sqrt{۱۷})(۹+\sqrt{۱۷})}$$

$$=\sqrt[۳]{۹^۲-۱۷}=\sqrt[۳]{۸۱-۱۷}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۶}\times\sqrt{\frac{۵}{۷}}\times\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۰}$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\times 6\times \frac{5}{7}\times 14\times 10}=\sqrt{2\times 2\times 5\times 2\times 10}=\sqrt{20^2}=20$$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

$$=\sqrt[5]{3\times 9\times \frac{3}{5}\times\frac{5}{9}\times 27}=\sqrt[5]{3\times 3^2\times 3\times 3}=\sqrt[5]{3^5}=3$$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})(10+\sqrt{19})}$

$$=\sqrt[4]{100-19}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}$

$$=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^4+2a^2b^2+b^4)}$$

$$=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+b^2)^2}=\sqrt[3]{(a^2+b^2)^3}=a^2+b^2$$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x\times x^2\times x^2}=\sqrt[5]{x^5}=x$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a^2bc\times ab^2c\times c}$

$$=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=\sqrt[3]{(abc)^3}=abc$$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{a^2b^3\times a^3b^2}$

$$=\sqrt[5]{a^5b^5}=\sqrt[5]{(ab)^5}=ab$$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

$$=\sqrt[7]{a^2b^3c\times a^3b^2c^4\times a^2b^2c^2}$$

$$=\sqrt[7]{a^7b^7c^7}=\sqrt[7]{(abc)^7}=abc$$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

$$=\sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)^2}=\sqrt[3]{(a^3-b^3)^3}=a^3-b^3$$

توجه داشته باشید که از رابطهٔ (۱) می‌توان برای ساده کردن عددها و عبارتهای رادیکالی و یا بیرون آوردن عواملی از زیر رادیکال استفاده کرد:

مثال ۹:

۱) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

۲) $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{32\times 2}=\sqrt[5]{32}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{2}=2\sqrt[5]{2}$

۳) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times 3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

۴) $\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{81\times 3}=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}$

۵) $\sqrt[3]{(a+b)^4}=\sqrt[3]{(a+b)^3(a+b)}$

$$=\sqrt[3]{(a+b)^3}\times\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)\sqrt[3]{a+b}$$

۶) $\sqrt[5]{a^7b^6c^{10}}=\sqrt[5]{a^5.a^2.b^5.b.(c^2)^5}$

$$=\sqrt[5]{a^5b^5(c^2)^5}\times\sqrt[5]{a^2b}=abc^2\sqrt[5]{a^2b}$$

۷) $\sqrt[70]{x^{74}y^{75}}=\sqrt[70]{x^{70}.x^4.y^{70}.y^5}$

$$=\sqrt[70]{x^{70}}\times\sqrt[70]{y^{70}}\times\sqrt[70]{x^4y^5}$$

با فرض $x\geq 0$ و $y\geq 0$، می‌توان نوشت:

$$\sqrt[70]{x^{74}y^{75}}=xy\sqrt[70]{x^4y^5}$$

(زیرا از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید)

۸) $\sqrt[6]{x^{14}y^{26}z^{28}}=\sqrt[6]{x^{12}.x^2.y^{24}.y^2.z^{24}.z^4}$

$$=\sqrt[6]{x^{12}y^{24}z^{24}}\times\sqrt[6]{x^2y^2z^4}$$

$$=\sqrt[6]{(x^2)^6(y^4)^6(z^4)^6}\times\sqrt[6]{x^2y^2z^4}=x^2y^4z^4\sqrt[6]{x^2y^2z^4}$$

با توجه به‌تساویهای اخیر به‌این قانون پی می‌بریم که اگر بخواهیم در عبارت $2\sqrt{3}$ عدد ۲ که ضریب $\sqrt{3}$ است را به داخل رادیکال ببریم، باید آن را به توان ۲ (فرجهٔ رادیکال) برسانیم و سپس آن را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم.

مثال ۱۰:

۱) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}$

۲) $2\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{2^5\times 2}=\sqrt[5]{32\times 2}=\sqrt[5]{64}$

۳) $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times 3}=\sqrt[3]{8\times 3}=\sqrt[3]{24}$

۴) $3\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4\times 3}=\sqrt[4]{81\times 3}=\sqrt[4]{243}$

۵) $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\times 2}=-\sqrt{50}$

۶) $-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{2^4\times 3}=-\sqrt[4]{48}$

۷) $x\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5x^3}=\sqrt[5]{x^8}$

۸) $xy^2\sqrt[7]{x^3y^4}=\sqrt[7]{(xy^2)^7x^3y^4}$

$$=\sqrt[7]{x^7y^{14}x^3y^4}=\sqrt[7]{x^{10}y^{18}}$$

۹) $-a^2\sqrt[4]{2a^2}=-\sqrt[4]{(a^2)^4(2a^2)}=-\sqrt[4]{a^8(2a^2)}=-\sqrt[4]{2a^{10}}$

توجه کنید که در عبارتهای $-5\sqrt{2}$ و $-2\sqrt[4]{3}$ و $-a^2\sqrt[4]{2a^2}$ نمی‌توان (-5) و (-2) و $(-a^2)$ را به‌زیر رادیکال ببریم. زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید:

$$-5\sqrt{2} \neq \sqrt{(-5)^2(2)} \quad , \quad -2\sqrt[4]{3} \neq \sqrt[4]{(-2)^4(3)}$$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد، داریم:

$$-a^2\sqrt[4]{2a^2} \neq \sqrt[4]{(-a^2)^4(2a^2)} \qquad (a \in \mathbb{R} - \{0\})$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \qquad (2)$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq 0$ باشد:

$$\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$$

۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$ ، $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

و همچنین $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$ و $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ و $b \neq 0$، اگر n عددی فرد باشد:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (3)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b} \geq 0$ باشد:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$$

۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی

با مقایسهٔ تساوی $7x + 4x = (7+4)x = 11x$ و $7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (7+4)\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$، و تساوی

$$7y - 4y = (7-4)y = 3y$$

و

$$7\sqrt[7]{a} - 4\sqrt[7]{a} = (7-4)\sqrt[7]{a} = 3\sqrt[7]{a}$$

ملاحظه می‌شود جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی شبیه جمع جبری یک جمله‌ایها است. یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (و یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال ۱۲ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

۲) $7\sqrt[4]{4} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{4}$

۳) $2\sqrt[15]{8} - 3\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[15]{8} + 5\sqrt[5]{2}$

۴) $5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 14\sqrt[9]{125} + 4\sqrt[3]{5} + \sqrt[9]{125}$

حل :

۱) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$$= (5+3-4+2-1)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

۲) $7\sqrt[4]{4} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt[4]{4}$

$$= (7-4)\sqrt[4]{4} + (-5+4)\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt[4]{4} - \sqrt{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{4}$ با $\sqrt{2}$، یعنی:

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

داریم :

$$3\sqrt[4]{4} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3-1)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

۳) $2\sqrt[15]{8} - 3\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[15]{8} + 5\sqrt[5]{2}$

$$= (2-4)\sqrt[15]{8} + (-3+5)\sqrt[5]{2}$$

$$= -2\sqrt[15]{8} + 2\sqrt[5]{2}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[15]{8}$ با $\sqrt[5]{2}$، یعنی:

$$\sqrt[15]{8} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[5]{2}$$

داریم :

$$-2\sqrt[15]{8} + 2\sqrt[5]{2} = -2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} = (-2+2)\sqrt[5]{2} = (0)\sqrt[5]{2} = 0$$

۴) $5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 14\sqrt[9]{125} + 4\sqrt[3]{5} + \sqrt[9]{125}$

$$=(5+2+4)\sqrt[3]{5}+(-14+1)\sqrt[9]{125}$$
$$=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[9]{125}$ با $\sqrt[3]{5}$، یعنی :

$$\sqrt[9]{125}=\sqrt[9]{5^3}=\sqrt[3]{5}$$

داریم :

$$11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[3]{5}$$
$$=(11-13)\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$$

توجه داشته باشید که در جمع جبری عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی که توان کامل فرجهٔ رادیکال هستند را از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال ۱۳ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

۳) $3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$

۴) $\sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$

حل :

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

$$=\sqrt{9\times 6}+(3+4)\sqrt{6}+(-5-1)\sqrt{4\times 6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=3\sqrt{6}+7\sqrt{6}-6\times 2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=(3+7-12)\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{36}$ با $\sqrt{6}$، یعنی :

$$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$$

داریم :

$$-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}=-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(-2+1)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

$$=(2+5-1)\sqrt[3]{16}+(-7+4)\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2^3\times 2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^3\times 2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\times 2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=(12-3-3)\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[6]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$، یعنی :

$$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

داریم :

$$6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(6+1)\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$$

۳) $3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$

$$=(3-1)\sqrt[4]{405}+(5+4)\sqrt[4]{5}+(-2+1)\sqrt[4]{80}$$
$$=2\sqrt[4]{3^4\times 5}+9\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2^4\times 5}$$
$$=2\times 3\sqrt[4]{5}+9\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}$$
$$=(6+9-2)\sqrt[4]{5}$$
$$=13\sqrt[4]{5}$$

۴) $\sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$

$$=(1-1)\sqrt[3]{a^7}+(-2+5+3)\sqrt[3]{a^4}+(-1+1)\sqrt[3]{a^{10}}$$
$$=(0)\sqrt[3]{a^7}+6\sqrt[3]{a^3.a}+(0)\sqrt[3]{a^{10}}$$
$$=6a\sqrt[3]{a}$$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$

$$=(1-5)\sqrt[5]{a^5b^5.ab}-2b\sqrt[5]{a^5.ab}+3a\sqrt[5]{ab^5.b}+3ab\sqrt[5]{ab}$$
$$=-4ab\sqrt[5]{ab}-2ab\sqrt[5]{ab}+3ab\sqrt[5]{ab}+3ab\sqrt[5]{ab}$$
$$=(-4-2+3+3)ab\sqrt[5]{ab}$$
$$=(0)ab\sqrt[5]{ab}$$
$$=0$$

* تذکر : جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به‌صورت $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به صورت $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ نوشته می‌شود.



در اظهارنظر شتاب نکنیم

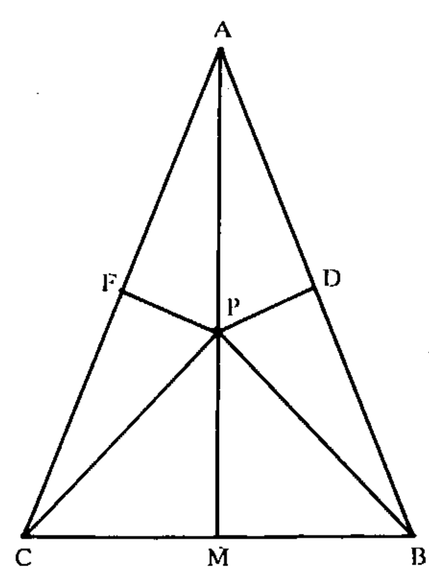
● دکتر احمد شرف‌الدین

سخندان پرورده پیرکهن   بیاندیشد آنگه بگوید سخن

(سعدی)

۱ ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصفهای دو ساق و میانه‌ای که رأس را به‌وسط قاعده وصل می‌کند در یک نقطه متقاربند.

برهان. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) را درنظر می‌گیریم. از نقطه A به‌نقطه m وسط قاعده BC وصل می‌کنیم، میانه AM حاصل می‌شود. از نقطه D وسط ساق AB عمودی بر این ساق اخراج می‌کنیم (عمودمنصف پاره‌خط AB) و نقطه برخورد آن را با خط AM، به P نشان می‌دهیم. از نقطه F وسط ضلع AC عمودی بر آن اخراج می‌کنیم (عمودمنصف ساق AC) و این عمود خط AM را در همان نقطه P قطع می‌کند زیرا شکل نسبت به‌خط AM متقارن است.



۲ ـ مثلث ABC را که در آن $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ است درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که عمودمنصفهای دو ضلع AB و AC و میانه AM یکدیگر را در یک نقطه که آن را P می‌نامیم قطع کنند. چون $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ است پس $\angle AMB\neq\angle AMC$. چون نقطه P بر عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد پس:

$$\overline{PA}=\overline{PB} \quad (1)$$

چون نقطه P بر عمودمنصف پاره‌خط AC قرار دارد پس:

$$\overline{PA}=\overline{PC} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overline{PB}=\overline{PC} \quad (3)$$

پس مثلث PBC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین میانه‌ای که رأس را به‌وسط قاعده وصل می‌کند بر قاعده عمود است. اما در مسألهٔ حاضر، میانه PM بر قاعده BC عمود نیست (تناقض). پس باید قضاوت کنیم که فرض ما صحیح نیست و چنین حکم می‌کنیم:

اگر در مثلثی طولهای دو ضلع نامساوی باشند ممکن نیست عمودمنصفهای آن دو ضلع و میانه ضلع سوم همرس (متقارب) باشند.

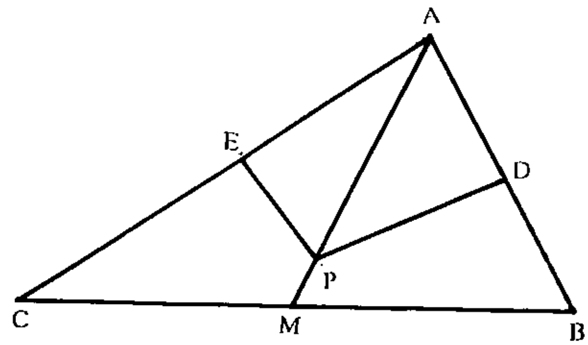
چه خوب است که در اظهارنظر شتاب نکنیم

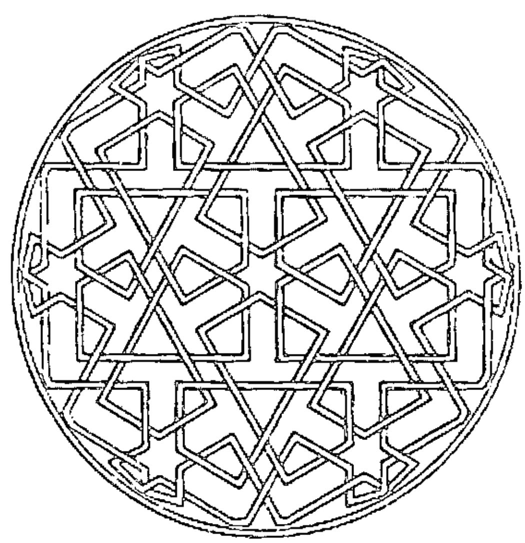
تا نیک ندانی که سخن عین صواب است

باید که به‌گفتن دهن از هم نگشایی

اگر اندکی فکر کنیم و از اظهارنظر عجولانه اجتناب کنیم

به‌قضاوت صحیح نایل می‌آییم. می‌گوییم چون $\overline{PB}=\overline{PC}$ پس خط PM عمود بر خط BC است. ولی در مسألهٔ حاضر خط PM بر خط BC عمود نیست. لذا زاویه خط PM ، با خط BC نامعین است بنابراین نقطه P باید بر نقطه M منطبق باشد (زاویه خط MX با خط MY هنگامی که نقطه Y بر نقطه M منطبق باشد نامعین است زیرا وقتی نقطه Y بر نقطه M منطبق باشد امتداد خط MY نامعین است). هنگامی که نقطه P بر نقطه M وسط ضلع BC منطبق باشد زاویهٔ BAC قایمه می‌شود (خط DM که وسط ضلع AB را به‌وسط ضلع BC وصل می‌کند موازی خط AC است. چون $MD\perp AB$ پس $AC\perp AB$).





مسائل مسابقه‌ای

۱ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}+\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}+\sqrt[6]{4}+\left(\sqrt[30]{2}\right)^{9}-2^{0/3}-\left(\sqrt[20]{8}\right)^{2}}$$

۲ ــ برای معادلهٔ سیال زیر یک دسته جواب صحیح و یک دسته جواب گویا بیابید.

$$4xy-x-y=z^2$$

(این معادله مربوط به قضیهٔ اویلر است :
ثابت کنید معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب ندارد.)

۳ ــ حد زیر را برای هر عدد طبیعی n حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{\sin^n x}\right)^n$$

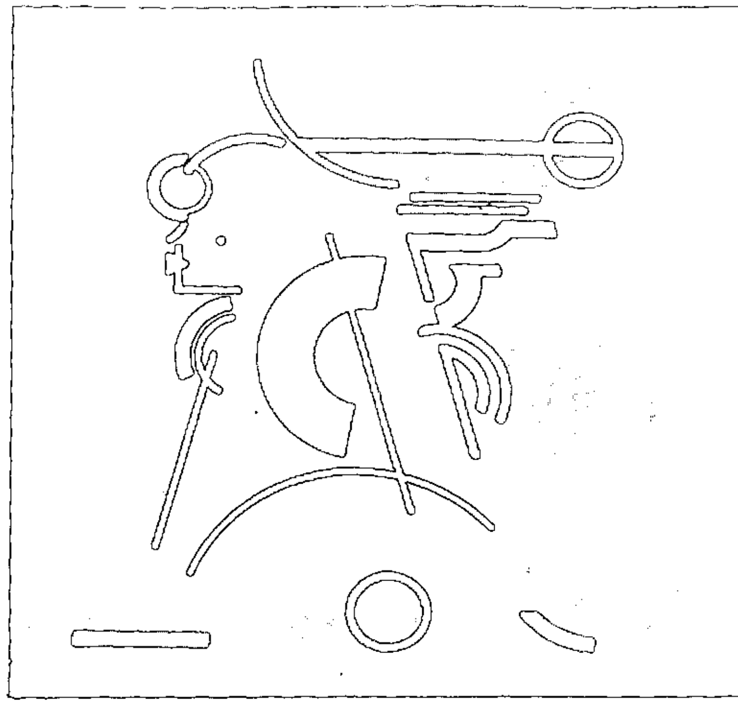
روی پاکت نامه حتماً قیدکنید «مربوط به‌مسائل‌مسابقهٔ شمارهٔ ...»

● **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی**

ریاضیات گسسته

(قسمت سوم)

ترکیبهای با تکرار
توزیعها



(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

ملاحظه کردیم، هنگامی که تکرار مجاز باشد، به ازای n شیءِ متمایز، ترتیب به اندازهٔ r این اشیا را، به ازای عدد صحیح $r \geq ۰$، می‌توان به n^r طریق به دست آورد. اکنون به مسأله‌ای مشابه در مورد ترکیبات توجه می‌کنیم و بار دیگر مسألهٔ مرتبطی را به دست می‌آوریم که راه حلش از اصول محاسبهٔ قبلیمان حاصل می‌شود.

مثال ۱ . ۲۵ . هفت دانش‌آموز سال اول دبیرستان، در راه بازگشت از تمرین ورزش در یک ساندویچ فروشی توقف کردند. در آنجا هر یک از آنها یکی از ساندویچهای زیر را سفارش داد : همبرگر، سوسیس، الیویه و ماهی. چند خرید متفاوت ممکن است رخ داده باشد؟

همبرگر، سوسیس، الیویه، و ماهی را به ترتیب با c، h، t، و f نمایش می‌دهیم. در اینجا با دفعات خرید هر ساندویچ و نه با ترتیبی که خریده می‌شوند سر و کار داریم، بنابراین مسأله یکی از موارد انتخاب یا ترکیبهای با تکرار است.

در جدول ۱ . ۵ بعضی از خریدهای ممکن را در ستون (a) و طریق دیگر نمایش هر خرید را در ستون (b) فهرست کرده‌ایم.

جدول ۱ . ۵

(a)	(b)
۱.c, c, h, h, t, t, f	۱.xx | xx | xx | x
۲.c, c, c, c, h, t, f	۲.xxxx | x | x | x
۳.c, c, c, c, c, c, f	۳.xxxxxx | | | x
۴.h, t, t, f, f, f, f	۴. | x | xx | xxxx
۵.t, t, t, t, t, f, f	۵. | | xxxxx | xx
٦.t, t, t, t, t, t, t	٦. | | xxxxxxx |
۷.f, f, f, f, f, f, f	۷. | | | xxxxxxx

در مورد خرید مربوط به ستون (b) ی جدول ۱ . ۵ چنین درمی‌یابیم که هر x واقع در سمت چپ بار (خط قائم) اول (۱) نمایشگر c اند، هر x بین بارهای اول و دوم نمایشگر h هستند، xهای بین بارهای دوم و سوم به جای tها قرار دارند، و هر x واقع در سمت راست بار سوم به جای f قرار دارند. به عنوان مثال، سومین خرید سه بار متوالی دارد زیرا کسی سوسیس یا الیویه نخریده است ؛ بار واقع در آغاز خرید چهارم دلالت بر این دارد که در این خرید همبرگری وجود نداشته است.

بار دیگر بین دو گردایهٔ اشیا تناظری برقرار شده است، که در آن چگونگی شمردن تعداد اشیا در یک گردایه را می‌دانیم.

در ستون (b) ی جدول ۱. ۵، جمع ترتیبهای ۱۰ نماد شامل هفت x و سه ۱ را می‌شماریم، بنابراین، بنا به تناظر مزبور، تعداد ترتیبهای متفاوت ستون (a) عبارت است از :

$$\frac{10!}{7!3!}=\binom{10}{7}$$

در مثال فوق توجه می‌کنیم که هفت x مورد بحث (هر یک برای یک دانش‌آموز سال اول) متناظر با اندازهٔ انتخاب است و برای جدا کردن ۴ =۱+۳ فقره غذای ممکنی که می‌توانند انتخاب شوند به سه بار نیاز است. ❑

در حالت عمومی، زمانی که مایل به انتخاب، *با تکرار*[۱]، r شیء از n شیء متفاوتیم، (چون در جدول ۱. ۵) درمی‌یابیم که در کار بررسی جمیع ترتیبات r، x و n − ۱، ۱ هستیم و تعداد این ترتیبات عبارت است از :

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=\binom{n+r-1}{r}$$

در نتیجه تعداد ترکیبات، *با تکرار*، n شیء که هر بار r شیء از آنها در نظر گرفته شوند، عبارت است از :

$C(n+r-1\ ,\ r)$

(در مثال ۱. ۲۵، n = ۴ ، r = ۷ ، بنابراین، زمانی که تکرار مجاز باشد، برای r امکان دارد که از n تجاوز کند.)

مثال ۱. ۲۶. یک مغازهٔ شیرینی‌فروشی ۲۰ نوع متفاوت شیرینی بزرگ ارائه می‌دهد. با فرض این که زمانی که داخل مغازه می‌شویم حداقل یک دوجین از هر نوع شیرینی موجود است، می‌توانیم یک دوجین شیرینی بزرگ را به

$C(20+12-1,\ 12)=C(31,\ 12)=141{,}120{,}525$

طریق انتخاب کنیم (در اینجا n = ۲۰ ، r = ۱۲). ❑

مثال ۱. ۲۷. رییس اداره‌ای چهار منشی با نامهای B(۱)، G(۲)، M(۳)، N(۴) دارد، و مایل است که به عنوان عیدی ۱۰۰ دلار، اسکناس ده دلاری، را بین آنها تقسیم کند.

a) رییس مزبور با پذیرفتن حالتی که طبق آن به یکی یا بیش از یکی از منشیها چیزی نرسد، در کار انتخابی به اندازهٔ ۱۰ (برای هر اسکناس ده دلاری یکی) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (چهار منشی)، با تکرار، است. این کار را می‌توان به

$C(4+10-1,\ 10)=C(13,\ 10)=286$

طریق انجام داد.

b) اگر قرار باشد که کسی خیلی آزرده نشود در این صورت لازم است که به هر منشی ۱۰ دلار برسد. در این حال رییس اداره با انتخابی به اندازهٔ ۶ (شش اسکناس ده دلاری باقیمانده) از همان گردایهٔ به اندازهٔ ۴ روبه‌رو است. و تعداد انتخابها در این مرحله $C(4+6-1,\ 6)=C(9,\ 6)=84$ است. (به عنوان مثال، انتخاب ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ به این معنی است که B پول اضافه‌ای به دست نمی‌آورد، در حالی که G، ۱۰ دلار اضافه می‌گیرد، به M، ۲۰ دلار اضافه می‌رسد، و N در مجموع ۴۰ دلار به دست می‌آورد.)

c) اگر لازم باشد که هر منشی حداقل ۱۰ دلار بگیرد و N، به عنوان سرمنشی، حداقل ۵۰ دلار دریافت کند، در این صورت تعداد طرقی که رییس اداره می‌تواند پول عیدی را، طبق آنها تقسیم کند، عبارت است از :

$$\underbrace{C\ (3+2-1,\ 2)}_{\text{N دقیقاً ۵۰ دلار می‌گیرد}} + \underbrace{C\ (3+1-1,\ 1)}_{\text{N دقیقاً ۶۰ دلار می‌گیرد}}$$

$$+\underbrace{C\ (3+0-1,\ 0)}_{\text{N دقیقاً ۷۰ دلار می‌گیرد}} = 10 = \underbrace{C\ (4+2-1,\ 2)}_{\text{با استفاده از روش قسمت (b)}}$$ ❑

اکنون، پس از مثالهایی که ترکیبات با تکرار را مورد استفاده قرار داده‌اند، به بررسی دو مثال شامل اصول دیگر شمارش نیز می‌پردازیم.

مثال ۱. ۲۸. به چند طریق می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را میان چهار کودک چنان تقسیم کرد که به هر کودک

حداقل یک سیب برسد؟

با دادن یک سیب به هر کودک، $C(4+3-1,\ 3)=20$ طریق تقسیم سه سیب دیگر و $C(4+6-1,\ 6)=84$ طریق تقسیم شش پرتقال را میان بچه‌ها داریم. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب $20\times 84=1680$ طریق تقسیم میوه‌ها با شرایط بیان شده موجودند. □

مثال ۱. ۲۹. قرار است پیامی متشکل از ۱۲ نماد متفاوت از طریق یک کانال ارتباطی فرستاده شود. فرستندهٔ موردبحث، علاوه بر ۱۲ نماد مزبور کلاً ۴۵ فاصله (سفید) نیز مابین نمادها، با حداقل سه فاصله بین هر جفت نماد متوالی، می‌فرستد. به چند طریق فرستنده می‌تواند پیام را بفرستد؟

در ترتیب دادن ۱۲ نماد متفاوت $12!$ طریق وجود دارد، به ازای هر یک از این ترتیبها ۱۱ مکان بین ۱۲ نماد مورد بحث موجودند. به علت این که باید بین نمادهای متوالی حداقل ۳ فاصله موجود باشند، ۳۳ فاصله از ۴۵ فاصله را مصرف می‌کنیم و اکنون باید جای ۱۲ فاصلهٔ باقیمانده را معین کنیم. این کار انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۱۲ (فاصله) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۱۱ (مکان) است، و می‌تواند به $C(11+12-1,\ 12)=646,646$ طریق انجام شود.

در نتیجه، فرستندهٔ مزبور، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌تواند پیام مورد نظر را با فاصله‌بندی مطلوب به $\binom{22}{12}(12!)=3/097\times 10^{14}$ طریق ارسال کند. □

در مثال بعدی به معرفی مفهومی می‌پردازیم که به نظر می‌رسد سر و کارش بیش از ترکیبات یا ترتیبات با نظریهٔ اعداد است. با وجود این، آشکار می‌شود که راه حل آن هم ارز شمارش ترکیبات با تکرار است.

مثال ۱. ۳۰. تمام جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

را، که در آن، به ازای هر $1\le i\le 4$، $x_i\ge 0$، بیابید.

یکی از جوابهای معادله عبارت است از $x_1=3$، $x_2=3$، $x_3=0$، $x_4=1$. (این جواب با جوابی چون $x_1=1$، $x_2=0$، $x_3=3$، $x_4=3$، با وجود این که در آن همان چهار عدد صحیح به کار رفته‌اند، متفاوت است.) یکی از تعبیرهای ممکن جواب $x_1=3$، $x_2=3$، $x_3=0$، $x_4=1$ این است که بخواهیم هفت ریال (اشیای یکسان) را بین چهار کودک (ظرف متمایز) توزیع کنیم، و در این حال به هر یک از دو کودک اول سه یک ریالی بدهیم، به سومی چیزی ندهیم، و آخرین یک ریالی را به چهارمین کودک بدهیم. با ادامه دادن به این تعبیر، ملاحظه می‌کنیم که هر جواب صحیح نامنفی معادلهٔ مورد بحث متناظر با انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۷ (یک ریالی یکسان) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (کودک متمایز) است، بنابراین، $C(4+7-1,\ 7)=120$ جواب موجود است. □

در این مرحله اهمیت دارد که هم‌ارزی موارد زیر را بشناسیم:

a) تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ
$x_1+x_2+\ldots+x_n=r \quad x_i\ge 0 \quad 1\le i\le n$

b) تعداد انتخابهای، با تکرار، به اندازهٔ r از گردایه‌ای به اندازهٔ n.

c) تعداد روشهایی که طبق آنها r شیء یکسان بتوانند بین n ظرف متمایز توزیع شوند.

مورد (c)، بر حسب توزیعات، تنها وقتی r شیء توزیع شده یکسان و n ظرف مربوطه متمایز باشند، درست است. هنگامی که هم r شیء و هم n ظرف متمایز باشند، می‌توانیم هر یک از n ظرف را به ازای هر یک از اشیای مزبور انتخاب کرده با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب n^r توزیع به دست آوریم.

هنگامی که اشیای مزبور متمایز اما ظرفها یکسان باشند، مسأله را با استفاده از اعداد استرلینگ از نوع دوم حل می‌کنیم. در مورد حالت نهایی، که در آن هم اشیا هم ظرفها یکسانند، نظریهٔ افرازهای اعداد صحیح، بعضی از مطالب لازم را به دست خواهد داد.

مثال ۱. ۳۱. به چند طریق شخص می‌تواند ۱۰ مهرهٔ سفید (یکسان) را بین شش ظرف متمایز توزیع نماید؟

حل این مسأله هم ارز یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$$

است. این تعداد، تعداد انتخابهای به اندازهٔ ۱۰، با تکرار، از گردایه‌ای به اندازهٔ ۶ است. در نتیجه پاسخ مسأله عبارت است از $C(6+10-1, 10) = 3003$. □

اکنون به بررسی دو مثال دیگر در ارتباط با موضوع این بخش می‌پردازیم.

مثال ۱. ۳۲. از مثال ۱. ۳۱ می‌دانیم که در مورد معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$، ۳۰۰۳ جواب صحیح نامنفی موجودند. در مورد نامساوی $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$ چند جواب از چنین جوابهایی وجود دارند؟

یکی از رهیافتهایی که در حل این نامساوی عملی به نظر می‌رسد تعیین تعداد چنین جوابهایی در مورد $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = k$ است، که در آن k عددی صحیح است و $0 \le k \le 9$. این روش گرچه در این حالت معقول است، در صورتی که به جای ۹ عددی تا اندازه‌ای بزرگتر، به طور مثال ۱۰۰، قرار گیرد غیرعملی می‌شود. اما، در آینده، اتحادی ترکیباتی را اثبات می‌کنیم که کمک می کند با استفاده از این رهیافت، راه حل دیگری در مورد این مسأله به دست آوریم.

در حال حاضر مسأله را با توجه به تناظر بین جوابهای صحیح و نامنفی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10 \qquad (1)$$

و جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 10$$
$$0 \le x_i,\ 1 \le i \le 6,\ 0 < x_7 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم.

تعداد جوابهای (۲) برابر تعداد جوابهای صحیح و نامنفی

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_6 + y_7 = 9$$

است، که در آن، به ازای $1 \le i \le 6$، $y_i = x_i$، و $y_7 = x_7 - 1$. این تعداد عبارت است از:

$$C(7+9-1, 9) = 5005$$ □

مثال ۱. ۳۳. در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$، هر جمله به صورت $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ است، بنابراین تعداد کل جمله‌های بسط تعداد جوابهای صحیح و نامنفی $n_1 + n_2 = n$ است (n_1 نمای x، n_2 نمای y است). این تعداد عبارت است از $C(2+n-1, n) = n+1$.

شاید چنین به نظر برسد که برای به‌دست آوردن نتیجهٔ فوق از استدلالی به‌نسبت طولانی استفاده کرده‌ایم. بسیاری از ما شاید مایل باشیم نتیجهٔ مزبور را بر مبنای تجربه‌هایمان در محاسبهٔ $(x+y)^n$، به ازای مقادیر کوچک و گوناگون n، بپذیریم.

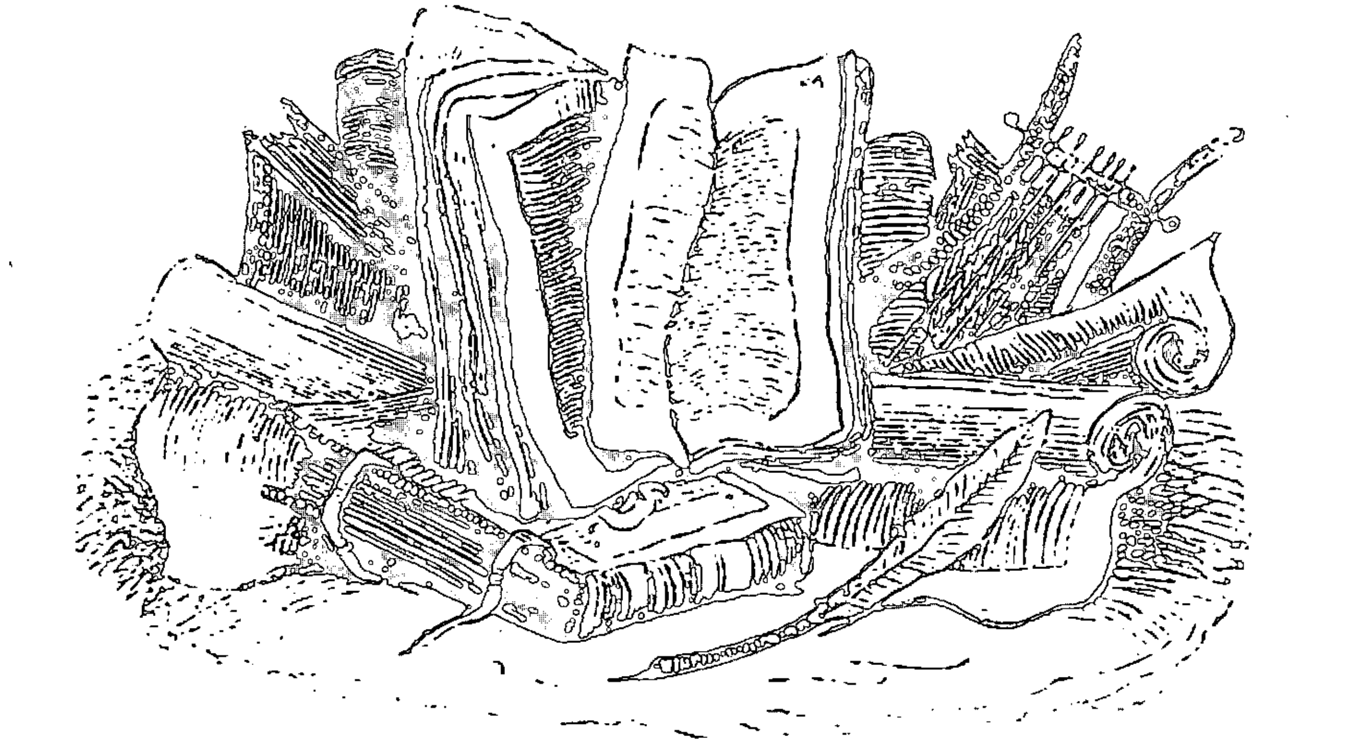
گرچه تجربه در شناخت نمونه‌ای دارای ارزش است، مورد دریافتن اصلی عمومی همواره کفایت ندارد، و در این حالت، در صورتی که مایل به دانستن این بودیم که در بسط $(w+x+y+z)^{10}$ چند جمله موجود است کارایی کمی از خود نشان می‌دهد.

در حالت فوق، هر جملهٔ متمایز به‌صورت $\binom{10}{n_1, n_2, n_3, n_4} w^{n_1} x^{n_2} y^{n_3} z^{n_4}$، با $0 \le n_i$، به ازای $1 \le i \le 4$، است و $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$. مسألهٔ اخیر را می‌توان به $C(4+10-1, 10) = 286$ طریق حل کرد، بنابراین در بسط $(w+x+y+z)^{10}$، ۲۸۶ جمله موجود است. □

دو مثال آخرمان در این بخش کاربردهایی از زمینهٔ دانش کامپیوتری به دست می‌دهند. گذشته از این، مثال آخر به فرمول مجموعه‌یابی مهمی منجر می‌شود که در بسیاری از مباحث بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

*** زیرنویس**

1. Repetition



تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۷)

□ در شمارهٔ هفدهٔ یکان راجع به **صفر** چنین می خوانیم :

صفری که اغلب دانش‌آموزان از آن نفرت دارند، صفر بی‌مقداری که هیچ کس او را دوست ندارد، داستان و تاریخ دلپذیری دارد. بین ارقام مختلف، صفر از همه جوانتر است. به مقیاس انسانی صفر را در مقابل سایر اعداد نوزادی بیش نباید دانست. در این صورت آیا این همه نفرت از این موجودی که(!) فرصت نداشته است آن‌طور که باید و شاید خود را نشان دهد بیجا نیست؟ شاید اگر عمر صفر به اندازهٔ عمر سایر اعداد بود اکنون یکی از عزیزترین اعداد به حساب می‌آمد. قبول ندارید؟ پس شما را به خواندن این داستان که داستانی جز سرگذشت صفر، این طفل یک شبه نیست دعوت می کنیم.

صفر اولین علامت از ده علامتی است که مبین ارقام است. ارقامی که ما می‌توانیم کلیهٔ اعداد فوق‌العاده بزرگ را به کمک آنها نشان دهیم ارقامی که تاروپود تمدن جدید بر آن استوار است. پس اولین رقمی است که باید با آن آشنا شویم. ولی باید اذعان داشت این اولین رقم آخرین رقمی بود که پیدا شد. یا بهتر بگوییم اولین عدد، آخرین عددی بود که کشف شد.

این دو واقعهٔ **پیدایش** و **کشف** صفر به موجب تاریخ اعداد در یک زمان اتفاق نیفتاد. پیدایش آن قرنها قبل از کشف آن اتفاق افتاد. تا سالهای تولد مسیح تصور صفر به عنوان یک عدد به فکر هیچ کس نرسیده بود. حتی در کلیهٔ مجامع مترقی آن زمان شکل نوشتن هریک از اعداد با علامتهای متفاوت بود. مثلاً مصریان قدیم اشکال مختلفی برای نشان دادن اعداد به کار می‌بردند. یونانیان از حروف الفبا برای بیان اعداد استفاده می کردند. رومیان با چند خط ساده که در سنگ نبشته‌ها دیده شده است اعداد را نشان می‌دادند.

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند ولی همهٔ آنها اعداد را دسته‌بندی نموده بودند به نحوی که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد.

. . . اولین بار کلمهٔ صفر را یک نفر هندی (به روایتی یک نفر ایرانی) به کار برد و پس از آن یک سری علامات برای محاسبات عملی به کار برده شد. در سالهای اول تولد حضرت مسیح یک نفر هندی گمنام (یا ایرانی) برای اولین بار نقطه را برای نشان دادن ستون یا میله‌ای که در چتکه شامل مهره نبود به

کار برد و آن‌را **Sunya** سنیا (خالی) نامید و بعد از آن صفر به عنوان اولین رقم ظاهر شد. ضمناً ناگفته نماند سنیای هندی فوق‌الذکر صفر نبوده بلکه یک علامت مکانیکی برای نشان دادن ستون خالی در چتکه بوده است. یعنی مفهوم آن معنی همان کلمهٔ (خالی) بود. هنوز هم در هندوستان همان علامت را برای مجهول که ما به‌صورت x نشان می‌دهیم به کار می‌برند. زیرا به نظر آنها تا زمانی که مجهول مشخص نشده است جایش خالی است.

سنیای هندی یا صفر به وسیلهٔ اعراب به اروپا سرایت نمود ولی از آنجا که تجار و محافظه‌کاران دچار یک نوع خودخواهی بودند از قبول آن خودداری نمودند (در سال ۱۳۰۰ کلیهٔ تجار استفادهٔ از ارقام هندی را برای نشان دادن اعداد منع کردند، به دلیل آن که مشکلتر از اعداد رومی به خاطر سپرده می‌شد!!).

هرچند که نتیجهٔ نهایی استعمال همین نقطه یا (سی فر) موجب شروع انقلاب بزرگی در نمایش اعداد شد اما هنوز صفر نشان‌دهندهٔ ستون خالی در چتکه بود (بعدها کلمهٔ ایتالیایی Zero جانشین کلمهٔ قدیمی Cipher یا Sifer شد) و هنوز جزء اعداد به حساب نمی‌آمد.

حتی این روزها هم با آن‌که صفر را به جای اعداد مختلف به کار می‌بریم ولی هنوز آن‌را جزء اعداد نمی‌شناسیم. روی ماشین تحریر یا صفحهٔ نمرهٔ تلفن آن‌را به کار می‌بریم ولی بعد از رقم ۹. درصورتی که ارزش آن از ۹ بیشتر نیست. پس به خوبی معلوم می شود که آن‌را به عنوان یک علامت به کار برده‌ایم نه رقم.

☐ در همین شماره دربارهٔ مسألهٔ لئوبزن «Leo Bourne» چنین آمده است:

آنچه را که در زیر مطالعه می‌کنید مسألهٔ لئوبرن می‌باشد که از مارچ ۱۹۶۲ به معرض مطالعه قرار داده شده است. مسأله این است که هرگاه n تعداد ارقام عددی و d تعداد ارقام جذر آن باشد بین n و d درصورتی که n زوج باشد رابطهٔ $d=\frac{1}{2}n$ و درصورتی که n فرد باشد رابطهٔ $d=\frac{1}{2}(n+1)$ برقرار است.

در اینجا ما مسأله را برای چند مقدار n ثابت می‌کنیم:

به‌طور مثال در مورد $n=3$ باید ثابت کنیم که عدد

$$N=\sqrt{100h+10t+u} \qquad (1)$$

عددی دورقمی است (بنابر فرمول فوق). این عدد را چنین می نویسیم:

$$N=\sqrt{100(h+\frac{10t+u}{100})}$$

و یا:

$$N=10\sqrt{h+\frac{10t+u}{100}} \qquad (2)$$

درصورتی که رادیکال (۱) ریشه‌اش عددی صحیح باشد رادیکال (۲) نیز ریشهٔ کاملی خواهد داشت. و چون $10t+u$ از ۱۰۰ کمتر است پس عدد زیر رادیکال (۲) دارای یک رقم صحیح با دو رقم اعشار می‌باشد و ریشهٔ دومش باید یک رقم صحیح با یک رقم اعشاری داشته باشد و از ضرب آن در ۱۰ عددی پیدا می‌شود که دارای دو رقم صحیح می‌باشد و فرمول ثابت می‌شود. با دانستن این که برای $n=1$ و $n=3$ فرمول صحیح است می‌توان با روشی مشابه ثابت نمود که رابطه برای $n=5$ و $n=7$ و غیره نیز صحیح است بنابراین در موردی که n فرد باشد صحت فرمول ثابت شد.

و در موردی که n زوج باشد در ازای $n=2$ عدد $\sqrt{10t+u}$ عددی یک رقمی خواهد بود و در موردی که $n=4$ باشد داریم:

$$N=\sqrt{1000p+100h+10t+u}$$

یا

$$N=\sqrt{100(10p+h+\frac{10t+u}{100})}$$

ویا

$$N=10\sqrt{10p+h+\frac{10t+u}{100}}$$

عدد زیر رادیکال دارای دو رقم صحیح و دو رقم اعشاری می‌باشد بنابراین جذر آن عددی با یک رقم صحیح و یک اعشار بوده و از ضرب آن در ۱۰ عددی حاصل می‌شود که دارای دو رقم صحیح می‌باشد. پس فرمول صحت دارد. با روشی مشابه می‌توان فرمول را در مورد $n=6$ و $n=8$ و غیره ثابت نمود پس به‌طور کلی مسألهٔ لئوبرن ثابت شد.

تذکر: در مورد هر مقداری از n که خواستیم فرمول را ثابت کنیم پس از نوشتن عدد به صورت حرفی در زیر رادیکال از بزرگترین توان زوج ۱۰ فاکتور می‌گیریم.

☐ در شمارهٔ ۱۸ یکان راه حل کلی مسألهٔ لئوبرن چنین آورده شده است:

فرض می‌کنیم عدد N دارای d رقم مراتب صحیح باشد. در این صورت داریم:

$$10^{d-1}\leq N<10^{d}$$

اجزای این نامساوی را مجذور می‌کنیم، می‌شود :

$$10^{2d-2} \le N^2 < 10^{2d}$$

اگر n تعداد ارقام مراتب صحیح عدد N^2 باشد، از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$2d - 1 \le n < 2d + 1$$

و دو حالت :

(۱) $n = 2d - 1$

یا

(۲) $n = 2d$

را خواهیم داشت که اگر n زوج باشد حالت (۲) صادق بوده داریم.

$$d = \frac{1}{2}n$$

و اگر n فرد باشد حالت (۱) صادق بوده داریم :

$$d = \frac{1}{2}(n+1)$$

❑ در همین شماره تحت عنوان :

«بی‌آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید»

چنین آمده است :

آقایان سینا، سامان و ساسان از جمله مسافران قطار سریع‌السیر تهران ــ خرمشهر می‌باشند. آنها می‌فهمند که آقایان : رانندهٔ لکوموتیو، کمک مکانیسین و بازرس قطار همنام آنها می‌باشند. با اطلاع بر این‌که :

۱) آقای سینا که مسافر است ساکن تهران می‌باشد.

۲) بازرس قطار در نیمه راه بین تهران و خرمشهر سکونت دارد.

۳) مسافر همنام بازرس قطار در خرمشهر زندگی می‌کند.

۴) یکی از سه نفر مسافران که خیلی نزدیک به محل سکونت بازرس ساکن است، در ماه دقیقاً سه برابر شخص اخیر درآمد دارد.

۵) مسافری که نامش سامان است در ماه ۸۰۰۰ ریال درآمد دارد.

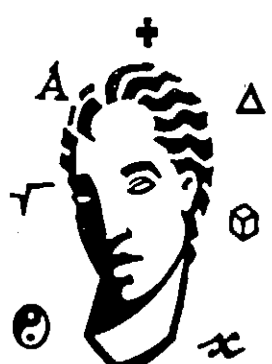
۶) کارمند قطار که همنام ساسان است تازگیها کمک مکانیسین را در بازی بیلیارد مغلوب کرده است.

نام رانندهٔ لکوموتیو را تعیین کنید.

❑ راه حل این مسأله را در شمارهٔ بعد یعنی شمارهٔ ۱۹ چنین می‌خوانیم :

می‌دانیم که بازرس قطار در نیمه راه تهران و خرمشهر سکونت دارد (۲). یکی از مسافران در تهران ساکن است (۱) و یکی دیگر در خرمشهر (۳)، بنابراین هیچ یک از این دو نفر نمی‌تواند نزدیک به محل سکونت بازرس سکونت داشته باشد.

نتیجه می‌شود که همسایهٔ نزدیک بازرس سینا نیست (۱). سامان هم نیست زیرا درآمد ماهانه او بر ۳ بخشپذیر نیست (۵ و ۴)، بنابراین ساسان بوده و بازرس همنام ساسان نخواهد بود (۳). کمک مکانیسین هم همنام ساسان نیست (۶) پس ساسان نام رانندهٔ لکوموتیو است. مسافر به نام سینا در تهران ساکن است، مسافر به نام ساسان در نزدیکیهای نیمه راه تهران ــ خرمشهر سکونت دارد، پس مسافر به نام ساسان در خرمشهر ساکن است (۳). و نتیجه می‌شود که بازرس قطار سامان نام دارد (۳) و نام کمک مکانیسین سینا می‌باشد.



تفریح اندیشه ۲

☆ ــ در فهرست غذای آماده رستورانی چنین آمده است:

واحد پول ۳/۷۲ = سیب‌زمینی سرخ کرده + شیرموز + همبرگر

۲ تا سیب‌زمینی‌سرخ‌کرده + یک شیرموز= یک‌همبرگر

یک سیب‌زمینی سرخ کرده + یک همبرگر = ۳ تا شیرموز

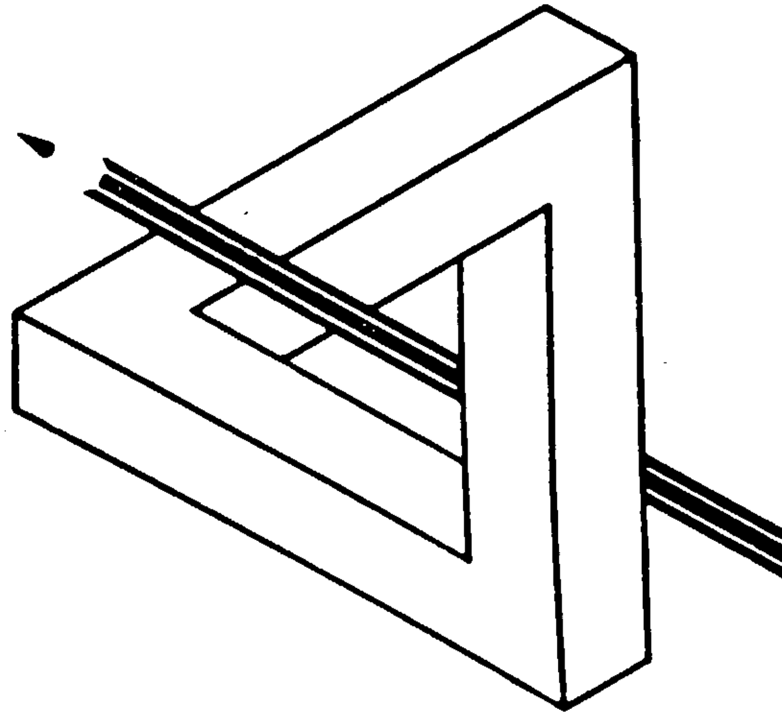
قیمت یک همبرگر، یک شیرموز و دو تا سیب‌زمینی سرخ کرده چقدر است؟

جواب در صفحه ۸٦

تجزیه چند جمله ایها از طریق ریشه‌یابی

(برای دانش‌آموزان سال اول دبیرستان)

● رضا پیکر



مفهوم تجزیه: تجزیه یک چندجمله‌ای عبارتست از تبدیل آن چند جمله‌ای به صورت حاصل ضرب دو یا چند عامل. تجزیه وقتی کامل است که هریک ازعاملهای به‌دست آمده اول (تجزیه‌ناپذیر) باشند. به بیان دیگر منظور از تجزیه یک چندجمله‌ای نوشتن آن به‌صورت حاصل ضرب عاملهای اول است. به‌عنوان مثال چندجمله‌ای:

$$q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 5$$

را می‌توان به‌صورت $(2x-5)(x^2-2x+1)$ تجزیه کرد ولی صورت اخیر یک تجزیهٔ کامل از چند جمله ای $q(x)$ نیست چرا که می‌توان عبارت (x^2-2x+1)را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل $(x-1)(x-1)$ نوشت. بنابراین تجزیه کامل چند جمله‌ای $q(x)$ عبارت است از: $(2x-5)(x-1)^2$. هریک از پرانتزهای $(x-1)$، $(x-1)$ و $(2x-5)$ را یک عامل اول چند جمله‌ای $q(x)$ می‌گویند.

◄ عامل اول

چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ را با ضرایب صحیح در نظر بگیرید (a_0، a_1، ....، a_{n-1}، a_n را که متعلق به مجموعه اعداد صحیح می باشند ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ می گوییم.). چندجمله‌ای $P(x)$را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب n عامل و به‌صورت زیر نوشت:

$$P(x) = (b_1 x + c_1)(b_2 x + c_2).....(b_n x + c_n)$$

که ممکن است ضرایب هریک از عاملها اعداد گویا نباشند بلکه این اعداد شاید اعداد گنگ و یا متعلق به مجموعهٔ اعداد مختلط باشند. (این مطلب را می‌توان بسادگی از این مطلب که هر معادلهٔ درجه n و به‌صورت

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

دقیقاً دارای n ریشه است نتیجه‌گیری کرد که شما در سالهای بالاتر و شاید در دورهٔ دانشگاه با اثبات آن آشنا خواهید شد.) هریک از عاملهای $(b_1 x + c_1)$، $(b_2 x + c_2)$ .... و $(b_n x + c_n)$ را اول می گوییم هرگاه تمامی اعداد $b_1, b_2, \ldots b_n$ و $c_1, c_2, \ldots c_n$ اعداد گویا باشند در غیر اینصورت عاملهای یاد شده را عامل اول نمی‌خوانیم. به‌طور مثال چند جمله‌ای:

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب جملات $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ تجزیه کرد. از آنجا که ضرایب هریک از عاملهای به‌دست‌آمده اعدادی گویا می‌باشند پس هر پرانتز را یک عامل اول چند جمله‌ای مذکور می‌خوانیم. اکنون چند جمله‌ای:

$$x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 100x - 5$$

را در نظر بگیرید. این چند جمله‌ای را می‌توان بصورت

حاصل‌ضرب $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})(x+5)(x-5)$ نوشت. پرانتزهای $(x-2+\sqrt{2})$ و $(x-2-\sqrt{2})$ را عاملهای اول چند جمله‌ای یاد شده نمی‌خوانیم چرا که دارای ضرایب گویا نیستند. اما حاصل ضرب دو پرانتز اخیر عامل x^2-4x+2 را به‌دست می‌دهد که این عامل دارای ضرایب گویا است و آن را یک عامل اول چند جمله‌ای مورد نظر می‌خوانیم و تجزیه چند جمله‌ای یاد شده به‌صورت حاصل‌ضرب سه پرانتز $(x^2-4x+2)(x+5)(x-5)$ خواهد بود. از این مثال چنین نتیجه می‌گیریم که هر عامل اول یک چند جمله‌ای حتماً نباید یک چند جمله ای درجه اول به‌صورت $(bx+c)$ باشد بلکه این عامل می‌تواند به‌صورت یک چند جمله‌ای تجزیه‌ناپذیر از نوع درجه دوم، سوم و یا بیشتر باشد. بنابراین منظور از عامل اول در مبحث تجزیه، چندجمله‌ایی از درجه یک، دو یا بیشتر است که هریک از ضرایب این چند جمله ای اعدادی گویا باشند و در ضمن قابل تجزیه به عامل یا عامل‌های اول دیگر نباشد.

◄ تجزیه بوسیلهٔ ریشه‌یابی

برای تجزیه یک چندجمله‌ای مفروض باید روشهای ابتکاری به‌کار برد. یکی از کاربردهای تجزیه در آن است که بدان وسیله می‌توان ریشه‌های یک چند جمله‌ای مفروض را به‌دست آورد. امّا گاهی روشی که برای تجزیهٔ آن چند جمله‌ای به کار می‌رود، به آنجا می‌انجامد که باید ریشه‌های آن چند جمله‌ای را حدس زد. به چنین روشی تجزیه به‌وسیلهٔ ریشه‌یابی می‌گویند.

چند جمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ را در نظر بگیرید. اگر α ریشه چند جمله‌ای $P(x)$ باشد بدین منظور که هرگاه در معادلهٔ $P(x)=0$ به جای x مقدار α را قرار دهیم، معادله برقرار باشد، آنگاه چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است و درنتیجه $P(x)$ بصورت $(x-\alpha)Q(x)$ تجزیه می‌شود که البته امکان دارد صورت اخیر یک تجزیه کامل $P(x)$ نباشد که باید در تجزیه‌پذیری $Q(x)$ کاوش کرد. به‌عنوان مثال عدد ۳ ریشهٔ چند جمله‌ای x^3-2x^2-4x+3 است بدین معنی که عدد ۳ چند جمله‌ای اخیر را صفر می‌کند. از اینرو این چند جمله‌ای بر $(x-3)$ بخش‌پذیر است. با تقسیم چندجمله‌ای بر عامل $(x-3)$ می‌توانیم آن‌را تجزیه کنیم و خواهیم داشت:

$$x^3-2x^2-4x+3=(x-3)(x^2+x-1)$$

صورت اخیر یک تجزیه کامل از چند جمله‌ای مفروض است چرا که چند جمله‌ای x^2+x-1 تجزیه‌ناپذیر است و خود یک عامل اول است.

در تجزیه به روش ریشه‌یابی حتماً یک عامل اول درجه یک به‌دست می‌آید. و تنها درصورتی که چند جمله‌ای مورد نظر دارای عامل اول درجه یک باشد می‌توان از طریق ریشه‌یابی اقدام به تجزیه آن کرد در غیر این‌صورت می‌بایست از روشهای ابتکاری کمک گرفت.

◄ حدس ریشهٔ α

منظور از حدس ریشهٔ α پیدا کردن عددی است که چند جمله‌ای به ازای آن صفر شود. برای پیدا کردن این عدد مجاز هستیم هر عدد دلخواه را در چند جمله‌ای امتحان کنیم. امتحان هر عدد دلخواه کاری وقت‌گیر و پردردسر است، از اینرو باید روشی برای پیدا کردن محدودهٔ اعدادی که چند جمله‌ای مورد نظر را صفر می‌کند پیدا کنیم. برای این منظور به بیان و اثبات قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیه: چند جمله‌ای

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

با ضرایب صحیح مفروض است اگر این چند جمله‌ای به ازای عدد گویای $\frac{b}{c}$ که به ساده‌ترین صورت است[1]، صفر شود آنگاه b یک مقسوم‌علیه a_0 و c یک مقسوم علیه a_n است.

قبل از اثبات قضیه مطلب را با یک مثال روشن می‌کنیم: چند جمله ای $2x^3-9x^2-6x+5$ را در نظر بگیرید قضیه حکم می‌کند که اگر $\frac{b}{c}$ یک ریشهٔ این چند جمله‌ای باشد آنگاه b یک مقسوم‌علیه ۵ و c یک مقسوم‌علیه ۲ است از اینرو عدد b می‌تواند یکی از اعداد ۵+، ۵−، ۱+، ۱− و c می‌تواند یکی از اعداد ۲+، ۲−، ۱+ و ۱− باشد پس $\frac{b}{c}$ قطعاً به مجموعه اعداد زیر تعلق خواهد داشت.

$$\left\{\frac{+5}{+2},\frac{+5}{-2},\frac{+5}{+1},\frac{+5}{-1},\frac{-5}{+2},\frac{-5}{-2},\frac{-5}{+1},\frac{-5}{-1},\right.$$

۱ـ منظور از این که $\frac{b}{c}$ به ساده‌ترین صورت است این است که b و c نسبت به هم اولند یا $(b,c)=1$

$$\left\{\frac{+1}{+2},\frac{+1}{-2},\frac{+1}{+1},\frac{+1}{-1},\frac{-1}{+2},\frac{-1}{-2},\frac{-1}{+1},\frac{-1}{-1}\right\}$$

که فهرست اعداد فوق تنها شامل ۸ عدد متمایز خواهد بود که عبارتند از :

$$\left\{\mp\frac{5}{1},\mp\frac{5}{2},\mp\frac{1}{2},\mp\frac{1}{1}\right\}$$

که می‌توان ثابت کرد از این اعداد فقط عدد ۵+ ریشه چند جمله‌ای خواهد بود.

اثبات قضیه: فرض می‌کنیم $\frac{b}{c}$ یک ریشهٔ چند جمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ باشد. در این‌صورت اگر به جای x مقدار $\frac{b}{c}$ را قرار دهیم آنگاه $p(x)=0$ برقرار خواهد بود پس داریم :

$$a_n(\frac{b}{c})^n+a_{n-1}(\frac{b}{c})^{n-1}+\cdots+a_1(\frac{b}{c})+a_0=0$$

با ضرب طرفین در c^n داریم :

$$a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}c+...+a_1bc^{n-1}+a_0c^n=0 \quad (I)$$

$$a_nb^n=-a_{n-1}b^{n-1}c-a_{n-2}b^{n-2}c^2-\cdots-a_1bc^{n-1}-a_0c^n$$

$$a_nb^n=c(-a_{n-1}b^{n-1}-a_{n-2}b^{n-2}c-\cdots-a_1bc^{n-2}-a_0c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که c یک مقسوم‌علیه a_nb^n است و از آنجا که c نسبت به b اول است پس نسبت به b^n نیز اول خواهد بود و درنتیجه c یک مقسوم علیه a_n است. تاکنون نیمی از قضیه به اثبات رسیده است حال معادلهٔ (I) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_0c^n=-a_nb^n-a_{n-1}b^{n-1}c-\cdots-a_1bc^{n-1}$$

$$a_0c^n=b(-a_nb^{n-1}-a_{n-1}b^{n-2}-\cdots-a_1c^{n-1})$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که b یک مقسوم علیه a_0c^n است و از آنجا که b نسبت به c اول است پس نسبت به c^n نیز اول خواهد بود و درنتیجه b یک مقسوم علیه a_0 است.

به این ترتیب برای حدس یک ریشهٔ چندجمله‌ای دلخواه با آزمایش چند عدد می‌توان در صورتی که چند جمله‌ای دارای ریشه باشد آن را به دست آورد.

مثال : چند جمله‌ای $2x^3-23x^2+67x-28$ را تجزیه کنید.

اگر چندجمله‌ای مفروض دارای ریشه باشد، این ریشه مطابق بحث گذشته اگر $\frac{b}{c}$ باشد، عدد b باشد، عدد b یک مقسوم‌علیه ۲۸- و عدد c یک مقسوم‌علیه ۲ خواهد بود. از این‌رو b می‌تواند یکی از اعداد ۱∓، ۲∓، ۴∓، ۷∓، ۱۴∓، ۲۸∓ و c می‌تواند یکی از اعداد ۱∓ و ۲∓ باشد. بنابراین ریشه یا ریشه‌های چند جمله‌ای در صورت وجود حتماً متعلق به مجموعهٔ اعداد زیر خواهند بود :

$$\left\{\mp1,\mp\frac{1}{2},\mp2,\mp4,\mp7,\mp\frac{7}{2},\mp14,\mp28\right\}$$

با صرف اندکی وقت و آزمایش اعداد یاد شده در چند جمله‌ای درمی‌یابیم که اعداد ۴+ و ۷+ و $+\frac{1}{2}$ ریشه‌های چند جمله‌ای مورد نظر هستند پس این چند جمله ای بر عاملهای $(x-4)$، $(x-7)$ و $(x-\frac{1}{2})$ بخش‌پذیر است و بنابراین تجزیه کامل چند جمله‌ای مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$2x^3-23x^2+67x-28=2(x-4)(x-\frac{1}{2})(x-7)$$

اکنون به نتیجه‌ای که از قضیهٔ اخیر حاصل می‌شود توجه کنید :

* چندجمله‌ای $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$، $(a_n=1)$ را که ضرایب آن عددهای صحیح هستند مفروض است. اگر این چندجمله‌ای یک ریشهٔ گویا داشته باشد آن ریشه یک عدد صحیح است و همچنین یک مقسوم‌علیه a_0 است.

تمرین

۱ ــ ثابت کنید :

الف ــ هرگاه مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای برابر با صفر باشد یک ریشهٔ آن برابر با ۱ است.

ب ــ هرگاه مجموع ضرایب جملات توان زوج، با مجموع ضرایب جملات توان فرد در یک چندجمله‌ای برابر باشد یک ریشهٔ آن چند جمله‌ای برابر با ۱- است.

۲ ــ چند جمله‌ایهای زیر را تجزیه کنید :

۱) $3x^2+2x-8$

۲) $2x^2-13x+20$

۳) $6x^2-25x+14$

۴) $4x^3+7x^2-10x+2$

۵) x^4+x^2-6x+4

۶) $x^4+4x^3-12x^2-32x+64$

۷) $8x^4-80x^3+258x^2-310x+100$

۸) $x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$

۹) $x^6-2x^5-10x^4+10x^3-10x^2+11x-12$

۱۰) $x^7+2x^6-12x^5-24x^4+48x^3+96x^2-64x-128$

یک حالت ویژه

چند جمله‌ای درجهٔ زوج :

$R(x)=2x^4-3x^3+2x^2-3x+2$ را درنظر بگیرید. برای تجزیه این چند جمله‌ای از طریق ریشه‌یابی مطابق بحث گذشته می‌بایست اعداد $\{\mp1,\mp\frac{1}{2},\mp2\}$ را در آن امتحان کرد. با کمی صرف وقت مشخص می‌شود که هیچ‌کدام از اعداد یادشده ریشهٔ چندجمله‌ای $R(x)$ نمی‌باشند. این بدان معنی نیست که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه‌ناپذیر است و دارای عامل اول نیست بلکه این مطلب را می‌رساند که دارای عامل درجه یک نیست یا به بیان دیگر $R(x)$ را نمی‌توان به صورت $R(x)=(ax+b)\,Q(x)$ نوشت که $Q(x)$ چند جمله ای درجه سوم باشد. امّا امکان دارد چند جمله ای $R(x)$ به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای درجه دوم و به شکل کلّی

$R(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$ تجزیه شود. برای بررسی این احتمال به روش زیر عمل می کنیم :

$$2x^4-3x^3+2x^2-3x+2=x^2\left[2x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right]$$

عبارت داخل کروشه را برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب می کنیم. داریم :

$$x^2\left[2x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right]=x^2\left[2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-2\right]$$

با فرض $x+\frac{1}{x}=y$ خواهیم داشت :

$$x^2\left[2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-2\right]=x^2\left[2y^2-3y-2\right]$$

عبارت $(2y^2-3y-2)$ از طریق ریشه‌یابی قابل تجزیه است و داریم :

$$x^2\left[2y^2-3y-2\right]=x^2\left[(2y+1)(y-2)\right]$$

چنانچه به جای y در عبارت فوق مقدار مساویش یعنی $x+\frac{1}{x}$ را قرار داده و ساده کنیم خواهیم داشت :

$$x^2\left[(2(x+\frac{1}{x})+1)(x+\frac{1}{x}-2)\right]=(2x^2+x+2)(x^2-2x+1)$$

بنابراین هرچند جمله‌ای درجه چهارم که به شکل $R(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ باشد این قابلیت را دارد که با فاکتورگیری از x^2 چندجمله‌ای را برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب کرده و در صورتی که چند جمله‌ای $R(x)$ تجزیه‌پذیر باشد با استفاده از ریشه‌یابی به تجزیه آن پرداخت زیرا می‌توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}R(x)&=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a\\&=x^2\left[a(x+\frac{1}{x})^2+b(x+\frac{1}{x})-2a+c\right]\end{aligned}$$

چنانچه $R(x)$ تجزیه‌پذیر باشد عبارت داخل کروشه را می‌توان با درنظر گرفتن $x+\frac{1}{x}=y$ و از روش ریشه‌یابی تجزیه کرد که در مرحله بعدی با جایگزین کردن مقدار $x+\frac{1}{x}$ به جای y عاملهای اول $R(x)$ به دست خواهند آمد.

همچنین می توان چند جمله‌ای درجه ششم

$K(x)=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a$

را با فاکتورگیری از x^3 و مرتب کردن برحسب $x+\frac{1}{x}$ به روش فوق تجزیه کرد. به مثال زیر توجه کنید.

چند جمله‌ای $K(x)=6x^6-x^5+13x^4+13x^2-x+6$ را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned}&6x^6-x^5+13x^4+13x^2-x+6\\&=x^3\left[6x^3-x^2+13x+\frac{13}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right]\\&=x^3\left[6(x^3+\frac{1}{x^3})-(x^2+\frac{1}{x^2})+13(x+\frac{1}{x})\right]\end{aligned}$$

$$=x^3\left[6(x+\frac{1}{x})((x+\frac{1}{x})^2-3)-(x+\frac{1}{x})^2+2+13(x+\frac{1}{x})\right]$$

چنانچه $x+\frac{1}{x}=y$ را فرض کنیم داریم :

$$=x^3\left[6y(y^2-3)-y^2+2+13y\right]=x^3\left[6y^3-y^2-5y+2\right]$$

عبارت $(6y^3-y^2-5y+2)$ از طریق ریشه‌یابی قابل تجزیه به سه پرانتز $(y+1)(3y-2)(2y-1)$ است و درنتیجه

داریم :

$$x^3\left[6y^3 - y^2 - 5y + 2\right] = x^3\left[(2y-1)(3y-2)(y+1)\right]$$

با جایگزینی $x+\frac{1}{x}$ به جای y در عبارت فوق و ساده کردن خواهیم داشت :

$$k(x) = (2x^2 - x + 2)(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 1)$$

استفاده از همین روش، تجزیهٔ چند جمله‌ایهای مشابه را با توانهای بالاتر در صورت تجزیه‌پذیر بودن ممکن می‌سازد که تحقیق در این زمینه را به عهدهٔ دانش آموزان می‌گذاریم.

تمرین: چند جمله ایهای درجه زوج زیر را تجزیه کنید.

1) $9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x + 9$

2) $6x^4 + x^3 + 11x^2 + x + 6$

3) $x^6 + 2x^5 - 20x^4 - 56x^3 - 20x^2 + 2x + 1$

4) $27x^6 - 54x^5 + 117x^4 - 116x^3 + 117x^2 - 54x + 27$

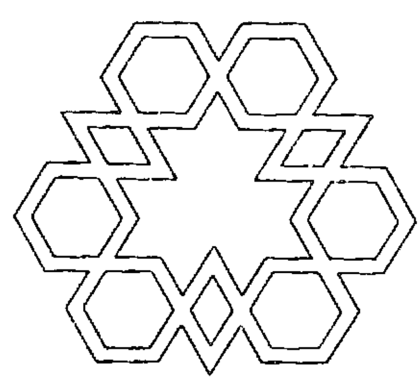
5) $x^8 - 14x^6 + 51x^4 - 14x^2 + 1$

راهنمایی: برای تجزیهٔ شماره ۵ از x^4 فاکتور بگیرید و سپس برحسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب کنید.

6) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 2$

7) $x^6 + 6x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 6x - 1$

راهنمایی: برای تجزیه تمرینهای شماره ۶ و ۷ به ترتیب از x^2 و x^3 فاکتورگیری کرده برحسب $(x-\frac{1}{x})$ مرتب کنید و مطابق شیوهٔ مذکور تجزیه کنید.





ادب ریاضی

ریاضیات، در مسیر پیشرفت تکاملی خود، هم زیر تأثیر انگیزه بیرونی بوده است و هم زیر فشار انگیزهٔ درونی. انگیزهٔ بیرونی، یعنی نیازهای زندگی و نیازهای دانشهای طبیعی به ریاضیات؛ و انگیزه درونی، یعنی استدلال و منطق درونی ریاضیات که بر پایهٔ روش قیاسی شکل گرفته است.

از یک طرف، با بغرنجتر شدن زندگی اجتماعی و اقتصادی و در عین حال، با نیاز روزافزونی که دانشهای طبیعی، به‌ویژه اخترشناسی، فیزیک، موسیقی، اقتصاد، زیست‌شناسی،... برای دقیقتر شدن و «به‌ریاضی درآمدن» دارند، برای ریاضیات مسأله‌های تازه‌ای مطرح می‌شود و شاخه های تازه‌ای پدید می‌آید و، از طرف دیگر، منطق درونی ریاضیات، موجب استوارتر شدن مبانی پیشین و درک دقیقتر و قابل انعطافتر مفهومهای ریاضی می‌شود.

این دو انگیزه، بیرونی و درونی، هر دو همیشه در کار پیشبرد ریاضیات بوده‌اند. ولی گاه این و گاه آن پیشی گرفته و نیرومندتر عمل کرده است. با وجود این، هیچ کدام از این دو انگیزه نمی‌تواند برای مدتی بسیار طولانی، یکه‌تاز باشد و تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که دیر یا زود، به هم می‌رسند و «انتزاع» به یاری «عمل» می‌آید و «عمل»، «انتزاعهای تازه‌ای» را مطرح می‌کند.

از مقاله «ریاضیات کاربردی»
نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶

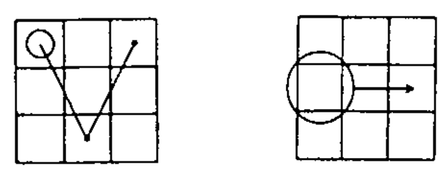


● نوشتهٔ مارتین گاردنر ● ترجمهٔ حسن نصیرنیا

در پیرامون منظومهٔ شمسی

(قسمت سوم)

اگر قطر سکه از طول ضلع هر خانه کوچکتر باشد، بسادگی می‌توان فهمید که با دو بار لغزاندن آن، سکه از قسمتی از هریک از خانه‌ها عبور می‌کند. اما اگر قطرش بزرگتر از طول هر خانه باشد، با انجام یک حرکت (مطابق شکل) مقصود حاصل می‌شود.



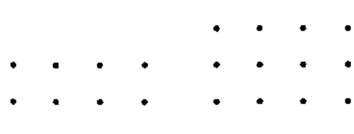
دو حرکت یک حرکت

بدیهی است که این مسئلهٔ اصلی برای خانه‌های مشبکه در هر آرایهٔ مستطیلی و نیز خانه‌های آرایه‌های مثلثی و سایر الگوها قابل تعمیم است. بسیاری از این‌گونه مسأله‌ها را که غالباً در شکل حرکتهای مختلف مهرهٔ وزیر در بازی شطرنج تعمیم یافته است؛ می‌توان در کتابهای معمایی سام‌لوید[1] و هنری ا. دودنی[2] ملاحظه کرد. از جمله مقاله‌های پیشگامی که به‌تعمیم مسألهٔ یادشده پرداخته، مقاله‌ای است تحت عنوان

Unicursal Polygonal Paths & other Graphs on Lattice Points

تألیف سالومن و. گولوم[3] و جان ل. سلفریج[4] که در مجلهٔ تخصصی پی، مو، اپسیلون، دورهٔ ششم، پاییز ۱۹۷۰، انتشار یافته است. مسأله در اینجا پیدا کردن مسیرهای کثیرالاضلاعی از راه نقطه‌های مشبکه است و نه خانه‌ها.

در زیر مجموعه‌ای از نقطه‌هایی را می‌بینید که جایگزین خانه‌های مشبکه شده‌اند. در اینجا از بازیکن خواسته می‌شود با کشیدن خطهایی که باید از نقطه‌ها بگذرند، مسیرهای پیوستهٔ چندضلعی شکل بسازد. برای برانگیختن علاقهٔ شما نسبت به‌موضوع گسترده و نامکشوف سرگرمیهای مربوط به‌نظریه نمودارها، آرایه‌های ۳×۴ و ۴×۴ زیر را در نظر می‌گیریم.



به‌کمک مسیرهای پیوسته از پاره‌خطهای مستقیم باید از نقطه‌های فوق عبور کرد. منظور از مسیر بسته آن است که مسیر پیوستهٔ خطها از نقطه‌ای که آغاز می‌شود به‌همان نقطه که لزوماً یکی از نقاط مشبکه نیست منتهی گردد. هر وضعیت دیگری که غیر از این باشد، مسیر باز نامیده می‌شود. می‌توان از نقطه‌های هریک از مشبکه‌های بالا، با حداقل شش قطعه خط گذشت. تشکیل مسیرهای بسته به‌مراتب مشکلتر از مسیرهای باز است. آیا می‌توانید برای هر الگو یک مسیر بستهٔ متشکل از ۶ قطعه خط بیابید؟

1. Sam Loyd 2. Henry E. Dudeney 3. Solomon W. Golomb 4. John L. Selfridge



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

کُدگذاری اطلاعات
و نمایش اعداد صحیح و اعشاری در کامپیوتر (۷)

□ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

روش دوم مکمل‌گیری ذهنی[1]: در این روش چه عدد A یک عدد صحیح مثبت باشد و چه یک عدد ممیزی مثبت (که در این حالت به‌طور موقت از ممیز صرف‌نظر می‌کنیم)، برای محاسبهٔ مکمل ۲ عدد A ، ابتدا رقم یا رقمهای صفر سمت راست عدد A را کنار گذاشته به‌محض رسیدن به‌اولین ۱، در عدد A ، آن را می‌نویسیم، به‌دنبال آن تمام یک‌ها به‌صفر و تمام صفرها را به‌یک تبدیل می‌کنیم.

مثال: مکمل ۲ عدد $_۲$(۱۰۱۱۰۱۰) را با روش بالا به‌دست آورید.

حل:

A=۱۰۱۱۰۱۰ ⇐ مکمل ۲ عدد A = ۰۱۰۰۱۱۰

اولین رقم غیر صفر = ۱۰۰۱۱۰

مثال: مکمل ۲ عدد $_۲$(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱) را به‌دست آورید.

حل: چون عدد داده شده دارای ممیز است به‌طور موقت ممیز عدد را حذف و عددرا بدون‌ممیز درنظر می‌گیریم و طبق‌دستور بالا مکمل ۲ آن را به‌دست می‌آوریم، سپس ممیز را در مکان مربوطه‌اش قرار می‌دهیم. بنابراین،

A = ۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱

عدد A بدون ممیز = ۱۰۰۱۰۰۱۰۱۰۱

مکمل ۲ عدد A بدون ممیز = ۱۱۰۱۱۰۱۰۱۱

در نتیجه:

مکمل ۲ عدد $_۲$(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱) = $_۲$(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)

در نتیجه مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳) عدد $_{۱۶}$(EDD) است.

مثال: مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳/۱۲) را با روش ذهنی به‌دست آورید.

```
  FFF/F (۱۶)
-۱۲۳ ۱   ۲
-----------
  E D C/E E
```

درنتیجه مکمل ۱۶ عدد $_{۱۶}$(۱۲۳/۱۲) عدد $_{۱۶}$(EDC/EE) است.

۳ـ استفاده از مکمل ۱ − b : هرگاه عدد A دارای m رقم در قسمت ممیزدار باشد، آنگاه مکمل b عدد A با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

مکمل b عدد A = مکمل ۱ − b + b^{-m}

تذکر: اگر عدد A قسمت ممیزدار نداشته باشد در آن صورت $m=0$ می‌شود و مکمل b عدد A با افزودن یک به‌مکمل b−۱ به‌دست می‌آید، یعنی:

۱ + مکمل b−۱ = مکمل b عدد A

مثال: مکمل ۲ عدد $(1011010)_2$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$(1011010)_2$ مکمل ۲ عدد $= 100101+1=100110$

مثال: مکمل۲عدد $(11001101 0)_2$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$(110011010)_2$ مکمل ۲ عدد $=(1100.101)_2+1$

$=(1100110)_2$

مثال: مکمل ۲ عدد $(10010/010101)_2$ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

$(10010/010101)_2$ مکمل ۲ عدد

$=(1101/101010)_2+1$

$=(1101/101011)_2$

مثال: مکمل ۸ عدد $(4563)_8$ رابا استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

حل:

$(4563)_8$ مکمل ۸ عدد $=(3214)_8+1$

$=(3215)_8$

مثال: مکمل ۸ عدد $(123/456)_8$ را با استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

حل: از آنجا که $m=3$ است درنتیجه:

$(123/456)_8$ مکمل ۸ عدد

$=(654/321)_8+8^{-3}$

$=(654/321)_8+(0/001)_8=(654/322)_8$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(74/360)_{10}$ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل: $m=3$ است. درنتیجه:

$(74/360)_{10}$ مکمل ۱۰ عدد

$=(25/639)_{10}+10^{-3}=(25/640)_{10}$

مثال: مکمل ۱۰ عدد $(18)_{10}$ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

$(18)_{10}$ مکمل ۱۰ عدد $=(81)_{10}+1=(82)_{10}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(123)_{16}$ را با استفاده از مکمل ۱۵ به‌دست آورید.

حل:

$(123)_{16}$ مکمل ۱۶ عدد $=(EDC)_{16}+1=(EDD)_{16}$

مثال: مکمل ۱۶ عدد $(123/12)_{16}$ را با استفاده از مکمل ۱۵ به‌دست آورید.

حل: $m=2$ است. درنتیجه:

$(123/12)_{16}$ مکمل ۱۶ عدد

$=(EDC/ED)_{16}+16^{-2}$

$=(EDC/ED)_{16}+(0/01)_{16}$

$=(EDC/EE)_{16}$

حال وقت آن رسیده است تا محاسبهٔ مکمل b−۱ یک عدد را با استفاده از مکمل b توضیح دهیم.

محاسبهٔ مکمل b−۱ با استفاده از مکمل b: می‌دانیم بین مکمل b و مکمل b−۱ عدد مثبت A با m رقم در قسمت ممیزی، رابطه زیر برقرار است:

مکمل b = مکمل b−۱ $+b^{-m}$

در نتیجه

مکمل b−۱ = مکمل b $-b^{-m}$

اگر عدد A قسمت ممیزی نداشته باشد در این صورت $m=0$ است و داریم:

مکمل b−۱ = مکمل b $-b^0=$ مکمل b −۱

مثال: مکمل ۱ عدد $(1011010)_2$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

$(1011010)_2$ مکمل ۱ عدد

$=(100110)_2-1=(100101)_2$

مثال: مکمل ۱ عدد $(11001100)_2$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

$(11001100)_2$ مکمل ۱ عدد

$=(۱۱۰۱۰۰)_۲-۱=(۱۱۰۰۱۱)_۲$

مثال: مکمل ۱ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: چون در قسمت ممیزی ۶ رقم وجود دارد درنتیجه $m=۶$ و همچنین $b=۲$.

بنابراین:

مکمل ۱ عدد $(۱۰۰۱۰/۰۱۰۱۰۱)_۲$

$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_۲-۲^{-۶}$

$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۱)_۲-(۰/۰۰۰۰۰۱)_۲$

$=(۱۱۰۱/۱۰۱۰۱۰)_۲$

مثال: مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ را با استفاده از مکمل ۸ به‌دست آورید.

حل: مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_۸$ = مکمل ۸ -۸^{-m}

چون عدد داده شده یک عدد صحیح است از این رو $m=۰$.

بنابراین: مکمل ۷ عدد $(۴۵۶۳)_۸$

$=$ مکمل ۸ $-۱=(۳۲۱۵)_۸-۱=(۳۲۱۴)_۸$

مثال: مکمل ۷ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ را با استفاده از مکمل ۷ به‌دست آورید.

حل: از آنجا که $m=۳$ است درنتیجه:

مکمل ۷ عدد $(۱۲۳/۴۵۶)_۸$ = مکمل ۸ $-۸^{-۳}$

$=(۶۵۴/۳۲۲)_۸-(۰/۰۰۱)_۸$

$=(۶۵۴/۳۲۱)_۸$

مثال: مکمل ۹ عدد ۱۸ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

حل: مکمل ۹ عدد ۱۸ = مکمل ۱۰ $-۱=۸۲-۱=۸۱$

مثال: مکمل ۹ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

حل: چون $m=۳$ است، درنتیجه:

مکمل ۹ عدد $(۷۴/۳۶۰)_{۱۰}$ = مکمل ۱۰ $-۱۰^{-۳}$

$=(۲۵/۶۴۰)_{۱۰}-(۰/۰۰۱)_{۱۰}$

$=(۲۵/۶۳۹)_{۱۰}$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۶ به‌دست آورید:

حل: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳)_{۱۶}$ = مکمل ۱۶ -۱

$=(EDD)_{۱۶}-۱=(EDC)_{۱۶}$

مثال: مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ را با استفاده از مکمل ۱۶ به‌دست آورید.

حل: از آنجا که $m=۲$ است، درنتیجه:

مکمل ۱۵ عدد $(۱۲۳/۱۲)_{۱۶}$ = مکمل ۱۶ $-۱۶^{-۲}$

$=(EDC/EE)-(۰/۰۱)_{۱۶}=(EDC/ED)_{۱۶}$

موارد استفادهٔ مکمل b و مکمل ۱ـ b در تفریق دو عدد:

تفریق به‌کمک مکمل b: روش مستقیم تفریق که در مدارس ابتدایی آموخته می‌شود، از مفهوم رقم قرضی (Borrowing) استفاده می‌کند. در این روش هنگامی که رقم مفروق منه کوچکتر از رقم مفروق است، یک واحد از رقم مرتبهٔ بالاتر قرض می‌کنیم. به‌نظر می‌رسد زمانی که تفریق به‌کمک کاغذ و مداد انجام می‌گیرد، این روش ساده‌ترین است، اما ثابت شده است که وقتی تفریق به‌وسیلهٔ کامپیوتر و سخت‌افزار انجام می‌شود، کارایی روش رقم قرضی[1] از روش زیر که مکمل‌ها و جمع را به‌کار می‌گیرد کمتر است.

الگوریتم تفریق دو عدد M و N یعنی $M-N$ که در مبنای b هستند به‌صورت زیر است:

۱ ـ مفروق منه (M) را به‌مکمل b مفروق (N) اضافه کنید.

۲ ـ اگر درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمهای مرحلهٔ ۱ رقم انتقالی وجود داشت از آن صرف‌نظر کنید در غیر این صورت مکمل b عدد حاصل از مرحلهٔ ۱ را به‌دست آورده و جلوی آن علامت منفی قرار دهید.

مثال: حاصل تفریق $۷۲۵۳۲-۳۲۵۰$ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

$M=۷۲۵۳۲$

$N=۳۲۵۰$

N عدد ۱۰ مکمل $=۹۶۷۵۰$

(۱) رقم انتقالی

$$\Rightarrow \begin{array}{r} ۷۲۵۳۲ \\ +۹۶۷۵۰ \\ \hline ۶۹۲۸۲ \end{array}$$

چون درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمها، رقم انتقالی[2] (۱) وجود دارد از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین:

$۷۲۵۳۲-۳۲۵۰=۶۹۲۸۲$

مثال: حاصل تفریق $۳۲۵۰-۷۲۵۳۲$ را با استفاده از مکمل ۱۰ به‌دست آورید.

حل:

M=۰۳۲۵۰
N=۷۲۵۳۲
N عدد ۱۰ مکمل=۲۷۴۶۸

```
  ۰۳۲۵۰
⇒ +۲۷۴۶۸
 ──────
  ۳۰۷۱۸
```

در حاصل جمع، رقم انتقالی ظاهر نشد، درنتیجه داریم:

۶۹۲۸۲−=(مکمل ۱۰ عدد ۳۰۷۱۸)−=۳۲۵۰−۲۷۴۶۸

مثال: حاصل تفریق ۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۱۰۱۰۰
N=۱۰۰۰۰۱۱
N عدد ۲ مکمل=۱۱۱۱۰۱

```
(۱) رقم انتقالی
  ۱۰۱۰۱۰۰
⇒ +۰۱۱۱۱۰۱
 ────────
  ۰۰۱۰۰۰۱
```

چون درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمها، رقم انتقالی (۱) وجود دارد از آن صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین:

۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱=۰۰۱۰۰۰۱=۱۰۰۰۱

مثال: حاصل تفریق ۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۰۰۰۱۱
N=۱۰۱۰۱۰۰
N عدد ۲ مکمل=۱۰۱۱۰۰

```
  ۱۰۰۰۰۱۱
⇒ +۰۱۰۱۱۰۰
 ────────
  ۱۱۰۱۱۱۱
```

چون در حاصل‌جمع رقم انتقالی ظاهر نشده است، درنتیجه:

(مکمل ۲ عدد ۱۱۰۱۱۱۱)−=۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰

=−۰۰۱۰۰۰۱=−۱۰۰۰۱

تفریق به کمک مکمل ۱−b:

الگوریتم تفریق دو عدد M و N یعنی M−N که در مبنای b هستند با استفاده از مکمل ۱−b به‌صورت زیر است:

۱ـ مفروق منه (M) را به‌مکمل ۱−b، مفروق (N) اضافه کنید.

۲ـ اگر درنتیجه حاصل از جمع آخرین رقمهای مرحلهٔ ۱ رقم انتقالی وجود داشت آن را به‌رقم یکان حاصل جمع اخیر اضافه کنید درغیر این صورت مکمل ۱−b عدد حاصل از مرحلهٔ ۱ را به‌دست آورده جلوی آن علامت منفی قرار دهید.

مثال: حاصل تفریق ۰۳۲۵۰−۷۲۵۳۲ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

M=۷۲۵۳۲
N=۰۳۲۵۰
N عدد ۹ مکمل=۹۶۷۴۹

```
(۱) رقم انتقالی
  ۷۲۵۳۲
⇒ +۹۶۷۴۹
 ──────
  ۶۹۲۸۱
```

درنتیجه:

۷۲۵۳۲−۳۲۵۰=۶۹۲۸۱+۱=۶۹۲۸۲

مثال: حاصل تفریق ۷۲۵۳۲−۳۲۵۰ را با استفاده از مکمل ۹ به‌دست آورید.

حل:

M=۰۳۲۵۰
N=۷۲۵۳۲
N عدد ۹ مکمل=۲۷۴۶۷

```
  ۰۳۲۵۰
⇒ +۲۷۴۶۷
 ──────
  ۳۰۷۱۷
```

چون در حاصل‌جمع رقم انتقالی ظاهر نشد درنتیجه:

۶۹۲۸۲−=(مکمل ۹ عدد ۳۰۷۱۷)−=۳۲۵۰−۷۲۵۳۲

مثال: حاصل تفریق ۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۱۰۱۰۰
N=۱۰۰۰۰۱۱
N عدد ۱ مکمل=۰۱۱۱۱۰۰

```
(۱) رقم انتقالی
  ۱۰۱۰۱۰۰
⇒ +۰۱۱۱۱۰۰
 ────────
  ۰۰۱۰۰۰۰
```

در نتیجه:

۱۰۱۰۱۰۰−۱۰۰۰۰۱۱= ۰۰۱۰۰۰۰+۱=۱۰۰۰۱

مثال: حاصل تفریق ۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰ را با استفاده از مکمل ۱ به‌دست آورید.

حل:

M=۱۰۰۰۰۱۱
N=۱۰۱۰۱۰۰
N عدد ۱ مکمل=۰۱۰۱۰۱۱

```
  ۱۰۰۰۰۱۱
⇒ +۰۱۰۱۰۱۱
 ────────
  ۱۱۰۱۱۱۰
```

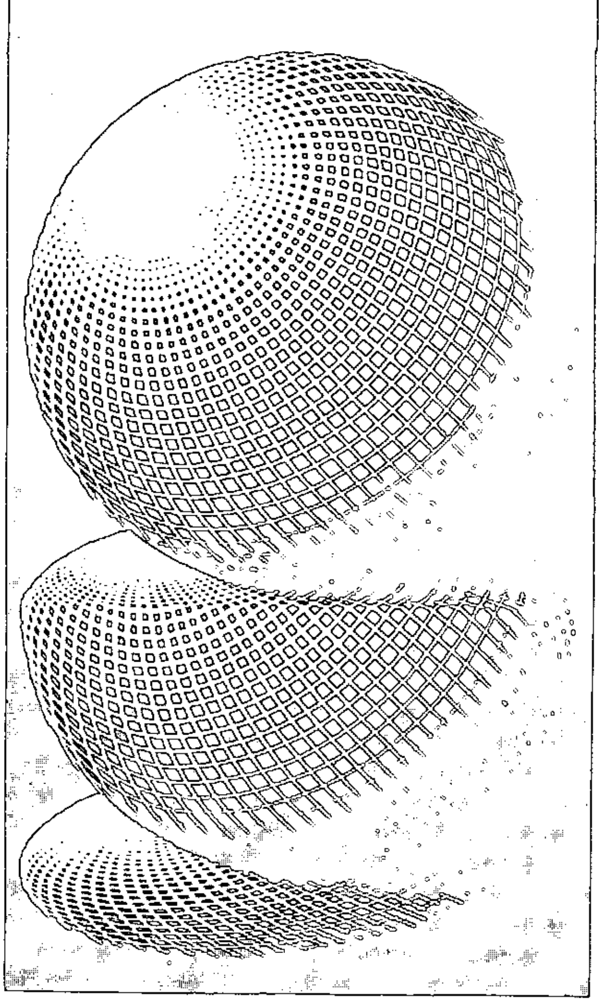
چون در حاصل‌جمع بالا رقم انتقالی ظاهر نشده،در نتیجه داریم:

(مکمل ۱ عدد ۱۱۰۱۱۱۰)−=۱۰۰۰۰۱۱−۱۰۱۰۱۰۰

=−۱۰۰۰۱

واژه نامهٔ ریاضی و کامپیوتر:

1– Borrowing method　　2– End arround carry



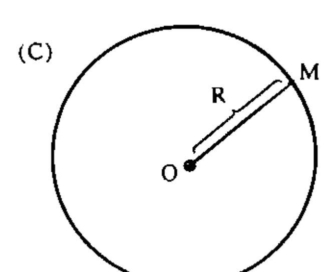
مکان هندسی

(قسمت هشتم)

(اوّل ، دوم ، سوم ، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

۱ــ دایره : مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، یک دایره است، که آن نقطهٔ ثابت مرکز، و آن مقدار ثابت، شعاع آن دایره می‌باشد. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهند.

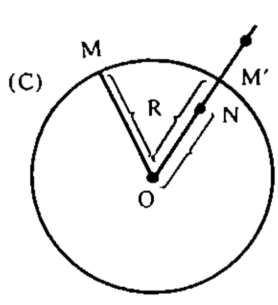


اثبات به روش هندسی: دایرهٔ $C(O,R)$ را درنظر می‌گیریم.

اولاً ــ هر نقطه‌ای مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، فاصله‌اش از مرکز دایره برابر R است، یعنی $OM = R$.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند N از صفحه این دایره که فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر R باشد، روی این دایره قرار دارد. زیرا اگر نقطه N روی این دایره نباشد، نیم‌خط ON دایره را در نقطهٔ M' قطع می‌کند. حال اگر نقطهٔ N روی پاره‌خط OM' باشد، $ON < OM' = R$ است، که این خلاف فرض است. و درصورتی که نقطهٔ N خارج پاره‌خط OM' واقع باشد، $ON > OM' = R$ است که این نیز خلاف فرض است. بنابراین نقطهٔ N که به فاصلهٔ R از مرکز دایره قرار دارد بر نقطهٔ M' منطبق و لذا روی دایره است. پس :

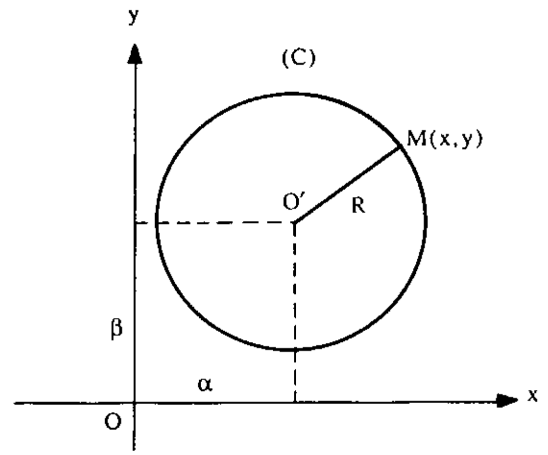
دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است.



اثبات به روش تحلیلی: دایرهٔ (C) به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و به شعاع R را در دستگاه مختصات xoy درنظر می‌گیریم. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد، داریم:

$$O'M = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2} \qquad (۱)$$



رابطهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و شعاعش برابر R است. به عکس، هر نقطه مانند $M(x,y)$ که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، فاصله‌اش از نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ برابر R می‌باشد. یعنی روی دایرهٔ $C(O',R)$ قرار دارد.

بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای از دستگاه مختصات xoy که فاصله‌اش از نقطه ثابت $O'(\alpha,\beta)$ واقع در این صفحه مقدار ثابت R باشد، دایره‌ای به معادلهٔ زیر است:

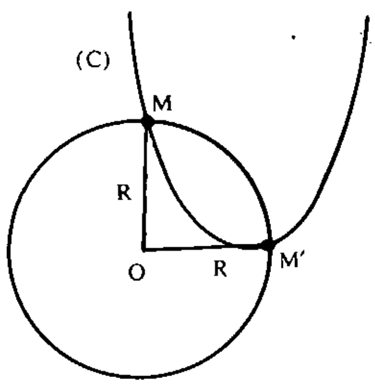
$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

نکته ۱: اگر مرکز دایرهٔ به شعاع R بر مبدأ مختصات منطبق باشد، معادلهٔ دایره به‌صورت $x^2+y^2=R^2$ خواهد بود.

نکته ۲: معادلهٔ (۱) را به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ نیز می‌توان نمایش داد که در این‌صورت مرکز دایره، نقطهٔ $O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ و شعاع دایره $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$، و شرط حقیقی بودن دایره $a^2+b^2-4c \geq 0$ است.

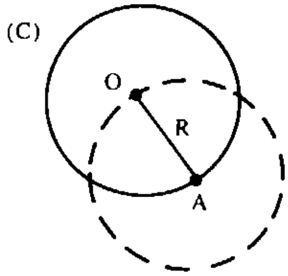
مثال ۱ــ نقطهٔ O و منحنی (C) در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطه O به فاصلهٔ معلوم R باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معین R باشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این دایره با منحنی (C) جواب مسأله‌اند و به تعداد نقاط برخورد آن دو، مسأله دارای جواب است.



مثال ۲ــ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را تعیین کنید که از نقطهٔ ثابت A واقع در یک صفحه می‌گذرند.

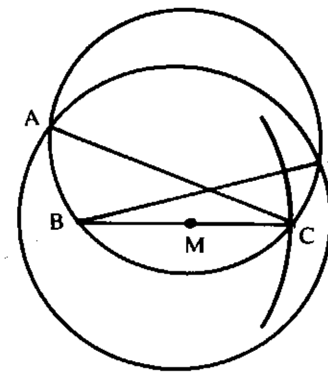
حل ــ اگر دایرهٔ $C(O,R)$ یکی از دایره‌هایی باشد که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، $AO=R$ است بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R می‌باشد.



مثال ۳ــ مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های، R شعاع دایرهٔ محیطی، $BC=a$ ضلع مثلث و $AM=m_a$ میانهٔ وارد بر ضلع a رسم کنید.

حل ــ دایرهٔ محیطی مثلث، یعنی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R را رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ B واقع بر این دایره و به شعاع $BC=a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. آنگاه وسط

پاره‌خط BC را مشخص کرده M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع $MA = m_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اگر این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث را در دو نقطه A و A′ قطع کند از A و A′ به B و C وصل می‌کنیم. دو مثلث متساوی ABC و A′BC جواب مسأله‌اند. مسأله در صورتی جواب دارد که دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a و سپس دایرهٔ به مرکز M و به شعاع m_a دایرهٔ محیطی مثلث ABC را قطع کنند و یا با آن مماس باشند.



مثال ۴ــ نقطهٔ $O'(۰,۱)$ و خط $D: ۲x - y + ۲ = ۰$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از نقطهٔ O′ به فاصله ۳ باشد.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ O′ به فاصلهٔ ۳ است دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع ۳ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$O'(۰,۱)\ ,\ R = ۳\ ,\ (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$
$$\Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \qquad \text{معادلهٔ دایره}$$

$$\begin{cases} x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \\ \qquad \Rightarrow x^۲ + (۲x+۳-۱)^۲ = ۹ \Rightarrow ۵x^۲ + ۸x - ۵ = ۰ \\ ۲x - y + ۳ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۴ \pm \sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow y = \frac{۷ \pm ۲\sqrt{۴۱}}{۵} \Rightarrow$$

$$M_۱\left(\frac{-۴+\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷+۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

$$M_۲\left(\frac{-۴-\sqrt{۴۱}}{۵}, \frac{۷-۲\sqrt{۴۱}}{۵}\right)$$

مثال ۵ــ نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ مرکز دایره‌ای است که از خط $D: ۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

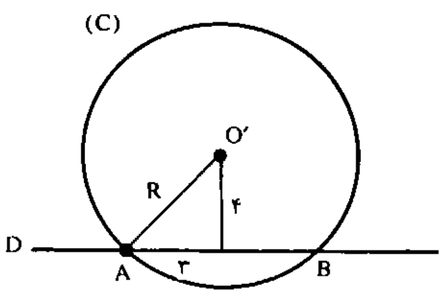
حل ــ اگر دایرهٔ $C(O',R)$ جواب مسأله و AB وتری باشد که این دایره از خط D جدا می‌کند، درصورتی که عمود O′H را بر خط D فرود آوریم در مثلث O′AH داریم:

$$O'A = R\ ,\ O'H = d = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۶ + ۱۲ + ۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۴$$

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$R = O'A = \sqrt{O'H^۲ + AH^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$
$$\Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

معادلهٔ دایره



مثال ۶ــ دو نقطهٔ $A(۰,۳)$ و $B(۴,۰)$ مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ باشد.

حل ــ نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ $C_۱(A,۲)$ و $C_۲(B,۳)$ جواب مسأله است.

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow C_۱: x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴,$$
$$C_۲: (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + (y-۳)^۲ = ۴ \\ \qquad \Rightarrow C_۲ - C_۱ = ۰ \Rightarrow ۸x - ۶y - ۲ = ۰ \\ (x-۴)^۲ + y^۲ = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴x - ۳y - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + \left(\frac{۴x-۱}{۳} - ۳\right)^۲ = ۴ \Rightarrow$$

$$25x^2 - 80x + 64 = 0$$
$$\Rightarrow x' = x'' = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow M(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$$

مسأله تنها یک جواب دارد زیرا دو دایره بر هم مماسند.

مثال ۷ـ معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را درصورتی که $A(3,0)$ و $B(0,1)$ و $C(-1,0)$ باشد، به‌دست آورید.

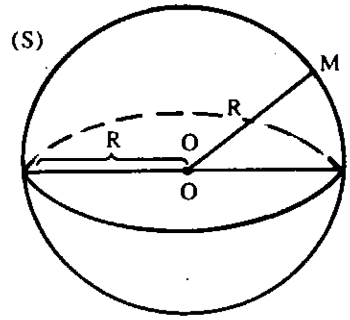
حل ـ معادلهٔ دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ درنظر می‌گیریم. مختصات این نقطه‌ها در معادلهٔ دایره باید صدق کند پس داریم:

$$A(3,0) \Rightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow 3a + c + 9 = 0 \quad (1)$$
$$B(0,1) \Rightarrow b^2 + c + 1 = 0 \quad (2)$$
$$C(-1,0) \Rightarrow -a + c + 1 = 0 \quad (3)$$

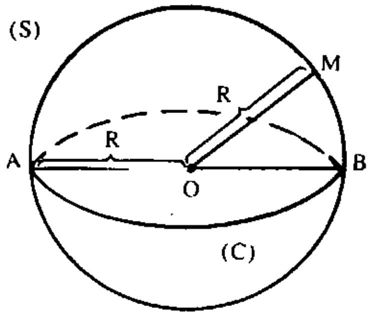
$$\begin{cases} 3a + c + 9 = 0 \\ b + c + 1 = 0 \\ -a + c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \ , \ b = 2 \ , \ c = -3$$

معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر $\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0}$

۲ـ کره SPHERE : مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابتی به فاصلهٔ ثابتی باشد، کره‌ای است که آن نقطهٔ ثابت مرکز و آن مقدار ثابت شعاع آن کره است. کرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت $S(O,R)$ نمایش می‌دهند. هر کره با معلوم بودن مرکز و شعاع آن مشخص است.

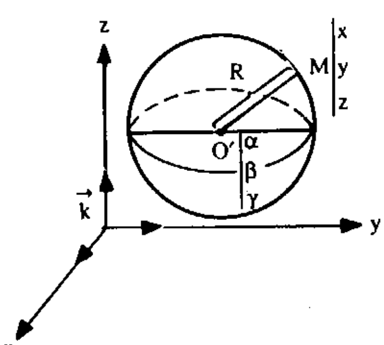


اثبات به روش هندسی ـ دایرهٔ $C(O,R)$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که این دایره مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است. قطر دلخواه AB از این دایره را رسم می‌کنیم. از دوران این دایره حول قطر AB کرهٔ $S(O,R)$ بوجود می‌آید. بدیهی است که هر نقطه واقع بر این کره از نقطهٔ O به فاصلهٔ R است و هر نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R واقع باشد روی این کره قرار دارد (زیرا هر نقطه‌ای از این کره روی یکی از دایره‌های به مرکز O و به شعاع R واقع است). پس: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.



اثبات به روش تحلیلی ـ در دستگاه مختصات xoy. نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ را درنظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد، یعنی نقطه‌ای باشد که از نقطهٔ O' به فاصلهٔ R باشد، در این صورت داریم:

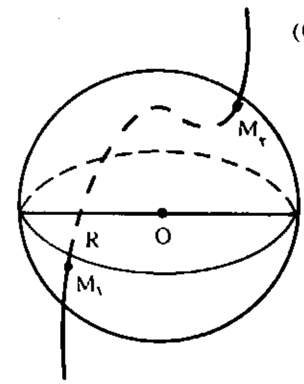


$$O'M = R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} \Rightarrow$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \quad (1)$$

به عکس، هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، از نقطهٔ ثابت $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ به فاصلهٔ ثابت R واقع است. بنابراین رابطهٔ (۱) معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که از نقطهٔ ثابت O' به فاصلهٔ ثابت R قرار دارد، یعنی معادلهٔ کره‌ای به مرکز O' و به شعاع R است.

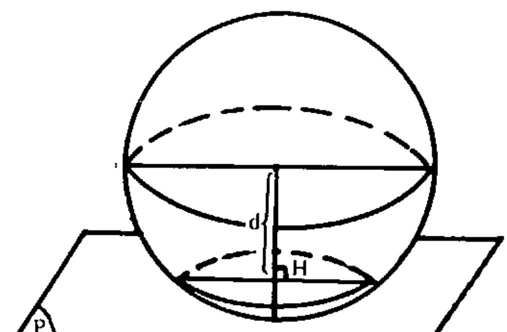
به‌طوری که دیده می‌شود معادلهٔ کره، معادله‌ای درجه دوم است. بنابراین کره سطحی درجه دوم می‌باشد.

مثال ۱ــ نقطه O و منحنی (C) غیرواقع در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (C) تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد.



حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ R باشد کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است. این کره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با منحنی (C) جواب مسأله است، و به تعداد نقاط برخورد، مسأله دارای جواب است.

مثال ۲ــ صفحهٔ P و نقطهٔ O غیرواقع بر آن مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ معلوم R باشد (بحث کنید).



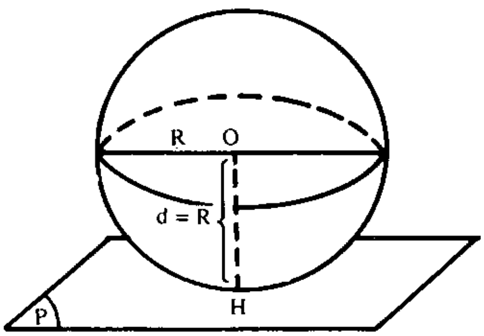
حل ــ کرهٔ به مرکز O و به شعاع R یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R واقع است، رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P جواب مسأله است.

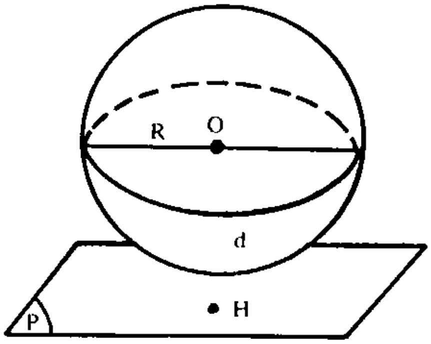
بحث ــ اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحهٔ P را d بنامیم، یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید.

۱) اگر $d < R$ باشد، مکان هندسی جواب مسأله، یک دایره است.

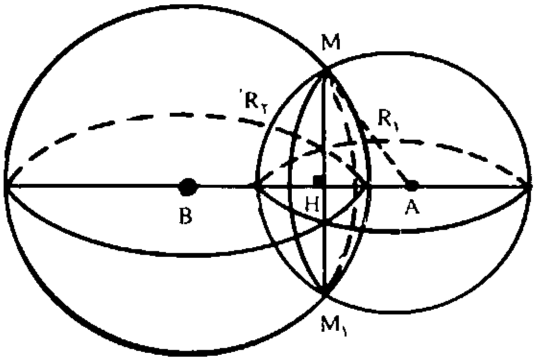
۲) اگر $d = R$ باشد، جواب مسأله یک نقطه است.

۳) اگر $d > R$ باشد، مسأله جواب ندارد.





مثال ۳ــ دو نقطهٔ A و B و دو عدد مثبت R_1 و R_2 به قسمی مفروضند که $AB < R_1 + R_2$ است. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R_1، و از نقطهٔ B به فاصلهٔ R_2 واقع است.



حل ـ فصل مشترک کرهٔ به مرکز A و به شعاع $R_۱$، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $R_۱$ واقع است، با کرهٔ به مرکز B و به شعاع $R_۲$، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از نقطهٔ B به فاصلهٔ $R_۲$ قرار دارد، جواب مسأله است که چون $d = AB < R_۱ + R_۲$ است، این دو کره متقاطع‌اند و فصل مشترک آنها که یک دایره است جواب مسأله است.

مثال ۴ ـ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را تعیین کنید که از نقطهٔ $O'(۱,-۲,۳)$ به فاصلهٔ ۵ واقع است.

حل ـ مکان هندسی خواسته شده کره‌ای به مرکز O' و به شعاع $R = ۵$ است، پس داریم:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ + (y-\gamma)^۲ = R^۲$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

مثال ۵ ـ نقطه‌ای روی خط $D: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۲}{۳}$ تعیین کنید که از نقطهٔ $A(۱,-۱,۰)$ به فاصلهٔ $\sqrt{۳}$ واقع است.

حل ـ نقطهٔ تقاطع کرهٔ به مرکز A و به شعاع $\sqrt{۳}$ با خط D جواب مسأله است. بنابراین داریم:

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + (z-۰)^۲ = (\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow$$

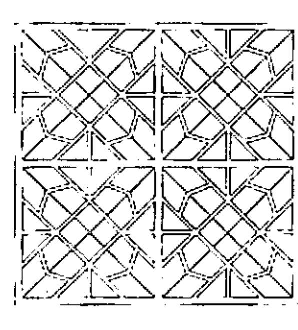
$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + z^۲ = ۳$$ معادلهٔ کره

$$\begin{cases} \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z+۲}{۳} = t \Rightarrow x = ۲t \ , \ y = -t+۱ \ , \ z = ۳t-۲ \\ (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ + z^۲ = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲t-۱)^۲(-t+۲)^۲ + (۳t-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow ۱۴t^۲ - ۲۰t + ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۱ \ , \ t = \frac{۳}{۷} \Rightarrow M_۱(۲,۰,۱) \ , \ M_۲(\frac{۶}{۷}, \frac{۴}{۷}, \frac{-۵}{۷})$$

نقاط جواب مسأله





تفریح اندیشهٔ ۳

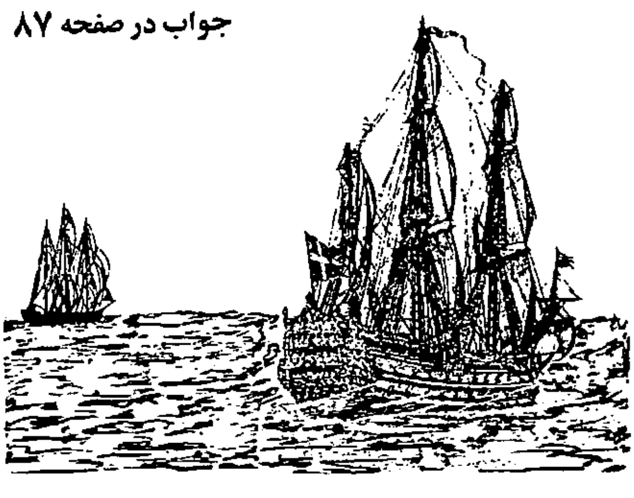
تکه‌های هشت

کاپیتان یک کشتی تصمیم گرفت به سه افسر و هفت سرباز برای کارهای برجسته‌شان جایزه بدهد. کیسه‌ای حاوی ۱۴۰ سکهٔ طلا تهیه و آنها را به دو کیسهٔ نامساوی تقسیم کرد و کیسهٔ بزرگتر را به سربازها و کیسهٔ کوچکتر را به افسرها داد.

افسرها سکه‌های خود را شمردند و دریافتند که تعداد آنها ۲ سکه بیشتر از آن است که بتواند بین آنها به تساوی تقسیم شود. و زمانی که سربازها سعی در تقسیم سهم خود به هفت قسمت مساوی کردند یک سکه برایشان باقی ماند و بزودی بر سر آن به نزاع پرداختند. دعوا به حدی بالا گرفت که خود کاپیتان به میانجیگری پرداخت و دستور داد سکهٔ باقیمانده به افسرها داده شود.

اکنون، در صورتی که سهمیهٔ هر افسر از هر سرباز بیشتر باشد، در هر کیسه چند سکه بوده است؟

جواب در صفحه ۸۷

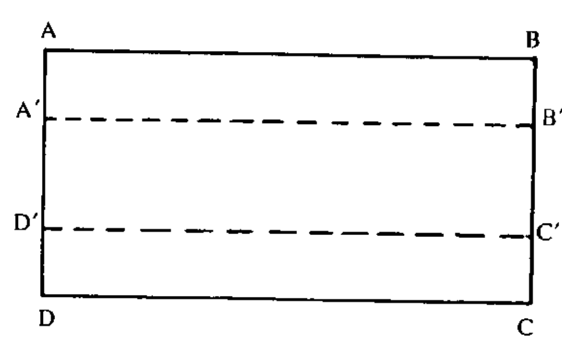


نکته‌ای هندسی برای ساختن جویها

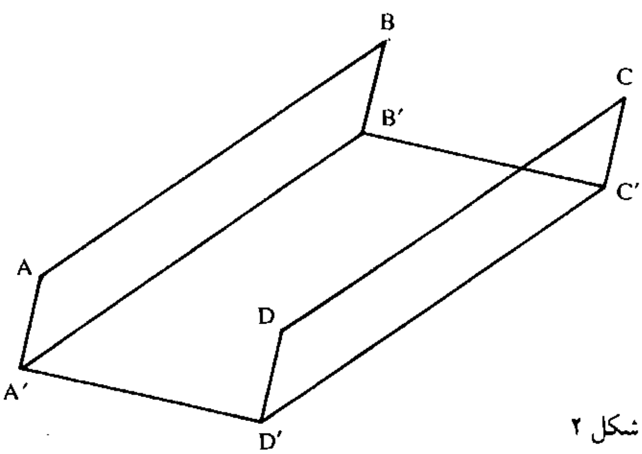
● دکتر احمد شرف‌الدین

ورقه فلزی مستطیلی ABCD را درنظر می‌گیریم (شکل ۱). این ورقه را در امتداد دو خط $A'B'$ و $C'D'$ که موازی دو لبه مستطیل‌اند و به فاصله‌های مساوی از دو لبه مذکوراند (یعنی $AA' = DD'$) تا می‌کنیم تا ناودانی با مقطع مستطیلی $AA' = D'D$ حاصل شود (شکل ۲). می‌خواهیم طول AA' را طوری اختیار کنیم که اندازه سطح مستطیل $AA' = D'D$ دارای بزرگترین مقدار ممکن باشد. مسأله را به‌طور خلاصه چنین بیان می‌کنیم:

چگونه از یک ورقه مستطیلی یک ناودان با مقطع مستطیلی بسازیم تا بیشترین مقدار آب از آن بگذرد.



شکل ۱



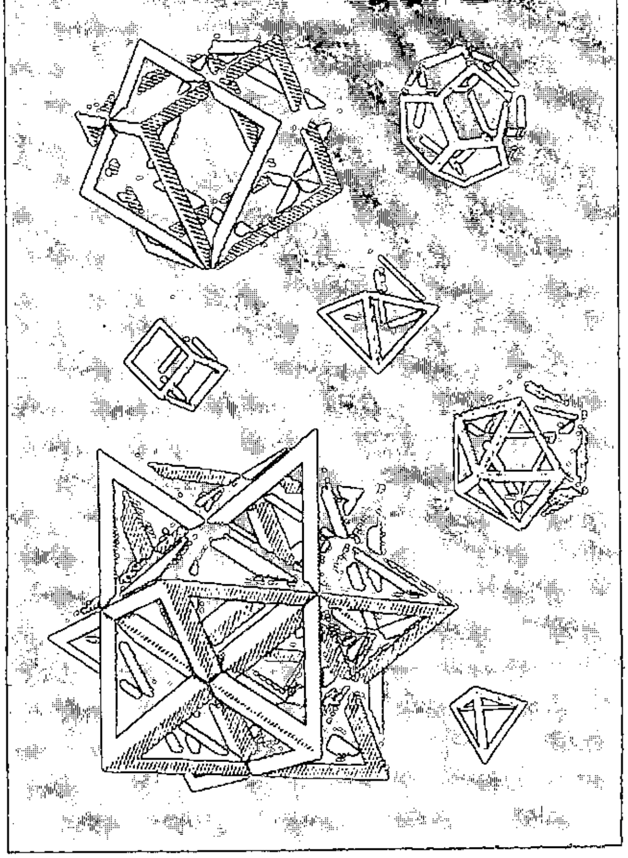
شکل ۲

حل: طول پاره‌خط AD را a فرض می‌کنیم. قرار می‌دهیم $AA' = x$. اندازه سطح مستطیل $AA' = D'D$ را S می‌نامیم. چنین داریم:

$$S = x(a - 2x) \qquad (1)$$

مشتق تابع با ضابطهٔ (۱) به‌ازای $x = \frac{a}{4}$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. مشتق به‌ازای مقادیر کمتر از $\frac{a}{4}$ مثبت و به‌ازای مقادیر بیشتر از $\frac{a}{4}$ منفی است پس تابع مذکور به‌ازای $x = \frac{a}{4}$ بزرگترین مقدار خود را احراز می‌کند.

خلاصه. برای آن که اندازه سطح مقطع یک ناودان یا یک جوی آب با مقطع مستطیل ماکزیمم باشد لازم است که عمق آن نصف پهنای آن باشد.



معرفی یک اتحاد مثلثاتی و کاربردهایی از آن

◄ حسین حیدری دلوئی (از گناباد)

اگر $x+y+z=k\pi$ آنگاه:

$$tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$$

حل: به طریق زیر می‌توانیم عمل کنیم

$$x+y+z=k\pi \Rightarrow x+y=k\pi-z$$

$$tg(x+y)=tg(k\pi-z)$$

$$\frac{tgx+tgy}{۱-tgxtgy}=-tgz$$

$$tgx+tgy=-tgz+tgxtgytgz$$

بنابراین

$$tgx+tgy+tgz=tgxtgytgz$$

نمونه‌هایی از کاربرد این اتحاد

۱ ـ درستی برابریهای زیر را بررسی کنید.

الف) $tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$

ب) $tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=tgnx\cot g(n-m)x\cot gmx$

حل:

الف) دیده می‌شود که

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=۰=۰\times\pi$$

لذا بنابر اتحاد بالا داریم:

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$$

ب) داریم:

$$tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=$$

$$tgnx+tg\left[\frac{\pi}{۲}-(n-m)x\right]+tg\left[\frac{\pi}{۲}-mx\right]$$

$$=tgnx+tg(\frac{\pi}{۲}-nx+mx)+tg(\frac{\pi}{۲}-mx)$$

چون $nx+\frac{\pi}{۲}-nx+mx+\frac{\pi}{۲}-mx=\pi=۱\times\pi$.

پس بنا به اتحاد معرفی شده می‌توانیم بنویسیم

$$tgnx+\cot g(n-m)x+\cot gmx=$$

$$tgnxtg\left[\frac{\pi}{۲}-nx+mx\right]tg\left[\frac{\pi}{۲}-mx\right]=$$

$$tgnx\cot g(n-m)x\cot gmx$$

۲ــ معادله $tg(2n+1)x - tg2nx - tgx = 0$ را حل کنید.

حل: معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$tg(2n+1)x + tg(-2nx) + tg(-x) = 0$$

چون $(2n+1)x + (-2nx) + (-x) = 0$ بنابراین داریم

$$tg(2n+1)x\ tg(-2nx)tg(-x) = 0$$

یا

$$tg(2n+1)x\ tg2nx\ tgx = 0$$

درنتیجه

$$1)\ tg(2n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2n+1}$$

$$2)\ tg2nx = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2n}$$

$$3)\ tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

۳ــ معادله زیر را حل کنید.

$$tg(2n+1)x + \cot gnx + \cot g(n+1)x = 0$$

حل: می‌توانیم بنویسیم

$$tg(2n+1)x + tg\left[\frac{\pi}{2} - nx\right] + tg\left[\frac{\pi}{2} - (n+1)x\right] = 0$$

چون $(2n+1)x + \frac{\pi}{2} - nx + \frac{\pi}{2} - (n+1)x = \pi$ بنابراین

$$tg(2n+1)x\ tg\left[\frac{\pi}{2} - nx\right]tg\left[\frac{\pi}{2} - (n+1)x\right] = 0$$

یا به عبارت دیگر

$$tg(2n+1)x \cot gnx \cot g(n+1)x = 0$$

در نتیجه داریم :

$$1)\ tg(2n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2n+1}$$

$$2)\ \cot g\,nx = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$$

$$3)\ \cot g(n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}$$

۴ــ اگر A، B و C زوایای داخلی مثلثی فرض شوند ثابت کنید که

$$tg^2Atg^2Btg^2C - tg^2A - tg^2B - tg^2C = 2(tgAtgB + tgBtgC + tgAtgC)$$

حل: چون $A+B+C=\pi$ بنابراین

$$tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC$$

دو طرف این رابطه را مجذور می‌کنیم. داریم

$$tg^2Atg^2Btg^2C = tg^2A + tg^2B + tg^2C + 2tgAtgB + 2tgBtgC + 2tgAtgC$$

درنتیجه

$$tg^2Atg^2Btg^2C - tg^2A - tg^2B - tg^2C = 2(tgAtgB + tgBtgC + tgAtgC)$$

۵ــ $\lim_{x\to 0}\frac{tg3x - tg2x - tgx}{x^3}$ را به دست آورید.

حل: داریم

$$tg3x - tg2x - tgx = tg3x + tg(-2x) + tg(-x)$$

چون $3x - 2x - x = 0$ بنابراین

$$tg3x - tg2x - tgx = tg3xtg(-2x)tg(-x) = tg3xtg2xtgx$$

لذا برای تعیین حدّ فوق داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x - tg2x - tgx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{tg3xtg2xtgx}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3tg3x}{3x} \times \frac{2tg2x}{2x} \times \frac{tgx}{x} = 6$$

۶ــ اگر $tg\alpha = x$، $tg\beta = y$، $tg\gamma = z$ و $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$، ثابت کنید

$$x + y + z = xyz$$

حل: چون $\alpha+\beta+\gamma = k\pi$ پس

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma$$

در نتیجه داریم

$$x + y + z = xyz$$

۷ــ اگر $f(x) = tg7x\,tg4x\,tg3x$، ثابت کنید که

$$f'(x) = 7tg^2 7x - 4tg^2 4x - 3tg^2 3x$$

حل: $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x) = tg7x\,tg(-4x)\,tg(-3x)$$

چون $7x - 4x - 3x = 0$ پس داریم

$$f(x) = tg7x - tg4x - tg3x$$

درنتیجه می‌توان نوشت

$$f'(x)=7(1+tg^2 7x)-4(1+tg^2 4x)-3(1+tg^2 3x)$$
$$=7tg^2 7x-4tg^2 4x-3tg^2 3x$$

۸ـ عبارت $A=2tg3x-tg5x-tgx$ را به حاصلضرب تبدیل کنید.

حل: با اضافه و کم کردن $tg2x$ داریم

$$A=2tg3x-tg5x-tgx=(tg3x-tg2x-tgx)+$$

$$(tg2x+tg3x-tg5x)=[tg3x+tg(-2x)+tg(-x)]+$$
$$[tg3x+tg2x+tg(-5x)]$$

چون $3x+2x-5x=0$ و $3x-2x-x=0$ بنابراین می‌توان نوشت

$$A=tg3xtg(-2x)tg(-x)+tg3xtg2xtg(-5x)$$
$$=tg3xtg2xtgx-tg3xtg2xtg5x$$
$$=tg3xtg2x(tgx-tg5x)$$
$$=tg3xtg2x\times\frac{\sin(x-5x)}{\cos x\cos 5x}$$
$$=\frac{-\sin 3x\sin 2x\sin 4x}{\cos 3x\cos 2x\cos x\cos 5x}$$

$$=\frac{-2\sin 3x\sin 2x\cos 2x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x\cos x\cos 5x}\quad (\text{با فرض}: \cos 2x\neq 0)$$
$$=\frac{-4\sin 3x\sin x\cos x\sin 2x}{\cos 3x\cos x\cos 5x}$$
$$=\frac{-4\sin 3x\sin x\sin 2x}{\cos 3x\cos 5x}$$

تذکر: به‌طور مشابه می‌توان اتحادهای زیر را ثابت کرد و کاربردهایی نیز برای آنها ارائه نمود.

اگر $x+y+z=k\pi$ آنگاه

(a) $\cot gx\cot gy+\cot gy\cot gz+\cot gx\cot gz=1$

اگر $x+y+z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ آنگاه

(b) $\cot gx+\cot gy+\cot gz=\cot gx\cot gy\cot gz$

(c) $tgxtgy+tgytgz+tgxtgz=1$



ادب ریاضی

تاکنون، ریاضیات، چهار مرحله از تکامل خود را پشت سر گذاشته و، در زمان ما، مرحلهٔ پنجم تکامل خود را آغاز کرده است:

۱) دورهٔ تکامل (با سمت گیری کاربردی) که با آغاز شکوفایی دانش یونان به پایان می‌رسد؛

۲) دورهٔ دوم (با سمت‌گیری نظری) که از سده‌های ششم و هفتم پیش از میلاد در یونان آغاز می‌شود و در سده‌های سوم و چهارم میلادی در اسکندریه پایان می‌یابد؛

۳) دورهٔ سوم (با سمت‌گیری کاربردی) که از سدهٔ هشتم میلادی آغاز می‌شود و در سدهٔ شانزدهم میلادی خاتمه می‌یابد. مرکز ثقل فعالیت‌های ریاضی در این دوره، در ایران بوده است؛

۴) دورهٔ چهارم (با سمت‌گیری نظری) که از سدهٔ شانزدهم میلادی، و به طور عمده در اروپای غربی، آغاز می شود و در سدهٔ بیستم پایان می‌یابد؛

۵) و سرانجام دورهٔ پنجم (با سمت گیری کاربردی) که هم اکنون دهه‌های آغازین خود را می‌گذراند. مطلب را با تکهٔ زیبایی از نوشته بوریس گنه دنکو، که بیشتر جنبهٔ آموزشی دارد، به پایان می‌بریم:

«... شک نیست که مقدمات آنالیز ریاضی و هندسهٔ تحلیلی، که در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی وجود دارد، مبنای اصلی ریاضیات جدید و کاربردهای آن را تشکیل می‌دهد. تسلط بر این ابزارهای مقدماتی لازم است، ولی کافی نیست. اگر سخن معروف تسیولکوسکی (نخستین کسی که شیفتهٔ کیهان‌نوردی بود) را اندکی تغییر دهیم، می‌توان گفت که، ریاضیات سنتی دبیرستانی و مقدمه‌های آنالیز ریاضی، گهوارهٔ دانش امروزی است، ولی تا کی می‌توان زیست شناسان، پزشکان، مهندسان و اقتصاددانان آینده را در گهواره نگه داشت؟

از مقاله «ریاضیات کاربردی»، نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۵)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت اول)

بزرگترین عدد اول در دنیا

بزرگترین عدد اول* (شناخته شده) در دنیا عدد غول‌آسایی است که برای نوشته شدن به صورت دهدهی متعارف به ۶۵۰۵۰ رقم نیازمند است. این عدد، با استفاده از نماد نمایی (یا توانی)، دارای صورت قابل کنترلتر زیر است:

$$۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱$$

یعنی، عدد مورد بحث را با ضرب ۲۱۶۰۹۰ بار ۲ در خودش و بعد تفریق ۱ از جواب آن به دست می‌آورید.

نماد نمایی فریب‌دهنده است. برای به دست آوردن ایده‌ای از توانایی این نماد در ارائهٔ اعداد بزرگ، صفحهٔ شطرنج ۸×۸ معمولی‌ای را در نظر می‌گیریم و بر مربعهای آن توده‌هایی از ژتونهایی به ضخامت 2mm را طبق قاعدهٔ زیر قرار می‌دهیم. مربعهای مزبور را، چون در شکل ۱، از ۱ تا ۶۴ شماره‌گذاری می‌کنیم. در مربع اول ۲ ژتون می‌گذاریم. در مربع دوم ۴ ژتون. در مربع سوم ۸ ژتون. و همینطور بر هر مربع دقیقاً دو برابر تعداد مربع ماقبل آن ژتون قرار می‌دهیم. به این ترتیب بر مربع nام توده‌ای از ۲^{n} ژتون خواهیم داشت. بخصوص، بر مربع آخر توده‌ای از $۲^{۶۴}$ ژتون خواهیم داشت. تصور می‌کنید ضخامت این توده چقدر است؟ ۱متر؟ ۱۰۰ متر؟ یک کیلومتر؟ مطمئناً خیر! خوب، باور بکنید یا خیر، توده‌مان از ماه (به فاصلهٔ ۴۰۰۰۰۰ کیلومتر) و از خورشید (به فاصلهٔ ۱۵۰ میلیون کیلومتر) خواهد گذشت و در حقیقت تقریباً به پروکسیما سنتوری[۱]، نزدیکترین ستاره به زمین، به فاصلهٔ حدوداً ۴ سال نوری از آن، خواهد رسید. عدد $۲^{۶۴}$ در صورت دهدهی عبارت است از

۱۸ ۴۴۶ ۷۴۴ ۰۷۳ ۷۰۹ ۵۵۱ ۶۱۶

این از $۲^{۶۴}$. اما برای به دست آوردن عدد $۲^{۲۱۶۰۹۱}$ که در عدد اول مورد بحث ظاهر شده است به صفحهٔ شطرنجی با ۲۱۶۰۹۱ مربع نیاز داریم ــ صفحه‌ای با اندازه‌های ۴۶۵×۴۶۵ مربع این کار را انجام می‌دهد!

اما چگونه به عددهایی با این اندازه می‌پردازیم؟ برای آغاز کار از کامپیوتر استفاده می‌کنیم. اما نه هر کامپیوتری. عدد رکورددار فوق‌الذکر با استفاده از یکی از قدرتمندترین کامپیوترهای دنیا کشف شد ــ کامپیوتری که توانایی انجام دویست میلیارد عمل حسابی را در یک ثانیه دارد ــ و با این وصف محاسبه بیش از سه ساعت طول کشید. اما در این مورد

---

* مطلب بعدی را برای توضیح این عبارت ملاحظه کنید.

قدرت محاسبه به خودی خود کفایت نمی‌کند؛ و مهارت ریاضیدانها نیز لازم است. چگونگی گسترش این مهارت، و سایر استفاده‌هایی که از آن می‌توان کرد، موضوع باقیماندهٔ این فصل است.

اعداد اول

فرانسیس هاچسن[2] در ۱۷۲۵ (در Inquiry into the Original for our Ideas of Beauty and Virtue, Treatise II, Section 3.8) نوشت «بهترین عمل عملی است که بیشترین سعادت را برای بزرگترین عدد فراهم کند». بعید به نظر می‌رسد که وی به **عدد** به مفهوم ریاضی بزرگترین اول شناخته شده می‌اندیشیده است، اما با وجود این، بیانش بخوبی در مورد شیفتگی پایان ناپذیر بشر به اساسی‌ترین اشیای ریاضی ـ ***عددهای طبیعی***[3] (یا ***شمارشی***) ۱، ۲، ۳، ... ـ به کار می‌رود.

این اشیای ریاضی مجرد نه تنها در زندگی روزمره‌مان بلکه عملاً در جمیع ریاضیات اساسی‌اند ـ و آن قدر که *لئوپولدکرونکر*[4]، ریاضیدان قرن نوزدهم، (دربارهٔ ریاضیات) نوشت: «خداوند اعداد طبیعی را خلق کرد، و بقیه کار انسان است.»

ویژگیهای متعددی موجودند که در مورد عددهای طبیعی به کار می‌روند و آنها را به دو رده (اعداد با آن ویژگی و اعداد بدون آن) تقسیم می‌کنند. به عنوان نمونه، ویژگی زوج بودن وجود دارد. این ویژگی عددهای طبیعی را به ردهٔ اعدادی که **زوجند** (۲، ۴، ۶، ۸، ...) و اعدادی که **نیستند** (اعداد فرد: ۱، ۳، ۵، ۷، ...) تقسیم می‌کند. یا ویژگی بخشپذیری بر ۳ موجود است. (در اینجا، چون بقیهٔ موارد این کتاب، زمانی که می‌گوییم عددی عدد دیگر را ***می‌شمارد***[5] مقصودمان این است که این کار را دقیقاً و بدون باقی گذاردن باقیمانده انجام می‌دهد. به این ترتیب ۳، ۶، ۹، ۱۲ بر ۳ بخشپذیرند، در حالی که ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، چنین نیستند.) تقسیم به زوج و فرد تقسیمی طبیعی و مهم است. (تقسیم به اعداد بخشپذیر و بخش ناپذیر بر ۳ نه چنان طبیعی است نه از اهمیت فوق‌العاده برخوردار است.)

مثالی دیگر از تقسیمی طبیعی و مهم توسط ویژگی ***مربع کامل***[6] بودن به دست داده می‌شود، مثال

$۱=۱^{۲}$, $۴=۲^{۲}$, $۹=۳^{۲}$, ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , ...

موارد بسیار دیگری نیز موجودند. اما تاکنون مهمترین طریق تقسیم اعداد طبیعی تقسیم آنها به اعداد ***اول***[7] و غیر اول است.

عدد طبیعی n را ***عدد اول*** می‌گوییم اگر تنها اعدادی که آن را می‌شمارند ۱ و خود n باشند. (خود عدد ۱ در اینجا حالتی خاص است، و طبق قرارداد به عنوان عدد اول به حساب نمی‌آید.)

به این ترتیب ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ عددهایی اول‌اند؛ ۱، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰ نیستند. (اعدادی را که اول نیستند گاهی ***مرکب***[8] می‌نامند.) به عنوان نمونه، ۷ اول است زیرا هیچ یک از عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ آن را نمی‌شمارد؛ ۱۴ اول نیست زیرا ۲ و ۷ آن را می‌شمارند.

دلیل اصلی این که چرا اعداد اول این همه مهم‌اند برای ***اقلیدس*** (حدود ۳۵۰ ـ ۳۰۰ ق. م.) ریاضیدان یونانی که، در کتاب IX از ***مقدماتش***[9] (تألیفی سیزده جلدی از جمیع دانش ریاضی تا آن زمان در دسترس) قضیه‌ای را که امروزه به عنوان ***قضیهٔ اصلی حساب***[10] معروف است آورده، آشکار بود. این قضیه چنین است: هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ یا اول است، یا در غیر این صورت می‌تواند به صورت حاصل ضرب اولهایی بیان شود که به استثنای ترتیبی که طبق آن اولهای مزبور قرار می‌گیرند یکتاست.

به عنوان نمونه، عدد ۷۵۹۰۰ حاصلضرب هفت ***عامل اول***[11] (دو ***عامل مکرر***[12]) است:

$$۷۵۹۰۰ = ۲\times۲\times۳\times۵\times۵\times۱۱\times۲۳$$

عبارت واقع در سمت راست این برابری به ***تجزیهٔ به عوامل اول***[13] عدد ۷۵۹۰۰ موسوم است.

مطلبی که قضیهٔ اصلی حساب می‌گوید این است که اعداد اول بلوکهای ساختمانی اساسی‌ای هستند که جمیع اعداد طبیعی از آنها تشکیل یافته‌اند، و از این لحاظ شبیه عناصر شیمیدان یا ذرات اصلی فیزیکدانانند. دانستن تجزیهٔ به عوامل اول هر عدد، همانگونه که بعداً به طور اساسی در این فصل گفته خواهد شد (بخش مربوط به رمزهای سری را ملاحظه کنید) به ریاضیدان اطلاعات تقریباً کاملی از آن عدد می‌دهد. اما در حال حاضر، در مورد خود عددهای اول چه می‌توان گفت؟

اساسی‌ترین پرسشی که می‌توان در مورد اعداد اول مطرح کرد این است که فراوانی آنها چقدر است؟ به عنوان نمونه، آیا

بزرگترین عدد اول وجود دارد، یا اعداد اول همین طور بزرگتر و بزرگتر شده ادامه می‌یابند؟

در نظر اول به نظر می‌رسد که اعداد اول در واقع بسیار فراوانند. از ده عدد اولیهٔ بعد از ۱ (یعنی ۲ تا ۱۱ و خود ۱۱)، پنج عدد، یعنی، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، اولند ، که دقیقاً نیمی از گردایهٔ مزبورند. از ده عدد بعدی، ۱۲ تا ۲۱، سه عدد (۱۳، ۱۷، ۱۹) که اولند موجودند، یعنی، به نسبت ۰/۳ . بین ۲۲ و ۳۱ نسبت همان ۰/۳ است، در حالی که در مورد دو گروه ده عددی بعدی نسبت مورد بحث به ۰/۲ سقوط می کند. بنابراین به نظر می‌رسد که اولها هر چه که در امتداد دنبالهٔ اعداد طبیعی جلوتر برویم «تنک» می‌شوند. جدول ۱ نشان می‌دهد که چگونه تعداد اولهای کمتر از n (که با $\pi(n)$ نمایش داده می‌شود) به ازای مقادیر منتخب n ، با n تغییر می کند، و رقم «چگالی» $\pi(n)/n$ را در هر حالت به دست می‌دهد.

بنابراین، اعداد اول هر چه در دنبالهٔ عددی مورد بحث جلوتر برویم کمیابتر می‌شوند. اما آیا سرانجام به تدریج محو و نابود می‌شوند؟ پاسخ منفی است.

n	$\pi(n)$	$\pi(n)/n$
۱۰۰۰	۱۶۸	۰/۱۶۸
۱۰۰۰۰	۱۲۲۹	۰/۱۲۳
۱۰۰۰۰۰	۹۵۹۲	۰/۰۹۶
۱۰۰۰۰۰۰	۷۸۴۹۸	۰/۰۷۸

جدول ۱. توزیع اولها، نشان می‌دهد که تعداد اولها، $\pi(n)$ ، به ازای مقادیر گوناگون n، کوچکتر از n است.

این موضوع نیز توسط اقلیدس با استفاده از استدلالی به اثبات رسید که تا به امروز به عنوان مدلی عالی از برهان ریاضی ظریف باقیمانده است. برای شروع این اثبات، تصور می کنیم اعداد اول به ترتیب اندازه فهرست شده باشند :

$P_1 , P_2 , P_3 , \ldots$

بنابراین $P_1 = ۲$ ، $P_2 = ۳$ ، $P_3 = ۵$ ، و غیره. هدف، نشان دادن این موضوع است که باید این فهرست برای همیشه ادامه داشته باشد. به عبارت دیگر، باید اثبات شود که اگر در هر مرحلهٔ n در فهرست، با شمارش کردن $P_1، P_2، \ldots، P_n$ ، که باشیم، آنگاه باید در آن اول دیگری بالاتر از P_n موجود باشد. طریق اثبات نگریستن به عدد

$$N = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n + 1$$

حاصل از ضرب درهم جمیع اولهای P_1 ، P_2 ، P_3 و غیره تا P_n ، و بعد افزودن ۱ به نتیجهٔ آن است. به طور وضوح N بزرگتر از P_n است، بنابراین اگر N اول باشد آنگاه می‌دانیم که عدد اولی بزرگتر از P_n وجود دارد، و این همان است که سعی در اثباتش داریم. از طرف دیگر، اگر N اول نباشد باید بر اولی بخشپذیر باشد، این اول را P می‌نامیم. اما اگر بخواهیم N را بر هر یک از اولهای $P_1، P_2، \ldots، P_n$ تقسیم کنیم باقیمانده ۱ ای موجود می‌شود (همان ۱ ی که هنگامی که N را در مرتبهٔ اول به دست آوردیم افزودیم.) بنابراین P مان باید اولی متفاوت با آنها باشد، و بار دیگر مطلوب را ثابت کرده‌ایم. بنابراین، در هر وضعیت عدد اولی بزرگتر از P_n موجود است، و می‌توان نتیجه گرفت که فهرست اعداد اول برای همیشه ادامه دارد.

توجه داشته باشید که هیچ ایده‌ای در این مورد که عدد N فوق اول است یا خیر نداریم. اگر چند مثال را در نظر بگیریم کشف می‌کنیم که اعدادی از این دست اغلب اولند. به عنوان نمونه،

$$N_1 = ۲ + ۱ = ۳$$
$$N_2 = ۲ \times ۳ + ۱ = ۷$$
$$N_3 = ۲ \times ۳ \times ۵ + ۱ = ۳۱$$
$$N_4 = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ + ۱ = ۲۱۱$$
$$N_5 = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ + ۱ = ۲۳۱۱$$

جمیعاً اولند. اما سه عدد بعدی چنین نیستند :

$$N_6 = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ + ۱ = ۳۰۰۳۱ = ۵۹ \times ۵۰۹$$
$$N_7 = ۱۹ \times ۹۷ \times ۲۷۷$$
$$N_8 = ۳۴۷ \times ۲۷۹۵۳$$

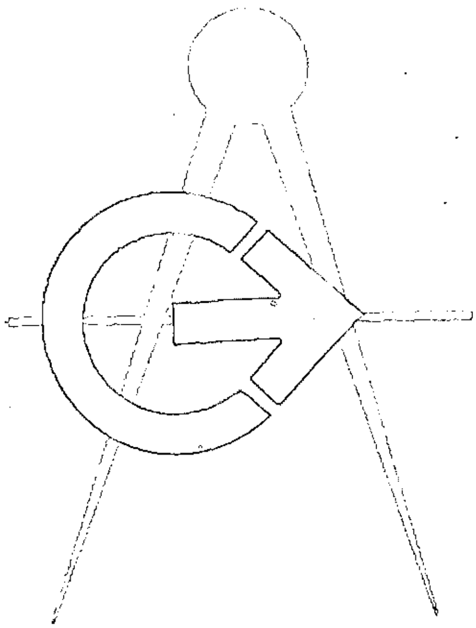
در واقع، هیچ کس نمی‌داند بینهایت عدد به صورت

$$N_n = P_1 P_2 \ldots P_n + 1$$

اولند یا خیر، نیز بینهایت عدد از این اعداد مرکبند یا نه (گر چه البته باید یکی از این دو امکان راست باشد). و این تنها یکی از دهها سؤال بسادگی بیان شده دربارهٔ عددهای اول است که پاسخش نامعلوم است.

یادداشتها:

۱ـ Proxima Centauri
۲ـ Francis Hutcheson
۳ـ natural (or counting) numbers
۴ـ Leopold Kronecker
۵ـ divides
۶ـ Perfect Square
۷ـ Prime
۸ـ Composite
۹ـ Elements
۱۰ـ Fundamental theorem of mathematics
۱۱ـ Prime factor
۱۲ـ Repeated factor
۱۳ـ Prime factorization



کاربرد دترمینان

(قسمت دوم)

● سیامک جعفری

معادله خط را می‌توان به دو صورت نوشت. یکی وقتی دو نقطه را داشته باشیم و دیگری وقتی شیب خط و یک نقطه را داشته باشیم. در اینجا می‌توان به راحتی تحقیق کرد که معادله خطی‌که از دونقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است.

از آنجا که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مشخص است که دو نقطه در معادله صدق می‌کنند.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مسأله : m را چنان تعیین کنید که سه نقطه $A(2,1)$ ، $B(m,-2)$ و $C(0,m-6)$ روی یک امتداد باشند.

حل:

الف) بدون دترمینان

طبق توضیحاتی که در این وضعیت در کتاب دوم ریاضی و سوم تجربی است، باید شیب خطهای AB و BC برابر باشند!

$$m_{AB} = \frac{1+2}{2-m}$$

$$m_{BC} = \frac{-2-m+6}{m-0}$$

$$\frac{3}{2-m} = \frac{-m+4}{m} \Rightarrow m=1 \quad \text{یا} \quad m=8$$

ب) به کمک دترمینان

باید مختصات نقطه سوم در دترمینان بالا صدق کند.

$$\begin{vmatrix} 0 & m-6 & 1 \\ m & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m(m-6-1)+$$

$$2(m-6+2)=0 \Rightarrow m=1 \quad \text{یا} \quad m=8$$

مسأله : معادلات خطوط زیر را در نظر بگیرید

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

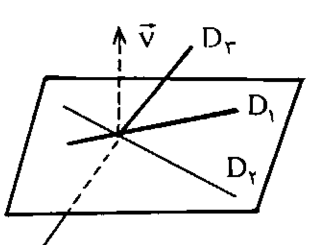
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0$$

$$\vec{V} = \vec{D_1} \wedge \vec{D_2}$$

اکنون باید نشان داد که $\vec{D_3}$ و $\vec{V}$ در یک صفحه هستند. یا $(\vec{V} \cdot \vec{D_3})=0$ درنتیجه شرط این که این سه خط همرس باشند به دست می‌آید.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$



دقت کنید که اگر سه خط در فضا همرس باشند لزوماً در یک صفحه نیستند. نتیجه مشابهی به دست می‌آید وقتی معادلات پارامتری سه خط را داده باشند. (A و B و C بردارهای هادی محسوب می‌شوند).

مسأله : معادله عمود مشترک دو خط متنافر را به دست آورید.

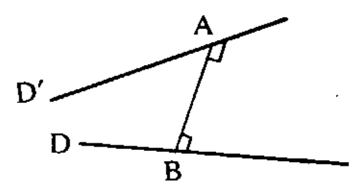
$$D': \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

$$D: x+1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}$$

حل:

الف) بدون دترمینان

$$A: \begin{cases} x = t'-1 \\ y = 2t'-2 \\ z = 3t'-3 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = 2t+2 \\ z = t+3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \equiv \begin{cases} x = t'-3t \\ y = 2t'-2t-4 \\ z = 3t'-t-6 \end{cases}$$



این $\overrightarrow{AB}$ بر بردارهای هادی D′ و D عمود است.

$$\overrightarrow{\Delta}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow t - 3t + 2(2t'-2t-4) + 3(3t'-t-6) = 0$$

$$\overrightarrow{\Delta'}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad 3(t'-3t) + 2(2t'-2t-4) + 3t'-t-6 = 0$$

$$\begin{cases} 5t'-7t-7=0 \\ 14t'-10t-26=0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{3},$$

$$t' = \frac{7}{3} \Rightarrow A\left|\begin{matrix} 1 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{11}{3} \end{matrix}\right., \quad AB\left|\begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix}\right.$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}} = \frac{y-\frac{10}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{2-\frac{11}{3}}{\frac{1}{3}}$$

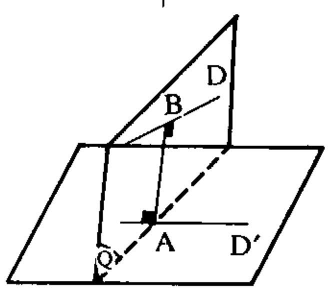
ب) به کمک دترمینان

صفحه P از D′ گذشته و با D موازی است.

$$P: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -x+2y-z-2 = 0$$

صفحه Q از D می‌گذرد و بر P عمود است.

$$Q: \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4x-y+2z = 0$$



مختصات D′ در Q صدق می‌کند.

$$-4(3t-1)-(2t+2)+2(t+3)=0$$

$$t = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(1, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

اکنون ضرب خارجی دو بردار هادی دو خط D و D′ همان بردار قایم P است.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-\frac{10}{3}}{2} = \frac{z-\frac{11}{3}}{-1}$$

برای تعیین کوتاهترین فاصله بین دو خطی که نه موازی و نه متقاطع، یعنی متنافر هستند مانند

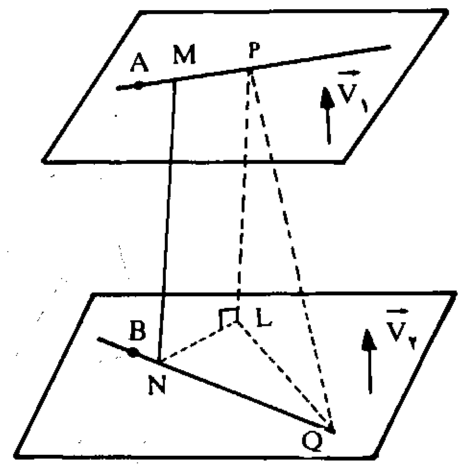
$$D: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

$$D': \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

به این صورت عمل می‌کنیم که می‌دانیم این «S» کوتاهترین فاصله بین این دو خط متنافر موازی $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ یعنی ضرب خارجی دو بردار هادی دو خط است. بنابراین کوتاهترین فاصله خواهد شد تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ و اندازه آن

خواهد شد.

$$|S| = \frac{|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{V_1} \wedge V_2)|}{|V_1 \wedge V_2|}$$



صورت این رابطه که ضرب سه‌گانه اسکالر است و خواهد شد دترمینانی که قبلاً شرحش رفت، و مخرج که اندازه جبری ضرب خارجی دو بردار هادی است.

مسأله : کوتاهترین فاصله بین دو خط D و D′ را به‌دست آورید.

حل: با دترمینان

$$D: x+1 = y-\frac{7}{2} = \frac{z}{2}$$

$$D': x+4 = y-3 = z$$

$$\begin{vmatrix} -4-1 & 3-\frac{7}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -(-5)(3+\frac{7}{2})+$$

$$\frac{1}{2}(-5-3+\frac{7}{2}) = -\frac{1}{2}(\frac{-9}{2}) = \frac{9}{4}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j\right| =$$

$$\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|S| = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

حل: بدون دترمینان به عهده دانش‌آموزان

برای تعیین فاصله یک نقطه از یک خط می‌توان از دترمینان استفاده کرد دو نقطه B و C را روی خط D به دست می‌آوریم. از قبل می‌دانستیم

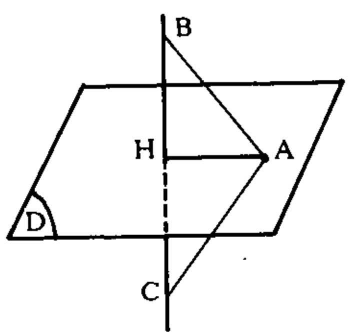
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}|$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$$

بنابراین

$$AH = \frac{|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}|}{BC}$$

$|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}|$ مراد اندازه این بردار است.



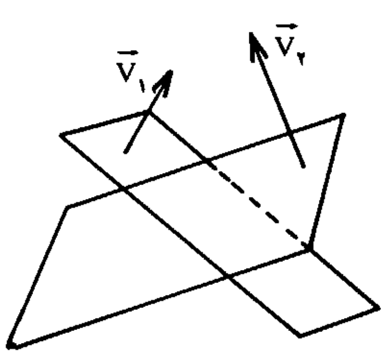
مسأله : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(2,3,-5)$ گذشته و با خط $D: \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ موازی باشد.

حل : با دترمینان

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{4i}+\overrightarrow{8j}+\overrightarrow{10k}$$

معادله خط خواهد شد.

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+5}{10}$$



مسأله : قرینه نقطه $M(0,1,1)$ را نسبت به خط $\Delta:\begin{cases}x-y-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$ را به دست آورید.

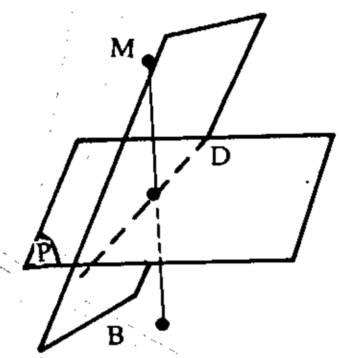
حل: بردار قایم

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i+j+3k \Rightarrow \vec{V}\begin{vmatrix}1\\1\\3\end{vmatrix}$$

$$x+y+3z+d=0$$

$$0+1+3+d=0 \Rightarrow d=-4$$

$$\Rightarrow x+y+3z-4=0$$



صفحه‌ای که از M می‌گذرد. یک نقطه از خط فصل مشترک را نیز به دست می‌آوریم.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases}-y-1=0 \Rightarrow y=-1\\2y-z=0\end{cases} \Rightarrow z=-2] \Rightarrow A(0,-1,2)$$

معادله کانونی خط D به دست می‌آید. باید در صفحه ماربر M صدق کند.

$$x=t\ ,\ y=+t-1\ ,\ z=3t+2$$

$$t+t-1+9t+6-4=0 \Rightarrow t=\frac{1}{11}$$

$$x=\frac{1}{11}, y=-\frac{10}{11}, z=\frac{25}{11}$$

$$x_{M'}=2x_M-\frac{1}{11}=2(0)-\frac{1}{11}=-\frac{1}{11}$$

$$y_{M'}=2y_M-\frac{10}{11}=2-\frac{10}{11}=\frac{12}{11}$$

$$z_{M'}=2z_M-\frac{25}{11}=2-\frac{25}{11}=\frac{3}{11}$$

اگر می‌خواستیم، بدون دترمینان می‌توانستیم از معادلات دسته صفحه هم استفاده کنیم.

$$x+2y-z+\alpha(x-y-1)=0$$

$$(1+\alpha)x+(2-\alpha)y-z-\alpha=0$$

$$M\in P \Rightarrow (1+\alpha)(0)+(2-\alpha)(1)-1-\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

$$P: 3x+3y-2z-1=0$$

اکنون فصل مشترک سه صفحه را داریم. که در هر سه معادله صفحه می‌گذاریم و x' و y' و z' را از حل دستگاه حاصل به‌دست می‌آوریم.

$$x_N=\frac{0+x'}{2}$$

$$y_N=\frac{1+y'}{2}$$

$$z_N=\frac{1+z'}{2}$$

تمرین

۱ ــ دو خط به معادله‌های $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

ج) $\frac{8}{\sqrt{57}}$

۲ ــ خطی در صفحه سه نقطه $A(0,0,0)$ و $B(2,2,0)$ و $C(0,1,-2)$ بیابید که برخط $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=2z$ عمود باشد.

۳ ــ معادله صفحه‌هایی را پیدا کنید که شامل به ترتیب خط D و D′ باشند و موازی هم نیز باشند.

$$D: x=2y+1=z-1\ ,\ D': 2x=y-4=3-3z$$

۴ ــ مطلوب است معادله خطی که در صفحه $P: x+3y-z+4=0$ قرار دارد و بر خط $D:\begin{cases}x-2z-3=0\\y-2z=0\end{cases}$ عمود است در تقاطع این خط با صفحه.

ج) $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4}$

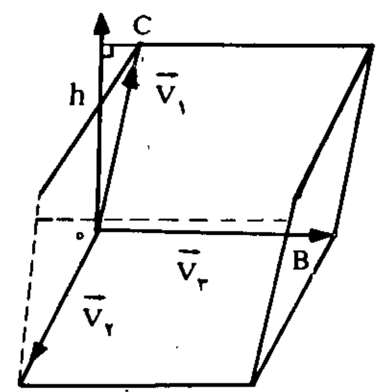
۵ ــ خطی را پیدا کنید که از $A(1,2,0)$ بگذرد و با $P: x+y+z+2=0$ موازی و بر خط $\frac{4-2x}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{5}$ عمود باشد.

ج) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z}{5}$

■ کاربرد دترمینان

برای محاسبه حجم یک متوازی‌السطوح به شکل زیر نگاه کنید.

$$|P| = |\vec{V}_1.(V_2 \wedge V_3)|$$
$$= |\vec{V}.\vec{W}| = |V_1|.|\vec{W}|.\cos\alpha$$
$$= |\vec{W}|.|\vec{V}_1|.\cos\alpha$$
$$= |\vec{W}|.OH$$
$$= S_{OADB}.h = V$$

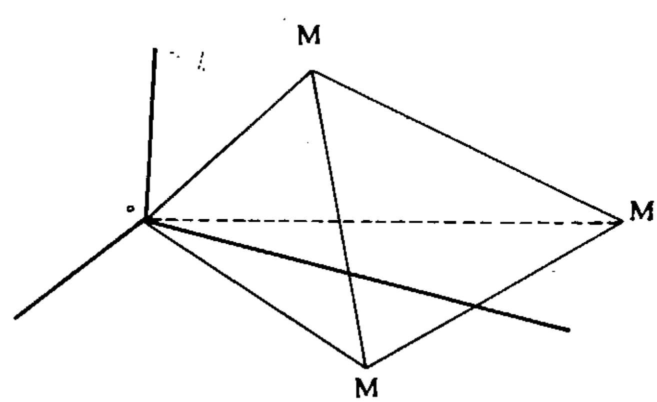


برای محاسبه حجم یک چهار وجهی مانند هرم در واقع حجم همان متوازی‌السطوح را که حساب کنیم از هندسه می‌دانیم که شش برابر حجم هرم است. پس:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

و اگر رأس چهارم مبداء مختصات هم نباشد.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$



تمرین

۱ ــ نشان دهید حجم هرم مثلث القاعده‌ای به یالهای a و b و c و زوایای وجهی α و β و γ برابر خواهد شد با

$$V = \frac{1}{6}abc\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

۲ ــ مساحت مثلثی به اضلاع زیر را ثابت کنید با دستور دترمینان به‌دست می‌آورند.

$$BC: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$CA: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$AB: A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\left\|\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\right\|}$$

■ تعیین مقاطع مخروطی

ثابت می‌شود برای تعیین نوع مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ جز در دو حالت زیر.

۱) $A = B = C = 0$ که معادله خط راستی خواهد شد.

۲) $A = C$ و $B = 0$ معادله دایره (حقیقی یا موهومی)

دو دترمینان زیر را به نام Δ و Δ′ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$\Delta = 0$:
- $\Delta' > 0$ دو خط متقاطع موهومی
- $\Delta' < 0$ دو خط متقاطع حقیقی
- $\Delta' = 0$ دو خط موازی (حقیقی یا موهومی)

بیضی حقیقی یا موهومی
هذلولی
سهمی

$$\Delta \neq 0 \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \Delta' < 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$$

تذکر: اگر $\Delta \neq 0$ و $A+C=0$، مقطع، هذلولی متساوی‌القطرین می‌باشد.

مسأله: نوع مقطع $5x^2-6xy+2y^2-2x+2=0$ را تعیین کنید.

حل: با دترمینان

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\ ,\quad \Delta'=\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=1>0$$

بنابراین مقطع دو خط متقاطع موهومی است.

چند تمرین

۱ ــ نشان دهید معادله دایره‌ای که از سه نقطه (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، (x_3,y_3) در صفحه $x\ y$ می‌گذرد به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

۲ ــ اگر سه نقطه (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، (x_3,y_3) مفروض باشند به طوری که هیچ دو نقطه‌ای روی یک خط نباشند. معادله سهمی از خانواده $y=c+bx+cx^2$ که از این سه نقطه می‌گذرد را به‌دست آورید.

$$\text{ج)}\quad \begin{vmatrix}x^2 & x & y & 1\\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

۳ ــ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

۴ ــ نشان دهید دترمینان روبرو معادله محور اصلی دو دایره C و C' است.

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a & b & -2\\ a' & b' & -2\end{vmatrix}=0$$

۵ ــ نشان دهید اگر دو مقطع S و S' به معادلات زیر همدیگر را بپوشانند داریم:

$$S(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

$$S'(x,y)\equiv a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

$$\begin{vmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a' & h' & g'\\ h' & b' & f'\\ g' & f' & c'\end{vmatrix}$$

در خاتمه از زحمات بی‌دریغ استادم آقای محمد نظری، نمونه کاملی از اخلاق و علم سپاسگزاری می‌کنم.

*** منابع**

۱) ANALYTICAL GEOMETRY A.V.Pogorelov

۲) هندسه تحلیلی فضایی — محمدعلی سازش.

۳) هندسه تحلیلی (حل المسایل) احمد بیرشک ــ یاوری

۴) مقاطع مخروطی — غلامعلی گهرفر

۵) ADVANCED ENGINERING MATHEMATICS WYLIE, BARRETT

طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۶)

از : 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

قضیهٔ اصلی جبر گاوس

هر معادلهٔ درجهٔ n

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

دارای n ریشه است.

قضیهٔ فوق به طور دقیقتر به صورت زیر بیان می‌شود :

چند جمله‌ای

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n$$

همواره می‌تواند n به عامل خطی به صورت $z - \alpha_r$ تجزیه شود.

این قضیهٔ مشهور، قضیهٔ اصلی جبر، ابتدا توسط دالامبر «d'Alembert» در ۱۷۴۶ بیان شد، اما تنها به طور جزیی به اثبات رسید. اولین اثبات دقیق آن در سال ۱۷۹۹ توسط **گاوس**، که در آن وقت بیست و یکساله بود، در رسالهٔ دکتریش با نام زیر داده شد :

Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posso (Helmstaedt, 1799).

بعدها گاوس سه اثبات دیگر از این قضیه به دست داد. هر چهار اثبات را می‌توان در جلد سوم آثارش، نیز در جلد ۱۴ Ost wald's *Klassiker der exakten w,ssenschaften* به دست آورد، بعد از گاوس مؤلفین دیگری از جمله آرژان «*Argand*»، کوشی «*Cauchy*» ، اولهر « *Ullherr* » ، وایراشتراس «*Weiestrass*»، و کرونکر «*Kronecker*» نیز اثباتهای قضیهٔ اصلی جبر را به دست دادند. اثباتی که در اینجا آورده شده از *آرژان* است (Annales de Gergonne, 1815) ، که به خاطر اختصار و سادگیش متمایز است.

این اثبات (مآنند اغلب اثباتهای دیگر) در دو مرحله انجام می‌گیرد، مرحلهٔ اول ــ و مشکلتر ــ صرفاً اثبات می‌کند یک معادلهٔ درجهٔ n ام همواره شامل *حداقل* یک ریشه است ؛ مرحلهٔ دوم نشان می‌دهد n ریشه و نه بیشتر دارد.

❑ مرحلهٔ اول

قرار می‌دهیم

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n = f(z) = w$$

و مقادیر مختلفی را در نظر می‌گیریم که توسط قدر مطلق $|w|$ هنگامی که z در صفحهٔ گاوس (صفحهٔ اعداد مختلط) حرکت می‌کند اختیار شده‌اند. فرض می‌کنیم کوچکترین این مقادیر μ باشد و، فی‌المثل، در موضع z_0 به دست آمده باشد، بنابراین

$$|f(z_0)| = |w_0| = \mu$$

دو حالت ممکن موجود است :

۱. μ ی مینیمم از صفر بزرگتر است.

۲. μ ی مینیمم برابر صفر است.

کار را با بررسی حالت اول آغاز می‌کنیم. در نزدیکی نقطهٔ z_0، مثلاً ، در سطح تعریف شده با دایرهٔ کوچک K به شعاع R و مرکز z_0 ، $|w|$ در هر جا $\mu \le$ ، زیرا μ کوچکترین مقدار $|w|$ را نمایش می‌دهد ؛ در خود z_0 ،

$$|w| = |w_0| = \mu$$

به ازای هر z واقع در K ،

$$z = z_\circ + \zeta$$

که در آن

$$\zeta = p(\cos\theta + i\sin\theta)$$

و p قدر مطلق ζ است، یعنی پاره خط $z_\circ z$ ، و θ میل این پاره خط نسبت به محور عددهای حقیقی مثبت. به محاسبهٔ

$$w = f(z) = f(z_\circ + \zeta) = (z_\circ + \zeta)^n + c_1(z_\circ + \zeta)^{n-1} + \dots + c_n$$

با حذف پرانتزها و مرتب کردن بر حسب قوای نزولی ζ می‌پردازیم. به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$w = f(z) = z_\circ^n + c_1 z_\circ^{n-1} + c_2 z_\circ^{n-2} + \dots + c_n$$
$$+ c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n$$

یعنی،

$$w = f(z_\circ) + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n$$

از آنجا که ممکن است بعضی از ضرایب c_r برابر صفر باشند، اولین ضریب پایدار را c، دومین را c′، و غیره می‌نامیم، بنابراین

$$w = w_\circ + c\zeta^V + c'\zeta^{V'} + c''\zeta^{V''} + \dots$$

با

$$V < V' < V'' < \dots$$

تقسیم بر $w_\circ$ و تفکیک ζ^V می‌دهد

$$\frac{w}{w_\circ} = 1 + q\zeta^V(1 + \zeta\xi)$$

که در آن $q = c/w_\circ$ و ξ مجموعی از توانهای مختلف ζ با نماهای مثبت و ضرایب معلوم را نمایش می‌دهد.

حاصل‌ضرب $q\zeta^V(1+\zeta\xi)$ را در نظر می‌گیریم. *اولین* عامل را به طور مثلثاتی نوشته، $\cos\varphi + i\sin\varphi$ را به l_φ مختصر می‌کنیم، و از

$$q = h(\cos\lambda + i\sin\lambda) = h.l_\lambda$$

و $\zeta = p.l_p$ ،

$$q\zeta^V = h.l_\lambda . p^V . l_{V\theta} = hp^V . l_{\lambda + V\theta}$$

را به دست می‌آوریم. از این به بعد کارمان را به مقادیر z ی از K محدود می‌کنیم که به ازای آنها $\lambda + V\theta = \pi$ ، که در نتیجه روی شعاع $Z_\circ H$ ی واقع می‌شوند که با محور حقیقی زاویهٔ $\alpha = (\pi - \lambda)/v$ می‌سازد. عدد $l_{\lambda+V\theta} = l_\pi$، به ازای جمیع این z ها دارای مقدار ۱- است، و حاصل‌ضربمان صورت $-hp^V.(1+\zeta\xi)$ را اختیار می‌کند.

اگر شعاع R را به قدر کافی کوچک اختیار کنیم، عامل دوم $1+\zeta\xi$ می‌تواند هر قدر مایل باشیم به واحد نزدیک شود، زیرا

$$p = |\zeta| < R$$

اما این بدان معنی است که حاصل‌ضرب مزبور هرقدر مایل باشیم در نزدیکی مقدار $-hp^V$ واقع می‌شود، یعنی، کسر

$$\frac{w}{w_\circ} = 1 - hp^V.(1+\zeta\xi)$$

هرقدر مایل باشیم به نقطهٔ $1 - hp^V$ از صفحهٔ گاوس نزدیک می‌شود، که نشان می‌دهد به ازای **جمیع** z های بین $z_\circ$ و H قدرمطلق $|w/w_\circ| < 1$. به عبارت دیگر، به ازای *این* z ، $|w| < \mu$ ، در حالی که به ازای جمیع z های واقع در مجاورت $z_\circ$ ، $|w|$ با بزرگتر از یا مساوی با μ باشد. این تناقض به وجود می‌آورد، و در نتیجه اولین حالت از دو حالت ممکن داده شده در فوق $(\mu > \circ)$ حذف می‌شود. به این ترتیب تنها حالت دوم باقی می‌ماند : $w_\circ$ برابر است با صفر یا

$$f(z_\circ) = \circ$$

بنابراین : ***هر معادله**، بی توجه به درجه‌اش، **دست کم یک ریشه دارد.***

❑ مرحلهٔ دوم

کار را با اثبات **قضیهٔ کمکی** زیر آغاز می‌کنیم :

اگر معادلهٔ جبری $f(z) = \circ$ دارای ریشهٔ α باشد، در این صورت سمت چپ این معادله را می‌توان بدون باقیمانده بر $z - \alpha$ تقسیم کرد.

اگر چند جمله‌ای $f(z)$ را بر $z - \alpha$ تا زمانی تقسیم کنیم که R ، باقیماندهٔ تقسیم، دیگر شامل z نباشد، به دست می‌آوریم

$$\frac{f(z)}{z-\alpha} = f_1(z) + \frac{R}{z-\alpha}$$

که R آن ثابت است و $f_1(z)$ دارای صورت

$$z^{n-1} + d_1 z^{n-2} + d_2 z^{n-3} + \dots + d_{n-1}$$

ضرب در $z - \alpha$ می‌دهد

$$f(z) = (z-\alpha)f_1(z) + R$$

اگر در این معادله، که به ازای هر z معتبر است، $z=\alpha$ را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$R=f(\alpha)=0$$

و به این ترتیب به ازای هر z

$$f(z)=(z-\alpha)f_1(z)$$

که همان مطلوب است.

اگر این قضیهٔ کمکی را با قضیهٔ اثبات شده در مرحلهٔ اول، که وجود یک ریشه را مبرهن کرد، ترکیب کنیم، قضیهٔ جدید زیر را به‌دست می‌آوریم:

هر چند جمله‌ای بر حسب z را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عامل خطی $z-\alpha$ و چند جمله‌ای از درجهٔ کمتری نمایش داد.

اکنون به جای α از α_1 استفاده کرده به دست می‌آوریم.

$$f(z)=(z-\alpha_1)f_1(z)$$

سپس قضیهٔ به دست آمده رادر مورد چند جمله‌ای $f_1(z)$ به کار برده به دست می‌آوریم

$$f_1(z)=(z-\alpha_2)f_2(z)$$

که در آن $f_2(z)$ از درجهٔ $(n-2)$ و α_2 ریشهٔ معادلهٔ $f_1(z)=0$ است. نیز به روشی مشابه:

$$f_2(z)=(z-\alpha_3)f_3(z)$$

$$f_3(z)=(z-\alpha_4)f_4(z),...$$

در این زنجیر معادلات، با آغاز از یکی مانده به آخر، در صورتی که به جای هر f واقع در سمت راست مقدار بعدی آن در معادلهٔ زیرین را قرار دهیم، سرانجام قضیهٔ مربوط به تبدیل چند جمله‌ای از درجهٔ nام به حاصل‌ضرب n عامل خطی را به دست می‌آوریم:

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$$

که به طور شفاهی به صورت زیر بیان می‌شود:

هر تابع گویای درست از درجه n را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب n عامل خطی نمایش داد.

به این ترتیب، معادلهٔ پیشین $f(z)=0$ مجازمان می کند بنویسیم:

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)=0$$

اما، حاصل‌ضرب سمت چپ آن تنها وقتی صفر می‌شود که یک عامل برابر صفر باشد، و از آنجا که $z-\alpha_v=0$ مستلزم $z=\alpha_v$ است، سرانجام به دست می‌آوریم:

معادلهٔ $f(z)=0$ دارای n ریشهٔ α_1، α_2، ....، α_n است و ریشهٔ دیگر ندارد.

به این ترتیب قضیهٔ اصلی مورد نظر را اثبات کردیم.

تبصره: امکان دارد چند ریشه از n ریشهٔ α_1، α_2، ....، α_n برابر باشند، به عنوان مثال، ممکن است α_2 و α_3 هر دو برابر α_1 باشند، در حالی که α_4، α_5، ....، α_n متفاوت با α_1 باشند. در این حالت α_1 به ریشهٔ چندگانه «multipleroot»، و به خصوص در حالتی که سه ریشهٔ مساوی داشته باشیم، به ریشهٔ ***سه گانه*** «triple» موسوم است.

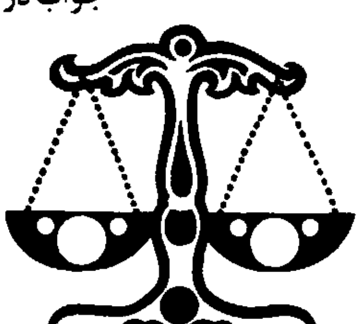


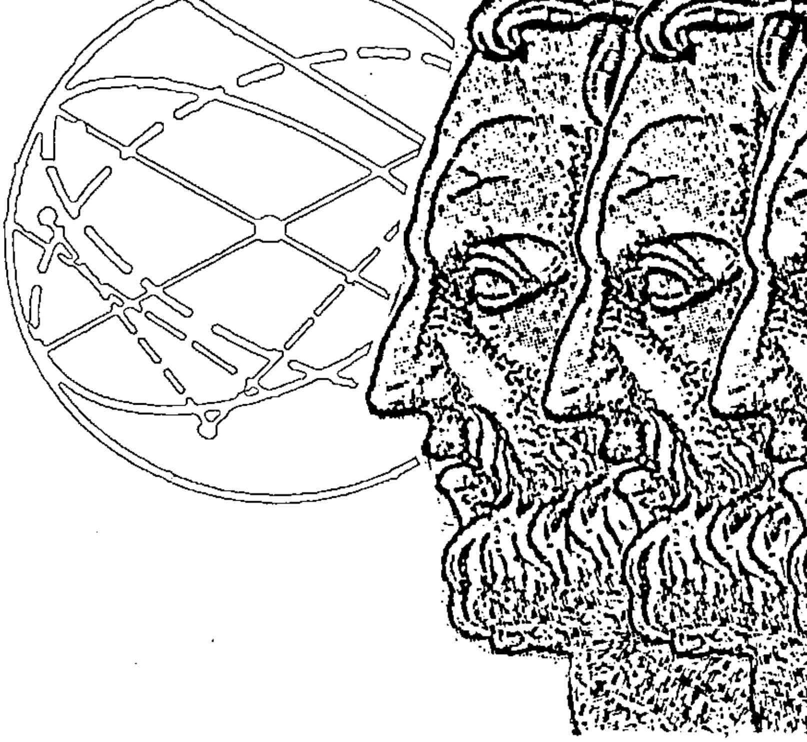
تفریح اندیشهٔ ۴

در ترازو

پنج مهره داریم که به‌ظاهر یکسان به‌نظر می‌رسند، اما هیچ دو مهره‌ای از آنها هم‌وزن نیستند. آیا می‌توانید تنها با یک ترازو با حداکثر هفت بار وزن کردن آنها را به‌ترتیب وزن قرار دهید؟ به‌عبارت دیگر، سنگین‌ترین مهره و به‌ترتیب مهره سنگین‌تر در مرحلهٔ دوم، و ... را معین کنید؟

جواب در صفحه ۸۸





مشاهیر ریاضی جهان

برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

فرما، پی‌یردو[1] (۱۶۰۱ - ۱۶۶۵). فرما، از لحاظ حرفه، قاضی شهر تولوز، و در ایام فراغتش، یکی از پایه‌گذاران قلمرو جدید ریاضیات بود. کارش در مورد مماسها الهام‌بخش نیوتن در طرح حساب دیفرانسیل و انتگرال شد. اصل می‌نیمم‌سازی فرما در اپتیک نتایج عمیقی در سرتاسر فیزیک بعد از او داشت. فرما به‌خاطر کارهایش در نظریهٔ اعداد، از جمله قضیه کوچک فرما[2] و حدس همچنان اثبات نشدهٔ معروف به‌آخرین قضیه فرما[3] به‌یاد مانده است.



فیبوناتچی[4] (در حدود ۱۱۷۰ - ۱۲۵۰) لئوناردوی پیسایی[5] معروف به‌فیبوناتچی (پسر بوناتچیو[6]) یکی از اولین اروپایانی بود که بعد از عصر ظلمت پدیدار شد. او کارهای مهمی در هندسهٔ اقلیدسی انجام داد اما بیشتر به‌خاطر دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی‌اش[7] معروف است. چنین پیش آمده که دنبالهٔ مزبور اهمیت شگفت‌انگیزی در ریاضیات جدید و محاسبه داشته باشد.

فوریه، ژوزف[8] (۱۷۶۸ - ۱۸۳۰). فوریه مهندسی ریاضیدان و یکی از قابلترین مدیران ناپلئون بود. سهمی اساسی در نظریهٔ انتقال گرما داشت و بیشتر به‌خاطر نظریه سریهای مثلثاتی‌اش، که اکنون سریهای فوریه نامیده می‌شوند، معروف است. این سریها از اهمیت فوق‌العاده‌ای در سراسر ریاضیات، فیزیک و مهندسی برخوردارند. در واقع، بسیاری از ریاضیات کاربردی جدید بدون آنها غیرقابل تصور است.

گالوا، اواریست[9] (۱۸۱۱ - ۱۸۳۲). گالوا یکی از تراژدیهای بزرگ تاریخ ریاضی است. او در سن ۱۹ سالگی، سهم‌بزرگی در نظریهٔ معادلات در زمینه‌ای که اکنون به‌عنوان نظریهٔ گالوا معروف است، به‌دست آورد و در سن ۲۱ سالگی در دویلی تیر خورد و کشته شد.

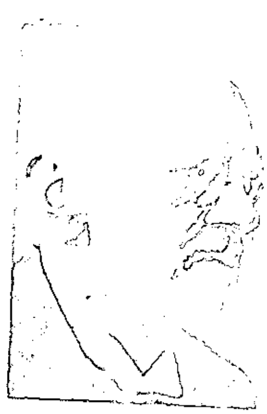


گاوس، کارل فردریش [۱۰] (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵). گاوس این حق را دارد که بزرگترین تمام ریاضیدانهای محض درنظر گرفته شود. او سهم عظیمی در بسیاری از قسمتهای دیگر ریاضیات و فیزیک داشت. امتیاز زود آغاز کردن را با تصحیح حسابهای مالی پدرش در سن سه سالگی به‌دست آورد. در سن ۱۸ سالگی، روش کمترین توانهای دوم (کمترین مربعات) را ابداع کرد. در سن ۲۴ سالگی، آماده چاپ تجسات حسابی [۱۱] بود، کتابی که می‌باید تأثیر عمیقی بر نظریهٔ اعداد داشته باشد. وی هر دو قضیهٔ اساسی حساب [۱۲] و قضیهٔ اساسی جبر [۱۳] اثبات کرد. [۱۴] گاوس اساس نظریهٔ رویه‌های خمیده را به‌دست داد و طولی نکشید که به‌جهان‌شناسی اینشتاین منجر شد. خود گاوس امکان خمیدگی کیهان را درنظر می‌گرفت کارش در توابع مختلط اساسی بود اما در زمان حیاتش به‌چاپ نرسید، و به‌همین علت است که در این مورد به‌قضیه کوشی اشاره می‌کنیم. آمارگران، امروزه، آنچه را که به‌توزیع گاوسی معروف است به‌کار می‌برند، و در مغناطیس واحدی به‌نام گاوس موجود است. طرح و روش آماری و قدرت محاسبهٔ ذهنی‌اش اجازه داد که مدارهای ستاره‌های دنباله‌دار و خرده سیاره‌ها را از داده‌های رصدی محدود محاسبه کند، و در این مورد به‌خصوص با مدار سرس [۱۵] مرتبط است. فهرست فوق می‌تواند همچنان ادامه یابد.

گودل، کورت [۱۶] (۱۹۰۶ ـ ۱۹۷۸). در ۱۹۳۱، گودل مطلبی را انتشار داد که بسیاری از امیدواریهای منطق ریاضی جدید را برباد داد. ریاضیدانها در تلاش بودند تا نظریهٔ حساب مقدماتی را بر مبنایی دقیق و صوری قرار دهند. یکی از شرایط لازم در مورد هر دستگاه صوری آن است که خود ـ سازگار و کامل باشد. گودل نشان داد که سازگاری حساب مقدماتی را نمی‌توان از داخل خود نظریه اثبات کرد، و به‌این ترتیب، مفهوم اثبات‌ناپذیری را مفهومی که در علوم کامپیوتری جدید دارای اهمیت شده، به‌دست ما سپرد.

همیلتون، ویلیام روآن [۱۷] (۱۸۰۵ ـ ۱۸۶۵). همیلتون بزرگترین ریاضیدان ایرلند است. وی در کودکی اعجوبه بود. ادعا شده که در سن ۱۳ سالگی می‌توانست به ۱۳ زبان صحبت کند. در سن ۲۲ سالگی استاد دانشگاه دوبلین «Dublin» شد. دست یافتن اصلی همیلتون در موضوع اپتیک هندسی بود که در مورد آن اساس نظریه‌ای را بنا نهاد که به‌پیش‌بینی نظریهٔ کوانتوم نزدیک شد. کارش در مکانیک عمومی نیز از اهمیت بسیاری برخوردار است. اما در میان ریاضیدانهای محض شاید بیشتر از همه به‌خاطر نظریهٔ جبری اعداد مختلط‌اش، اختراع چهارگانه‌ها و بهره‌برداری از جبر ناتعویض‌پذیرش، که در آن $ab \neq ba$ می‌باشد.

هیلبرت، دیوید [۱۸] (۱۸۶۲ ـ ۱۹۴۳). هیلبرت که زادهٔ آلمان است و به‌قریب احتمال با دانشگاه گوتینگن شناخته می‌شود. یکی از مؤسسین ریاضیات قرن بیستم و در بسیاری جهات به‌وجود آورندهٔ مکتب صورت‌گرایی ریاضیات است که در ریاضیات محض این قرن نفوذ بسیار داشته است. یکی از دستاوردهای اساسی او در صورت‌گرایی **مبناهای هندسهٔ** [۱۹] اوست که برخلاف مبنای آکسیوماتیکی، نسبتاً شهودی‌تر اقلیدس، در بنا کردن هندسه بر مبنای آکسیوماتیکی محض مطرح شده است. او همچنین سهمی عظیم در آنالیز ریاضی داشت. در سال ۱۹۰۰، در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات، وی قرن تازه را با مطرح کردن فهرست مشهور ۲۳ مسأله‌ای‌اش افتتاح کرد ـ مسائلی که از آن زمان تاکنون ریاضیدانها را به‌خود مشغول کرده، مبلغ عظیمی از آثار مهم هشتاد سال گذشته را به‌وجود آورده‌اند. بنابراین، هیلبرت اغلب به‌عنوان ریاضیدان مطلقاً محض شناخته می‌شود، اما او رئیس سمینار فیزیک اتمی مشهور گوتینگن، که تأثیر عظیمی بر توسعهٔ نظریهٔ کوانتوم داشت، نیز بود.

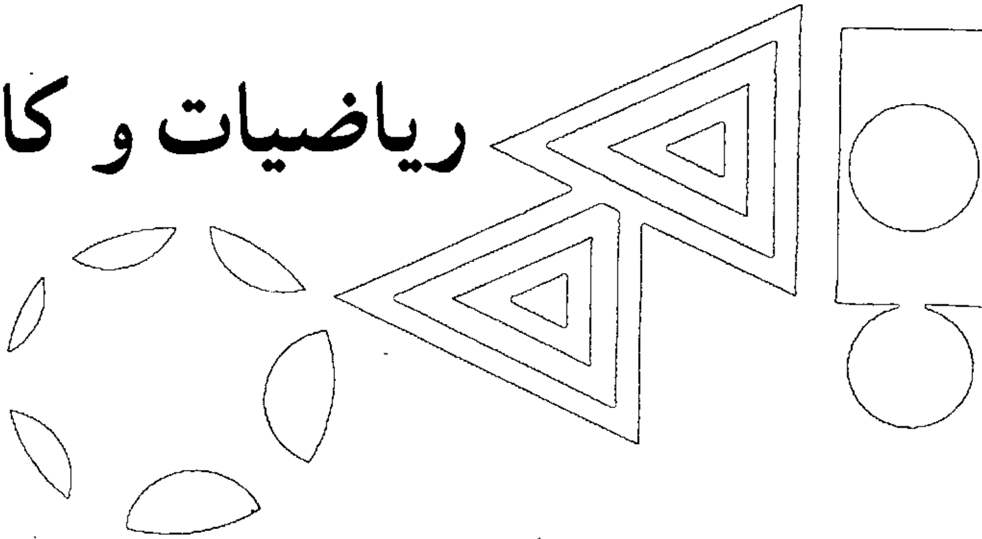


یادداشتها

1– Fermat , Pierre de
2– Fermat's Little Theorem
3– Fermat's Last Theorem
4– Fibonacci
5– Leonardo of Pisa
6– Bonaccio
7– Fibonacci numbers
8– Fourier , Joseph
9– Galois. Evariste
10– Gauss, Carl Friedrich
11– Disquisitiones Hrithmeticae
12– Fundamental Theorem of Hrithmetic
13– Fundamental theorem of Algebra
14– theorema egregium
15– Ceres
16– Godel, Kurt
17– Hamilton, William Rowan
18– Hilbert, David
19– Foundations of Geometry

ریاضیات و کاربردهای آن

◄ ترجمه: پرویز امینی



تصور مردم از ریاضیات برحسب قاعده‌ها و قوانینی به‌دست آمده است که به منظور نمادسازی، عددنویسی و شکل دادن به مفاهیم انتزاعی و مجرد پایه‌ریزی شده است. مفاهیم انتزاعی و مجرد ریاضی به علت عدم وابستگی به مفاهیم دیگر رشد قابل توجهی از خود نشان داده است. اثبات تئوریهای ریاضی برعکس علوم تجربی که از آزمایش و تجربه‌های مکرر آزمایشگاهی حاصل می‌شود با کمک روشهای منطقی میّسر است. در هر صورت توصیف، تعریف و طراحی فرآیندهای حقیقی دنیای ما یکی از بیشمار کاربردهای ریاضیات به حساب می‌آید و تأثیر متقابل بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی را به ما نشان می‌دهد.

مورد توجه قرار گرفتن ریاضیات در مطالعه بسیاری از نظامها، وابسته نبودن آن را به جهان فیزیکی یادآور می‌شود.

برای شمول و عمومیت در رویکرد و استدلال برهان اهدافی مورد استفاده قرار می‌گیرد، اهدافی که ارتباط سنتی ریاضیدانان را در شاخه‌های مختلف ریاضیات بیان می‌کند. به عنوان مثال، رنه دکارت با به‌کار بردن جبر در هندسه و حل مسایل هندسه با روشهای جبری، هندسه تحلیلی را به وجود آورد تا عمومیت و صحت آن را نشان دهد.

ریاضیات کاربردی و نمونه‌سازی

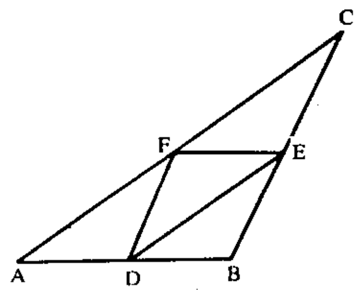
بین مطالعه نظامهای ریاضی مجرد یا انتزاعی (دامنه ریاضیات محض) و مطالعه نظامهای فیزیکی که به وسیله تئوریهای ریاضی استنباط می‌شود (دامنه ریاضیات کاربردی) مرز روشن و مشخصی وجود ندارد. در اصل، ممکن است هر شاخه ریاضیات نظامهای خاصی را توصیف کند مانند فیزیکی، اقتصادی، بیولوژی، پزشکی و نظامهای دیگر. نمونه‌سازی یک نظام فیزیکی مشتمل است بر یافتن تئوری ریاضی صوری که با ویژگیهای نظام فیزیکی مطابقت کند. تئوریهای ریاضی در کامپیوتر متعدد و مختلط است، در صورتی که در بعضی از نمونه‌سازیها تئوریها ساده است. بعضی اوقات ریاضیات رفتار یک نظام را پیش‌بینی و توصیف می‌کند به‌طوری که طراحی و مدل‌سازی منجر به پدید آمدن شاخه‌های ریاضی جدیدی می‌شود.

ریاضیات کاربردی شامل دامنه‌های تخصصی می‌شود که بین یافته‌های آزمایشی و تجربی و تئوریهای ریاضی ایجاد شده است. اگر چه این مقوله شامل کاربرد تئوری آماری در علم جامعه‌شناسی می‌شود امّا معمولاً ریاضیات کاربردی محدود و منحصر به کاربرد روشهای پیشرفته حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، جبر خطی و سایر شاخه‌های پیشرفته ریاضیات در فرآیندهای فیزیکی و تکنولوژی است.

مثلث‌بندی، هندسه و توابع مثلثاتی

یک نمونه ساده از روشهای ریاضی، نمایش بخشی از

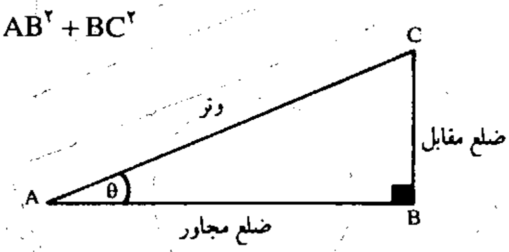
سطح زمین بوسیله یک مجموعه بهم پیوسته از مثلثها می‌باشد. در روش مثلث‌بندی برای به‌دست آوردن زوایا و فاصله‌هایی که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند از قوانین هندسی و توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در استدلالهای هندسی می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌های دو مثلث دو بدو متساوی و ضلعهای روبرو زاویه‌های متساوی متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.



در شکل بالا، نقاط D، E و F به ترتیب در وسط اضلاع AB، BC و CA قرار دارند. DE نصف طول AC، EF نصف طول AB و FD نصف طول BC می‌باشد.
بنابراین مثلث DEF متشابه مثلث ABC است و زاویه‌های D، E و F به‌ترتیب با زاویه‌های A، C و B متساوی است. علاوه بر این، مثلثهای ADF، FEC، DBE و EFD متناسب هستند و بنابراین با مثلث ABC متشابه می‌باشند.

مثلث قایم‌الزاویه مثلثی است که یکی از زاویه‌هایش °۹۰ است و بنابر قضیه فیثاغورس، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$



در توابع مثلثاتی، نسبت طولهای دو ضلع به اندازه‌های دو زاویه حاده (تند) مثلث بستگی دارد و این نسبتها با واژه‌هایی نام برده می‌شود. برای مثال، نسبت ضلع مقابل زاویه داده شده به وتر را سینوس زاویه می‌نامند. حرفهای یونانی θ (تتا) و φ (فی) برای نشان دادن زاویه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ بنابراین زمانی که ما می‌گوییم سینوس θ به معنای $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$

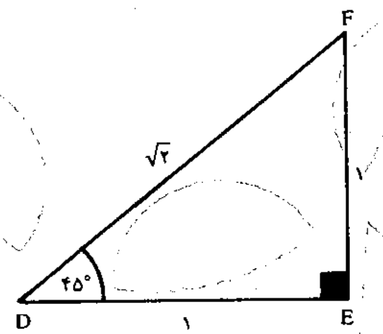
و کسینوس زاویه، نسبت ضلع مجاور زاویه داده شده به وتر می‌باشد.

$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

و تانژانت زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور می‌باشد.

$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$

برای به‌دست آوردن مقادیر $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$ می‌توان از قضیه فیثاغورس استفاده کرد.



در مثلث DEF، DE = EF = ۱ و زاویه‌های D و F هر کدام °۴۵ است (زوایای داخلی مثلث °۱۸۰) با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت.

$DF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

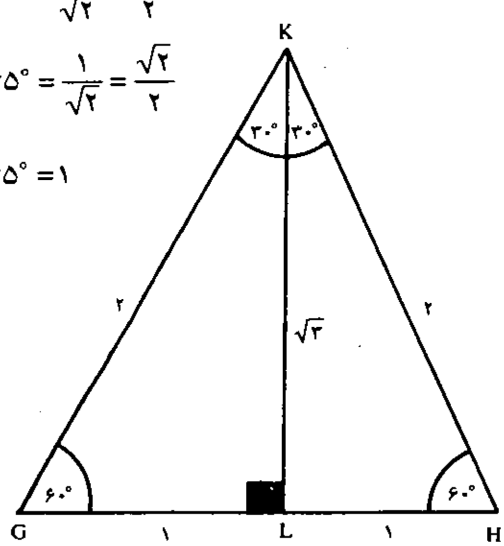
$DF = \sqrt{2}$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45^\circ = 1$



در مثلث GHK، $GH = HK = KG = ۲$ و زاویه‌های D، E و F هر کدام °۶۰ است. با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$KL^۲ + ۱^۲ = ۲^۲$$
$$KL = \sqrt{۳}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin ۶۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۳۰°$$

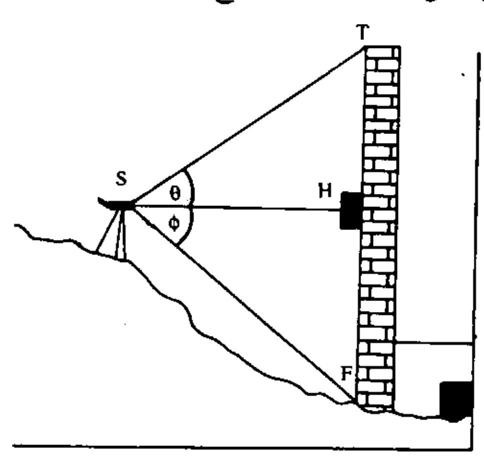
$$\cos ۶۰° = \frac{۱}{۲} = \sin ۳۰°$$

$$\tan ۶۰° = \sqrt{۳}$$

$$\tan ۳۰° = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

اندازه‌گیری ارتفاع

مطالب گفته شده کاربردهای گوناگون دارد به‌طور مثال برای اندازه‌گیری ارتفاع می‌توان از قضیه فیثاغورس استفاده کرد. فرض کنید نقشه‌برداری که موظف است ارتفاع یک دودکش بلند را اندازه بگیرد به یک تئودولیت یا دوربین مهندسی (وسیله‌ای که دقیقاً زوایا را اندازه می‌گیرد) و یک نوار مدرج (متر) بلند احتیاج دارد. ابتدا او دوربینش را در محل شیب تپه که نوک و عمق دودکش بوضوح دیده می‌شود، تراز می‌کند. سپس به ترتیب زوایای θ و ϕ بین خط افق SH و خطوط بینایی ST و SF در نوک T و عمق F دودکش را اندازه می‌گیرد. فرض کنید که دودکش عمود است و هر دو زاویه H زاویه راست است. نقشه‌بردار بر انجام کارش حداقل به اندازه یک قسمت نیاز دارد به همین علت SF را که تنها طول قابل اندازه‌گیری می‌باشد را با نوار مدرج اندازه می‌گیرد.



نکته مهم این که نقشه‌بردار در اندازه‌گیری SF دقت لازم را باید انجام دهد.

حالا $\sin\phi = \frac{HF}{SF}$ و HF اندازه قسمت پایین دودکش است

$$HF = SF \times \sin\phi$$

و $\cos\phi = \frac{SH}{SF}$ و SH مسافت خط افق تا دودکش است

$$SH = SF \times \cos\phi$$

حالا نقشه‌بردار می‌تواند مقدار HT قسمت بالای دودکش را حساب کند. ما قبلاً مقدار SH را به‌دست آورده‌ایم.

$$\tan\theta = \frac{HT}{SH}$$
$$HT = \tan\theta \times SH$$

که با $SF \times \cos\phi \times \tan\theta$ برابر است.

ارتفاع دودکش برابر $FT = FH + HT$ است. پس می‌توان نوشت:

$$FT = (SF \times \sin\phi) + (SF \times \cos\phi \tan\theta)$$

یا:

$$FT = SF(\sin\phi + \cos\phi \tan\theta)$$

نقشه‌بردار مقدار SF، زاویه θ و ϕ را از قبل به‌دست آورده و کافی است مقادیر $\sin\phi$ و $\cos\phi$ و $\tan\theta$ را حساب کند تا ارتفاع دودکش را به دست آورد. برای مثال، فرض کنید نقشه‌بردار اندازه $SF = ۳۰m$ و اندازه زاویه $\theta = ۴۵°$ و اندازه زاویه $\phi = ۳۰°$ را در اختیار دارد.

$$\sin ۳۰° = \frac{۱}{۲}$$
$$\cos ۳۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan ۴۵° = ۱$$

با این حساب ارتفاع دودکش برابر است با:

$$FT = ۳۰(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۴۰/۹۸ \quad \text{متر}$$

گراف
(قسمت دوّم)

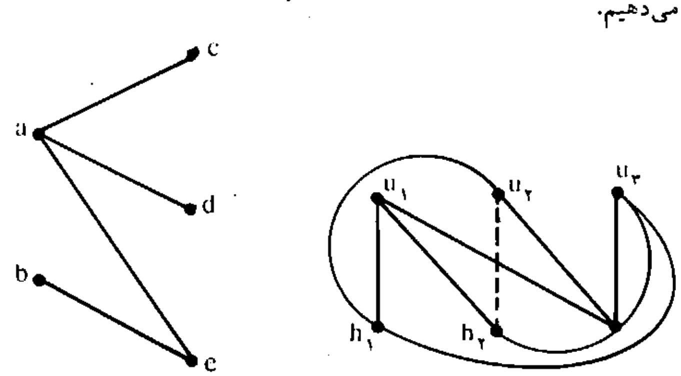
قابل استفاده دانش آموزان رشته ریاضی، دوره پیش‌دانشگاهی، ریاضیات گسسته

منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی
رالف ـ پ ـ گریمالدی (جلد دوم)
ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده (دبیر ریاضی ـ اراک)

تعریف: گراف دو بخشی کامل

(complete bipartite graph)

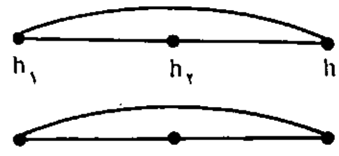
$G=(V,E)$ را یک گراف دو بخشی گوییم، هرگاه V را بتوان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی و جدا از هم V_1 و V_2 نوشت طوری که بین رئوس V_1 و همچنین بین رئوس V_2 هیچ یالی موجود نباشد (به‌عبارتی هر یال درنظر بگیریم، یک رأسش در V_1 و دیگری در V_2 باشد). اگر علاوه بر این هر رأس V_1 با هر رأس V_2 بوسیله یالی به‌هم وصل شوند، آنگاه گراف حاصل را گراف دو بخشی کامل گوییم. وقتی $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$. این گراف را با $k_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.



شکل (۲۴)

مثال ۱۵: در گراف G_1 شکل (۲۴) هرگاه $V_1=\{a,b\}$ و $V_2=\{c,d,e\}$ انتخاب شوند، خواهیم داشت $V_1\cap V_2=\phi$ و $V_1\cup V_2=V$ و گذشته از این بین رئوس V_1 هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین رئوس موجود در V_2، لذا G_1 یک گراف دو بخشی است. ولی چون بین رأس b در V_1 و رئوس d و c در V_2 هیچ یالی موجود نیست، G_1 دو بخشی کامل نیست. منتهی با اضافه کردن یالهای $\{b,d\}$ و $\{b,c\}$ گراف حاصل دو بخشی کامل $(k_{2,3})$ خواهد بود. G_1 گراف مسطح است (طبق تعریف). در G_2 با انتخاب $V_2\{h_1,h_2,h_3\}$ و $V_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ نتیجه خواهیم گرفت دو بخشی کامل $(k_{3,3})$ است. ولی G_2 مسطح نیست. مگر با برداشتن یالی مثل $\{h_2,u_2\}$.

مسئله ۱۱: متمم گراف G_2 در شکل (۲۴) $(\overline{k_{3,3}})$ را رسم کنید:



شکل (۲۵)

حل: همان‌طور که در شکل (۲۵) ملاحظه می‌شود:

$$E(\overline{k_{3,3}})=\{h_1h_2,h_1h_3,h_2h_3,u_1u_2,u_2u_3,u_1u_3\}$$

پس $\overline{k_{3,3}}$ دارای ۲ مؤلفه k_3 و k_3 می‌باشد. به‌طور کلی $\overline{k_{m,n}}$ دارای دو مؤلفه k_m و k_n می‌باشد.

مسئله ۱۲: الف) تعداد رئوس و یالهای موجود در گراف کامل

دو بخشی $k_{m,n}$ $(m,n\in z^+)$ را تعیین کنید.

ب) اگر گراف $k_{m,12}$، ۷۲ یال داشته باشد، m را محاسبه کنید.

پ) ثابت کنید: $\binom{m+n}{2} - mn = \binom{m}{2} + \binom{n}{2}$

$(m,n\in z^+)$ (راهنمایی: از تعداد یالهای موجود در گرافهای k_{m+n} و $k_{m,n}$ و $\overline{k_{m,n}}$ استفاده کنید.)

حل: الف) تعداد رئوس: $m+n$ و تعداد یالها: mn.

ب) $|E| = 12m = 72 \Rightarrow m=6$

پ) فرض می‌کنیم $m+n$ رأس k_{m+n} به‌صورت $\{x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_n\}$ لیست شده باشند و $V_1=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ و $V_2\{y_1,y_2,...,y_n\}$. همهٔ یالهای به‌شکل $\{x_i,y_j\}$، $1\le j\le n$ و $1\le i\le m$ را (که تعداد آنها mn است) از یالهای گراف کامل k_{m+n} (که تعدادشان $\binom{m+n}{2}$ می‌باشد) حذف می‌کنیم. درنتیجه $\overline{k_{m,n}}$ که دارای دو مؤلفهٔ k_m و k_n است حاصل می‌شود، با تعداد یالهای $\binom{m}{2} + \binom{n}{2}$

لذا:

$$|E(\overline{k_{m,n}})| = \binom{m+n}{2} - mn = \binom{m}{2} + \binom{n}{2}$$

تمرین ۱: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه یک گراف دو بخشی باشد، آن است که دوری با طول خرد نداشته باشد.

تمرین ۲: هرگاه $G=(V,E)$ یک گراف همبند با v رأس باشد که $|E| > \frac{v^2}{4}$، ثابت کنید G نمی‌تواند گراف دو بخشی باشد.

تست ۶) کدام گزینه همواره صحیح است.

الف) هر گراف ساده نوع خاصی از یک گراف چندگانه است.

ب) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف دو بخشی است.

پ) هر گراف دو بخشی کامل الزاماً یک گراف کامل است.

ت) موارد ب و پ.

حل: گزینهٔ «ب» صحیح است. (توجه داشته باشید که گزینهٔ پ صحیح نیست. مثلاً G_4 در شکل (۲۴) دو بخشی کامل هست ولی گراف کامل نیست).

◄ تعریف: دور همیلتونی و مسیر همیلتونی

(Hamilton cycle and Hamilton path)

فرض کنید، $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد.

الف) هرگاه دوری در G موجود باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار بگذرد، گوییم G دارای دور همیلتونی است. (یا به‌اختصار G گراف همیلتونی است.)

ب) مسیر همیلتونی، مسیری در G می‌باشد که از هر رأس موجود در G دقیقاً یک بار می‌گذرد. دو تعریف را با تعاریف مدار اویلری و خط سیر اویلری مقایسه کنید.

توجه: هرگاه G گراف همیلتونی با n رأس باشد، دارای دوری با n رأس متمایز و n یال خواهد بود.

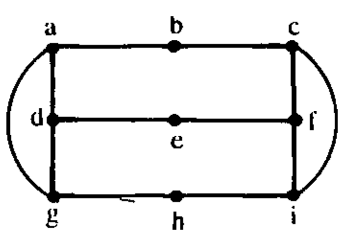
نکته ۱: اگر گرافی دور همیلتونی داشته باشد، مسیر همیلتونی نیز خواهد داشت (کافی است یک یال از دور را حذف کنیم). ولی عکس این موضوع صادق نیست و ممکن است گرافی مسیر همیلتونی داشته باشد ولی دور همیلتونی نداشته باشد.

نکته ۲: تفاوت دور و دور همیلتونی در آن است که ممکن است رأسی در گراف G موجود باشد که در دور ظاهر نشود. ولی در دور همیلتونی هر رأس دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

نکته ۲: هرگاه G دور همیلتونی داشته باشد برای هر $a\in V$ داریم $\deg(a)\ge 2$.

نکته ۳: هرگاه $a\in V$ و $\deg(a)=2$، آنگاه هر دو یال وابسته به‌رأس a باید در دور همیلتونی ظاهر شود.

مسئله ۱۳: گراف شکل (۲۶) را درنظر بگیرید.



شکل (۲۶)

الف) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به‌همان رأس اول رسید (یا آیا گراف همیلتونی است)؟

ب) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر رأس دقیقاً یک بار گذشت و به‌رأس دیگری به‌جز رأس اول رسید؟ (آیا گراف مسیر همیلتونی دارد).

حل: الف) باتوجه به‌این‌که G ۹ رأس دارد. اگر در G دور همیلتونی موجود باشد طول این دور باید ۹ باشد و چنین دوری را نمی‌توان یافت لذا G گراف همیلتونی نیست. ب) دنبالهٔ رئوس

a,b,c,f,c,d,g,h,i یک مسیر همیلتونی برای G می‌سازد.

مسئله ۱۴: یک گراف همبند مثال بزنید که دارای شرایط زیر باشد.

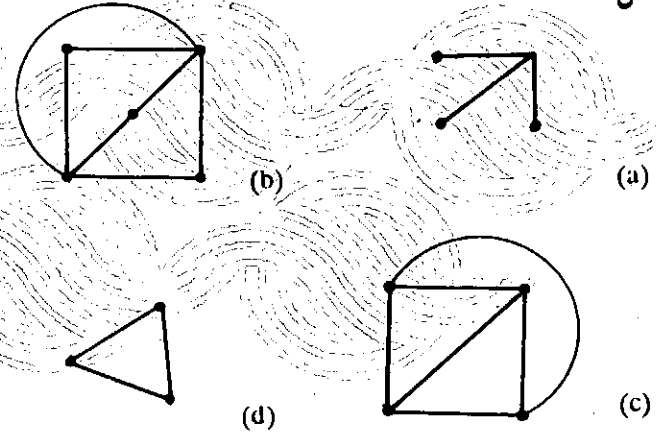
الف) نه اویلری باشد و نه همیلتونی.

ب) اویلری باشد ولی همیلتونی نباشد.

پ) همیلتونی باشد ولی اویلری نباشد.

ت) هم اویلری باشد و هم همیلتونی.

حل:



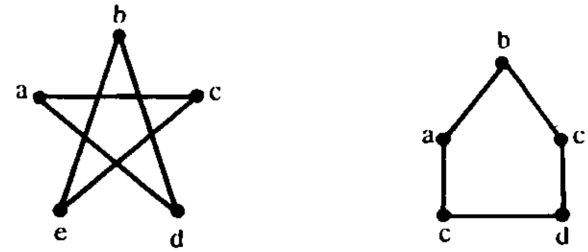
شکل (۲۷)

مسئله ۱۵ [۵۴]: الف) گراف کامل k_n ، ($n \geq 3$ و عددی فرد) چند دور همیلتونی مختلف دارد؟

ب) ۱۷ دانش‌آموز، هر روز برای خوردن ناهار دور یک میز گرد می‌نشینند. آنها سعی می‌کنند برای آنکه یکدیگر را بهتر بشناسند هر روز بین دو نفری بنشینند که روزهای قبل کنار آنها نبوده‌اند آنها برای چند روز این کار را می‌توانند ادامه دهند.

حل: الف) k_n ، n رأس و $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ یال دارد. یک دور همیلتونی در k_n ، n یال دارد. بنابراین حداکثر $\frac{n-1}{2}$ دور همیلتونی می‌توانیم داشته باشیم طوری که هیچ دو دوری یال مشترک نداشته باشند. مثلاً k_5 ، $2 = \frac{5-1}{2}$ دور همیلتونی مختلف دارد که عبارتند از:

ب) با توجه به قسمت الف، برای $9 = \frac{17-1}{2}$ روز.



تعریف: عدد رنگی (رأسی)

(chromatic number)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، رنگ‌آمیزی مناسب G هنگامی رخ می‌دهد که رئوس G را طوری رنگ بزنیم که اگر $\{a,b\}$ یالی در G باشد آنگاه a و b با رنگهای مختلف رنگ شوند. حداقل تعداد رنگهای لازم برای چنین رنگ‌آمیزی را عدد رنگی (رأسی) گراف G می‌نامند و با $X(G)$ نمایش می‌دهند. بنابراین برای پیدا کردن $X(G)$ باید مجموعهٔ رئوس G را چنان افراز کنیم که بین اعضای زیرمجموعه‌های حاصل هیچ یالی موجود نباشد و تعداد زیرمجموعه‌ها حداقل باشد.

مثال ۱۶: الف) با توجه به تعریف گراف دوبخشی کامل $X(k_{m,n})=2$.

ب) هرگاه c_n دوری با طول n ($n \geq 3$) باشد آنگاه:

$$X(c_n)=\begin{cases} 2 & \text{اگر n زوج باشد،} \\ 3 & \text{اگر n فرد باشد،} \end{cases}$$

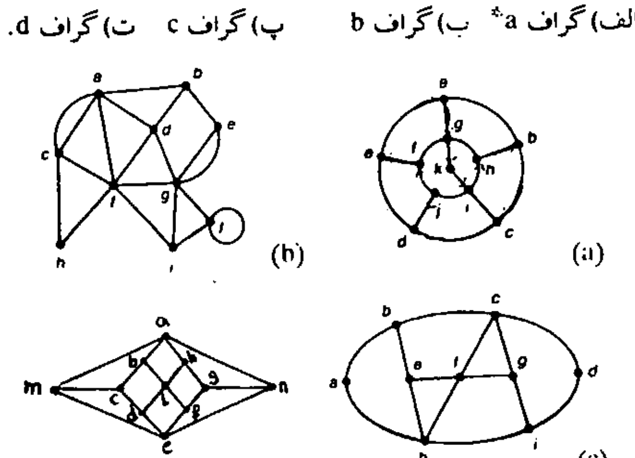
تمرین ۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت همبند دو بخشی باشد که V به‌دو مجموعه ناتهی V_1 و V_2 افراز شده باشد.

الف) هرگاه $|V_2| \neq |V_1|$ ، ثابت کنید G نمی‌تواند دور همیلتونی داشته باشد.

ب) هرگاه $|V_1| - |V_2| \neq \pm 1$ ، ثابت کنید G نمی‌تواند مسیر همیلتونی داشته باشد.

تست ۷: کدامیک از گرافهای شکل (۲۸) همیلتونی نیست؟

الف) گراف a* ب) گراف b پ) گراف c ت) گراف d.

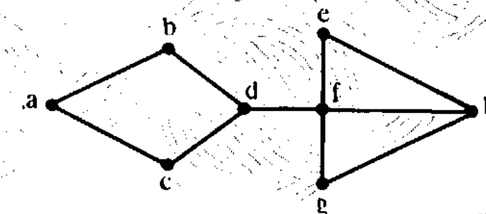


شکل (۲۸)

* گراف شکل (G) در تست ۷ بی‌جهت می‌باشد لطفاً جهت‌ها را در نظر نگیرید.

حل: با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,g,k,i,h,b,c,d,j,f,e,a نتیجه می‌گیریم گراف (a) همیلتونی است و با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,d,b,e,g,j,i,f,h,c,a نتیجه می‌گیریم گراف (b) نیز همیلتونی است و با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,h,e,f,g,i,d,c,b,a نتیجه خواهیم گرفت گراف (c) نیز همیلتونی است. گراف (d) که به‌گراف (Herschel) معروف است همبند می‌باشد و با انتخاب $V_1=\{a,c,e,g,l\}$ و $V_2=\{b,d,f,h,n,m\}$ نتیجه خواهیم گرفت گراف دوبخشی است و چون $|V_2|=6\neq5=|V_1|$ لذا طبق تمرین ۳ نتیجه خواهیم گرفت این گراف همیلتونی نیست (توجه داشته باشید تمرین ۳ هنگامی قابل استفاده است که از دو بخشی بودن گراف اطمینان داشته باشیم. و نیز عکس ترکیبهای شرطی الف و ب در تمرین ۳ برقرار نیست).

مسئله ۱۶: یک دفتردار مدرسه می‌خواهد برای برگزاری ۸ امتحان برنامه‌ریزی کند. بعضی از امتحانها همزمان قابل اجرا نیستند و برخی از آنها به‌طور همزمان قابل اجرا هستند. به‌هر امتحان یک رأس نظیر کرده‌ایم و رئوس متناظر با دو امتحانی که همزمان قابل اجرا نیستند را به‌وسیله یک یال به‌هم وصل نموده‌ایم، گراف شکل (۲۹) به‌دست آمده است. کمترین تعداد جلسات لازم برای این برنامه‌ریزی را تعیین کنید.



شکل (۲۹)

حل: $v=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. مجموعهٔ V را باتوجه به‌تعریف عدد رنگی به‌طریق زیر افراز می‌کنیم: یکی از رئوس مثل a را انتخاب کرده و آن را در مجموعهٔ V_1 قرار می‌دهیم. چون رأس b مجاور a است لذا آن را در مجموعهٔ دیگری مثل V_2 قرار می‌دهیم. رأس c مجاور a است پس نمی‌توان آن را در V_1 قرار داد ولی باتوجه به‌این که رئوس b و c مجاور نیستند c را در V_2 قرار می‌دهیم. تاکنون داریم:

$$V_1=\{a\}$$

$$V_2=\{b,c\}$$

و به‌این‌ترتیب ادامه می‌دهیم تا $V_1=\{a,d,e,g\}$ و $V_2=\{b,c,f\}$

اکنون نوبت به h رسیده، چون h مجاور e و f است بنابراین نمی‌توان آن را در V_1 و V_2 قرار داد و مجبوریم از مجموعه سومی به‌نام V_3 استفاده کنیم. بنابراین V را می‌توان حداقل به ۳ زیرمجموعهٔ

$$V_1=\{a,d,e,g\}$$

$$V_2=\{b,c,f\}$$

$$V_3=\{h\}$$

افراز کرد که بین اعضای V_1 هیچ یالی موجود نیست و همچنین بین اعضای V_2 و V_3. لذا عدد رنگی (رأسی) این گراف ۳ می‌باشد یعنی حداقل سه جلسه برای برگزاری امتحانات لازم است.

مسئله ۱۷: هرگاه G یک گراف بی‌جهت با حداقل یک یال باشد، ثابت کنید G دوبخشی است اگر و تنها اگر $X(G)=2$.

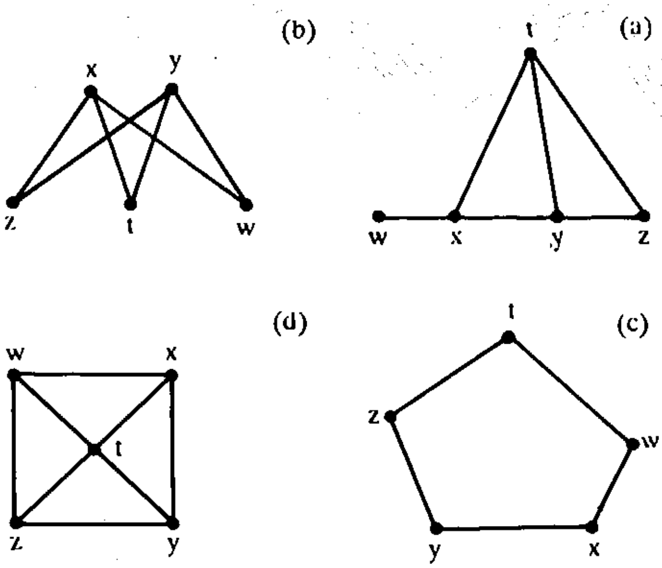
حل: این موضوع باتوجه به‌تعریف گراف دوبخشی بدیهی است. مثلاً گراف (d) در شکل (۲۸) گراف دوبخشی است. لذا $X(G)=2$.

مسئله ۱۸: یک گراف بی‌جهت مانند G ارائه دهید که $X(G)=3$. ولی هیچ زیرگراف G با k_3 یکریخت نباشد.

حل: کافی است G دوری با n رأس که $n\geq5$ و عددی خرد است، انتخاب شود.

تست ۸: عدد رنگی کدامیک از گرافهای شکل (۳۰) مخالف ۳ است.

الف) a ب) b پ) c ت) d



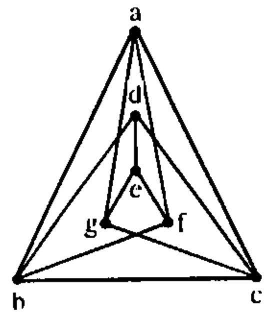
شکل (۳۰)

حل: گراف b همان گراف کامل دوبخشی $k_{2,3}$ می‌باشد لذا

$X(G)=2$. ولی در گرافهای a و c و d می‌توان حداقل V را به ۳ زیرمجموعه مثل $V_3=\{y,w\}$ و $V_2=\{x,z\}$ و $V_1\{t\}$ افراز کرد که بین اعضای V_1 و V_2 و V_3 هیچ یالی موجود نباشد. لذا عدد رنگی هر ۳ گراف سه می‌باشد و گزینهٔ (ب) صحیح است.

تست ۹: کدام گزاره در مورد شکل (۳۱) درست است.

الف) G، گراف اویلری است.
ب) گراف G همیلتونی است.
پ) گراف G دوبخشی است.
ت) گراف G غیرمسطح است.



شکل (۳۱)

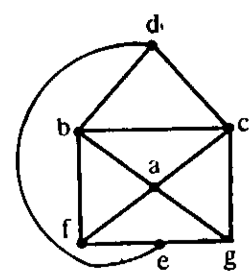
حل: گراف G اویلری نیست، چون درجهٔ تمام رئوس آن زوج نیست.

گراف G همیلتونی است (با درنظر گرفتن دنبالهٔ رئوس e,d,b,c,g,a,f,e که دوری با ۷ رأس و ۷ یال می‌باشد).

گراف G دوبخشی نیست. چون عدد رنگی آن طبق افراز زیر ۴ می‌باشد.

$V_1=\{a,d\}$ ، $V_2=\{b,g\}$ ، $V_3=\{c,f\}$ ، $V_4=\{e\}$

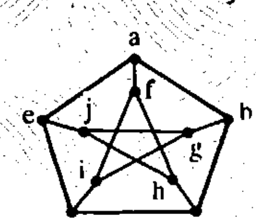
گراف G طبق شکل (۳۲) گراف مسطح است. (گزینه ب صحیح است).



شکل (۳۲)

تست ۱۰: کدام گزاره در مورد شکل (۳۳) که به گراف پترسون معروف است، درست است.

الف) گراف پترسون دور همیلتونی دارد.
ب) گراف پترسون مسیر همیلتونی دارد.
پ) $X(G)=4$
ت) G گراف دوبخشی است.



شکل (۳۳)

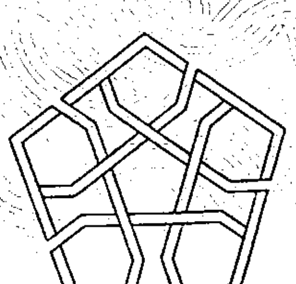
حل: گراف G مسیر همیلتونی دارد (با انتخاب دنبالهٔ رئوس a,b,c,d,e,j,g,i,f,h) عدد رنگی G طبق افراز زیر ۳ می‌باشد لذا G دوبخشی نیست.

$V_1=\{a,c,g\}$, $V_2=\{b,d,f,j\}$, $V_3=\{e,h,i\}$

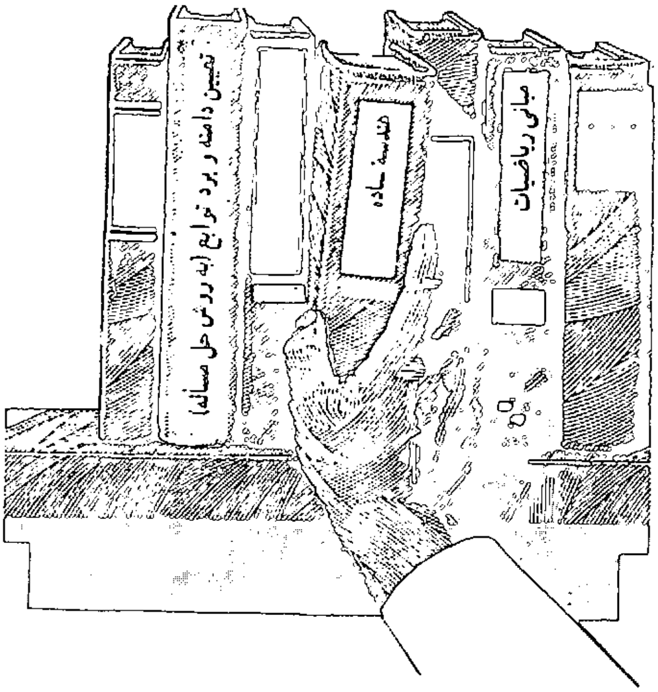
گراف G دور همیلتونی ندارد، چون نمی‌توان هیچ دوری با ۱۰ رأس متمایز و طول ۱۰ در آن یافت. گزینهٔ ب صحیح است. (می‌توان نشان داد اگر یک رأس و یالهای مجاور به‌آن را از گراف پترسون حذف کنیم، گراف حاصل همیلتونی خواهد بود. مثلاً اگر رأس g و ۳ یال وابسته به‌آن را از G حذف کنیم با انتخاب دنبالهٔ رئوس d,c,b,a,e,j,h,f,i,d دوری با ۹ رأس متمایز و طول ۹ خواهیم داشت و گراف حاصل همیلتونی خواهد بود.

مسئله ۱۹: الف) ثابت کنید اگر یالهای گراف کامل k_6 با رنگهای قرمز یا آبی رنگ شوند، حتماً یک مثلث با یالهای قرمز یا آبی وجود خواهد داشت. ب) ثابت کنید در هر گروه ۶ نفری یا دست‌کم سه نفر هستند که دوبه‌دو یکدیگر را می‌شناسند، یادست‌کم ۳ نفر هستند که دوبه‌دو یکدیگر را نمی‌شناسند. (با این فرض که آشنایی رابطه‌ای دوجانبه است).

حل: الف) رئوس k_6 را با a,b,c,d,e,f نامگذاری می‌کنیم. یکی از ۶ رأس مثلاً انتخاب می‌کنیم. باتوجه به‌اصل لانه کبوتری حداقل ۳ یال از ۵ یال گذرنده از a (ab,ac,ad,ae,af) همرنگ مثلاً قرمزند. فرض می‌کنیم این یالهای قرمز عبارتند از: ab,ac,ad. باتوجه به ۳ یال مذکور یالهای bc,cd,bd را که مثلث تشکیل می‌دهند درنظر می‌گیریم. دو حالت امکان دارد: اگر این سه یال آبی باشند، مثلثی با یالهای آبی خواهیم داشت و اثبات تمام است وگرنه، یکی از این یالها مثلاً $\{c,d\}$ قرمز است و در این صورت این یال با دو یال قرمز ad و ac مثلثی قرمز تشکیل خواهد داد. ب) برای ساختن گراف متناظر به‌هر یک نفر رأس‌نظیر می‌کنیم. برای‌هر دو نفری که با هم دوست (غریبه) هستند، ۲ رأس متناظر آنها را با یال قرمز (آبی) به‌هم وصل می‌کنیم. به‌این ترتیب باتوجه به‌قسمت الف، حکم نتیجه خواهد شد.



معرفی کتاب



مبانی ریاضیات

مؤلفان: حمیدرضا امیری و

یدالله ایلخانی‌پور

انتشارات مدرسه

چاپ اول: زمستان ۱۳۷۴



این کتاب از پنج بخش، جبرگزاره‌ها ــ استدلال ریاضی و روش حل مسأله، جبر مجموعه‌ها، ضرب دکارتی و رابطه ــ همنهشتی تشکیل شده است.

بخش‌های این کتاب در سالهای اوّل تا چهارم نظام قدیم و سال سوم نظام جدید (جبر و احتمال) و سال چهارم پیش‌دانشگاهی (ریاضیات گسسته) دبیرستانها تدریس می‌شود و در تمام دروس ریاضی کاربرد دارد.

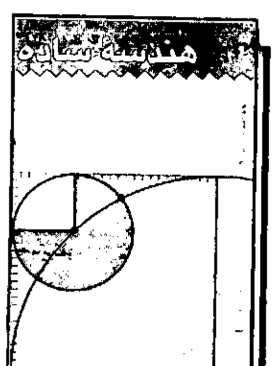
در هر بخش سعی شده است مطلب به طور مبسوط و به زبان ساده و دانش‌آموزی بیان شود. همچنین برای بیان یک مفهوم ریاضی مثالهای متنوّع آمده است و تا حدّی کتاب به صورت خودآموز تنظیم شده است تا دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند بدون کمک دیگران از کتاب بهره ببرند. در پایان هر بخش مسایلی مختلف از ساده به مشکل برای سنجش مفاهیم ارائه شده است. خواندن این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی بخصوص دانش‌آموزان نظام جدید توصیه می‌کنیم.

هندسهٔ ساده

مترجم: مهدی نجفی‌خواه

انتشارات مدرسه

چاپ اول: بهار ۱۳۷۵



این کتاب که مشتمل بر ۱۰ فصل با عناوین:

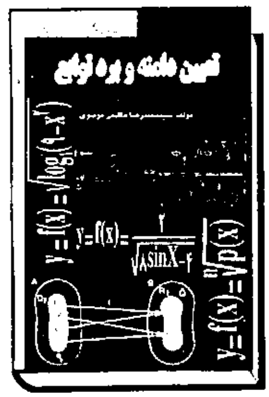
بردارها در صفحه، خط راست در صفحه و معادلات آن، منحنی‌های درجهٔ دوم، خطوط راست و صفحات در فضا، بردارهای فضایی، معادلهٔ خط راست و صفحهٔ در فضا، چند وجهی‌ها و مساحت سطوح آنها، اجسام دوار، حجم چند وجهی‌ها و اجسام دوار و مساحت سطح اجسام دوار می‌باشد

که در پایان هر فصل با توجه به محتوی هر درس مسایلی تکمیلی همراه با حل آنان (در آخر کتاب) آورده شده است.

در این کتاب سعی شده است که مطالب با بیانی ساده و روان به صورت خودآموز آورده شود تا دانش‌آموزان دبیرستانی بتوانند بدون کمک دیگران از کتاب بهره‌مند شوند.

خواندن این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی رشته ریاضی و تجربی و دبیران محترم توصیه می کنیم.

تعیین دامنه و برد توابع (به روش حل مسأله)

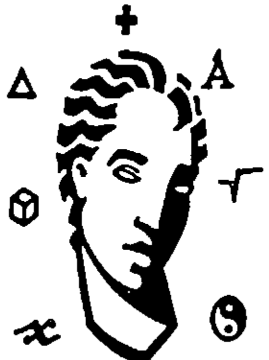


تألیف: محمدرضا هاشمی موسوی

انتشارات مدرسه

چاپ اول: تابستان ۱۳۷۵

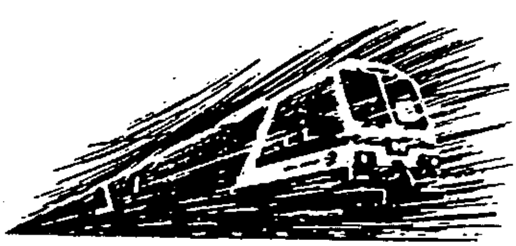
این کتاب حاوی تعیین دامنه و برد ده نوع تابع ازجمله توابع جبری، مثلثاتی، وارون و مرکب می‌باشد که پس از درس، با توجه به مفاهیم و مثالهای متن درس، مسایل و تمرینهایی دوره‌ای جهت احاطه و تسلط کامل روی مطالب فراگرفته شده، طرح شده است. در آخر تستهای کنکورهای سراسری مربوط به تعیین دامنه و برد توابع رشته‌های ریاضی و فنی و تجربی و تستهایی جهت پوشش دادن به مطلب همراه با پاسخ تشریحی آنان آورده شده است تا معلومات و مهارت کافی را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم سازد. همچنین آزمونی (تستهای دوره‌ای) جهت ارزیابی درک مطالب و تستهای فراگرفته شده آمده است (۱۵۵ تست با پاسخ تشریحی) که پس از پاسخگویی می‌توانید جواب خود را با پاسخهای تشریحی داده شده تطبیق دهید. این کتاب از آن جهت که برای بررسی توابع و حل معادلات و نامعادلات و رسم منحنی و تعیین ماکزیمم و می‌نیمم برخی از توابع بدون استفاده از مشتق و دیگر موارد بسیار ضروری است خواندن آن را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان و دانشجویان و دبیران گرامی توصیه می کنیم.



تفریح اندیشه ۵

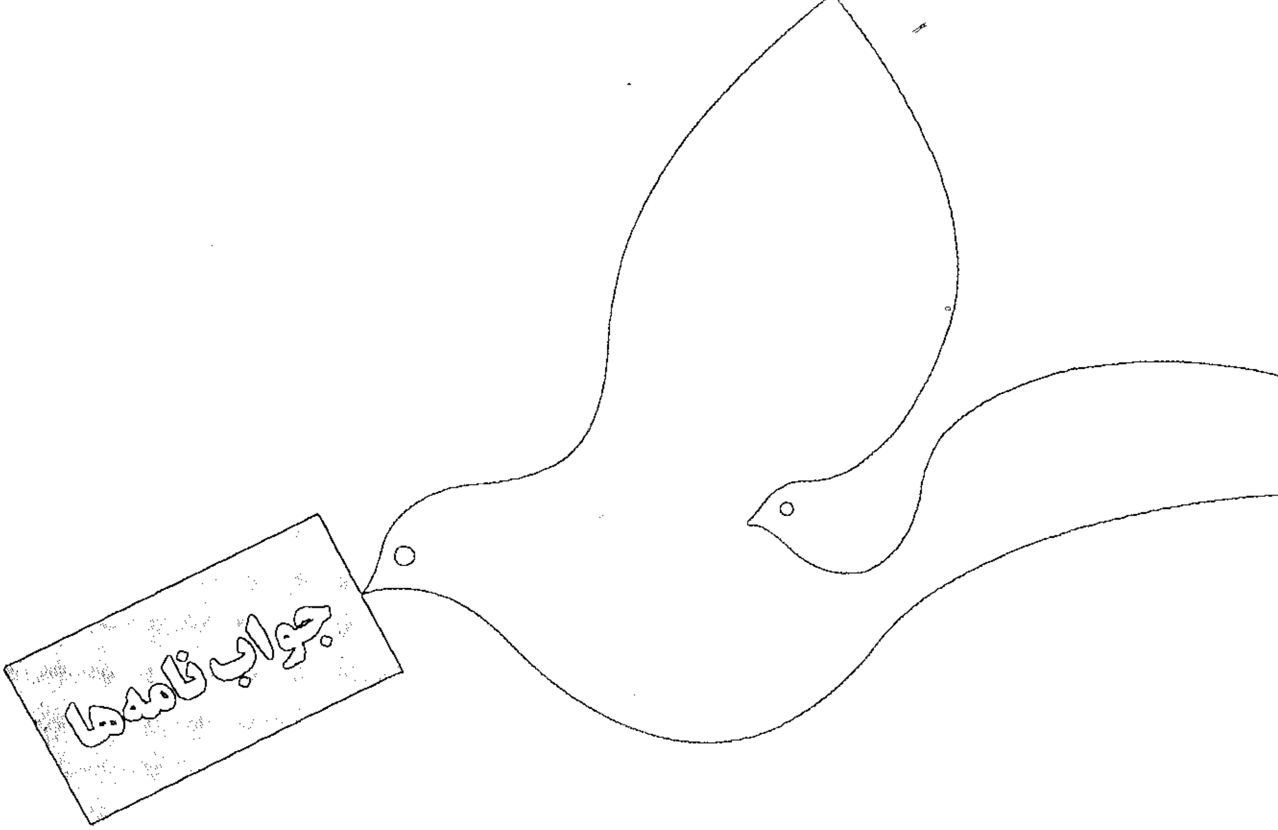
۴ــ روی خط

دو قطار زیرزمینی، یکی دو برابر سریعتر از دیگری، از دو سر یک خط به راه می‌افتند، و بدون توقف با نرخهای سرعت یکنواخت حرکت کرده در خیابان پنجاهم از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. درصورتی که قطار سریعتر در آغاز حرکت ۵ دقیقه تأخیر می‌داشت در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۲ کیلومتر از خیابان پنجاهم برخورد می‌کردند. سرعت قطارها چقدر است؟ طول خط چه اندازه است؟





جواب در صفحه ۸۸



آقای مهدی سید نصرتی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پولادشهر)

از مسألهٔ حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی محمدی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آمل)

از ارسال نامهٔ محبت‌آمیز شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده نیز بود، متشکریم. ان‌شاءالله در شماره‌های بعدی مجله از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم الهه شهیری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (خراسان)

از نامهٔ ارسالی شما که حاوی چند مسألهٔ حل شده بود، متشکریم. از مسایل شما در صورت لزوم استفاده خواهیم کرد. در جواب نامهٔ شما باید بگوییم که ان‌شاءالله بزودی شاهد مقاله‌ای دربارهٔ رادیکالها خواهید بود.

آقای رسول غنی زاده (ارومیه)

ازمسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (سیاهکل)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل، متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای غلام‌رضا پورقلی (آستارا)

ضمن تشکر از شما، به عرض می‌رسانیم که خوب است بدانید «وایلز» ثابت کرده است معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای هر n طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳ $(n \geq 3)$ جواب صحیح غیر صفر اندارد.

توجه کنید که هر معادلهٔ سیال مانند:

$$x^n + y^n + z^n = t^n \qquad (1)$$

درصورتی که برای برخی n طبیعی جواب داشته باشد، هر معادله از نوع (۱) جوابهای اختصاصی و عمومی مخصوص به خود دارد. برای مثال معادله‌های:

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3,\ x^4 + y^4 + z^4 = t^4,\ \dots,$$

$$x^k + y^k + z^k = t^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

اگر معادله(۱) برای $n=k$ جواب داشته باشد، معلوم نیست که معادله برای $n = k+1$ دارای جواب باشد.

آقای صابر گودالی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بوکان)

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل مسایل برهان ۱۳ باید به عرض برسانیم که شما فقط دروقت مقرر شده می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را ارسال کنید.

آقای مهدی نامور؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بجنورد)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای علیرضا خان تیموری؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (زنجان)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی شادمانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال حل مسایل برهان به عرض می‌رسانیم که شما فقط در زمان مقرر شده می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را ارسال کنید.

آقای حمید رضا داودیان؛ دانش آموز رشتهٔ ریاضی (شوشتر)

از شما برای ارسال چند مسأله با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل کریمایی (شهریار)

از شما برای ارسال دو مسألهٔ حل شده متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای بهزاد کاظمی؛ دیپلمهٔ رشتهٔ تجربی (اهواز)

از شما برای ارسال نامه محبت‌آمیز و مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

خانم نسیبه میروکیلی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (شیراز)

از شما برای ارسال مسایل و تستهایی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای غلامرضا صفایی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (آباده)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل به عرض می‌رسانیم که سعی کنید مسایل از سطح مطلوبتری برخوردار باشند و تکراری نیز نباشند. به هر حال ازمسایل شما در شماره های آینده استفاده خواهیم کرد.

خانم فائقه احسان‌پور صادقی؛ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی (ساوه)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنها استفاده خواهیم کرد.

آقای سعید سلیمانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (بندرعباس)

از شما برای ارسال مقاله‌ای تحت عنوان «بررسی اعداد فیبوناچی» متشکریم. توصیه می‌کنیم که مقالهٔ خود را برای مجلات ریاضی دیگر نیز ارسال کنید. برای اطلاع بیشتر در این زمینه می‌توانید به کتابهای «اندیشهٔ ریاضی» و «۲۵۰ مسأله حساب» ترجمه پرویز شهریاری و یا سایر کتابهای دیگر مانند: «ریاضیات چیست» و مجلات ریاضی مانند: «رشد آموزش ریاضی» رجوع کنید.

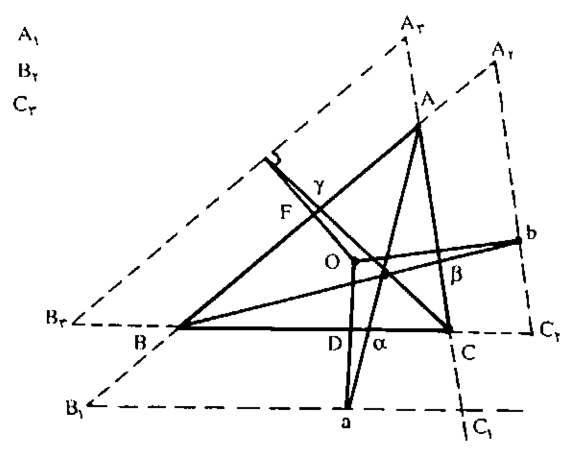
آقای ایمان عشایری (ساری)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مقاله‌ای با عنوان «محاسبهٔ سریهای: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$ و $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$» به عرض می‌رسانیم که این مقاله بسیار جالب است ولی مناسب مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است. پیشنهاد می‌کنیم که مقاله را برای آن مجله ارسال کنید.

حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶،۱۵

حل مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۵

نقطه‌های برخورد خطهای Aa ، Bb و Cc با ضلعهای BC ، CA و AB را به‌ترتیب α، β و γ می‌نامیم، و از نقطه‌های a ، b و c خطهایی به‌ترتیب به موازات BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا خطهای B_1C_1 ، C_2A_2 و A_3B_3 پدید آیند (B_1 و C_1 به‌ترتیب نقطه‌های برخورد AB و AC با خطی است که از a موازی BC رسم شده است و ...)



بنابه قضیهٔ خطهای همرس و خطهای موازی می‌توان نوشت :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{aB_1}{aC_1}\ ,\quad \frac{\beta C}{\beta A}=\frac{bC_2}{bA_2}\ ,\quad \frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{cA_3}{cB_3}$$

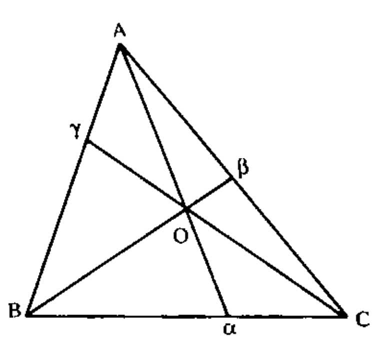
از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه داریم :

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\times\frac{\beta C}{\beta A}\times\frac{\gamma A}{\gamma B}=\frac{aB_1}{aC_1}\times\frac{bC_2}{bA_2}\times\frac{cA_3}{cB_3} \qquad (1)$$

چون نقطه‌های α، β و γ روی ضلعهای (یا امتداد ضلعهای) مثلث ABC قرار دارند.

در صورتی که طرف دوم این رابطه برابر ۱ باشد، بنا به عکس قضیهٔ سوا (J. D. C'eva) سه خط Aα ، Bβ و Cγ یا Aa ، Bb و Cc همرسند.

قضیهٔ سوا ــ اگر خطهای همرس AO ، BO و CO به‌ترتیب ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC را در نقطه‌های α، β و γ قطع کنند، رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار است.



عکس قضیهٔ سوا ــ اگر نقطه‌های α، β و γ روی ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC چنان واقع باشند که

رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار باشد، سه خط $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ در یک نقطه همرسند.

اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، طرف دوم رابطهٔ(۱) همواره برابر ۱ نیست (در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۱ است). بنابراین سه خط $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ به غیر از مثلث متساوی الاضلاع نمی‌توانند همرس باشند.

امّا اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد، طرف دوم رابطهٔ (۱) برابر ۱ است، چون در این صورت $aB_1 = C_3B$ است، زیرا دو پاره خط aB_1 و CB_3 نسبت به نیمساز زاویهٔ B قرینه یکدیگر خواهند بود و به همین ترتیب $bC_1 = aC_1$ و $cA_3 = bA_2$ می‌باشد. بنابراین داریم :

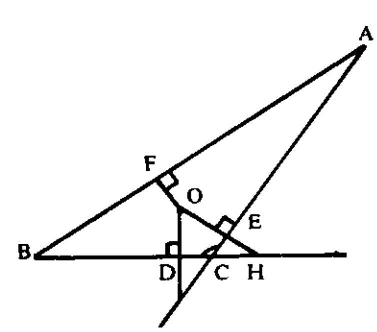
$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\times\frac{\beta C}{\beta A}\times\frac{\gamma A}{\gamma B}=-1$$

و یا

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

و خطهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ یا Aa ، Bb و Cc همرسند.

از نظر اندازهٔ جبری حاصلضرب سه نسبت $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ و $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ و $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ عددی منفی است. زیرا اگر مثلث زاویهٔ منفرجه نداشته باشد، هر سه نسبت بالا منفی هستند و اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، مثلاً $\hat{C} > 90^\circ$ باشد (شکل روبه‌رو)، $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ منفی و دو نسبت دیگر بنابر آن که $Da > Dk$ یا $Da < Dk$ باشد هر دو مثبت و یا هر دو منفی می‌باشند. بنابراین حاصل‌ضرب سه نسبت منفی و قدرمطلق آن برابر ۱ است یعنی رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\times\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\times\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$ برقرار و در نتیجه خطهای Aa ، Bb و Cc همرسند.



اسامی افرادی که هر سه مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ خانم اشافی
۲ ـ آقای مجید عفت‌پناه
۳ ـ آقای محمد پیشنماز
۴ ـ آقای روزبه امینی
۵ ـ خانم لاله گلستانی
۶ ـ آقای علی دلنواز
۷ ـ آقای محمدعلی مطلبی فرد
۸ ـ آقای ابوالفضل الفت
۹ ـ آقای غلامحسین اصلاحی سراجاری
۱۰ ـ آقای مهدی مشملجیان
۱۱ ـ آقای رحیم بغدادی
۱۲ ـ آقای علی مشکین قلم
۱۳ ـ آقای مجید ناظمی
۱۴ ـ آقای رضاعلی همتی
۱۵ ـ آقای هومان حبیبی
۱۶ ـ آقای مهدی امینیان
۱۷ ـ آقای محمدرضا خانی
۱۸ ـ آقای رضا ولی‌پور ابراهیمی
۱۹ ـ آقای سجاد نازی‌دیزجی
۲۰ ـ آقای احمد خوشخوی یوسف‌آبادی (مشهد)
۲۱ ـ آقای مهدی ازوجی

اسامی افرادی که دو مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ آقای پیام روشنفکر
۲ ـ آقای علیرضا عباسی
۳ ـ آقای امیدرضا عبدی
۴ ـ آقای رضا بردباری
۵ ـ آقای صابر بیامی
۶ ـ آقای محسن توحیدی
۷ ـ آقای حسین جهانخواه
۸ ـ آقای مجید استاد رحیمی
۹ ـ آقای محمد توحیدی مقدم
۱۰ ـ آقای هیوا مهدوی (قائم شهر)
۱۱ ـ آقای محمود یلوه‌ای (کرمانشاه)

اسامی افرادی که یک مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۱۶ را صحیح حل کرده‌اند:

۱ ـ آقای ایثار دشتی گوهری
۲ ـ آقای شهرام عباسی
۳ ـ آقای آیدین جمشیدی
۴ ـ آقای رضا محمدخانی
۵ ـ خانم آزادهٔ عجمی
۶ ـ خانم سوسن حایری یزدی
۷ ـ آقای وحید طاهری
۸ ـ آقای آرش محمّدی
۹ ـ خانم شبگیر حسنی
۱۰ ـ آقای علی حسین‌زاده
۱۱ ـ آقای محسن یزدی
۱۲ ـ آقای محمدرضا ایمانی

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۶

۱ ــ وقتی درختهای باغ را ۹ به ۹ یا ۱۲ به ۱۲ یا ۲۱ به ۲۱ یا ۲۲ به ۲۲ یا ۳۹ به ۳۹ شمردیم هر دفعه ۶ واحد کسر داشتیم، پس اگر درختهای باغ را حداقل k فرض کنیم، $(k+۶)$ باید بر ۹ و ۱۲ و ۲۱ و ۲۲ و ۳۹ بخش‌پذیر باشد بنابراین $(k+۶)$ کوچکترین مضرب مشترک اعداد فوق می‌تواند باشد پس، کوچکترین مضرب مشترک اعداد مذکور ۳۶۰۳۶ است که نتیجه می‌دهد، $k = ۳۶۰۳۰$.

۲ ــ فرض کنیم A عددی ۲n رقمی با ارقام مساوی یک و B عددی n رقمی با ارقام مساوی ۴ باشد ثابت می‌کنیم $K = A + B + ۱$ مجذور کامل است.

$$B = \overbrace{۴۴ \ldots ۴}^{n \text{ بار}} = ۴\times ۱۰^{n-۱} + ۴\times ۱۰^{n-۲} + \ldots + ۴\times ۱۰ + ۴$$

$$= ۴\times\frac{۱۰^{n}-۱}{۱۰-۱} \Rightarrow B = ۴\times\frac{۱۰^{n}-۱}{۹}$$

$$A = \overbrace{۱۱۱ \ldots ۱}^{۲n \text{ بار}} = ۱۰^{۲n-۱} + ۱۰^{۲n-۲} + \ldots + ۱۰^{۲} + ۱۰ + ۱$$

$$= \frac{۱۰^{۲n}-۱}{۱۰-۱} = \frac{۱۰^{۲n}-۱}{۹}$$

$$K = A + B + ۱ = \frac{۱۰^{۲n}-۱}{۱۰-۱} + ۴\times\frac{۱۰^{n}-۱}{۱۰-۱}$$

$$= \frac{۱۰^{۲n}-۱+۴\times ۱۰^{n}-۴+۹}{۹} = \frac{۱۰^{۲n}+۴\times ۱۰^{n}+۴}{۹} = \left(\frac{۱۰^{n}+۲}{۳}\right)^{۲}$$

۳ ــ می‌خواهیم با فرض $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}$ ثابت کنیم $\frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$ (البته باید توجه داشته باشیم که همواره می‌توان a' ، b' ، c' را مثبت فرض کرد مثلاً، $\frac{۲}{-۳} = \frac{-۲}{۳}$).

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} \Rightarrow ab' < a'b \quad (۱)$$

$$\frac{b}{b'} < \frac{c}{c'} \Rightarrow bc' < b'c \quad (۲)$$

$$\frac{a}{a'} < \frac{c}{c'} \Rightarrow ac' < a'c \quad (۳)$$

$$(۳)\ ,\ (۱) \Rightarrow a(b'+c') < a'(b+c)$$

$$\Rightarrow a(b'+c') + aa' < a'(b+c) + aa'$$

$$\Rightarrow a(b'+c'+a') < a'(b+c+a) \Rightarrow \frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \quad (۴)$$

$$(۳)\ ,\ (۲) \Rightarrow c'(a+b) < c(b'+a')$$

$$\Rightarrow c'(a+b) + cc' < c(a'+b') + cc'$$

$$\Rightarrow c'(a+b+c) < c(a'+b'+c') \Rightarrow \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'} \quad (۵)$$

$$(۴)\ ,\ (۵) \Rightarrow \frac{a}{a'} < \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} < \frac{c}{c'}$$

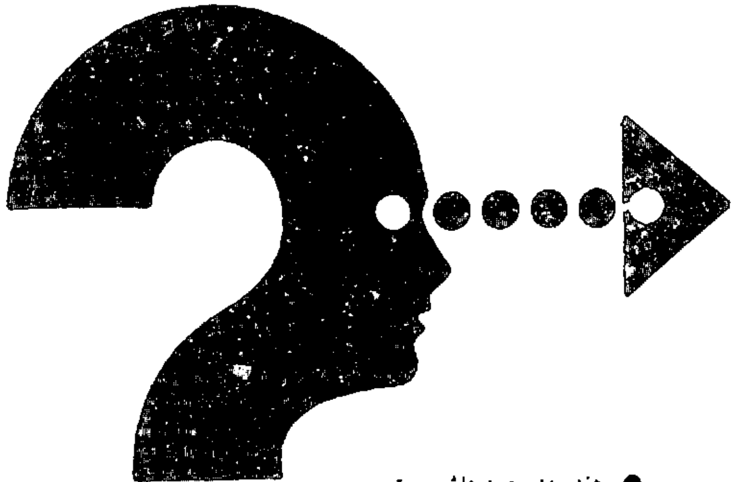
(حل مسألهٔ ۳ از آقای مهدی ازوجی از کلاردشت، ولبال)



ریاضیات، همیشه و در تمامی طول تاریخ تکامل خود، با زندگی و عمل بستگی داشته است. با وجود این، در تاریخ ریاضیات می‌توان دوره‌هایی را تشخیص داد که، در آنها، اهمیت درجه اول به ریاضیات کاربردی داده شده است: دوره‌هایی هم وجود دارد که، در آنها ریاضیات با سمت‌گیری نظری پیش رفته است.

درواقع، مسیر تاریخ ریاضیات، به تناوب، از دورهٔ ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و برعکس، عبور کرده است.

از مقاله «ریاضیات کاربردی»
نوشته پرویز شهریاری، برهان ۱۶



مسائل برای حل

- هندسه: محمدهاشم رستمی
- ریاضیات جدید: حمیدرضا امیری
- جبر و مثلثات: احمد قندهاری ـ محمدرضا هاشمی
- کامپیوتر: حسین ابراهیم‌زاده قلزم

مسائل ریاضیات ۱ نظام جدید و ریاضیات جدید سال اول نظام قدیم و جبر سال اول نظام قدیم

۱ ـ با استفاده از این قضیه که «اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ و برعکس» ثابت کنید :

الف) $A \cap (A \cup B) = A$ ‌ ‌ ‌ ب) $A \cup (A \cap B) = A$

۲ ـ اگر $M = \{۱, ۲, ..., k\}$ $(k \geq ۱۰)$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{۲, ۳, ..., (k-۴)\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ..., (k-۶)\}$ در این صورت مجموعه‌های B' و A' و $(A - B)$ و $(B - A)$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۳ ـ اگر $a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ = ۲(a + b + c)$ باشد، a و b و c را حساب کنید.

فرستنده : آقای غلامرضا صفایی ؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (آباده)

۴ ـ ثابت کنید :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a^۲ + b^۲ \geq ab$$

فرستنده : آقای غلامرضا صفایی (آباده)

۵ ـ دستگاه زیر را حل کنید، با فرض این که x و y و z اعدادی مثبت باشند.

$$\begin{cases} x^۲yz = ۴۸ \\ xy^۲z = ۷۲ \\ xyz^۲ = ۹۶ \end{cases}$$

فرستنده : آقای مجید کریمی مقدم ؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

۶ ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$A = ۳\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۰}+۵} + \frac{۵}{\sqrt{۱۰}-۲} - \frac{۷}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

فرستنده : آقای مجید کریمی مقدم (بجنورد)

۷ ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۳^{۶x} = ۸۱^{x+۱}$$

فرستنده : آقای احسان کامرانی ؛دانش‌آموز رشته ریاضی (پلدختر)

۸ ــ حاصل عبارت زیر را با فرض $x \neq 0$، به دست آورید.

$$A = \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7}{x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-9}}$$

فرستنده : آقای کیوان شهاب لواسانی ؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

۹ ــ اگر $a = b + 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$

فرستنده : آقای کیوان شهاب لواسانی (تهران)

۱۰ ــ عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$n^4 - 2n^2 + 49$$

فرستنده : آقای احسان‌الله پورصادقی لنگرودی، دانش‌آموز سال سوم رشته تجربی (ساوه)

مسائل ریاضیات ۳ نظام جدید و جبر دوم نظام قدیم

۱ ــ اگر AC قطر متوازی‌الاضلاع ABCD و $A(m,1)$ ، $B(n,m)$ ، $C(-2,2)$ و $D(-1,n)$ باشند، طول قطر BD را حساب کنید.

۲ ــ اگر قرینهٔ نقطهٔ $M(m+1, n-1)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نقطهٔ $N(3m-1, 2n)$ باشد، مقادیر m و n را تعیین کنید.

۳ ــ نقاط متمایز A و B و C روی یک محور مفروضند. اندازهٔ عبارت $\dfrac{\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{CA} - \overline{AC}}{\overline{CB} - \overline{CA} + \overline{BA} - \overline{AC}}$ را حساب کنید.

۴ ــ معادلهٔ قرینهٔ خط $13x - 7y - 5 = 0$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

۵ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} - \left(\sqrt[20]{8}\right)^2}$$

۶ ــ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\sqrt{4x + 2\sqrt{4x-1}} + \sqrt{4x - 2\sqrt{4x-1}} = 2$$

۷ ــ ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad \neq bc$ در $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ یک به یک است.

۸ ــ نقطهٔ $S(2,-3)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y = x^2 + px + q$ است، مقدار p و q را تعیین کنید.

۹ ــ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $3 \times 4^{3+6+9+\dots+3n} = 192 \quad (n \in \mathbb{N})$

ب) $x^{\log 3} + 3^{\log 10x} = 36$

۱۰ ــ در یک تصاعد عددی مجموع جملات دهم و هفدهم برابر $5m + 3n$ است. در صورتی که این تصاعد شامل جملاتی به شکل $3m + 2n$ و $2m + n$ باشد و جملات دهم و هفدهم آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۷ باشند، مقدار m و n را به دست آورید.

جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید

(سؤالات ستاره‌دار مربوط به ریاضیات جدید سال سوم و چهارم ریاضی نظام قدیم نیز می‌باشد)

۱ ــ با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید : اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد در این صورت $A \times \varnothing = \varnothing$.

۲ ــ ثابت کنید : در هر مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی از اعداد صحیح، لااقل ۲ عضو یافت می‌شوند که به پیمانهٔ k با یکدیگر هم‌نهشت می‌باشند.

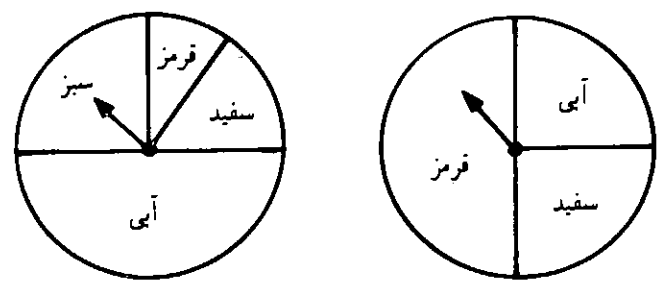
* ۳ ــ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید تعداد زیر مجموعه‌های هر مجموعهٔ n عضوی برابر است با 2^n .

۴ ــ رابطهٔ زیر در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است اولاً ثابت کنید رابطهٔ R یک رابطه هم‌ارزی است ثانیاً $[(1,-2)]$ را مشخص کنید.

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (b-d) = 5(a-c)$$

* ۵ ـ یک نقطه به تصادف از داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که فاصلهٔ آن نقطه از هر رأس، بیشتر از ۱ باشد.

* ۶ ـ با توجه به اشکال زیر احتمال آن که عقربه‌ها در قسمت‌های همرنگ توقف کنند چقدر است؟



۷ ـ ثابت کنید:

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

* ۸ ـ یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال آمدن هر عدد فرد است، در پرتاب این تاس احتمال آن که عدد حاصل کوچکتر از ۴ باشد چقدر است؟

* ۹ ـ باقی‌ماندهٔ تقسیم $1^{1375}+3^{1375}+7^{1375}+5^{1375}$ را بر ۵ بیابید.

۱۰ ـ اولاً: صورت قطبی عدد مختلط $z_1=1+i$ را بنویسید و درثانی: اگر $z_\circ=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ در این صورت عدد z^{1375} را محاسبه کنید.

مسائل حسابان(۱)

مسأله (۱): دو تابع به معادلات $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ و $D_f=D_g=R$ مفروضند.

اولاً: آیا تابع gof قابل تشکیل است؟ چرا؟

ثانیاً: دامنه تابع gof را بیابید.

مسأله (۲): تابع f به معادله $f(x)=mx^3+(m-1)x^2+(n-2)x+(n+1)$ مفروض است.

اولاً: m و n را چنان بیابید تا این تابع، تابعی فرد باشد. ثانیاً: m و n را چنان بیابید تا این تابع، تابعی زوج باشد.

مسأله (۳): نمودار تابع f به معادله $f(x)=\left|\left|x^2-2\right|-1\right|$ را رسم کنید.

مسأله (۴): حدّ توابع به معادلات زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$$

مسأله (۵): در تابع به معادله $y=\frac{1}{(x-a)^2}$، اگر y' و y''، مشتقات مرتبه اول و دوم این تابع نسبت به x باشند، ثابت کنید:

$$y''+3y'y(x-a)=0$$

مسأله (۶): تابع f به معادله

$$f(x)=\begin{cases}\left[\sin x-\frac{1}{2}\right]+a, & x<\frac{\pi}{6}\\ \left[\sin x+\frac{1}{2}\right]+b, & x>\frac{\pi}{6}\\ \left[-(x+\sin x)\right], & x=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

مفروض است.

a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=\frac{\pi}{6}$ پیوسته باشد.

مسأله (۷): تابع هموگرافیکی به معادله $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، $c\neq 0$ را چنان مشخص کنید تا نقطه $O'\Big|^{2}_{1}$ مرکز تقارن منحنی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $A\Big|^{0}_{-1}$ بگذرد.

مسأله (۸): قطاری با سرعت ثابت ۸۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. محل قطار از لحظه ترمز تا توقف کامل از رابطه $S=80t-20t^2$ $(S=0, t=0)$ بدست می‌آید. چند ثانیه طول می‌کشد تا قطار متوقف شود و در این مدت چه مسافتی را طی می‌کند.

مسائل حساب، دیفرانسیل و انتگرال(۱)

مسأله (۱) : ثابت کنید، اشتراک دو همسایگی متقارن یک عدد، یک همسایگی متقارن آن عدد است.

مسأله (۲) : نشان دهید دنباله $\left\{(-1)^{[x]}\right\}$ ، $x \in [1,+\infty)$ واگرا است.

مسأله (۳) : ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ همگرا است $(n \in N)$.

مسأله (۴) : ثابت کنید حدّ تابع به معادله $f(x)=\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$ وقتی $x \to +\infty$ برابر (۱) است.

مسأله (۵) : ثابت کنید :

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2-1}{|x-1|}+x^2\right)=3$$

مسأله (۶) : نشان دهید :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

مسأله (۷) : تابع f به معادله $f(x)=\frac{x-2}{x^2+mx+3}$ مفروض است.

اولاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع فقط یک مجانب داشته باشد.

ثانیاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع فقط دو مجانب داشته باشد.

ثالثاً : m را چنان بیابید تا منحنی این تابع سه مجانب داشته باشد.

مسأله (۸) : تابع به معادله $y=\frac{1}{(x-1)^3}$ مفروض است.

ثابت کنید داریم : $y''+4y'y(x-1)^2=0$.

مسأله (۹) :در تابع به معادله $y=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطه‌ای به طول $x=8$، واقع بر منحنی این تابع، قائمی بر این منحنی رسم نمودیم. این خط قائم خط نیمساز ربع اول را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

مسأله (۱۰) : ناظری از بالای یک برج به ارتفاع ۵۰ متر به یک قایق که در فاصله ۱۲۰ متری از پای برج قرار دارد و با سرعت ۱۳ متر بر ثانیه به پای برج نزدیک می‌شود نگاه می‌کند، معلوم کنید فاصله قایق با ناظر با چه سرعتی تغییر می‌کند.

مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

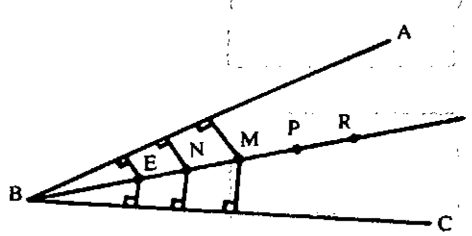
۱- الگوریتمی بنویسید که میانگین سه عدد مفروض را به‌دست آورد نمودار گردشی آن را رسم کنید.

۲- الگوریتمی بنویسید که میانگین هندسی سه عدد مثبت مفروض را حساب کند. نمودار گردشی آن را رسم کنید.

سؤالات امتحان درس هندسه یک نظام جدید متوسطه رشته عمومی سراسر کشور در خرداد ماه ۷۵

۱ ـ نقطه‌های M ، N و E بر روی نیمساز $A\hat{B}C$ واقع و از ضلع‌های آن به یک فاصله هستند.

الف) حدس شما در مورد فاصله نقطه‌های P و R که روی نیمساز $A\hat{B}C$ واقع هستند چیست؟

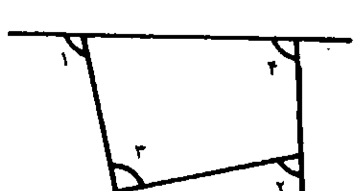


ب) براساس چه نوع استدلالی این حدس را زدید؟

پ) با استفاده از چه نوع استدلالی می‌توانیم با اطمینان بگوییم که فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؟

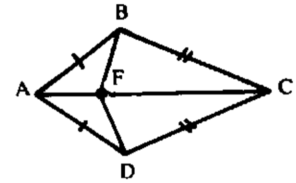
۲ ـ با توجه به شکل، درستی رابطهٔ زیر را نشان دهید.

$\hat{1}+\hat{2}=\hat{3}+\hat{4}$



۳ ــ در چهار ضلعی ABCD، $AB = AD$ و $BC = DC$. اگر F نقطهٔ دلخواهی روی قطر AC باشد، ثابت کنید :

$BF = FD$



۴ ــ نشان دهید مساحت لوزی برابر با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن است.

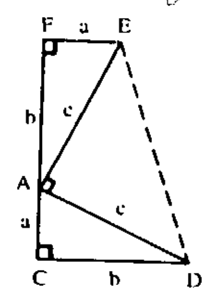
۵ ــ ذوزنقهٔ FEDC را در نظر بگیرید.

الف) مساحت ذوزنقه را برحسب a و b بنویسید.

ب) مساحت مثلث‌های ACD و AEF را پیدا کنید.

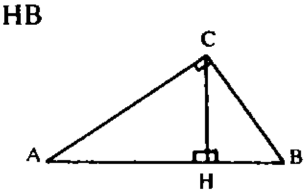
پ) مساحت ذوزنقه را برحسب مجموع مساحت‌های سه مثلث ACD ، AEF و ADE به دست آورید.

ت) با استفاده از قسمت‌های (الف) و (ب)، قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کنید.



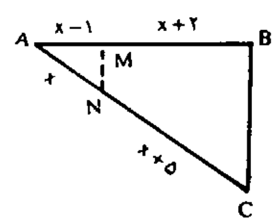
۶ ــ مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C پاره‌خط CH را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت کنید :

$CH^2 = AH \times HB$

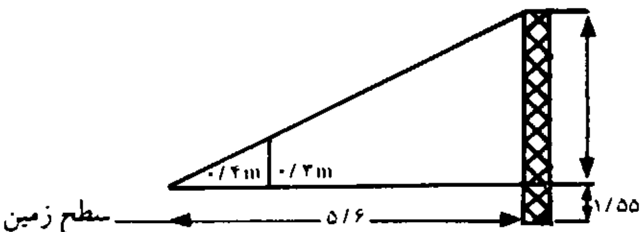


۷ ــ میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را پیدا کنید.

۸ ــ در مثلث ABC ، پاره خط MN موازی ضلع BC است. به کمک قضیهٔ تالس، مقدار x را حساب کنید.



۹ ــ با توجه به اندازه‌های روی شکل، ارتفاع دکل را از سطح زمین پیدا کنید.

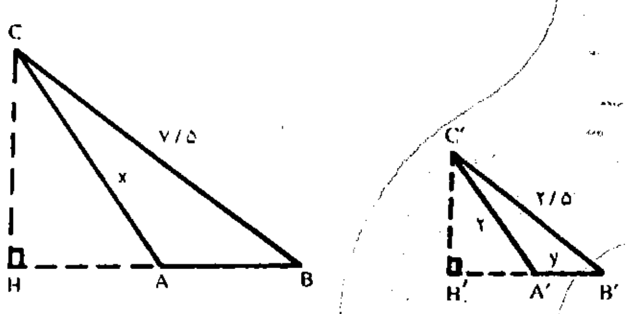


۱۰ ــ دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه هستند. با توجه به اندازه‌های داده شده،

الف) x و y را محاسبه کنید.

ب) نسبت محیط‌های دو مثلث را به دست آورید.

پ) نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.



۱۱ ــ اگر طول یال مکعبی را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می‌کند؟

۱۲ ــ اصل کاوالیری را دربارهٔ حجم‌ها بنویسید.

۱۳ ــ دو استوانهٔ قائم یکی به شعاع قاعده ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر را در نظر بگیرید.

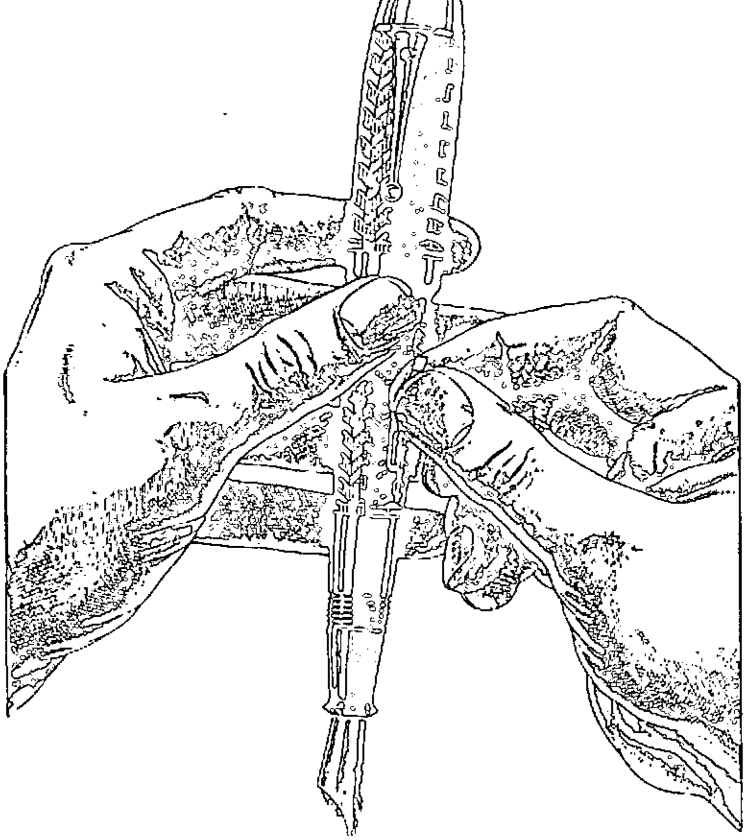
الف) مساحت جانبی هر یک از این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب) حجم هر یک از این دو استوانه را پیدا کرده و با هم مقایسه کنید.

۱۴ ــ توپی دارای شعاع ۱۰ سانتی‌متر است.

الف) مساحت سطح توپ را حساب کنید.

ب) حجم توپ را حساب کنید.



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱:

در هر یک از دو ماه اول یک جفت خرگوش متولد می‌شود. طی ماه سوم ۲ جفت خرگوش به دنیا می‌آیند. در این صورت در ماه چهارم ۳ جفت، در ماه پنجم ۵ جفت، و در ماه ششم ۸ جفت متولد می‌شوند.

با به ترتیب نوشتن تعداد جفتهای تولد یافته در هر ماه، دنبالهٔ مشهور

۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...

معروف به «تصاعد فیبوناتچی» «Fibonacci 's Progression» را به دست می‌آوریم.

توجه داشته باشید هر جمله واقع در تصاعد فوق، بعد از دو جملهٔ اول، برابر مجموع دو جملهٔ پیشین آن است. به این ترتیب، جملهٔ دوازدهم ۱۴۴ است؛ و تعداد جفتهای زنده در پایان یک سال دو برابر ۱۴۴ به علاوهٔ تعداد جفتهای نابالغ (۸۹) تولید شده در ماه یازدهم، یا مجموعاً ۳۷۷ جفت است.

در واقع، ۳۷۷ چهاردهمین جملهٔ تصاعد فیبوناتچی است، و تعداد جفتهای زنده در هر ماه، با شروع از ماه اول، تصاعد زیر را تشکیل می‌دهند

۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ...

یکی از ویژگیهای قابل توجه تصاعد فیبوناتچی رابطهٔ آن با «نسبت طلایی» «Golden Ratio» تاریخ هنر است.

به اختصار، بعدهای یک مستطیل (یا تابلوی نقاشی) را از لحاظ زیبایی‌شناسی در صورتی بهترین می‌دانند که نسبت عرض (W) آن به طول (D) اش چنان باشد که

$$\frac{W}{D}=\frac{D}{W+D}$$

نسبت $\frac{W}{D}$ را «طلایی» می‌نامند؛ و مقدار عددی آن $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}=۰/۶۱۸۰۳۰\cdots$.

چنین اتفاق افتاده که نسبت هر دو جملهٔ متوالی تصاعد فیبوناتچی به نسبت طلایی مورد بحث میل می‌کند. همگرایی مربوطه نیز کاملاً سریع است با استفاده از جمله‌های ششم و هفتم، نسبت $\frac{۸}{۱۳}$ برابر است با ۰/۶۱۵۳۸۰۰۰. به این ترتیب تصاعد فیبوناتچی و مضربهای آن به هنرمند امکان می‌دهد که بعدهای تابلوهای خود را به هر اندازه که مایل باشد به نسبت طلایی نزدیک کند.

جواب ۲:

۴/۳۴ واحد پول

یک همبرگر: ۲/۱۷ واحد پول

یک شیرموز: ۰/۹۳ واحد پول

یک سیب‌زمینی سرخ کرده: ۰/۶۲ واحد پول

از لحاظ جبری،

همبرگر: F، شیرموز: m، سیب‌زمینی سرخ کرده: f

$$(1)\quad F + m + f = 3/72$$

$$(2)\quad F - m - 2f = 0$$

و

$$(3)\quad F - 3m + f = 0$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 2m + 3f = 3/72$$
$$(2)-(3) \Rightarrow 2m - 3f = 0$$
$$\Rightarrow 4m = 3/72 \Rightarrow m = 0/93$$

$$(1)\quad F + f = 2/79$$
$$(2)\quad F - 2f = 0/93$$
$$\Rightarrow 3f = 1/86 \Rightarrow f = 0/62$$

$$(1)\quad F + 0/93 + 0/62 = 3/72 \Rightarrow F = 2/17$$

منبع: Stanton, Bob، مجلهٔ بازیها، می ۱۹۸۶.

جواب ۳:

فرض می‌کنیم x سهم مساوی از کیسهٔ کوچکتر و y سهم مساوی از کیسهٔ بزرگتر باشد. در این صورت $3x + 2$ تعداد سکه‌های واقع در کیسهٔ کوچکتر، و $7y + 1$ تعداد سکه‌های واقع در کیسهٔ بزرگتر است. به این ترتیب،

$$(3x + 2) + (7y + 1) = 140$$

$$3x + 7y = 137 \qquad (I)$$

مطلوب ما جوابهای صحیح x و y از معادلهٔ I است. از این گذشته، $7y + 1$ باید بزرگتر از $3x + 2$ باشد؛ و از آنجا که هر افسر بیش از هر سرباز سکه به دست آورده، $x + 1$ باید بزرگتر از y باشد.

معادله‌هایی از این دست که جوابهای صحیح می‌خواهند به نام **دیوفانت** «Diophantus»، (قرن سوم میلادی)، جبردان یونانی، به **معادله‌های دیوفانتی** «Diophantine equations» موسومند. تحلیل بعدی نیز **تحلیل دیوفانتی** نامیده می‌شود.

دو طرف معادله را بر ضریب ۳ تقسیم کرده فرض می‌کنیم Q عددی صحیح را نمایش دهد:

$$x + 2y + \frac{y}{3} = 45 + \frac{2}{3}$$

از آنجا که x، 2y، و ۴۵ اعدادی صحیح‌اند.

$$\frac{y}{3} - \frac{2}{3} = Q$$
$$y - 2 = 3Q$$
$$y = 3Q + 2 \qquad (II)$$

با قرار دادن معادلهٔ II در معادلهٔ I به دست می‌آوریم.

$$3x = 137 - 21Q - 14$$
$$x = 41 - 7Q \qquad (III)$$

معادله اکنون حل شده است. با انتخاب مقادیر عدد صحیح Q، معادله‌های II و III مقدارهای صحیح x و y را به دست می‌دهند که در معادلهٔ I صدق می‌کند.

شش جواب صحیح و مثبت (حاصل از مساوی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ قرار دادن Q) عبارتند از

x	۴۱	۳۴	۲۷	۲۰	۱۳	۶
y	۲	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷

از این جوابها تنها جواب $x = 20$، $y = 11$ دو شرط گفته شدهٔ در بالا را برقرار می‌کنند. بنابراین کیسهٔ افسرها حاوی ۶۲ سکه، و کیسهٔ سربازها شامل ۷۸ سکه است. هر افسر ۲۱ سکه، و هر سرباز ۱۱ سکه دریافت کرده است.

در ضمن، معروفترین معادلهٔ دیوفانتی عبارت است از

$$x^n + y^n = z^n$$

(هنگامی که $n = 2$ رابطهٔ فیثاغورس مربوط به مثلثهای قائم‌الزاویه را داریم. یکی از جوابهای دیوفانتی خاص این معادله $x = 3$، $y = 4$، $z = 5$ است.)

فرما «Fermat» ریاضیدان بزرگ فرانسوی قرن هفدهم، در یادداشتی در حاشیهٔ کتابی که بعد از مرگش به دست آمد، اظهار داشته است که این معادله هنگامی که n بزرگتر از ۲ باشد جواب صحیح ندارد. نیز نوشته است که اثباتش از آن طولانی‌تر است که در حاشیهٔ مزبور درج شود، و تا امروز کسی نتوانسته است اثبات یا عدم اثبات «آخرین قضیهٔ فرما» را به دست دهد.

یادداشت مترجم. این قضیه اخیراً به اثبات رسیده است. البته اشکالی اندک در این اثبات یافت شده است که چنان که گفته می‌شود قابل رفع است.

جواب ۴:

کار مرتب کردن پنج مهره، هر بار یک مهره، حداکثر هشت بار وزن کردن لازم دارد. اما روش زیر این عمل را حداکثر در هفت مرتبه انجام می‌دهد:

۱. وزن دو مهرهٔ دلخواه را نسبت به‌هم مقایسه می‌کنیم، و به آنها برچسب H (سنگین‌تر) و L (سبکتر) می‌زنیم.

۲. وزن دو مهرهٔ دلخواه از مهره‌های باقیمانده را نسبت به‌هم سنجیده آنها را با h و l مشخص می‌کنیم.

۳. وزن H را با وزن h مقایسه می‌کنیم. (برای توضیح فرض می‌کنیم H سنگین‌تر است.) اکنون سه‌مهره را مرتب کرده‌ایم:

H,h,l

L را کنار می‌گذاریم.

۴ و ۵. با حداکثر دو بار وزن کردن می‌توانیم مهرهٔ پنجم را به‌ترتیب وزن در میان H، h، l قرار دهیم.

۶ و ۷. اکنون بی‌توجه به مکان مهرهٔ پنجم، با استفادهٔ معقول از این اطلاع که L سبکتر از H است، می‌توانیم مکان L را با حداکثر دوبار وزن کردن مشخص کنیم.

جواب ۵:

این فرض معمول که یکی از قطارها ۲ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۲۴ کیلومتر در ساعت، حرکت می‌کند، ناصحیح است.

فرض بهتر (برای به‌دست آوردن سرعت x قطارها) این است که چون قطار کندتر به خیابان پنجاهم برسد قطار تندتر x کیلومتر از آن فاصله دارد، و در صورتی که قطار کندتر در خیابان پنجاهم توقف کند قطار سریعتر x کیلومتر مورد بحث را در ۵ دقیقه طی می‌کند.

اما قطار کندتر پیش از برخوردشان ۲ کیلومتر دورتر می‌رود، و در این صورت قطار سریعتر دو برابر، یا ۴ مایل، بیشتر مسافرت می‌کند.

بنابراین،

$x = ۶$ کیلومتر

سرعت قطار سریعتر ۶ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۷۲ کیلومتر در ساعت است، و سرعت قطار کندتر ۳ کیلومتر در ۵ دقیقه، یا ۳۶ کیلومتر در ساعت است.

طول خط مورد بحث می‌تواند هر فاصله‌ای بزرگتر از ۳ کیلومتر باشد، و قطار کندتر در این طول، درست هنگامی که قطار سریعتر، ۵ دقیقه دیرتر، شروع به بیرون رفتن می‌کند، به ترمینال خواهد رسید.

اکنون در این مورد فکر کنید: اگر، به‌جای این، قطار کندتر ۵ دقیقه در آغاز تأخیر داشته باشد، قطارها همچنان در نقطه‌ای به فاصله ۲ کیلومتر از خیابان پنجاهم برخورد خواهند کرد.

Borhan
Vol. 6 No. 1
Serial numbers: 18 Autumn 1996

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. Plotting of diagram of function f' by diagram of function f. — A. Ghandehari
2. Factorization of a polynomial by evolution. — Reza Peikar
3. Aplication of Determinant — S. Jafari
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
5. Don't haste in expressing your opinions. — A. Sharafeddin
6. A trigonometric identity and its applications. — Hossein H. Deloei
7. A geometrical point about streams construction. — . A. Sharafeddin
8. Problems.
9. On the solar system. — H. Nasirnia
10. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
11. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
12. Mathematics and its applications. — P. Amini
13. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
14. A brief history of mathematics magazins in Iran.
15. Descrete mathematics — G. R. Yassipour
16. Contest problem
17. Graph (Part Two) — S. Akbarizadeh
18. Acquaintance with Famous Mathematicians — G. R. Yassipour
19. Locus (VIII). — M. H. Rostami
20. Radical — S. M. R. Hashemi mosavi

ماهانی

ابوعبدالله محمدبن عیسی ماهانی

ریاضیدان ومنجم معروف مسلمان ایرانی (حدوداً درسال ۲۷۵ هـ. ق)

از مردم ماهان کرمان و از افاضل علمای عدد و مهندسی عالیقدر و منجمی زبردست بود و در بغداد می‌زیست. تاریخ تولد و وفات وی به‌طور دقیق معلوم نیست ولی با مراجعه به مدرک موجود می‌توان حدس زدکه وی درحدود سال ۲۱۰ هـ. ق در ماهان کرمان به‌دنیا آمده و در حدود سال ۲۷۵ هـ. ق درگذشته است.

خیام در کتاب جبر و مقابلهٔ خود از ماهانی نام برده و نوشته است:

«... و امّا از متأخران، یکی از ایشان به نام ماهانی مهندس درصدد تحلیل جبری مقدمه‌ای برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقالهٔ دوم کتاب خود موسوم به کره و استوانه به‌کار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعبها و مالها و اعداد، و وی بعد از تفکر زیاد از حل آن عاجز ماند و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد ابوجعفرخازن پیدا شد و آن را به وسیلهٔ قطوع مخروطی حل کرد.»

مقصود از معادله‌ای که خیام به آن اشاره کرده است معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$x^3 + a = cx^2$$

که بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی به معادلهٔ ماهانی موسوم بوده است.

ماهانی در رساله‌ای که در تفسیر مقالهٔ دوم از کتاب ارشمیدس دربارهٔ کره و استوانه نوشته متذکر شده است که از نه مسألهٔ این مقاله، هشت مسأله را حل کرده ولی موفق به حل مسألهٔ چهارم آن نشده است. این مسأله عبارت است از:

«تقسیم‌کردن کره به وسیلهٔ یک صفحه به دو قطعه، به وجهی که نسبت حجم آنها مساوی با عدد معلومی باشد.»

ماهانی کوشیده بود که این مسأله را به وسیلهٔ جبر و مقابله حل کند و معادلهٔ مذکور را به‌دست آورد.

آثار ریاضی موجود وی از این قرارند:

۱ـ رسالة‌فی‌المشکل من النسبة = کتاب النسبه = فی‌النسبه (رساله‌ای دربارهٔ مشکل نسبت)

۲ـ تفسیر المقالة‌العاشره من کتاب اقلیدس (شرح مقالهٔ دهم از کتاب اقلیدس)

آثار ریاضی مفقود ماهانی:

۳ـ شرح مقالهٔ پنجم کتاب اصول اقلیدس

۴ـ شرح مقالهٔ دوم کتاب کره و استوانهٔ ارشمیدس

۵ـ کتاب فی ستّ و عشرین شکلامن المقاله الاولی من اقلیدس التی لایحتاج فی شیء منهاالی الخلف (کتاب دربارهٔ بیست‌وشش قضیه از مقالهٔ اول اقلیدس که بدون احتیاج داشتن به برهان خلف می‌توان آنها را ثابت کرد.)

۶ـ اصلاح کتاب مانالاوس فی‌الاشکال الکریه

۷ـ زیج

• از کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی، نشر دانشگاهی

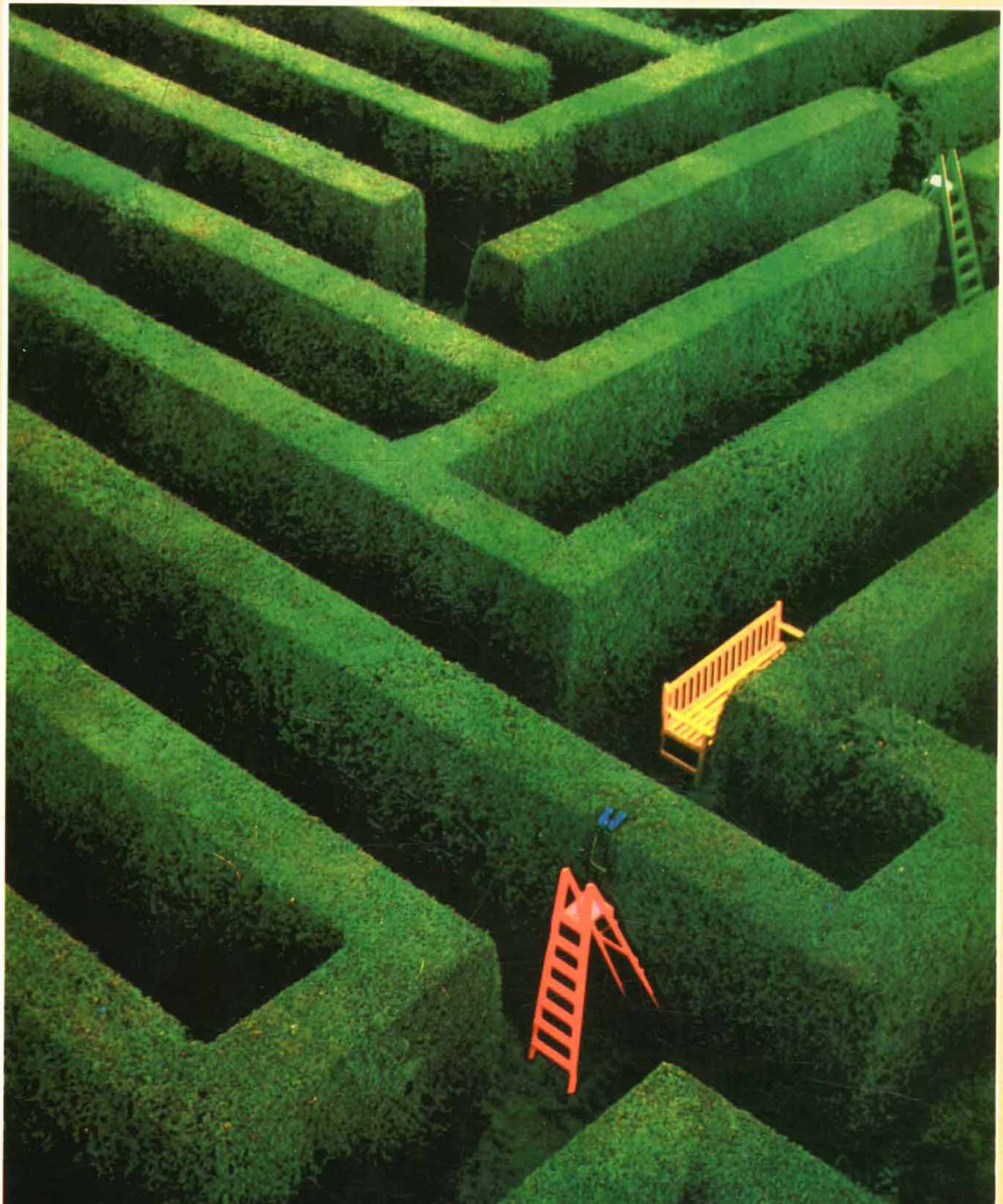
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۱۹

سال ششم، زمستان ۱۳۷۵ شمارهٔ دوم، بهاء ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

- صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❑ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی
- سردبیر: حمیدرضا امیری ❑ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

مطالب این شماره

- حرف اوّل ۱
- شماهم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۹) / پرویز شهریاری ۲
- مکان هندسی (قسمت نهم) / محمدهاشم رستمی ۹
- در حاشیه تابع و مفهوم تابع (قسمت اوّل) / ۱۵
- تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۱۸) ۱۷
- آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۵) / حمیدرضا امیری ۲۰
- حل یک مسئله آنالیز با هندسه / دکتر احمد شرف‌الدین ۲۲
- رادیکال (قسمت سوم) / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ۲۴
- مبانی کامپیوتر و برنامه‌ریزی با BASIC (۸) / حسین ابراهیم‌زاده قُلزم ۳۱
- بی‌نهایت / پرویز شهریاری ۳۸
- ماکزیمم و می‌نیمم / امیر منصور خان‌محمّد و مجید اعتمادسعید ۴۳
- مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۶) / غلامرضا یاسی‌پور ۵۵
- دسته خط / سیامک جعفری ۶۰
- طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۷) / غلامرضا یاسی‌پور ۶۴
- ریاضیات گسسته (قسمت چهارم) / غلامرضا یاسی‌پور ۶۷
- جواب نامه‌ها ۷۳
- حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۷ ۷۵
- مسائل برای حل ۷۶
- حل مسائل برهان ۱۸ ۸۰
- جوابهای تفریح اندیشه ۸۶

■ سال ششم، زمستان ۱۳۷۵ شمارهٔ دوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح معماهای ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

- ■ **هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است.**
- ■ **مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.**
- ■ **مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.**
- ■ **مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.**

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۹ـ ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ فاکس: ۸۸۲۰۵۹۹

صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

کد ۴۴۷/۱

حرف اوّل

فزت و ربّ‌الکعبه!

قسم به خدای کعبه که رستگار شدم.

در آستانهٔ ورود به ماه مبارکِ رمضان هستیم، ماهِ میهمانی خدا، ماه بندگانِ صالح او و ماه رستگاری امام‌علی(ع).

به راستی رستگاری در چیست و در کجا باید به دنبالِ آن گشت؟ این سؤالی نیست که جوابی واحد داشته باشد. هرکس فراخور حالِ خویش و به نسبت مرتبهٔ شناخت و معرفتش جوابی برای آن دارد، برای یک نفر رستگاری در آن است که همهٔ نمازهای واجب خود را در اول وقت به‌جای آورد و نوافل هریک از آنها را نیز ادا نماید. دیگری معتقد است اگر ماه مبارک رمضان را بتواند به معنای واقعی روزه بگیرد یعنی علاوه بر نخوردن و نیاشامیدن بتواند چشم و زبان و گوش و دست و پا و خلاصه همهٔ جوارح خود را از گناه دور نگهدارد، رستگار شده است. شاید شخصی دیگر، رستگاری را در کمک به محرومین و نیازمندان و خدمت به خلق بداند، و عده‌ای نیز رستگاری را از دریچهٔ دنیا نگاه می‌کنند و می‌پندارند رستگاری موفقیت در شغل و کار و رسیدن به مراتب و درجات بالای علمی یا اجتماعی است.

امّا رستگاری از دیدگاه امام‌علی(ع)، بریدن کامل از این دنیا و رسیدن به حضرت حق است و این به آن معنا نیست که دیدگاههای قبل، رستگاری محسوب نمی‌شوند، چرا که امامان ما علیهم‌السلام تمام آنچه را که از نظر هر مسلمان مؤمنی، رستگاری به حساب می‌آید؛ در حد عالی‌ترین درجات خود به انجام رسانده‌اند و مجری و مُبَلّغ آن بوده‌اند و به همین دلیل رستگاری واقعی را در نهایت، قرارگرفتن در جوارِ دوست دانسته و به راستی که عالی‌ترین درجات رستگاری، شهادت در راه خدا است که امام‌علی(ع) به آن نائل گردید و به زیبایی مفهوم واژهٔ رستگاری را برای ما و تمامی شیعیان واقعی خود معنی کردند.

والسلام ـ سردبیر

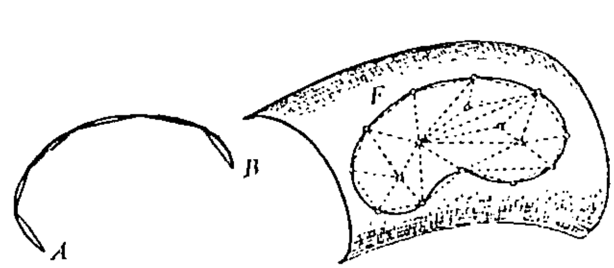
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۱۹)

○ پرویز شهریاری

مفهوم حد و عدم دقت در کاربرد آن، می‌تواند موجب نتیجه‌گیریهای نادرست بشود. پیش از این هم، با مثالهایی، به برخی جنبه‌های این مفهوم و اشتباه‌های ناشی از درک «نادرست» یا «ساده اندیشانه» از آن اشاره کرده‌ایم. اکنون، دو مثال از کتاب «اشتباه استدلال‌های هندسی» می‌آوریم که به شکل‌های فضایی مربوط‌اند و اشتباه نتیجه‌گیری، در آنها، به کاربرد نادرست مفهوم حد بستگی پیدا می‌کند.

استوانهٔ شوارتز

وقتی می‌خواهند، کمان AB از یک منحنی را اندازه بگیرند، یعنی طول آن را محاسبه کنند (شکل ۱، سمت چپ)،



شکل (۱)

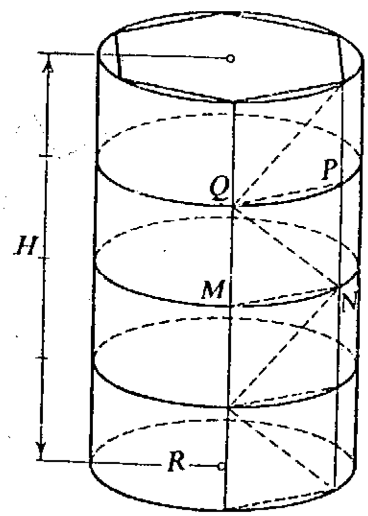
خط شکسته‌ای در آن محاط می‌کنند (لازم نیست، این خط شکسته منتظم باشد، زیرا برای برخی از کمانها، نمی‌توان این شرط را رعایت کرد) : سپس دنباله‌ای نامتناهی از این‌گونه خطهای شکسته در نظر می‌گیرند، به نحوی که رأسهای مجاور، به طور مرتب، به هم نزدیک و نزدیکتر شوند و، طول هر ضلع این خط شکسته، به سمت صفر میل کند. دنبالهٔ طولهای این خطهای شکسته، دارای حدی است که برابر طول کمان مورد نظر ماست.

اکنون به فضای دو بُعدی می‌رویم و کوشش می‌کنیم، طرحی شبیه طرح بالا، برای محاسبهٔ مساحت شکل F، که روی یک سطح منحنی قرار دارد، پیدا کنیم (شکل ۱، سمت راست). طبیعی است که شبیه حالت مربوط به کمان، به این ترتیب عمل کنیم : در شکل F، چند وجهی‌هایی محاط می‌کنیم [چندوجهی را، وقتی محاط در یک سطح منحنی گوییم که، رأسهای آن، روی این سطح باشند] و، سپس چندوجهی‌های دیگری که مساحتهای وجه‌های آنها، به ترتیب، کوچک و کوچکتر شود. در این صورت، مساحت شکل F، حد مساحتهای این چندوجهی‌ها خواهد بود، وقتی که مساحت بزرگترین وجه، به سمت صفر میل کند. اندکی دقیقتر صحبت کنیم : درون شکل F و روی سطح آن، مجموعه‌ای از نقطه‌ها انتخاب می‌کنیم و آنها را سه به سه به هم می‌پیوندیم تا یک سطح چندوجهی با وجه‌های مثلثی شکل تشکیل شود، به نحوی که هیچ دو مثلثی

دارای نقطه‌های مشترک درونی و هیچ دارای یال مشترک نباشند. دنبالهٔ نامتناهی سطحهای چندوجهی های F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... را، محاط در شکل F ، چنان در نظر می‌گیریم که طول بزرگترین یال در F_n (یعنی طول بزرگترین ضلع در بین همهٔ مثلثها)، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به سمت صفر برود و هر نقطه از شکل F ، حد دنبالهٔ نقطه‌هایی باشد که، به ترتیب، روی F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... انتخاب شده است (و این، از این جهت ممکن است که، وجه سطح چندوجهی، همیشه در سطح شکل F محاط است). کم و بیش روشن است که، دنبالهٔ مساحتهای چندوجهی‌های F_1 ، F_2 ، ... ، F_n ، ... دارای حدی برابر مساحت F است، زیرا بین سطح منحنی و چندوجهی محاط در آن، وقتی وجه‌های چندوجهی خیلی کوچک شده باشند، در عمل، اختلافی وجود ندارد.

ولی در سالهای پایانی سدهٔ نوزدهم، شوارتز Schwarz ریاضیدان آلمانی [هرمان آماندوس شوارتز در سالهای ۱۸۴۳ تا ۱۹۲۱ زندگی می‌کرد و از سال ۱۸۹۳ میلادی عضو فرهنگستان علوم برلن بود]، با مثال ساده‌ای، ثابت کرد که، این روشنی ظاهری و این «شبیه‌سازی» با حالت کمان، ما را فریب داده است. مثال شوارتز را در این‌جا می‌آوریم.

استوانهٔ دوار قایمی با شعاع قاعدهٔ برابر R و ارتفاع برابر H در نظر می‌گیریم (شکل ۲). سطح جانبی استوانه را با روشی



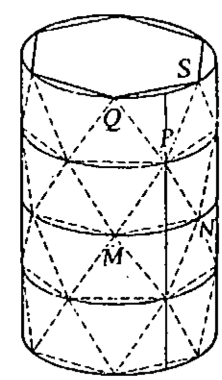
شکل (۲)

که در بالا آوردیم، پیدا می‌کنیم. برای این منظور، ارتفاع را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم و از هر نقطه، صفحه‌ای موازی قاعدهٔ استوانه رسم می‌کنیم. از برخورد این صفحه‌ها با سطح جانبی استوانه، (n−۱) دایره به دست می‌آید که، با توجه به دو قاعده، سطح جانبی را به n کمربند استوانه‌ای تقسیم می‌کنند. در یکی از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. مولدهایی که از رأسهای این m ضلعی می‌گذرند، هر یک از دایره های دیگر را، به m بخش برابر تقسیم می‌کنند. این نقطه‌های برخورد، رأسهای m ضلعیهای منتظم را، در هر یک از دایره ها تشکیل می‌دهند. پاره‌خطهای راستی که روی مولدها به وجود می‌آید، با ضلعهای چندضلعیهای منتظم محاطی، روی هم به تعداد mn مستطیل یکسان تشکیل می‌دهند (که یکی از آنها MNPQ در شکل ۲ است). رأس‌های این مستطیلها، روی سطح جانبی استوانه قرار دارند. اکنون، اگر هر یک از این مستطیلها را، با رسم قطر، به دو مثلث تقسیم کنیم، یک سطح چندوجهی به دست می‌آید که در سطح جانبی استوانه محاط شده است و وجه‌های آن را، ۲mn مثلث یکسان تشکیل می‌دهند. وقتی عددهای m و n ، هر دو به‌طور نامحدود بزرگ شوند، ضلعهای این مثلثها، و همراه با آنها، فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر سطح این چندوجهی تا سطح جانبی استوانه، به سمت صفر میل می‌کند.

هر چندوجهی محاطی به وسیلهٔ دو عدد m و n معین می‌شود؛ ولی با بی‌نهایت روش می‌توان دنبالهٔ این چندوجهی‌ها را ادامه داد؛ به این ترتیب که، یکی از این دو عدد را تابعی دلخواه از دیگری بگیریم (توجه کنید: هر دو عدد m و n طبیعی‌اند و با هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند). به عنوان نمونه، می‌توان $m=n$ یا $m=3n$ یا $m=n^2$ و غیره فرض کرد. به احتمالی، خواننده به این نکته توجه کرده باشد که، سطح چندوجهی ما، در واقع، سطح جانبی یک منشور m وجهی محاط در استوانه را تشکیل می‌دهد که، با تقسیم هر یک از m مستطیل جانبی به ۲n مثلث، به همان هدفی می‌رسیم که در شکل ۱ دنبال کردیم. به این ترتیب، باید با این روش، به محاسبهٔ سطح جانبی استوانه برسیم که، به یاری سطح جانبی منشور و با

عبور حدی، به دست می‌آید. در ضمن، روشن است که، در این استدلال، هیچ سفسطه یا ابهامی وجود ندارد.

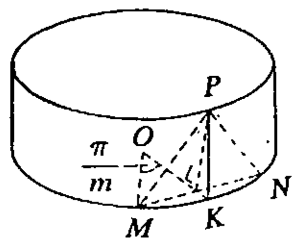
اکنون، در روش محاط کردن چندوجهی، تغییرهایی می‌دهیم. در آغاز، ارتفاع H را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم، $(n-1)$ مقطع دایره‌ای به دست می‌آید که، با دو قاعدهٔ استوانه، روی هم $(n+1)$ دایره می‌شود. در هر یک از این دایره‌ها، یک m ضلعی منتظم محاط می‌کنیم؛ تنها ترتیب رأسهای این m ضلعیها را چنان انتخاب می‌کنیم که، هر مولدی که از یک رأس یک m ضلعی محاطی می‌گذرد، کمان‌های مربوط به ضلعهای m ضلعیهای دایره‌های مجاور را نصف کند. در شکل ۳، مولدی که از رأس P می‌گذرد، کمانهای $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{QS}$ را نصف می‌کند. البته، خطهای راست QM و SN (که



شکل (۳)

در شکل ۳ رسم نشده‌اند) نیز، مولدهایی از استوانه خواهند بود. به زبان دیگر، در این جا هم، مثل قبل، هر چندضلعی محاط در دایره، از انتقال چندضلعی محاط در دایره مجاور به‌اندازه $\frac{H}{n}$ به دست می‌آید؛ تنها باید بعد از انتقال، چند ضلعی را به اندازهٔ نصف زاویهٔ مرکزی هر ضلع، یعنی $\frac{\pi}{n}$، دور مرکز آن دوران دهیم. اکنون، با چندضلعیهای منتظم محاطی، که به این ترتیب به دست آمده‌اند، یک چندوجهی با وجه‌های مثلثی می‌سازیم؛ به این ترتیب که هر رأس را به دو رأس نزدیک خود در دایره‌های مجاور وصل می‌کنیم. این سطح چندوجهی (که می‌توان آن را به صورت یک فانوس کاغذی با مرزهای تا شده در نظر گرفت)، که از تعداد ۲mn مثلث متساوی‌الساقین برابر تشکیل شده است (n لایه و در هر لایه ۲m مثلث)، برای سطح منحنی استوانه، یک چندوجهی محاطی را، به مفهوم واقعی خود، مشخص می‌کند.

روشن است، برای محاسبهٔ مساحت این چند وجهی، باید



شکل (۴)

مساحت یکی از وجه‌های آن را، مثل وجه MNP، به دست آورد. این وجه، در شکل ۲ نشان داده شده است و در شکل ۳، به طور جداگانه، آمده است و، در آن MN، عبارت است از ضلع m ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مقطع به مرکز O. K و L، به ترتیب، وسط کمان $\overset{\frown}{MN}$ و وتر MN در نظر گرفته شده و PK پاره‌خط راستی از مولد استوانه است. مثلث MNP متساوی‌الساقین است ($|PM|=|PN|$، زیرا این پاره‌خطهای راست، روی صفحه دایرهٔ O، تصویرهای برابر KM و KN را دارند)؛ طول PL، ارتفاع این مثلث را می‌توان از مثلث PKL به‌دست آورد که در آن داریم:

$$|PK|=\frac{H}{n} \quad , \quad \hat{K}=۹۰^\circ \quad ,$$

$$|KL|=R-|OL|=R-R\cos\frac{\pi}{m}=۲R\sin^۲\frac{\pi}{۲m}$$

از آنجا

$$|PL|=\sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^۲+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

و چون داریم:

$$\frac{۱}{۲}|MN|=R\sin\frac{\pi}{m}$$

به‌دست می‌آید:

$$S_{MNP}=R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

مساحت سطح تمام چندوجهی را S_{mn} می‌نامیم (که از تقسیم هر دایره به m بخش برابر و تقسیم ارتفاع استوانه به n بخش برابر، به دست آمده است). در این صورت

$$S_{mn}=۲mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^۲}{n^۲}+۴R^۲\sin^۴\frac{\pi}{۲m}}$$

$$= 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

پیش از این هم دیدیم که، از مجموعهٔ عددهای S_{mn}، می‌توان با بی‌نهایت روش، یک دنباله جدا کرد؛ این روشها، به نوع رابطه‌ای بستگی دارند که بین m و n وجود دارد. دو نمونه از این حالتها را در نظر می‌گیریم:

الف) $n = m^2$، یعنی وقتی که، به ترتیب، هر دایره را به ۳، ۴، ۵، ... بخش برابر و ارتفاع استوانه را به ۹، ۱۶، ۲۵، ... بخش برابر تقسیم کرده باشیم. اکنون دیگر، مساحت سطح چندوجهی را با S_{mn} نشان می‌دهیم، زیرا این مساحت تنها به m بستگی دارد. دستور مساحت چنین می‌شود:

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

اکنون باید حد مقدار S_{mn} را، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، پیدا کنیم. با میل m به سمت بی‌نهایت، مقدارهای $\sin\frac{\pi}{m}$ و $\sin\frac{2\pi}{m}$ به سمت صفر میل می‌کنند و عبارت S_{mn} را می‌توان این‌طور نوشت:

$$S_m = 2\pi R\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2}$$

و روشن است که، این مقدار، از $2\pi RH$، یعنی سطح جانبی استوانه، بزرگتر است.

اگر $n = km^2$ بگیریم ($k\in N$)، می‌توان این مساحت را به هر اندازه که بخواهیم، بزرگتر کرد، زیرا در این حالت داریم:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{K^2}{4}\pi^4R^2}$$

ب) $n = m^3$. در اینجا تعداد بخشهای ارتفاع، نسبت به حالت قبل، خیلی سریعتر از تعداد بخشهای محیط دایره، زیاد می‌شود. در این حالت، بسادگی می‌توان به این نتیجه رسید که، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، S_m هم به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛ یعنی می‌توان چندوجهی‌های محاطی را طوری در نظر گرفت که، مجموع مساحتهای آنها، به سمت حد معینی میل نکند و تا بی‌نهایت، صعودی باشد؛ و این، به معنای آن است که، سطح جانبی استوانه، مساحت معینی ندارد.

اکنون ببینیم، در استدلال ما، چه اشتباهی وجود دارد؟ در کجا سفسطه کرده‌ایم؟ در پاسخ باید گفت: درست است که سطح چندوجهی، مرتب، به سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود، ولی از اینجا نمی‌توان نتیجه گرفت که، مساحت سطح چندوجهی، به‌طور نامحدود، به مساحت سطح استوانه‌ای نزدیک می‌شود. برای این‌که بستگی بین این دو گونه نزدیکی را روشن‌تر کنیم، یادآوری می‌کنیم: با همان روشی که در شکل ۳ نشان دادیم، می‌توان یک چندوجهی محاطی، برای سطح جانبی استوانه به دست آورد که، به یاری آن بتوان، سطح جانبی استوانه را محاسبه کرد. به عنوان نمونه، اگر فرض کنیم $n = m$ یا $n = 10m$ و یا، به طورکلی، اگر تعداد بخشهای ارتفاع و تعداد بخشهای محیط دایره، نسبت به هم، به‌طور متناسب تغییر کنند، مثلاً در حالت $n = 10m$ به دست می‌آید:

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+400m^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}$$

$$= 2mR\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{25\pi^2R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

که وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، به دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi RH$$

که همان سطح جانبی استوانه است.

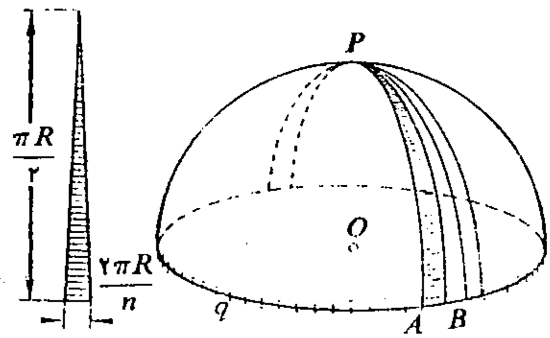
چرا وقتی با قانون دیگری، و مثلاً رابطهٔ $n = m^2$، مساحت چندوجهی را محاسبه کنیم، S_m به سمت حدی میل می‌کند که از $2\pi RH$ بزرگتر است و چرا با رابطهٔ $n = m^3$، این سطح به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؟ برای پاسخ به این

پرسش‌ها، وارد بحث دقیق ریاضی نمی‌شویم و تنها به درک شهودی مطلب اکتفا می‌کنیم (و البته، همین دید ظاهری و معرفت شهودی است که می‌تواند ما را به سمت استدلال دقیق ریاضی راهنما باشد). در حالت $n = m$ یا $n = 10m$، انبوهی و فشردگی تقسیمهای محیط دایره و ارتفاع، با سرعتی یکنواخت رو به افزایش هستند و، در نتیجه، سطح چندوجهی غیر مقعر می‌ماند و همهٔ وجه‌های آن، به تقریب، به صورت قایم درمی‌آیند، البته به شرطی که استوانه را قایم در نظر بگیریم (شما با استفاده از شکل ۴، می‌توانید ثابت کنید، وجه MNP، با صفحهٔ افقی، زاویهٔ MKN را می‌سازد که، با میل m به سمت بی‌نهایت، به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند). بنابراین، سطح چندوجهی، نه تنها از لحاظ فاصله، بلکه در ضمن از نظر جهت هم، به سطح جانبی استوانه نزدیک می‌شود. در حالی که وقتی داشته باشیم $n = m^2$ یا $n = m^3$، وضع دیگری پیش می‌آید: در اینجا، تقسیمهای ارتفاع، با سرعتی بسیار بیشتر از تقسیمهای محیط دایره رو به افزایش می‌رود. درنتیجه، سطح چندوجهی، به طور محسوس، «دندانه‌ای» می‌شود که، با محاسبهٔ سطح استوانه، مقداری از سطح این چندوجهی به حساب نمی‌آید. در این حالت، وجه‌های مثلثی شکل، به صورت قایم در نمی‌آیند و می‌توان ثابت کرد، با شرط $n = m^2$، زاویهٔ PLK (شکل ۴) به سمت یک زاویهٔ حاده میل می‌کند و، در حالت $n = m^3$، این زاویه به سمت صفر میل می‌کند (یعنی در این حالت، وقتی m به سمت بی‌نهایت میل کند، چندوجهی به صورت افقی درمی‌آید).

به‌طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید: سرچشمهٔ عدم شباهت بین خط شکستهٔ محاط در یک منحنی و سطح چندوجهی محاط در یک سطح منحنی، در کجاست؟ چرا در حالت اول، با نزدیک شدن رأس‌ها به یکدیگر، خط شکسته، نه تنها از نظر فاصله، بلکه از نظر جهت هم به خط منحنی نزدیک می‌شود، در حالی که در حالت دوم، وقتی چند وجهی از لحاظ فاصله به سطح منحنی نزدیک می‌شود، ممکن است از لحاظ جهت به آن نزدیک نشود. بدون این که، به تفصیل، وارد این بحث شویم، تنها به یک واقعیت اشاره می‌کنیم. اگر روی یک منحنی، دو نقطه را در نظر بگیریم، به نحوی که یکی از آنها بی‌حرکت باشد، وقتی نقطهٔ متحرک به سمت نقطهٔ ثابت میل می‌کند، پاره‌خط راستی که آنها را به هم وصل می‌کند، درحد، به سمت مماس بر منحنی در نقطهٔ ثابت، نزدیک می‌شود. ولی اگر سه نقطه بر روی یک سطح منحنی در نظر بگیریم و از این سه نقطه، یکی را ثابت فرض کنیم (فرض می‌کنیم، سه نقطه روی یک خط راست نباشند)، وقتی دو نقطهٔ دیگر، به سمت نقطهٔ ثابت نزدیک شوند، صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، همیشه به سمت صفحهٔ مماس بر سطح در نقطهٔ ثابت میل نمی‌کند. روی سطح یک کره، یک مقطع دایره‌ای در نظر بگیرید و سه نقطه روی محیط این دایره انتخاب کنید (یک نقطهٔ ثابت و دو نقطهٔ متغیر)؛ وقتی دو نقطهٔ متغیر به سمت نقطهٔ ثابت میل کنند، در هر حال، صفحه‌ای که از سه نقطه می‌گذرد، همان صفحهٔ مقطع است.

آیا مساحت سطح کرهٔ به شعاع R، برابر است با $\pi^2 R^2$؟

نیم کرهٔ به مرکز O را در نظر می‌گیریم (شکل ۵)، q را «استوا» و نقطه P را «قطب» نیم‌کره فرض می‌کنیم (یعنی شعاع OP، بر صفحهٔ استوای q که از O می‌گذرد، عمود است). محیط دایرهٔ q را به n بخش برابر تقسیم می‌کنیم (n، عددی است طبیعی و به اندازهٔ کافی بزرگ)؛ نقطهٔ P را بوسیلهٔ کمانهایی از دایرهٔ عظیمه، به همهٔ نقطه‌های تقسیم می‌پیوندیم (هر یک از این کمانها، طولی برابر $\frac{1}{4}$ طول «نصف‌النهار» دارد). در این صورت، نیم‌کره، به n مثلث کروی خیلی باریک تقسیم می‌شود، به نحوی که، هر مثلث، محدود است به کمان بسیار کوچکی از استوا و دو کمان نصف‌النهار (چند تا از این مثلثها در شکل ۵ داده شده و، یکی از آنها، مثلث PAB، با هاشور مشخص شده است). با بزرگ کردن عدد n، می‌توان این مثلثهای کروی را به دلخواه کوچک کرد (به صورت تارهای نازک). با باز کردن هر یک از این مثلثها، می‌توان آنها را، با حفظ تمام اندازه‌ها (یعنی طول، زاویه و مساحت)، بر یک صفحه قرار داد. در این صورت، مثلثهای متساوی‌الساقینی به دست می‌آید که قاعدهٔ هر یک از آنها، کمانی به طول $\frac{2\pi R}{n}$ و ارتفاع



شکل (۵)

هر یک، کمانی برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره، یعنی به طول $\frac{1}{2}\pi R$ است (شکل ۵، سمت چپ را ببینید). مساحت چنین مثلثی، برابر است با :

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi R}{n}\times\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2$$

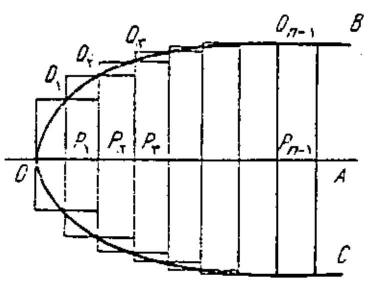
تمام n مثلث، که نیم کره را پوشانده‌اند، مساحتی برابر $\frac{1}{2}\pi^2R^2$ پیدا می‌کند ؛ و مساحت سطح تمامی کره برابر π^2R^2 می‌شود. و روشن است که، این نتیجه، با دستوری که برای محاسبهٔ مساحت سطح کره می‌شناسیم (یعنی $4\pi R^2$) یکی نیست، زیرا $\pi \neq 4$.

خوب، فکر می‌کنید، در کجا اشتباه کرده‌ایم؟ حقیقت این است که جمله‌هایی از گونه «عدد بسیار بزرگ»، «مثلث خیلی کوچک»، «کمان کوچک» و «مثلث بی‌اندازه باریک»، مفهوم ریاضی ندارند. از این جمله‌ها می‌توان برای توصیف شکلهای هندسی استفاده کرد، ولی مجاز نیستیم از آنها به عنوان استدلال ریاضی، برای به دست آوردن رابطه یا دستور استفاده کنیم. اشتباه اصلی در آن جاست که استدلال کرده‌ایم، وقتی یک مثلث کروی خیلی باریک باشد، می‌توان آن را روی یک صفحه باز کرد، یعنی یک مثلث کروی را به یک مثلث مسطحه، با همان طولها، زاویه‌ها و مساحت تبدیل کرد. در واقع، یک مثلث کروی را (هر قدر کوچک باشد)، نمی‌توان به مفهومی که گفتیم، روی یک صفحه گسترد. این مطلب، از این‌جا هم روشن می‌شود که، مجموع زاویه‌های هر مثلث واقع بر صفحه، برابر ۱۸۰ درجه است، در حالی که مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی، همیشه از ۱۸۰ درجه بیشتر است. در مثال ما، در مثلث کروی PAB (شکل ۵، سمت راست)، زاویه‌های به رأسهای A و B، قایمه‌اند و اگر بتوان چنین مثلثی را روی صفحه پهن کرد، مثلث متساوی الساقینی در روی صفحه به دست می‌آید (شکل ۵، سمت چپ) که دو زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن قایمه است.

□

نخستین کسی که از مقدارهای بسیار کوچک و حد مجموع آنها استفاده کرد، ارشمیدس بود. او با روش ابداعی خود توانست راهی برای محاسبه مساحت قطعه‌ای از سهمی و، همچنین، محاسبهٔ حجم سهموی (پارابولوئید)، یعنی حجم جسمی که از دوران یک سهمی دور محور خود به دست می‌آید، پیدا کند (امروز، این محاسبه‌ها را به یاری انتگرال‌گیری انجام می‌دهند ؛ به همین مناسبت، ارشمیدس را باید پیشگام در راه کشف محاسبهٔ انتگرالی دانست). در اینجا طرحی از روش او را برای محاسبه حجم سهموی می‌آوریم.

فرض کنیم، قطعه سهمی BOC، دور محور خود OA، دوران کرده باشد (شکل ۶).



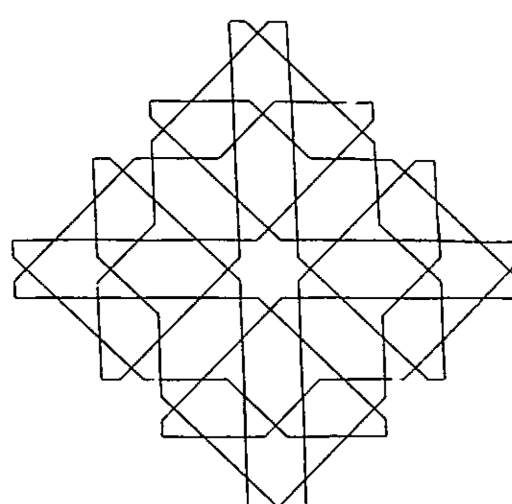
شکل (۶)

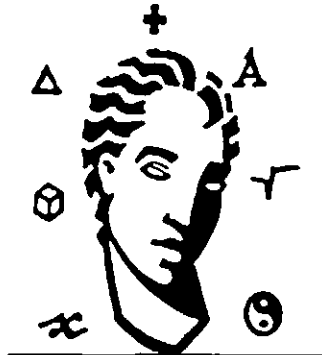
ارشمیدس، ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به n بخش برابر OP_1، P_1P_2، P_2P_3، ...، $P_{n-1}A$ تقسیم کرد ؛ سپس، از نقطه‌های تقسیم، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ...، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را بر محور سهمی رسم کرد و روی آنها، مستطیلهای محیطی و محاطی را ساخت. با دوران تمامی شکل، دور محور OA، دو جسم پله‌ای به دست آورد که از استوانه‌های محیط بر سهموی دوار و محاط در آن، به دست آمده بودند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم سهموی و حجم جسم درونی کمتر از حجم سهموی است. ارشمیدس با آغاز از حجم این دو جسم، و با افزایش تعداد بخشهای OA، توانست

حجم سهموی دوار را پیدا کند. و ارشمیدس، با این روش، نتیجه گرفت، اگر قطعه سهمی، ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای برابر BC داشته باشد، حجم سهموی ناشی از دوران این قطعه سهمی دور OA، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاعی برابر OA و قاعده‌ای به قطر BC داشته باشد.

روش ارشمیدس، نزدیک به دور هزار سال، به فراموشی سپرده شد و، اگرچه ریاضیدانان ایرانی اندک توجهی به آن داشتند، هیچ پیشرفتی نکرد تا این که در پایان سدهٔ شانزدهم و آغاز سدهٔ هفدهم میلادی، به وسیلهٔ یوهان کپلر احیا شد. روش کپلر، مورد پسند ریاضی‌دانان زمان او نبود، چرا که آنها با روشهای رسمی خو گرفته بودند و تصور می‌کردند، روش ارشمیدس و کپلر، بدعتی است که مخرب «استدلال دقیق و منطقی» ریاضیات است. ولی کپلر راه خود را ادامه داد؛ او معتقد بود، برای حل یک مسأله، باید از هر روشی سود جست «ولواین که راه خاردار مطالعهٔ کتاب ارشمیدس» باشد. کپلر، در بررسیهای اخترشناسی و برای محاسبهٔ مساحت قطاع از یک منحنی غیرمشخص، روش ارشمیدس را انتخاب کرد. بعد از کپلر، ریاضیدانانی چون کاوالیری، فرما، روبروال، توریچلی، پاسکال و باروی همین راه را ادامه دادند تا، سرانجام، محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به وسیلهٔ نیوتون و لایب نیتس پایه‌گذاری شد و دانشمندانی چون برنولی، اولر، هوبیتال، تیلور و کلرو این شاخه از دانش ریاضی را به اوج خود رساندند.

تا بعد





تفریح اندیشهٔ ۱

محل اقامت چند گانه

خانواده‌های B، C، F، M، وS در طبقه‌های مختلف ساختمانی زندگی می‌کنند که تنها پنج طبقه دارد.

با در دست داشتن اطلاعات زیر می‌توانید بگویید هر یک در کدام طبقه زندگی می‌کند؟

۱. B در طبقهٔ آخر زندگی نمی‌کند.
۲. C در طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۳. F در طبقهٔ آخر یا طبقهٔ اول زندگی نمی‌کند.
۴. M در طبقهٔ بالاتر از طبقهٔ C زندگی می‌کند.
۵. S در طبقه‌ای مجاور (بلافاصله بالا یا زیر) طبقهٔ F زندگی نمی‌کند.
۶. F در طبقه‌ای مجاور طبقهٔ C زندگی نمی کند



جواب در صفحه ۸٦



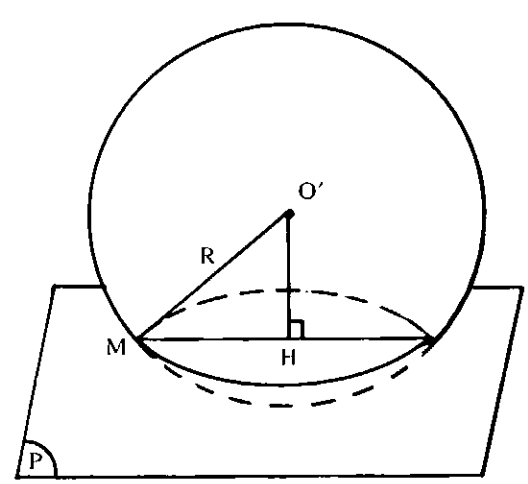
مکان هندسی

(قسمت نهم)

(اوّل، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)

محمد هاشم رستمی

مثال ۶ــ معادلهٔ کره‌ای را بنویسیدکه مرکزش نقطهٔ $O'(-۲,۱,۳)$ وفصل مشترکش با صفحهٔ P به معادلهٔ $x-۲y+۲z+۳=۰$ دایره‌ای به شعاع ۴ است.



حل ــ از نقطهٔ O' عمود $O'H$ را برصفحهٔ P فرود می‌آوریم اگر HM یک شعاع ازدایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ P و کرهٔ به مرکز O' باشد، $O'M$ برابر شعاع کره است. بنابراین داریم:

$$O'(-۲,۱,۳), P: x-۲y+۲z+۳=۰ \Rightarrow$$

$$O'H = d = \frac{|-۲-۲+۶+۳|}{\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

$$HM = r = ۴ \Rightarrow R = O'M = \sqrt{r^۲+d^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

شعاع کره

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲ = R^۲ \Rightarrow$$

معادلهٔ کرهٔ جواب مسأله. $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲+(z-۳)^۲ = ۲۵$

مثال ۷ــ نقطهٔ $O'(-۱,۳,۰)$ مرکز کره‌ای است که برصفحهٔ $P: x-۲y-۲z+۱=۰$ مماس است. معادلهٔ این کره را بنویسید.

حل ــ فاصلهٔ نقطهٔ O' از صفحهٔ P برابرشعاع کره است. پس داریم:

$$R = O'H = \frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} =$$

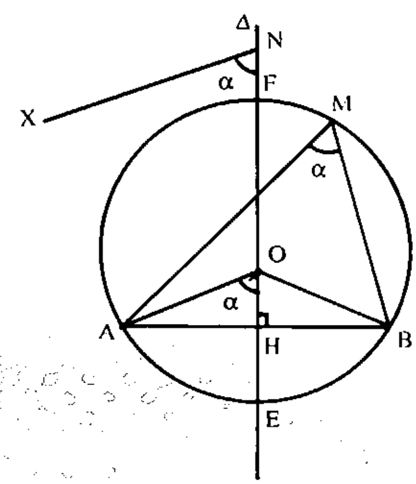
$$\frac{|-1-6-0+1|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{6}{3}=2\Rightarrow R=2$$

و از آنجا معادلهٔ کره به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2\Rightarrow$$

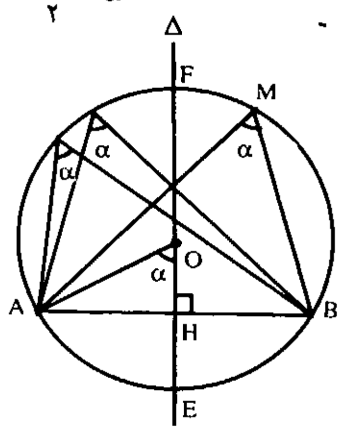
معادله کره $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$

۳ ــ کمان درخور یا کمان حاوی یک زاویه ــ مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطه ثابت A و B ازآن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایرهٔ متساوی است که بردونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است، که این کمانها را کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.



اثبات به روش هندسی ــ دونقطهٔ ثابت A و B را دریک صفحه در نظر می‌گیریم. وسط پاره خط AB را نقطهٔ H می‌نامیم و خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط Nx را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{N}X=\alpha$ باشد. از یکی ازدونقطهٔ A و B مثلاً از نقطهٔ A خطی به موازات Nx رسم می‌کنیم تا خط Δ عمودمنصف پاره خط AB را درنقطهٔ O قطع کند. از O به نقاط A و B وصل کرده به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد و اندازهٔ کمان $\widehat{AEB}$ برابر 2α است. زیرا، $A\hat{O}H=\alpha$ است پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B=2\alpha$ است. کمان $\widehat{AFB}$ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر یعنی مکان هندسی نقطه‌ای مانند M است که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، زیرا:

اولاً ــ هر نقطه مانند M که روی این کمان قرارداشته باشد و ازاین نقطه به دونقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است. زیرا: $A\hat{M}B=\frac{\widehat{AEB}}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$

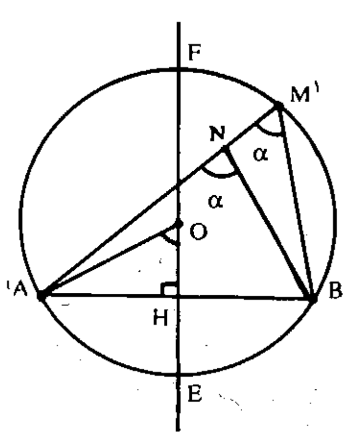


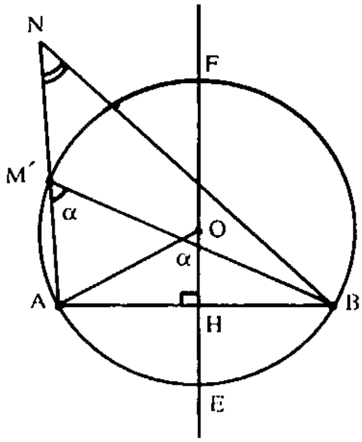
ثانیاً ــ نقطهٔ N رأس هر زاویه مانند $A\hat{N}B=\alpha$ که اضلاعش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد ودرطرف کمان $\widehat{AFB}$ واقع است، روی کمان $\widehat{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔN روی کمان $\widehat{AFB}$ نباشد، یاداخل دایرهٔ (O,OA) واقع است که دراین صورت $A\hat{N}B>\alpha$ خواهد بود و یا نقطهٔ N خارج دایره فوق قراردارد که در این صورت $A\hat{N}B<\alpha$ است، زیرا در حالت نخست، اگر نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M′ بنامیم و از M′ به نقطهٔ B وصل کنیم داریم:

$$A\hat{N}B=A\hat{M}'B+M'\hat{B}N=\alpha+M'\hat{B}N\Rightarrow A\hat{N}B>\alpha$$

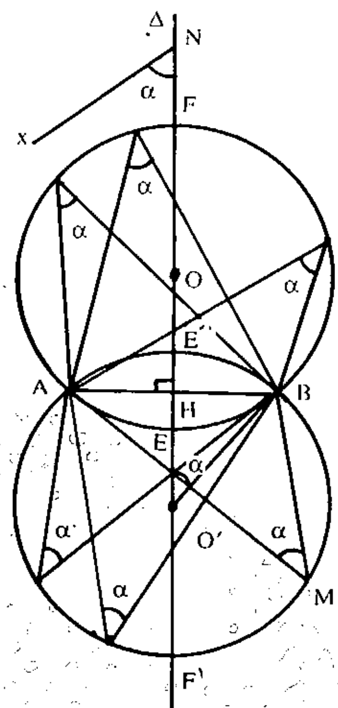
و درحالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M′ بنامیم داریم:

$$A\hat{N}B=A\hat{M}'B-M'\hat{B}N=\alpha-M'\hat{B}N\Rightarrow A\hat{N}B<\alpha$$





کمان $\overset{\frown}{AFB}$ را کمان حاوی یا کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB یا مقابل به پاره خط AB می‌نامند.



درصورتی که از نقطهٔ B خطی موازی Nx رسم کنیم تا عمود منصف پارهٔ خط AB را در نقطهٔ O´ قطع کند ودایرهٔ به مرکز O´ و به شعاع O´B = O´A را رسم کنیم تا عمود منصف پاره خط AB رادر نقاط E´ و F´ قطع کند، کمان $\overset{\frown}{AF'B}$ نیز کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین می‌توان گفت:

مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه به دونقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدیدمی‌آید. کمانهایی از دودایرهٔ متساوی درآن صفحه است که بر دونقطهٔ مزبور می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر ۲α است.

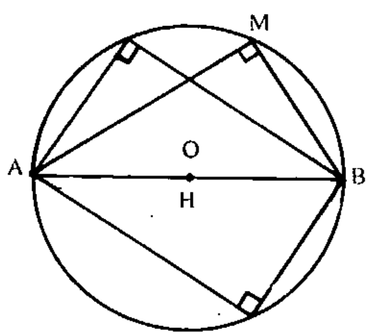
تبصره ۱ــ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB رامکان هندسی نقطه‌ای کـه از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود نیز می‌نامند.

تبصره ۲ــ کمانهای $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AE'B}$ از دودایره، کمان در خور زاویهٔ $۱۸۰-\alpha$ وابسته به پاره خط AB است، زیرا:

$\overset{\frown}{AEB} = \overset{\frown}{AE'B} = ۲\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AFB} = \overset{\frown}{AF'B} =$

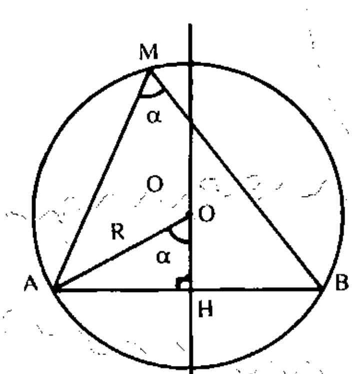
$۳۶۰-۲\alpha \Rightarrow A\hat{M}_۱B = ۱۸۰-\alpha$

تبصره ۳ــ کمان در خور زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB دایرهٔ به قطر AB است. زیرا در این حـــالت دودایرهٔ (O,OA) و (O´,O´A) بر هم منطبق شده، مرکز مشترکشان نقطهٔ H وسط پاره خط AB است.



تبصره۴ ــ شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB به طول a بخشی از آن است، برابراست با: $R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB برابر است با:

$OH = |R\cos\alpha| = \frac{a}{۲|tg\alpha|}$



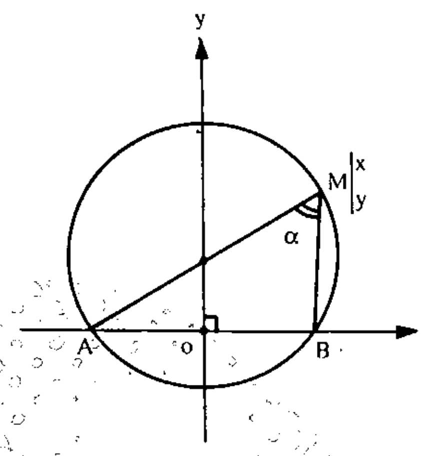
به عنوان مثال اگر طول پاره خط AB برابر ۴ سانتی‌متر باشد و کمان در خور زاویهٔ °۳۰ وابسته به این پاره خط را رسم کنیم، شعاع دایرهٔ مربوط به این کمان درخور برابر است با :

$$R=\frac{۴}{۲\sin ۳۰}=\frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{۱}=۴cm$$

و فاصلهٔ مرکزدایره از پاره خط AB برابراست با :

$$OH=|R\cos\alpha|=|۴\cos ۳۰|=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

اثبات به روش تحلیلی ـ پاره خط AB به طول a را در نظر می‌گیریم. محور x ها را روی خط AB ومحور y ها را عمود منصف پاره خط AB اختیار می‌کنیم.



در این صورت $A(\frac{-a}{۲},۰)$ و $B(\frac{a}{۲},۰)$ است. اگر $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ گردد، داریم :

$$M\Big|_{y}^{x} ,\ A\Big|_{۰}^{-\frac{a}{۲}} ,\ B\Big|_{۰}^{\frac{a}{۲}} ,\ A\hat{M}B=\alpha \Rightarrow$$

$$m_{MA}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-۰}{x+\frac{a}{۲}}=\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}$$

$$m_{MB}=\frac{y-۰}{x-\frac{a}{۲}}=\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}$$

$$tg\alpha=\pm\frac{m-m'}{۱+mm'}\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}-\frac{y}{x-\frac{a}{۲}}}{۱+\frac{y}{x-\frac{a}{۲}}\times\frac{y}{x+\frac{a}{۲}}}$$

$$\Rightarrow tg\alpha=\pm\frac{-ay}{x^۲+y^۲-\frac{a^۲}{۴}}\Rightarrow$$

$$x^۲+y^۲-\frac{a^۲}{۴}=\pm\frac{a}{tg\alpha}y\Rightarrow$$

$$C_۱: x^۲+y^۲-\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^۲}{۴}=۰ \qquad (۱)$$

$$C_۲: x^۲+y^۲+\frac{a}{tg\alpha}y-\frac{a^۲}{۴}=۰ \qquad (۲)$$

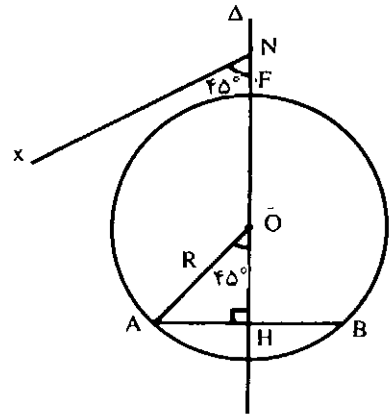
(۱) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O_۱(۰,\frac{a}{۲tg\alpha})$ و به شعاع $R_۱=\frac{a}{۲\sin\alpha}$ و (۲) معادله دایره‌ای به مرکز $O_۲(۰,-\frac{a}{۲tg\alpha})$ و به شعاع $R_۲=\frac{a}{۲\sin\alpha}$ است. که بخشی از این دو دایرهٔ متساوی مکان هندسی موردنظر است.

واضح است هر نقطه مانند M که مختصاتش در یکی از معادله های (۱) یا (۲) صدق کند و متعلق به بخش کمان در خور زاویهٔ α باشد، از وصل کردن آن به نقاط A و B زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید. بنابراین :

مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه، زاویهٔ $A\hat{M}B=\alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایره متساوی از آن صفحه است که بر دونقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وترمشترکشان برابر ۲α است.

مثال ۱ـ پاره خط AB به طول ۴ سانتی‌متر مفروض است. کمان در خور زاویهٔ °۴۵ وابسته به این پاره خط را رسم کنید. شعاع دایره‌ای که کمان درخور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره خط AB را محاسبه کنید.

حل ـ پاره خط AB را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس خط Δ عمود منصف این پاره خط را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دلخواه N واقع بر Δ نیم خط N_X را چنان رسم می‌کنیم که با Δ زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد. ازنقطهٔA خطی موازی N_X رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم کمان $\overset{\frown}{AFB}$



از این دایره مکان هندسی مورد نظر یعنی کمان درخور زاویهٔ ۴۵° وابسته به پاره خط AB است. اگر H وسط پاره خط AB و R شعاع دایره باشد داریم:

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} = \frac{۴}{۲\sin ۴۵^\circ} = \frac{۴}{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

$$OH = |R\cos\alpha| = ۲\sqrt{۲}.\cos ۴۵^\circ = ۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲$$

مثال ۲ــ پاره خط AB به طول $۱۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مفروض است. در صورتی که شعاع دایرهٔ کمان درخور زاویهٔ حادهٔ α وابسته به پاره خط AB برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ زاویهٔ α را تعیین کنید.

حل ــ داریم:

$$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{۲R} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

نکته: در صورتی که زاویهٔ α منفرجه باشد، $\alpha = \frac{۲\pi}{۳}$ جواب است.

مثال ۳ــ کمان درخور زاویهٔ ۶۰° وابسته به پاره خط AB را رسم کرده‌ایم. در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایرهٔ شامل کمان در خور، از پاره خط AB برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد. اندازهٔ پاره خط AB را تعیین کنید.

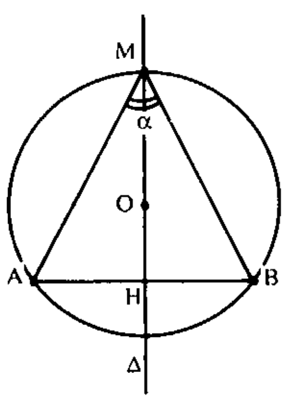
حل: با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$OH = \frac{a}{۲|tg\alpha|} \Rightarrow a = ۲OH.|tg\alpha| = ۲\times۲\sqrt{۳}$$

طول پاره خط AB $\times tg\frac{\pi}{۳} = ۴\sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = ۱۲ \Rightarrow a = ۱۲.$

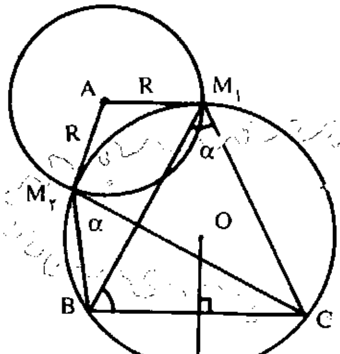
مثال ۴ــ پاره خط AB در یک صفحه مفروض است. نقطه‌ای مانند M از این صفحه را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از وصل کردن این نقطه به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α پدید آید.

حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله است عمود منصف پاره خط AB است. پس خط Δ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB است. بنابراین دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع آنها، نقطهٔ M جواب مسأله است و به تعداد نقاط تلاقی، مسأله دارای جواب است.



مثال ۵ــ سه نقطهٔ A و B و C در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد و از این نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α رؤیت شود.

حل ــ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از نقطهٔ A به



فاصلهٔ R باشد، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را رسم می کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره خط BC به زاویهٔ α دیده می‌شود، کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط BC است که این کمان در خور را نیز رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع این دو، جواب مسأله است.

مثال ۶ــ دو نقطهٔ $A(۳,-۲)$ و $B(۱,۰)$ مفروضند. معادلهٔ کمان حاوی زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB را به دست آورید.

حل ــ می‌دانیم که کمان درخور زاویهٔ ۹۰° مقابل به هر پاره خط دایره‌ای به قطر آن پاره خط است، بنابراین معادلهٔ دایرهٔ به قطر پاره خط AB را باید به دست‌آوریم. داریم:

$$O'\left|\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{x_A + x_B}{۲} = \dfrac{۳+۱}{۲} = ۲\\ \beta = \dfrac{y_A + y_B}{۲} = \dfrac{-۲+۰}{۲} = -۱\end{array}\right. \Rightarrow O'(۲,-۱)$$

O' مرکز دایره،وسط پاره‌خط AB است.

$$R = O'A = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (-۲+۱)^۲}$$
$$= \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow R = \sqrt{۲}$$
$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲$$

معادلهٔ مورد نظر

مثال ۷ ــ دو نقطهٔ $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ در دستگاه مختصات xoy مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که از وصل کردن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ ۴۵° پدید آید.

(پاره خط AB از آن نقطه به زاویهٔ ۴۵° رؤیت شود.)

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این مکان هندسی باشد، در این صورت داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right., A\left|\begin{array}{l}-۱\\۲\end{array}\right., B\left|\begin{array}{l}۳\\۰\end{array}\right. \Rightarrow m_{MA} = \frac{y-۲}{x+۱}, \; m_{MB} = \frac{y}{x-۳}$$

$$\alpha = ۴۵^\circ, \; tg\alpha = \pm\frac{m-m'}{۱+mm'} \Rightarrow$$

$$tg۴۵^\circ = \pm\frac{\dfrac{y-۲}{x+۱} - \dfrac{y}{x-۳}}{۱+\dfrac{(y-۲)y}{(x+۱)(x+۳)}} \Rightarrow$$

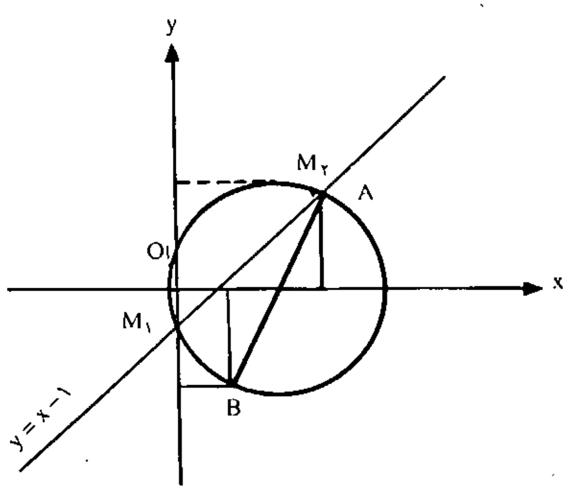
$$۱ = \pm\frac{-۴y-۲x+۶}{x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳} \Rightarrow C_۱: x^۲+y^۲+۲y-۹=۰$$

$$C_۲: x^۲+y^۲-۴x-۶y+۳=۰$$

معادله دایره هایی که بخشی از آنها کمان در خور زاویهٔ ۴۵° وابسته به پاره خط AB است.

مثال ۸ــ خط D به معادلهٔ $y=x-۱$ و دو نقطهٔ $A(۳,۲)$ و $B(۱,-۲)$ مفروضند. روی منحنی (C) نقطه‌ای تعیین کنیدکه از آن نقطه پاره خط AB به زاویهٔ ۹۰° دیده شود.

حل ــ نقطهٔ تقاطع کمان درخور زاویهٔ ۹۰° وابسته به پاره خط AB با منحنی (C) جواب مسأله است. اما می‌دانیم که این کمان درخور دایره‌ای به قطر پاره خط AB است.



بنابراین معادله دایرهٔ به قطرAB را نوشته با معادلهٔ منحنی (C) قطع می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$A(۳,۲), \; B(۱,-۲) \Rightarrow$$

وسط AB $O'(۲,۰)$, $R = O'A = \sqrt{۵}$

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + y^۲ = ۵$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطرAB

$$\begin{cases} y = x-۱ \\ (x-۲)^۲ + y^۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)^۲ + (x-۱)^۲ = ۵ \Rightarrow$$

$$۲x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \; x = ۳ \Rightarrow$$

$$M_۱(۰,-۱), \; M_۲(۳,۲)$$

نقطهٔ $M_۲$ بر نقطهٔ A منطبق است و جواب مسأله نیست. پس تنها نقطهٔ جواب مسأله نقطهٔ $M_۱$ است.

در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع

(قسمت اول)

(ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان ۱)

◄ حمیدرضا امیری

می‌خواهیم راجع به یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی یعنی **تابع** صحبت کنیم، مفهومی که ریاضیات بدون آن تقریباً هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال گیری از آن، رسم آن، انواع مختلف آن و خواص آن، کتابهای ریاضی ما را اشباع کرده و ریاضی دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است. مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهم ایفا کند.

درشاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریف آن شیوه‌های مختلفی به کار می‌رود که البته همگی معنی واحدی می‌دهند وفقط نوع گفتار و یاابزارهای معرفی تابع فرق می‌کند، امّا آنچه اهمیت دارد این است که مفهوم تابع با مفهوم **مجموعه‌ها**، همواره درهم آمیخته به طوری که حتی می‌توان برای شروع **تابع** را مجموعه‌ای از **زوجهای مرتب** تعریف کرد که درآن هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر یافت نشود.

به عنوان مثال $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ یک تابع است.

امّا $g=\{(۲,۴),(۱,۱),(۱,-۱),(۴,۸)\}$ تابع نیست، زیرا $(۱,۱)\in g$ و $(۱,-۱)\in g$ و این با تعریف فوق تناقض دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید f مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب و می‌دانیم هر مجموعه از زوجهای مرتب حاصل عمل ضرب دکارتی بین دو **مجموعه** است. درواقع، می‌توان مجموعه‌ای از مؤلفه‌های اول زوج مرتبهای f و مجموعه‌ای از مؤلفه‌های دوم آنها، تشکیل داد که اگر مجموعهٔ اول را دامنهٔ f بنامیم و مجموعهٔ دوم را بُرد f و به ترتیب با نمادهای D_f و R_f نمایش دهیم در این صورت، $f \subseteq D_f \times R_f$.

درمثال فوق $D_f=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $R_f=\{۳,۴,۵,۶\}$

تعریفی که به صورت فوق برای تابع آوردیم تعریفی بسیار **محض** بوده و این تعریف در عین حال که حالت کلّی و عمومی دارد از نظر کاربردی احتیاجات همهٔ شاخه‌های ریاضیات را برآورده نمی‌سازد و به همین دلیل این تعریف را به نوعی دیگر امّا با رعایت همان کلیات، می‌توان بیان کرد.

در مثال قبل تابع f به صورت $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ رادرنظر داشته باشید، اگر کمی دقت کنید، ارتباط خاصّی بین مؤلفه‌های اول و دوم تمام زوجهای مرتب (بین اعضای دامنه و بُرد) f ، می‌یابید. در این مجموعه زوج مرتبها دارای این ویژگی هستند که، مؤلفه‌های دوم آنها یک واحد از مؤلفهٔ اول بیشتر است پس می‌توان نوشت $f=\{(x,y)|y=x+1\}$ که $x\in\{۲,۳,۴,۵\}$ یا می‌توانیم بنویسیم $f=\{(x,x+1)|x\in D\}$ و $D=\{۲,۳,۴,۵\}$. حال اگر تابع f را به عنوان قاعده یا قانونی که هر x از D_f را به $(x+1)$ مربوط می‌سازد، معرفی کنیم در واقع به نوعی دیگر تابع را تعریف کرده‌ایم، توجه دارید که دراین تعریف تابع f به عنوان یک قاعده و یا در حالت کلّی‌تر به عنوان یک **عملگر**، معرفی

می‌گردد که با قاعدهٔ خاصی روی اعضای دامنه‌اش عمل می‌کند یا اثر می‌کند و اعضای بُرد را تولید می‌کند، در این تعبیر نکتهٔ دیگری که قابل توجه می‌باشد، آن است که همواره قاعدهٔ f روی هر x از D_f اثر می‌کند و با تغییر x ، اعضای جدیدی از R_f به دست می‌آید و مشاهده کردید که در تعریف f به صورت $f=\{(x,y)|y=x+1\}$ مجموعه‌ای برای x ها به شکل $D=\{2,3,4,5\}$ معرفی کردیم واین بدان معنی است که y ها، تابع تغییرات x ها هستند و یا« y تابعِ x است» بنابراین برای مشخص کردن تابع f کافی است دو ویژگی از f برای ما مشخص باشد، یکی D_f و دیگری قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f .

معمولاً قاعدهٔ تأثیر f یا چگونگی اثرتابع f روی اعضای D_f رابا نماد f(x) نمایش می‌دهند.

مثال: هر گاه $D_f=\{3,6,8,-1,0\}$ و $f(x)=2x+2$ ، دراین صورت تابع f رابه شکل مجموعه‌ای از زوجهای مرتب و همچنین، بُرد f (R_f) را تعیین کنید:

$$f(x)=2x+2\Rightarrow\begin{cases}f(3)=2\times3+2=8\\ f(6)=2\times6+2=14\\ f(8)=2\times8+2=18\\ f(-1)=2\times(-1)+2=0\\ f(0)=2\times0+2=2\end{cases}$$

$\Rightarrow R_f=\{8,14,18,0,2\}$

و $f=\{(3,8),(6,14),(8,18),(-1,0),(0,2)\}$

حال با توجه به تعبیری که برای تابع و براساس تعریف کلّی آن ذکر کردیم، می‌توانیم تابع رابه شکل زیرنیز تعریف کنیم:

تعریف: تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو مانند x از مجموعهٔ D (دامنه) عضو **منحصر بفردی** به نام f(x) از مجموعهٔ R (بُرد) را نسبت می‌دهد.

توجه دارید در تعریف فوق صفت **منحصربفرد** به این منظور به کار رفته که تعریف کلّی تابع، خدشه دار نشود یعنی اگر f به x_1 عضو y_1 از برد را نسبت دهد وبه همان x_1 عضو y_2 رانیز نسبت دهد و $y_1\neq y_2$ در این صورت f به هر عضو D_f عضو منحصربفردی نسبت نداده واگر کمی دقت کنیم مشاهده می‌شود که $(x_1,y_1)\in f$ و $(x_1,y_2)\in f$ و این با تعریف تابع که درابتدا آمد، تناقض دارد.

دراین قسمت در نظر داریم اندکی بیشتر راجع به D_f بحث کنیم در واقع این سوٴال را مطرح می‌کنیم که آیا فقط با داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان تابع را مشخص کرد یا خیر؟ یعنی مثلاً اگر فقط این اطلاعات در دست باشد که f تابعی است حقیقی (تابع حقیقی تابعی است که $D_f\subset\mathbb{R}$) و قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f به صورت $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تعریف شده است. آیا می‌توان تابع f را مشخص کرد؟ (آیا می‌توانیم D_f و R_f را تعیین کنیم؟)

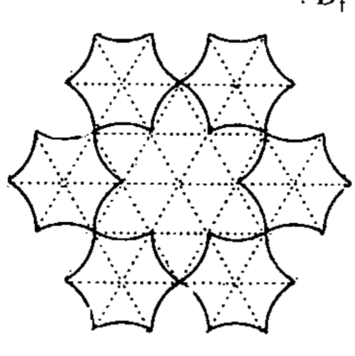
به مثال زیر توجه کنید:

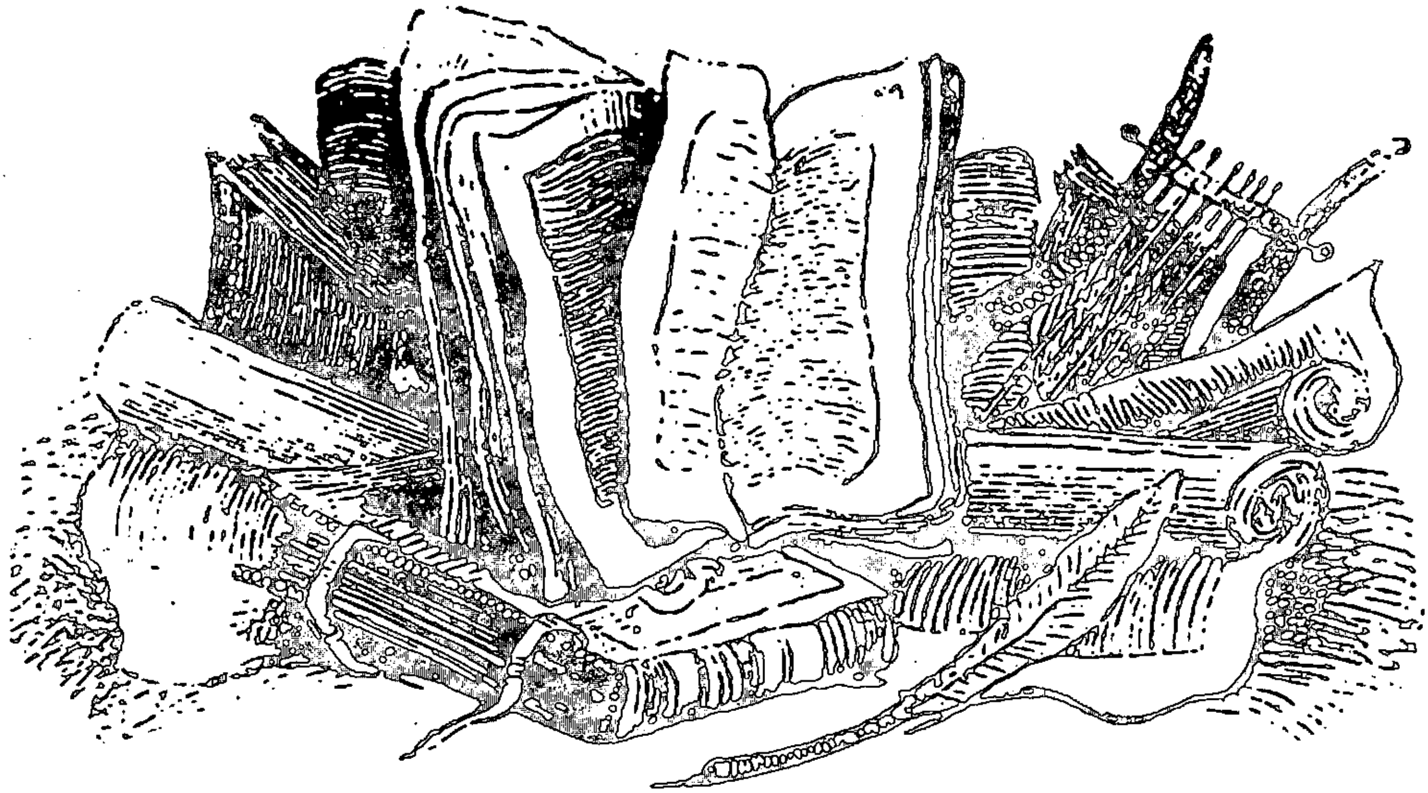
اگر $A=\{-1,2,3,4\}$ و ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{x-1}$ تعریف شده باشد و بخواهیم تأثیر f را روی اعضای A تعیین کنیم، برای (-1) که عضوی است از A دچار مشکل خواهیم شد زیرا $f(-1)=\sqrt{-1-1}=\sqrt{-2}$ و می‌دانیم $\sqrt{-2}$ درحوزهٔ اعداد حقیقی **تعریف** نشده است پس تابع f با توجه به ضابطه‌اش نمی‌تواند روی (-1) اثر کند، بنابراین اگر بخواهیم D_f را معین کنیم به شکل $D_f=\{2,3,4\}$ معرفی می‌شود و با توجه به D_f و ضابطهٔ f ، $R_f=\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ خواهد بود. پس می‌توان گفت:

«**دامنهٔ تعریف تابعِ** f مجموعهٔ همه مقادیری است که تابع f با توجه به ضابطه‌اش **می‌تواند** روی آنها اثرکند» بنابراین جواب سوٴال قبل مثبت است، یعنی همواره فقط با در دست داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان D_f و R_f ودرنتیجه تابع f را مشخص کرد.

مثال: تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ مفروض است، D_f را برای این تابع مشخص کنید:

می‌دانیم تابع f فقط روی اعداد حقیقی، که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند نمی‌تواند اثرکند پس اگر قرار دهیم $x^2-1=0$ خواهیم داشت: $x=\pm1$ بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.





تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۸)

در شمارهٔ ۲۰ مجلهٔ یکان در مقالهٔ «جبر در دنیای امروز» چنین می‌خوانیم:

تاریخ رشتهٔ جبر از ریاضیات را می‌توان به دو دورهٔ اصلی تقسیم کرد. اول دوره‌ای که از زمان تمدن **مصر** و **بابل** شروع و تا حدود هزارو هشتصد سال پس از میلاد مسیح ادامه داشته است و دوم دوره‌ای که از سال هزارو هشتصد میلادی تا زمان حاضر را در برمی‌گیرد. در دورهٔ اول در هر رشته از ریاضیات منحصراً دربارهٔ مطالبی بحث می‌شد که به آن رشته مربوط می‌گشت: در هندسه از خواص اشکال، در حساب، عملیات مربوط به اعداد و در جبر روابط و خواص اعداد به طور کلی با به کاربردن علامات و حروف بجای اعداد مورد مطالعه قرار می‌گرفت. برای مثلثات و هندسهٔ تحلیلی در این تقسیم‌بندی جایی وجود نداشت چه اولی حساب و جبر را برای حل مسایل هندسی به‌کار می‌برد و دومی هندسه را شاخه‌ای از جبر قرار می‌داد. با این وصف نقش جبر در این دوره کم و بیش روشن بود و آن این که x همواره بجای یک عدد به کار می‌رفت.

جبر قدیم وسیله‌ای برای حل بسیاری از مسایل عملی و علمی بود. آثار مکشوفه به وسیلهٔ باستان‌شناسان دلالت دارد بر اینکه در مصر قدیم فرمولهای جبری برای یافتن حجم استوانه و کره به منظور محاسبهٔ مقدار مالیات غلات که رعایا به دولت مرکزی بدهکار بودند به کار می‌رفته است. پیش از آن‌که حساب جامعه و فاضله و مکانیک سماوی در اواخر قرن هفدهم به‌وجود آید جبر و هندسه دو رکن اساسی محاسبات نجومی بودند. عملیات اساسی جبر قدیم برای هر فردی که به دورهٔ دوم دبیرستان رسیده باشد شناخته شده است، در حقیقت شخصی که در دبیرستان جبر مقدماتی و هندسه را خوانده باشد بدون زحمت زیاد می‌تواند بیشتر ریاضیاتی را که تا قبل از سال ۱۸۰۰ کشف شده فراگیرد زیرا ریاضیات تا آن موقع بیشتر به دو موضوع عدد و شکل مربوط می‌شد. اوایل قرن نوزدهم نمای ریاضیات شروع به تغییر کرد. دو نظر جدید پیدا شد که دامنهٔ ریاضیات را وسعت بسیار بخشید. نخست این‌که الزامی ندارد ریاضیات منحصر به اعداد و اشکال باشد. ریاضیات می‌تواند همه چیز باشد، اما این همه چیز اغلب به طریقی به اعداد و اشکال ارتباط داده می‌شدند. دوم عمل تجرد را یک قدم پیشتر برده و ریاضیات را در موقعیتی قرار داد که می‌توانست صرفاً یک عمل منطقی باشد که به هیچ چیز بخصوصی بستگی نداشته باشد. دانشمندان علوم

تجربی که از ریاضیدانان، متمایزند نظر اول را می‌پذیرند: بر طبق این نظر موارد استعمال ریاضیات بیش از آن می‌باشد که در دورهٔ اول تصور می‌رفت. نظر دوم در میان دانشمندان ریاضیات محض که ریاضیات را به‌سادگی به عنوان مطالعهٔ مدلهای زیبا در مد نظر قرار می‌دهند طرفدار دارد. اما باید دانست که بین این دو نظر نزاعی نیست. یک نمونهٔ ریاضی که مورد توجه یک دانشمند ریاضی قرار می‌گیرد، ثابت می‌شود که با برخی از جنبه‌های جهان فیزیکی مطابقت می‌نماید و برعکس بعضی از نمونه‌های ریاضی که به وسیلهٔ دانشمندان در طبیعت کشف شده به‌طور جالب توجهی زیبا بوده است.

در شمارهٔ ۲۱ این مجله در مقاله‌ای تحت عنوان «اعداد» این چنین آمده است که:

عموماً، در نظر مردم، ریاضیدان شخصی است که در حساب ورزیده باشد. ولی خود ریاضیدانان این تعریف را قبول ندارند. ریاضیدانان می‌گویند که خودشان به اندازهٔ اشخاص دیگر در محاسبات روزانه و در بررسی صورتحسابهای بانکی خویش اشکال دارند و به داستانهایی که دربارهٔ ریاضیدانان معروف گفته می‌شود استناد می‌جویند. مثلاً می‌گویند که نیوتن به هنگامی که رئیس ضرابخانه بود شخصی را استخدام کرد تا محاسباتش را انجام دهد. اختراع و تکمیل خط‌کشهای محاسبه و ماشینهای حساب الکترونیکی نیز به‌منظور کمک به ریاضیدانان انجام گرفته است.

بدیهی است که مطالب فوق، زیاد مستدل نیست. اگر ریاضیدانان را کنار بگذاریم از کدام شخص حفاظت اعداد فرد و زوج و مربع و سر راست را انتظار داشته باشیم؟ برای کسب اطلاع از اعداد **فیبوناچی** و اعداد **لیوویل** و اعداد **فوق مختلط** و اعداد لایتناهی به چه مقامی مراجعه نماییم؟ پس باید دانست که ریاضیات در حد اعلای خود همیشه به بازی با اعداد مربوط می‌شود. **برخف** دانشمند معروف آمریکا وقتی خاطرنشان می‌ساخت که معماهای ساده‌ای که دربارهٔ اعداد صحیح ظاهر شده است در طی قرون متمادی سرچشمهٔ تجدید حیات ریاضیات بوده است.

اعداد، ابزاری لازم و ضروری برای تمدن بشری است و پیوسته فعالیتهای بشر را به سوی نوعی نظم و ترتیب سوق داده است. ابتدایی‌ترین کاربرد اعداد، مشخص و متمایز کردن چیزهایی مثل شمارهٔ تلفن و شمارهٔ پروانهٔ اتومبیل می‌باشد. در این مرحله، فقط یک عدد با عدد دیگر مقایسه می‌شود و عملیات حساب بر روی آنها انجام نمی‌گیرد. فی‌المثل جمع شمارهٔ تلفن شما و شمارهٔ تلفن دوست شما چیزی را مشخص نمی‌سازد. در مرحله‌ای بالاتر، ترتیب طبیعی اعداد صحیح مثبت، برای نوبت گرفتن و ترتیب تقدم و تنظیم لیست افرادی که در یک مسابقه مقام اول و دوم و سوم را احراز نموده‌اند به کار می‌رود. در این مرحله نیز احتیاجی به عمل جمع و تفریق و سایر عملیات حساب بر روی اعداد نیست و تنها مطلب مورد نظر این است که یک عدد از دیگری بزرگتر است یا کوچکتر. حساب به معنای کامل موقعی ظاهر می‌شود که با عملیاتی از قبیل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر و سایر عملیات حساب مواجه شویم.

***

بسط و پیچیدگی تمدن یک جامعه را می‌توان از بسط و پیچیدگی اعدادی که در آن جامعه به‌کار می‌رود دریافت. بیست و پنج قرن پیش بابلیها اعداد صحیح ساده را برای شمارش چند گوسفندی که مالک بودند و حساب ساده‌ای برای ضبط حرکات سیارات استعمال می‌کردند. اما امروز در اقتصاد ریاضی، **جبر ماتریسها** برای تشریح بستگی متقابلی که صدها صنایع مختلف با یکدیگر دارند به‌کار می‌رود. در فیزیک، تبدیلات در «**فضاهای هیلبرت**» را برای پیشگویی پدیده‌های کوانتوم استعمال می‌کنند. اعدادی که در این تبدیلات به‌کار می‌رود دارای مفهومی است که از مفهوم مجرد اعداد صحیح مثبت هفت مرحله مجردتر می‌باشد.

دستگاههای اعداد که در ریاضیات به کار می‌رود می‌تواند به پنج پایهٔ اصلی تقسیم گردد که به ترتیب از ساده‌ترین به پیچیده‌ترین آنها عبارت‌اند از:

۱ــ دستگاهی که فقط شامل اعداد صحیح مثبت باشد.

۲ــ دستگاهی که شامل اعداد صحیح مثبت و منفی و صفر باشد.

۳ــ دستگاه اعداد گویا که شامل کسرها نیز می‌شود.

۴ــ دستگاه اعداد حقیقی که شامل اعدادی از قبیل $\sqrt{2}$ و π نیز می‌شود.

۵ــ اعداد مختلط که عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را دخالت می‌دهد.

اعداد مثبت صحیح، اعدادی هستند که طفل در هنگام شمارش فرا می‌گیرد و به‌صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... نوشته

می‌شود. این اعداد ممکن است به طرق مختلف نوشته شوند. رومیها این اعداد را به‌صورت I و II و III و IV و ... یونانیها به شکل α و β و γ و δ و... می‌نوشتند و در دستگاهی به مبنای ۲ که فقط ارقام ۰ و ۱ به کار می‌رود این اعداد به صورت ۱ و ۱۰ و ۱۱و ۱۰۰ و ... نوشته می‌شوند. تمام این علامات یک منظور را مشخص می‌سازند و آن منظور این که علامات مختلف برای کمیّات مختلف که معنی و ترتیب آنها به‌طور یکنواخت درک می‌شود به کار می‌رود.

بشر اولیه، فقط به چند عدد صحیح اولیه احتیاج داشت، اما با بسط تمدن مجبور شد که اعداد بزرگتری اختراع نماید. این پیشرفت یک مرتبه انجام نگرفت. چنان که **برنارد شاو** می‌نویسد: «برای انسانی که از تمدن بی‌بهره است و نمی‌تواند بیش از انگشتان دست خود را بشمارد، عدد یازده شمارش‌ناپذیر است.» به نظر می‌رسد تا قرن سوم پیش از میلاد، روشی اساسی برای شمارش اعداد بزرگ وجود نداشته است. **ارشمیدس** روشی خسته‌کننده برای نامیدن اعداد بزرگ ارائه نمود.

با این وجود درحالی که ریاضیدانان یونان برای نام اعداد بزرگ در تلاش بودند جهشی از اعداد محدود به بینهایت انجام گرفت. این جهش با سه نقطهٔ کوچک که بعد از عدد ۴ از رشته اعداد ۱ و ۲و ۳ و ۴ و ... واقع می‌شد مشخص می‌گردید. آنها می‌گفتند که بعد از ۴ عددی وجود دارد و پس از عدد بعد از ۴ نیز عدد دیگری وجود دارد و به همین ترتیب تعداد نامحدودی از اعداد صحیح به دست می‌آید. برای آنان این مفهوم یک مرحلهٔ عالی تصور بشر بود زیرا مخالف تمام تجارب فیزیک و مخالف عقیدهٔ فلسفی آن روزی که عالم باید محدود باشد می‌گردید. قبول مفهوم بینهایت امکانات وسیعی برای ریاضیات فراهم ساخت و در مقابل تناقضاتی نیز به‌وجود آورد که تا به امروز معنی و مفهوم آن به‌طور کامل درک نگردیده است.



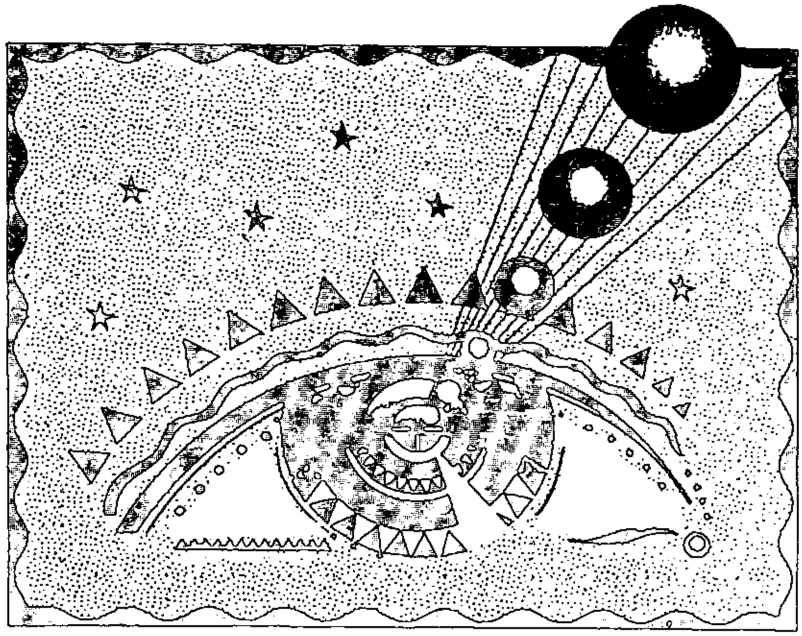
ادب ریاضی

من همواره به اقتضای ذوق خویش به مطالعه در ریاضیات پرداخته‌ام و نه به علّت تمایل به شهرتهای بی‌حاصل که اصلاً توجهی به آنها ندارم. بزرگترین تفریح من آن است که خط سیر مخترعان را تعقیب کنم و نبوغ آنان را هنگام مواجهه با موانع مشاهده نمایم و موانعی که آنان در سر راه خویش دیدند و توانستند از آنها بگذرند در نظر آورم.

در چنین موردی سعی می‌کنم خویشتن را به جای ایشان قرار دهم و این مسأله را مطرح سازم که در چنین مقامی من خود برای عبور از این موانع چه می‌کرده‌ام و با وجود آن که در غالب موارد این جانشینی موجب توقف من می‌گردد و برای من حسرت و خفت ایجاد می‌کند ولی بر عزت نفس خود غلبه می‌کنم و این مختصر خفت را با لذت استفاده از توفیق آنان با شایسته‌ترین وضع جبران می‌سازم. در موارد معدودی که اقبال با من یاری می‌کند و موفق می‌شوم که چیزی بر آثار آنان بیفزایم همهٔ لیاقت این توفیق را به اولین کوششهای آنها نسبت می‌دهم و خویشتن را قانع می‌سازم که اگر آنان در وضع من قرار داشتند خیلی بیشتر از آن می‌رفتند که من رفته‌ام.

نامهٔ لاپلاس در ۲۸ سالگی به دالامبر

از کتاب ریاضی‌دانانِ نامی، ترجمهٔ حسن صفاری



از کتاب:
A first course in
Number theory

دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۵)

حمیدرضا امیری

Theorem 3.1.2: Assume that all symbols used are integers and that $m > 1$.

1. If $b \equiv c \pmod m$ and $d \equiv e \pmod m$, then $b + d \equiv c + e \pmod m$.
2. If $b \equiv c \pmod m$ and $d \equiv e \pmod m$, then $b - d \equiv c - e \pmod m$.
3. If $b \equiv c \pmod m$ and $d \equiv e \pmod m$, then $bd \equiv ce \pmod m$.
4. If $kb \equiv kc \pmod m$, then $b \equiv c \pmod{m/(k, m)}$.

قضیهٔ ۳.۱.۲: با فرض این که تمامی نمادهای استفاده شده (در زیر) اعداد صحیح بوده و $m > 1$.

۱. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه، $b+d\overset{m}{\equiv}c+e$.

۲. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه، $b-d\overset{m}{\equiv}c-e$.

۳. اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $d\overset{m}{\equiv}e$ آنگاه $bd\overset{m}{\equiv}ce$.

۴. اگر $kb\overset{m}{\equiv}kc$، آنگاه $b\overset{\frac{m}{(k,m)}}{\equiv}c$.

Proof of Part 3: As in the proof of part 3 of Theorem 3.1.1 (and for the same reason), we immediately convert our congruence problem into the corresponding divisibility problem; i.e., if $m|(b - c)$ and $m|(d - e)$, then we need to conclude that $m|(bd - ce)$. The quantity bd appears in the statement of the conclusion we want, so at some point in our argument we have to get bd into the act. The quantity b appears in the assumption $m|(b - c)$, so we can claim that $m|d(b - c) = (bd - cd)$, using the appropriate property of the divisibility symbol; and now $m|(bd - cd)$ involves the quantity bd. Similarly, we deduce that $m|c(d - e) = cd - ce$ from the assumption $m|(d - e)$. We now have $m|(bd - cd)$ and $m|(cd - ce)$, and so $m|(bd - ce)$ (why?) as required.

اثبات قسمت ۳.

با توجه به اثبات قسمت ۳ از قضیهٔ ۳.۱.۱ (و با دلیل مشابه)، ما بلافاصله مسائل هم‌نهشتی‌مان را متناظراً به مسائل بخش‌پذیری تبدیل می‌کنیم، یعنی: اگر $m|(b-c)$ و $m|(d-e)$، آنگاه نیاز داریم نتیجه بگیریم که $m|(bd-ce)$. در این گزاره مقدار bd، حکمی را که ما نیاز داریم آشکار می‌سازد، بنابراین ما می‌بایست bd را بدست آورده و در بعضی از قسمتهای برهانمان اثر دهیم. مقدار b در فرض $m|(b-c)$ مشخص است، بنابراین می‌توان ادعا کرد که $m|d(b-c)=(bd-cd)$ (کاربرد خاصیت ویژه‌ای از نماد بخش‌پذیری) و حالا داریم، $m|(bd-cd)$ که مقدار bd را نیز در بردارد. (به آنچه مورد نظرمان بود رسیدیم) و به طریق مشابه،

از فرض $m|(d-e)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $m|c(d-e)=(cd-ce)$. اکنون داریم، $m|(bd-cd)$ و $m|(cd-ce)$ ، و بنابراین ایجاب می‌شود که $m|(bd-ce)$ ، (چرا؟)

Proof of Part 4: We are assuming that $m|(kb-kc)=k(b-c)$ or, equivalently, $m/(k,m)|k(b-c)/(k,m)=(k/(k,m))(b-c)$. (Give a reason justifying this last step.) Now $(m/(k,m), k/(k,m))=1$, so Theorem 1.2.1 on page 10 allows us to conclude that $m/(k,m)|(b-c)$. In congruence notation, $m/(k,m)|(b-c)$ is $b\equiv c \pmod{m/(k,m)}$, and so we are done.

اثبات قسمت ۴.

فرض کرده‌ایم که $m|(kb-kc)=k(b-c)$ یا، به عبارت دیگر، (معادل با آن) $\frac{m}{(k,m)}\Big|\frac{k(b-c)}{(k,m)}=\frac{k}{(k,m)}(b-c)$. (یک دلیل توجیهی برای این مرحلهٔ آخر بیاورید). حال (می‌دانیم) $\left(\frac{m}{(k,m)},\frac{k}{(k,m)}\right)=1$ ، بنابراین قضیهٔ ۱.۲.۱ در صفحهٔ ۱۰ امکان این نتیجه را به ما می‌دهد که $\frac{m}{(k,m)}|(b-c)$. در نماد گذاری هم‌نهشتی $\frac{m}{(k,m)}|(b-c)$ ، یعنی $b\overset{\frac{m}{(k,m)}}{\equiv}c$ ، و بنابراین ما توانستیم (اثبات را) تمام کنیم.

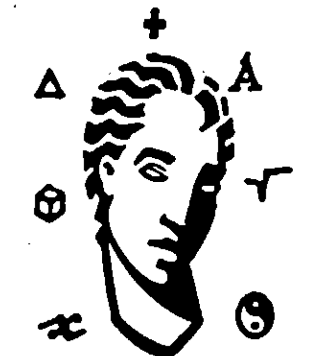
Remarks

1. An informal way of expressing the first three parts of the theorem just proved is to say that congruences can be added, subtracted, and multiplied together. Please notice, however, that the moduli of the two input congruences don't get added, subtracted, or multiplied together! The modulus of the output congruence is the same as the modulus of each of the two input congruences.
2. Part 4 of the theorem just proved is by way of a warning that the procedure of division in a congruence isn't as straightforward as are addition, subtraction, and multiplication. For instance, it may be tempting (?) to conclude, on the basis of the assumption $kb\equiv kc \pmod m$, that $b\equiv c \pmod m$, but this conclusion cannot in general be drawn (proof?).

تبصره‌ها (ملاحظات)

۱ ــ یک راه غیررسمی برای نشان دادن سه قسمت اول قضیه‌ای که ثابت شد، بیان قضیه به این شکل است که، هم‌نهشتی‌ها می‌توانند با هم جمع شوند، از هم کم شوند، و در هم ضرب شوند. لطفاً توجه کنید، مادامی که، سنج دو هم‌نهشتی یکسان نباشد (هم‌نهشتی‌هایی با دو سنج متمایز) نمی‌توانند با یکدیگر، جمع، تفریق، یا درهم ضرب شوند! سنج هم‌نهشتی‌های حاصل همان سنج دو هم‌نهشتی اولیه است.

۲ ــ قسمت چهارم قضیهٔ اثبات شدهٔ فوق این اخطار را می‌دهد که روش تقسیم در یک نهشتی به همان سادگی که برای جمع، تفریق و ضرب به کار رفت، برقرار نمی‌باشد. مثلاً ممکن است برای این نتیجه‌گیری اساسی وسوسه شویم که از فرض $kb\overset{m}{\equiv}kc$ می‌توان $b\overset{m}{\equiv}c$ را استنتاج کرد، امّا این نتیجه‌گیری نمی‌تواند در حالت کلّی استنباط شود. (ثابت کنید)



تفریح اندیشهٔ ۲

از میان ۳۴ دانش‌آموزی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، ۲۸ نفر در شنا، ۱۹ نفر در اسکی روی آب، ۱۱ نفر در پرش ارتفاع و ۱۷ نفر در دوچرخه‌سواری شرکت دارند. چنانچه همهٔ دانش‌آموزان حداقل در یک فعالیت شرکت کرده باشند، و ۱۲ نفر فقط در یک فعالیت، ۸ نفر دقیقاً در دو فعالیت و ۹ نفر دقیقاً در سه فعالیت ورزشی سهیم باشند، چه تعدادی در هر چهار فعالیت شرکت کرده‌اند؟

جواب در صفحه ۸۶



حل یک مسئله آنالیز با هندسه

○ دکتر احمدشرف‌الدین

مسئله: عبارت زیر را در نظر می‌گیریم :

$$*\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}\quad ,a>0$$

که درآن تعداد رادیکالها را n فرض می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر n به سوی بی‌نهایت میل کند عبارت بالا دارای حد است و سپس آن حد را حساب کنیم.

حل. نیم سهمی P به معادله

$$(1)\quad y=\sqrt{x}$$

رادر نظر می‌گیریم. نقطه $A(0,a)$ را در دستگاه مختصات xoy تعیین می‌کنیم. نیم سهمی P را به اندازه بردار $\vec{OA}$ انتقال می‌دهیم تا نیم سهمی P' به رأس A به دست آید. معادله نیم سهمی P' چنین است :

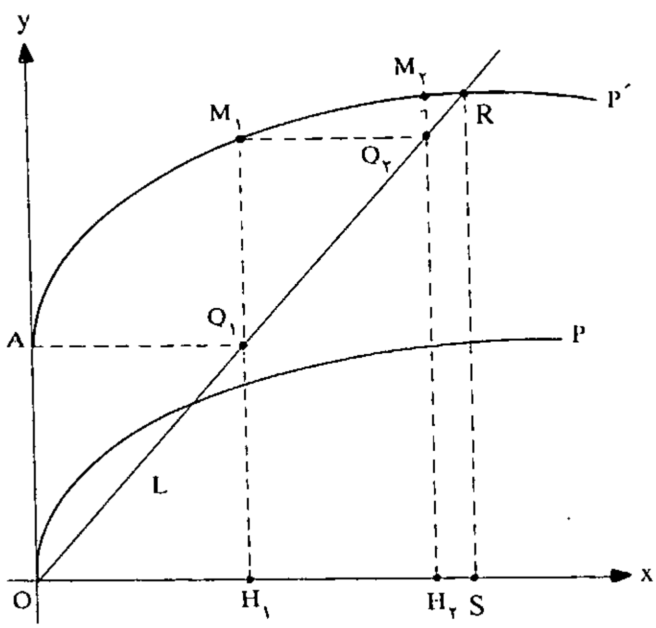
$$(2)\quad y=a+\sqrt{x}$$

نقطه برخورد خط OL نیمساز xoy و نیم سهمی P' را R می‌نامیم. تصویر نقطه R بر خط ox را S می‌نامیم. طول نقطه S برابر طول نقطه R است. از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} y=a+\sqrt{x} \\ y=x \end{cases}$$

طول نقطه S حاصل می‌شود :

$$(3)\quad x_S=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$$



نقطه H_1 را برمحور ox باطول a اختیار می‌کنیم وسپس عمود H_1M_1 را بر خط ox وارد می‌کنیم و نقطه برخورد این خط عمود با نیم‌سهمی P' را M_1 می‌نامیم. از رابطه (۲) نتیجه می‌شود :

$$(4)\quad y_{M_1}=a+\sqrt{a}$$

از نقطه M_1 خط M_1Q_2 را موازی محور ox رسم می‌کنیم و نقطه تقاطع آن را با خط OL با Q_2 نشان می‌دهیم. از نقطه Q_2 عمود Q_2H_2 را بر خط ox وارد می‌کنیم و نقطه

برخورد این عمود را با نیم سهمی P' ، با M_2 نشان می‌دهیم.
چون چهار ضلعی $H_1M_1Q_2H_2$ مستطیل است پس

(۵) $H_2Q_2 = H_1M_1$

و چون مثلث OH_2Q_2 قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس

(۶) $H_2Q_2 + OH_2$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

(۷) $OH_2 = H_1M_1$

یعنی

(۷)′ $x_{Q_2} = y_{M_1}$

از (۴) و (۷) نتیجه می‌شود:

(۸) $x_{Q_2} = a + \sqrt{a}$

برای محاسبه عرض نقطه M_2 ، مقدار اخیرالذکر را در معادله (۲) می‌بریم حاصل می‌شود

(۹) $y_{M_2} = a + \sqrt{a + \sqrt{a}}$

اکنون از نقطه M_2 خط M_2Q_3 را موازی خط ox رسم می‌کنیم. (در شکل نموده نشده‌است) و نقطه برخورد آن را با خط OL با Q_3 نشان می‌دهیم. از نقطه Q_3 خط Q_3H_3 را عمود بر خط ox رسم می‌کنیم و محل برخورد این خط عمود را با نیم‌سهمی P' با M_3 نشان می‌دهیم. با همان شیوه استدلال قبل نتیجه می‌شود:

(۱۰) $y_{M_3} = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$

این عمل ترسیم را درذهن خود ادامه می‌دهیم، برروی منحنی P' نقاط M_4 ، M_5 ، .... ، M_n ، ... و بر روی محور ox نقاط H_4 ، H_5 ، .... ، H_n .... حاصل می‌شود.
هنگامی‌که n به سوی بی‌نهایت میل کند نقطه M_n به سوی نقطه R و نقطه H_n به سوی نقطه S میل می‌کند. پس چنین داریم:

(۱۱) $\lim_{n\to+\infty} y_{m_n} = y_r = x_s$

و نیزمی‌دانیم که

(۱۲) $y_{m_n} = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}$

تعداد رادیکالها برابر n است.
از رابطه‌های (۳) و (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\lim_{n\to+\infty} y_{m_n} = \frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$$

برای محاسبه حد عبارت (*)، a را از عبارت سمت راست تساوی بالا کم می‌کنیم (به رابطه ۱۲ توجه کنید).

مقدار حد چنین است: $1+\frac{\sqrt{1+4a}}{2}$



جهل مرکّب

صفت اوّل، جهل مرکّب است، که عبارت است از آنکه کسی چیزی را نداند و نداند که نداند، واز بدترین رذایل است و دفع آن در غایت صعوبت است و باعث آن اعوجاج سلیقه و کجی ذهن است و کیفیّت شناخت آن، آن است که آدمی بعضی از مطالب و استدلالات خود را بر جمعی که ناصحین و معروفین به استقامت سلیقه‌اند عرضه نماید، اگر ایشان او را تصویب نمودند از این مرض بَری است و اگر تخطئه نمودند به آن مبتلاست و بهترین معالجات از برای او خواندن علوم ریاضیّه از هندسه و حساب است که موجب استقامت ذهن و پیمودن راه صواب است.

مقامات العلیّة
(مختصر معراج السعادة / علامه احمد نراقی(ره)
علامه حاج شیخ عباس قمی

رادیکال

(قسمت سوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم :

$$۱)\ (\sqrt[۵]{۳})^۴=\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۳}=\sqrt[۵]{۳\times۳\times۳\times۳}=\sqrt[۵]{۳^۴}$$

$$۲)\ (\sqrt[۴]{۵})^۳=\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۴]{۵}=\sqrt[۴]{۵\times۵\times۵}=\sqrt[۴]{۵^۳}$$

به طور کلی :

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \qquad (۴)$$

m عدد صحیح و n عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ $(n\geq ۲)$ و a عدد حقیقی $(a\in \mathbb{R})$ می‌باشد. اگر n زوج باشد، باید a بزرگتر یا مساوی صفر $(a\geq ۰)$ باشد :

$$(\sqrt[n]{|a|})^m=\sqrt[n]{|a|^m}$$

مثال ۱۴ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt[۳]{۵})^۶$

۲) $(-\sqrt{۲})^۴$

۳) $(\sqrt[۵]{۳})^۷$

۴) $(\sqrt[۳]{-۳})^۲$

۵) $(\sqrt[۳]{-۴})^۵$

۶) $(\sqrt{۶}-\sqrt{۳})^۲$

۷) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲$

۸) $(\sqrt[۳]{-a^۲})^۴$

۹) $(\sqrt[۵]{a^۳b^۲})^۳$

۱۰) $(-\sqrt[۷]{a^۴})^۶$

حل :

$$۱)\ (\sqrt[۳]{۵})^۶=\sqrt[۳]{۵^۶}=\sqrt[۳]{(۵^۲)^۳}=۵^۲=۲۵$$

$$۲)\ (-\sqrt{۲})^۴=(\sqrt{۲})^۴=\sqrt{۲^۴}=\sqrt{(۲^۲)^۲}=۲^۲=۴$$

$$۳)\ (\sqrt[۵]{۳})^۷=\sqrt[۵]{۳^۷}=\sqrt[۵]{۳^۵\times۳^۲}=۳\sqrt[۵]{۳^۲}=۳\sqrt[۵]{۹}$$

$$۴)\ (\sqrt[۳]{-۳})^۲=\sqrt[۳]{(-۳)^۲}=\sqrt[۳]{۹}$$

$$۵)\ (\sqrt[۳]{-۴})^۵=\sqrt[۳]{(-۴)^۵}=\sqrt[۳]{-۴^۵}=-\sqrt[۳]{(۲^۲)^۵}=-\sqrt[۳]{۲^{۱۰}}$$

$$=-\sqrt[۳]{۲^۹\times۲}=-\sqrt[۳]{(۲^۳)^۳\times۲}=-۲^۳\sqrt[۳]{۲}=-۸\sqrt[۳]{۲}$$

$$۶)\ (\sqrt{۶}-\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۶})^۲-۲(\sqrt{۶})(\sqrt{۳})+(-\sqrt{۳})^۲$$

$$=\sqrt{۶^۲}-۲\sqrt{۶\times۳}+\sqrt{۳^۲}=۶-۲\sqrt{۲\times۳^۲}+۳$$

$$=۹-۲\times۳\sqrt{۲}=۹-۶\sqrt{۲}$$

$$۷)\ (\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲=(\sqrt{۳})^۲-۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲})+$$

$$(-\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲+۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲})+(\sqrt{۲})^۲$$

$= \sqrt{3^2} - 2\sqrt{6} + \sqrt{2^2} + \sqrt{3^2} + 2\sqrt{6} + \sqrt{2^2}$

$= 3+2+3+2=10$

۸) $(\sqrt[3]{-a^2})^4 = \sqrt[3]{(-a^2)^4} = \sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6.a^2}$
$= \sqrt[3]{(a^2)^3.a^2} = a^2\sqrt[3]{a^2}$

۹) $(\sqrt[5]{a^3b^2})^3 = \sqrt[5]{(a^3b^2)^3} = \sqrt[5]{a^9b^6} = \sqrt[5]{a^5.\,a^4.\,b^5.\,b}$
$= ab\sqrt[5]{a^4b}$

۱۰) $(-\sqrt[7]{a^4})^6 = \sqrt[7]{(a^4)^6} = \sqrt[7]{a^{24}} = \sqrt[7]{a^{21}.a^3}$
$= \sqrt[7]{(a^3)^7.a^3} = a^3\sqrt[7]{a^3}$

توجه داشته باشید که عبارتهایی نظیر: $(\sqrt{-4})^2$ و $(-\sqrt[4]{-3})^2$ و $(\sqrt[6]{-5})^3$ و $(\sqrt[8]{-2})^8$ و $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{-2}})^4$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی بی‌معنی است، زیرا $\sqrt{-4}$ و $\sqrt[4]{-3}$ و $\sqrt[6]{-5}$ و $\sqrt[8]{-2}$ و $\sqrt[4]{-2}$ عددهای حقیقی نیستند.

حالت خاص ـ به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$

۲) $(\sqrt[5]{7})^5 = \sqrt[5]{7^5} = 7$

۳) $(\sqrt[3]{4})^3 = \sqrt[3]{4^3} = 4$

۴) $(\sqrt[4]{3})^4 = \sqrt[4]{3^4} = 3$

بطورکلی: برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ (۵)

و اگر n عددی زوج باشد:

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ و $(\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$

ریشهٔ یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[2]{9} = 3$

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

و

بنابراین:

$\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[4]{81}$

همچنین

۲) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

و

بنابراین:

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$

در مثال ۱ ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم مثبت $\sqrt{81}$ مساوی با ریشهٔ چهارم مثبت ۸۱ است.

در مثال ۲ مشاهده می‌کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{64}$ مساوی با ریشهٔ ششم مثبت ۶۴ است.

به طور کلی:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (۶)

ریشهٔ mام مثبت $\sqrt[n]{a}$، مساوی با ریشهٔ mnام مثبت a است.

m و n عددهای طبیعی و $m \geq 2$ و $n \geq 2$ می‌باشند؛ و $a \in \mathbb{R}$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند؛ a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۱۵: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}})^4$

۲) $(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}})^{12}$

۳) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}})^{24}$

۴) $\sqrt[3]{(\sqrt{5\sqrt{2}})^4}$

۵) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}}}$

۶) $(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}})^{32}$

۷) $(\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}})^{15}$

$$8)\ \sqrt[7]{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{7}}}}\right)^{45}}$$

حل :

$$1)\ \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}\right)^{4} = \left(\sqrt{\sqrt[4]{4}}\right)^{4} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{4}\right)^{4}} = \sqrt{4} = 2$$

$$2)\ \left(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)^{12} = \left(\sqrt[6]{\sqrt{2^{2}\times 2}}\right)^{12} = \left(\sqrt[12]{8}\right)^{12} = 8$$

$$3)\ \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}}\right)^{24} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2^{2}\times 2\sqrt[4]{4}}}\right)^{24}$$

$$= \left(\sqrt[6]{\sqrt[4]{(2^{3})^{4}\times 4}}\right)^{24} = \left(\sqrt[24]{2^{12}\times 4}\right)^{24}$$

$$= 2^{12}\times 4 = 12^{12}\times 2^{2} = 2^{14}$$

$$4)\ \sqrt[3]{\left(\sqrt{5\sqrt{2}}\right)^{4}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{\sqrt{5^{2}\times 2}}\right)^{4}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{50}\right)^{4}} = \sqrt[3]{50}$$

$$5)\ \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}}} = \sqrt[20]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}} = \sqrt[60]{\sqrt{4^{60}}}$$

$$= \sqrt[60]{\left(\sqrt{4}\right)^{60}} = \sqrt{4} = 2$$

$$6)\ \left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}\right)^{32} = \left(\sqrt{\sqrt{2^{2}\times 2\sqrt{\sqrt{2^{2}\times 2\sqrt{2}}}}}\right)^{32}$$

$$= \left(\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^{32} = \left(\sqrt[4]{\sqrt[4]{8^{4}\times 8\sqrt{2}}}\right)^{32}$$

$$= \left(\sqrt[16]{\sqrt{(8^{5})^{2}\times 2}}\right)^{32} = \left(\sqrt[32]{8^{10}\times 2}\right)^{32} = 8^{10}\times 2$$

$$= (2^{3})^{10}\times 2 = 2^{30}\times 2 = 2^{31}$$

در حالت کلی اگر $a \geq 0$ و تعداد رادیکالها n باشد داریم :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{\text{مرتبه } n} = \sqrt[2^{n}]{a^{2^{n}-1}} \qquad (a \geq 0)$$

برای مثال داریم :

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2^{6}]{3^{2^{6}-1}} = \sqrt[64]{3^{63}}$$

$$7)\ \left(\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}\right)^{15} = \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{5}.a}}\right)^{15} = \left(\sqrt[15]{a^{6}}\right)^{15} = a^{6}$$

$$8)\ \sqrt[7]{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{7}}}}\right)^{45}} = \sqrt[7]{\left(\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^{7}}}\right)^{45}} = \sqrt[7]{\left(\sqrt[45]{a^{7}}\right)^{45}}$$

$$= \sqrt[7]{a^{7}} = a$$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}} = \sqrt[kpqmn]{a}$$

n و m و p و q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

برای مثال داریم :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{75}}}}} = \sqrt[1800]{75} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}}} = \sqrt[120]{2}$$

توجه : می‌دانیم $2 = \sqrt{4^{1}}$ و $2 = \sqrt[4]{2^{4}} = \sqrt[4]{4^{2}} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$،
بنابراین :

$$\sqrt{4} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$$

همچنین $\sqrt[5]{a^{5}} = a$ و $a = \sqrt[15]{a^{15}} = \sqrt[5\times 3]{(a^{5})^{3}}$،
بنابراین :

$$\sqrt[5]{a^{5}} = \sqrt[5\times 3]{a^{5\times 3}}$$

به‌طور کلی :
برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$، اگر p عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^{m}} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (7)$$

اگر n زوج باشد، a^{m} نمی‌تواند منفی باشد.
و اگر p عددی زوج باشد :

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^{m}}$$

یعنی : عدد فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب و یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال :

$$1)\ \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^{2}} = \sqrt[7\times 3]{2^{7\times 2}} = \sqrt[21]{2^{14}}$$

۲) $\sqrt[4]{2x^2} = \sqrt[2\times4]{(2x^2)^2} = \sqrt[8]{4x^4}$

۳) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3\times4]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

۴) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^9}} = \sqrt[45]{a^9} = \sqrt[9\times5]{a^9} = \sqrt[5]{a}$

نکته مهم

در مورد تقسیم فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج و یا ضرب فرجه رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است :

مثال :

۱) $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = 3$ یا $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt{|-9|} = \sqrt{9} = 3$

یعنی $\sqrt[4]{(-9)^2} \neq \sqrt[2]{-9}$

۲) $\sqrt[3]{-27} = -3$

همچنین $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[3\times2]{(-27)^2}$

از خاصیتهای اخیر برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نامساوی استفاده می‌کنیم، بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجه مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال :

۱) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt{2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[2\times2]{2^2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2\times4} = \sqrt[4]{8}$

۲) $2\sqrt[3]{-4}\times3\sqrt{2} = -2\sqrt[3]{4}\times3\sqrt{2} = -2\sqrt[3\times2]{4^2}\times3\sqrt[2\times3]{2^3}$

$= -2\sqrt[6]{4^2}\times3\sqrt[6]{2^3} = -6\sqrt[6]{4^2\times2^3} = -6\sqrt[6]{2^4\times2^3}$

$= -6\sqrt[6]{2^7} = -6\sqrt[6]{2^6\times2} = -6\times2\sqrt[6]{2} = -12\sqrt[6]{2}$

۳) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[5]{8} = \sqrt[3\times5]{4^5}\div\sqrt[5\times3]{8^3} = \sqrt[15]{4^5}\div\sqrt[15]{8^3}$

$= \sqrt[15]{4^5\div8^3} = \sqrt[15]{2^{10}\div2^9} = \sqrt[15]{2^{10-9}} = \sqrt[15]{2}$

۴) $\sqrt[4]{36}\div\sqrt{3} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[2\times2]{3^2} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[4]{9}$

$= \sqrt[4]{36\div9} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

مثال ۱۶ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

۲) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2}$

۳) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

۴) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}}$

۵) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}$

۶) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}$

۷) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}$

۸) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$

۹) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}}$

حل :

۱) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[3\times2]{4^2}\times\sqrt[2\times3]{2^3} = \sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{2^3}$

$= \sqrt[6]{4^2\times2^3} = \sqrt[6]{2^4\times2^3} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6\times2} = 2\sqrt[6]{2}$

۲) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2} = -5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[6]{2^3}\times2\sqrt[6]{2^2}$

$= -10\sqrt[6]{2^3\times2^2} = -10\sqrt[6]{2^5} = -10\sqrt[6]{32}$

۳) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[30]{8^6}\times\sqrt[30]{4^{10}}\times\sqrt[30]{2^{15}}$

$= \sqrt[30]{8^6\times4^{10}\times2^{15}} = \sqrt[30]{2^{18}\times2^{20}\times2^{15}} = \sqrt[30]{2^{53}}$

$= \sqrt[30]{2^{30}\times2^{23}} = 2\sqrt[30]{2^{23}}$

۴) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}} = 5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\times2} = 5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{6}$

$= 5\sqrt[6]{25^2}\times2\sqrt[6]{6^3} = 10\sqrt[6]{25^2\times6^3} = 10\sqrt[6]{135000}$

۵) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{15^3}\div\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{15^3\div5^2}$

$= \sqrt[6]{\dfrac{5^3\times3^3}{5^2}} = \sqrt[6]{5\times3^3} = \sqrt[6]{5\times27} = \sqrt[6]{135}$

۶) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25} = \sqrt[4]{225}\div\sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{225\div25^2}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{5^2\times3^2}{5^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{5^2}} = \sqrt[4]{(\dfrac{3}{5})^2} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \sqrt{0.6}$

۷) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}} = \sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$

$= a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}} = a\sqrt[45]{a^8}$

$$8)\ \frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}} = \frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}} = \sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}$$

$$= \sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}} = \sqrt[21]{\frac{1}{a^7}} = \sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

$$9)\ \frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\frac{\sqrt[7]{a^{12}}}{\sqrt[5]{a^2}}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a^2.a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[21]{(a^2)^7}}{\sqrt[21]{(a^{12})^3}} = \frac{a\sqrt[21]{a^{14}}}{\sqrt[21]{a^{36}}}$$

$$= a\sqrt[21]{\frac{a^{14}}{a^{36}}} = a\sqrt[21]{\frac{1}{a^{22}}} = \sqrt[21]{\frac{a^{21}}{a^{22}}} = \sqrt[21]{\frac{1}{a}}$$

توانهای کسری (گویا)

قبلاً توانهای صحیح (مثبت و منفی و صفر) و اعمال مربوط به آنها را مطالعه کردیم ؛ در اینجا توانهای کسری اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

رابطهٔ $2^x \times 2^x = 2^1$ را در نظر می‌گیریم ؛ اگر دستور ضرب توانهای صحیح را به کار بریم خواهیم داشت :

$$2^{x+x} = 2^1 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow 2x = 1$$

در این صورت x نمی‌تواند عدد صحیح باشد و اگر فرض کنیم این دستور در این مورد نیز درست است $x = \frac{1}{2}$ خواهد شد و در نتیجه :

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \qquad (2)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم :

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

و همچنین داریم :

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2}\times 2} = 2^1 = 2$$

به طور کلی :
اگر a برابر عدد مثبتی، و یا صفر باشد ؛ بنابه تعریف می‌توان نوشت :

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad (a \geq 0)$$

مثال :

$$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7 \ , \quad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \ , \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

به طریق مشابه می‌توانیم $a^{\frac{1}{n}}$ (n عدد طبیعی و $n \geq 2$) را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

اگر n زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال :

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \ ,$$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5 \ ,$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2 \ ,$$

$$\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$$

$$\sqrt[4]{9} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

می‌دانیم $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ ، اگر دو طرف این تساوی را به توان ۵ برسانیم، خواهیم داشت :

$$(3^{\frac{1}{4}})^5 = (\sqrt[4]{3})^5$$

و یا

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5}$$

به طور کلی :
اگر m و n اعداد طبیعی و $n \geq 2$ باشد، بنابه تعریف می‌توان نوشت :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (8)$$

اگر n زوج باشد ؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال :

$$7^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{7^4}$$

$$2 \times 5^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{5^2} = 2\sqrt[3]{25}$$

$$9\sqrt[4]{27} = 3^2 \times \sqrt[4]{3^3} = 3^2 \times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{2+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{11}{4}} = \sqrt[4]{3^{11}}$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} = 2^{\frac{19}{15}}$$

$$= 2^{\frac{15+4}{15}} = 2^{1+\frac{4}{15}} = 2^1 \times 2^{\frac{4}{15}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$$

با توجه به مطالب اخیر می‌توان نتیجه گرفت که دستورهای عملیات توان در مورد توانهای صحیح می‌تواند در مورد توانهای کسری (گویا) نیز به کار رود ؛ بنابراین اگر m و n عددهایی گویا باشند و a عدد حقیقی باشد :

$$a^m . a^n = a^{m+n} \quad (m,n \in \mathbb{Q} \ , \ a \in \mathbb{R})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

مثال :

$$1)\ a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}} = a^{\frac{13}{4}}$$

$$2)\ b^{\frac{5}{3}} \times b^{-\frac{4}{9}} = b^{\frac{5}{3}-\frac{4}{9}} = b^{\frac{11}{9}}$$

$$3)\ b^{\frac{7}{4}} : b^{\frac{7}{3}} = b^{\frac{7}{4}-\frac{7}{3}} = b^{\frac{-7}{12}}$$

$$4)\ a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$$

$$5)\ 7^{\frac{3}{4}} \times 7^{-\frac{4}{3}} = 7^{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}} = 7^{-\frac{7}{12}}$$

$$6)\ 3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{5}{12}}$$

در اینجا عبارت $7^{-\frac{7}{12}}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$7^{-\frac{7}{12}} = (7^{\frac{7}{12}})^{-1} = \frac{1}{7^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{7^7}}$$

به همین ترتیب عبارت $3^{-\frac{5}{12}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$3^{-\frac{5}{12}} = (3^{\frac{5}{12}})^{-1} = \frac{1}{3^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^5}}$$

به طور کلی :

اگر $a \neq 0$ و m و n اعداد طبیعی و $n \geq 2$ باشد، بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad (9)$$

اگر n زوج باشد ؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال :

$$1)\ 5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

$$2)\ a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$$

$$3)\ 2^{-\frac{9}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^9}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^7 \times 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt[7]{4}}$$

مثال ۱۷ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$1)\ \sqrt[5]{8} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{16} \times 2^{-\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}}$$

$$2)\ \sqrt[3]{4} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times \sqrt[3]{2} \times 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$3)\ 2^{-2.5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{4^{-10}}} \times 2^{1.5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[10]{(\frac{1}{2})^5}$$

$$4)\ \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \times 3^{-\frac{1}{16}}$$

$$5)\ a^{-\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times \sqrt[9]{a^2}$$

$$6)\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^{-8}} \times \frac{\sqrt[9]{b^3}}{\sqrt[3]{a^4}}$$

حل :

$$1)\ \sqrt[5]{2^3} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{2^4} \times 2^{-\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}}$$

$$= 2^{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-\frac{7}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{0}{5}} = 2^0 = 1$$

$$2)\ \sqrt[3]{2^2} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times \sqrt[3]{2} \times 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$2)\ 2^{-2.5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{2^{-20}}} \times 2^{1.5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[10]{(\frac{1}{2})^5}$$

$$= 2^{-2.5} \times 2^{-(\frac{-20}{5})} \times 2^{1.5} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{5}{10}}$$

$$= 2^{-2.5+4+1.5-0.5-0.5} = 2^2 = 4$$

$$4)\ 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{8}} \times 3^{-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{1}{3^{\frac{15}{16}}} = \frac{1}{\sqrt[16]{3^{15}}}$$

۵) $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times \sqrt[9]{a^{2}}$

$= a^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times a^{\frac{2}{9}}$

$= a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}} = a^{-\frac{15}{9}}$

$= \frac{1}{\sqrt[9]{a^{15}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{a^{9} \times a^{6}}} = \frac{1}{a\sqrt[9]{a^{6}}}$

۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^{-8}} \times \frac{\sqrt[9]{b^{3}}}{\sqrt[3]{a^{4}}}$

$= a^{-\frac{1}{3}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{8}{3}} \times b^{\frac{3}{9}} \times a^{-\frac{4}{3}}$

$= a^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}} \times b^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}} = a^{-\frac{11}{3}} \times b^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^{11}}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^{9} \times a^{2}}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{a^{3}\sqrt[3]{a^{2}b}}$

نکته : با فرض $a \geq 0$ ، برابری $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$ وقتی برقرار است که دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد($x \in IN$) .



تفریح اندیشهٔ ۳

معمای برج آب

مسأله زیر مسأله‌ای حسابی است که بسیاری از خوانندگان را گیج می‌کند. اما در صورتی که با شکیبایی توضیح داده شود کودکی نیز آن را درک می‌کند.

از مخزن آبی، آب به طور دائم، با نرخ ثابت ۱۰۰۰ گالن در ساعت، به شهری وارد می‌شود.

از آنجا که مصرف آب در شبانه‌روز تغییر می‌کند، اضافهٔ آن، هنگامی که ورود آب از مصرف آن افزون می‌شود، در برجی، برای زمانی که مصرف آن از ورود آن فزونی می‌گیرد، ذخیره می‌شود.

تعداد گالنهای مصرف شده طی هشت دورهٔ سه‌ساعتی متوالی به طریق زیر است : ۲۰۰۰، ۵۰۰۰، ۴۵۰۰، ۲۵۰۰، ۴۰۰۰، ۵۰۰، ۴۰۰۰، و ۱۵۰۰ گالن.

با این فرض که آب در هر دورهٔ سه ساعتی با نرخ ثابتی مصرف می‌شود، ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

جواب در صفحه ۸۶



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

استفاده از مکمل ۲ برای تفاضل اعداد و نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر

❑ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

با توجه به تأکیدی که بر روی مکمل ۱ و مکمل ۲ اعداد داشته‌ایم، توجه خوانندگان را به این نکته جلب می کنم که برای چهار عمل اصلی ریاضی، در کامپیوتر فقط مدار جمع وجود دارد به همین خاطر مجبوریم تمام عملیات ریاضی را با استفاده از عمل جمع انجام دهیم و برای عملیات ضرب و تقسیم و تفریق، هیچ‌گونه مداری پیش‌بینی نشده است و تمام این عملیات فقط با استفاده از مدار جمع‌کننده یا جمع انجام می‌شود. برای ضرب و تقسیم عمل دیگری به نام جابجایی بیتها (shift) نیز درنظر گرفته شده است که بحث آن در محدودهٔ این درس قرار ندارد. از ریاضیات می‌دانید که ضرب برابر جمعهای متوالی و تقسیم برابر تفریقهای متوالی است و چون در کامپیوتر عمل تفریق نیز از طریق مدار جمع‌کننده انجام می‌شود درنتیجه می‌توان چهار عمل اصلی را با جمع یا جمعهای متوالی انجام داد. اما چرا ضرب، جمعهای متوالی و تقسیم، تفریقهای متوالی است؟ با مثال آن را توضیح می‌دهیم.

مثال: حاصل‌ضرب ۵×۷ را با استفاده از عمل جمع متوالی به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم: ۵+۵+۵+۵+۵+۵+۵ = ۵×۷

بدین ترتیب عمل ۵×۷ با هفت عمل جمع متوالی عدد ۵ به‌دست می‌آید. به این صورت:

۵ = ۰+۵ (۱)

۱۰ = ۵+۵ (۲)

۱۵ = ۵+۱۰ (۳)

۲۰ = ۵+۱۵ (۴)

۲۵ = ۵+۲۰ (۵)

۳۰ = ۵+۲۵ (۶)

۳۵ = ۵+۳۰ (۷)

از آنجا که هفت بار عمل جمع انجام شده است و نتیجهٔ عمل جمع هم ۳۵ به‌دست آمد بنابراین ۵×۷ برابر ۳۵ است.

مثال: حاصل تقسیم ۴ :۱۲ را با استفاده از عمل تفریقهای متوالی به‌دست آورید.

حل: در این روش عمل تفریق تا آنجا انجام می‌شود که حاصل آخرین تفریق کمتر از عنصر دوم عمل تفریق شود. تعداد دفعات انجام عمل تفریق، خارج قسمت تقسیم و مقدار آخرین عمل تفریق، باقیماندهٔ تقسیم خواهد بود. برای تقسیم ۱۲ بر ۴، به‌طور متوالی ۴ را از ۱۲ و حاصل تفاضلها کم می کنیم و تعداد دفعاتی را که عمل تفریق انجام شده است می‌شماریم.

(۱) $12 - 4 = 8$

(۲) $8 - 4 = 4$

(۳) $4 - 4 = 0 < 4$

از آنجا که ۳ بار عمل تفریق انجام شده است و حاصل آخرین عمل تفریق یعنی صفر کمتر از ۴ است $4>0$، بنابراین خارج قسمت تقسیم برابر ۳ و باقیمانده صفر است.

مثال: حاصل تقسیم ۲۳:۵ را با استفاده از تفریقهای متوالی به‌دست آورید.

حل:

(۱) $23 - 5 = 18$

(۲) $18 - 5 = 13$

(۳) $13 - 5 = 8$

(۴) $8 - 5 = 3 < 5$

از آنجا که چهار بار عمل تفریق انجام شده است، پس خارج قسمت تقسیم ۲۳ بر ۵ برابر ۴ است و چون حاصل آخرین عمل تفریق یعنی ۳ کمتر از ۵ است $5>3$ پس باقیماندهٔ این تقسیم برابر ۳ است.

```
۲۳|۵
    ۴  ←── خارج قسمت
 ۳ ←── باقیمانده
```

گفته شد که عمل جمع در کامپیوتر براحتی انجام می‌شود. عمل تفریق را نیز می توان با عمل جمع انجام داد مثلاً :

$27 - 11 = 27 + (-11)$

به این ترتیب اگر بتوانیم منفی عدد ۱۱ یا (۱۱−) را در کامپیوتر نمایش دهیم و سپس آن را با نمایش عدد ۲۷ در حافظه جمع کنیم تفاضل ۱۱−۲۷ به دست می‌آید.

در مقالات شماره‌های گذشته برهان گفتیم که اعداد منفی چگونه با استفاده از مکمل ۱ و مکمل ۲ در کامپیوتر نمایش داده می‌شوند. ذخیره اعداد منفی با استفاده از روش مکمل ۲، در اکثر کامپیوترهای موجود دنیا نظیر کامپیوترهای خانوادهٔ IBM و هیولت پاکارد HP انجام می‌شود. برای یادآوری دو مثال ارائه می‌دهیم :

مثال: عدد ۱۱− را با استفاده از مکمل ۲ در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: از آنجا که اعداد صحیح در دو بایت حافظه ذخیره می‌شوند، بنابراین ۱۱− را باید در یک کلمهٔ کامپیوتر به طول ۱۶ بیت ذخیره کنیم. مکمل ۲ هر عدد قرینهٔ آن عدد است.

$(11)_{10} = (0000000000001011)_2$

مکمل یک $(0000000000001011)_2$
$= (1111111111110100)_2$

مکمل دو = مکمل یک +۱ $= (1111111111110100)_2 + 1$
$= (1111111111110101)_2$

درنتیجه : $(-11)_{10} = (1111111111110101)_2$

تمرین : می‌دانیم $(11) + (-11) = 0$ تحقیق کنید :

$(0000000000001011)_2 + (1111111111110101)_2 = 0$

مثال: عدد ۲۱− را با استفاده از مکمل ۲ در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: $(21)_{10} = (0000000000010101)_2$

مکمل یک $(0000000000010101)_2$
$= (1111111111101010)_2$

مکمل دو = مکمل یک +۱ $= (1111111111101010)_2 + 1$
$= (1111111111101011)_2$

درنتیجه : $(-21)_{10} = (1111111111101011)_2$

تمرین : می‌دانیم $21 + (-21) = 0$، تحقیق کنید :

$(0000000000010101)_2 + (1111111111101011)_2 = 0$

مثال: تفاضل دو عدد ۲۰ و ۹ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک ازاین اعداد را می‌نویسیم :

$20 - 9 = (?)_{10}$

$(20)_{10} = (10100)_2$

$(9)_{10} = (1001)_2 = (01001)_2$

از آنجا که ۹− یک عدد منفی است، این عدد را به کمک

مکمل ۲ محاسبه می کنیم.

مکمل یک $(۰۱۰۰۱)_{۲} = (۱۰۱۱۰)_{۲}$

خوانندگان توجه داشته باشند که قبل از محاسبهٔ مکمل ۲ی عنصر دوم عمل تفریق، تعداد بیتهای آن باید با تعداد بیتهای عنصر اول عمل تفریق برابر باشد. در صورت مساوی نبودن تعداد بیتهای عنصر دوم با تعداد بیتهای عنصر اول تفریق، سمت چپ نمایش مبنای ۲ عنصر دوم را با صفر پر می کنیم تا تعداد بیتها برابر شود.

مکمل دو = مکمل یک +۱ = $(۱۰۱۱۰)_{۲} + ۱ = (۱۰۱۱۱)_{۲}$

درنتیجه: $(-۹)_{۱۰} = (۱۰۱۱۱)_{۲}$

$۲۰ - ۹ = ۲۰ + (-۹) = (۱۰۱۰۰)_{۲} + (۱۰۱۱۱)_{۲}$

$= (۱۰۱۰۱۱)_{۲}$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه هریک ۵ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۶ بیتی $(۱۰۱۰۱۱)_{۲}$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ آن حذف می کنیم تا ۵ بیتی شود. درنتیجه:

$۲۰ - ۹ = (۰۱۰۱۱)_{۲} \equiv (۱۰۱۱)_{۲} = (۱۱)_{۱۰} = ۱۱$

مثال: حاصل تفریق ۳۰ − ۱۰۵ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(۱۰۵)_{۱۰} = (۱۱۰۱۰۰۱)_{۲}$

$(۳۰)_{۱۰} = (۱۱۱۱۰)_{۲}$

از آنجا که معادل دودویی ۱۰۵ یک عدد ۷ بیتی است، از این‌رو معادل دودویی عدد ۳۰ را باید با ۷ بیت نمایش دهیم:

$(۳۰)_{۱۰} = (۰۰۱۱۱۱۰)_{۲}$

مکمل یک $(۰۰۱۱۱۱۰)_{۲} = (۱۱۰۰۰۰۱)_{۲}$

مکمل دو = مکمل ۱ +۱ = $(۱۱۰۰۰۰۱)_{۲} + ۱ = (۱۱۰۰۰۱۰)_{۲}$

درنتیجه: $(-۳۰) = (۱۱۰۰۰۱۰)_{۲}$

بنابراین:

$۱۰۵ - ۳۰ = ۱۰۵ + (-۳۰) =$

$(۱۱۰۱۰۰۱)_{۲} + (۱۱۰۰۰۱۰)_{۲} = (۱۱۰۰۱۰۱۱)_{۲}$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی $(۱۱۰۰۱۰۱۱)_{۲}$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا ۷ بیتی شود.

درنتیجه:

$۱۰۵ - ۳۰ = (۱۰۰۱۰۱۱)_{۲} = (۷۵)_{۱۰} = ۷۵$

مثال: حاصل تفریق ۲۶ − ۷۴ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(۷۴)_{۱۰} = (۱۰۰۱۰۱۰)_{۲}$

$(۲۶)_{۱۰} = (۱۱۰۱۰)_{۲}$

از آنجا که معادل دودویی عدد ۷۴ یک عدد ۷ بیتی است، از این‌رو معادل دودویی عدد ۲۶ را باید با ۷ بیت نمایش دهیم:

$(۲۶)_{۱۰} = (۰۰۱۱۰۱۰)_{۲}$

مکمل یک $(۰۰۱۱۰۱۰)_{۲} = (۱۱۰۰۱۰۱)_{۲}$

مکمل دو = مکمل یک +۱ = $(۱۱۰۰۱۰۱)_{۲} + ۱ = (۱۱۰۰۱۱۰)_{۲}$

درنتیجه: $(-۲۶)_{۱۰} = (۱۱۰۰۱۱۰)_{۲}$

بنابراین:

$۷۴ - ۲۶ = ۷۴ + (-۲۶) = (۱۰۰۱۰۱۰)_{۲} + (۱۱۰۰۱۱۰)_{۲}$

$= (۱۰۱۱۰۰۰۰)_{۲}$

از آنجا که مفروق و مفروق‌منه، هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی $(۱۰۱۱۰۰۰۰)_{۲}$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا ۷ بیتی شود.

درنتیجه:

$۷۴ - ۲۶ = (۰۱۱۰۰۰۰)_{۲} = (۱۱۰۰۰۰)_{۲} = (۴۸)_{۱۰} = ۴۸$

مثال: حاصل تفریق ۱۸ − ۲۵۱ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم:

$(۲۵۱)_{۱۰} = (۱۱۱۱۱۰۱۱)_{۲}$

$(۱۸)_{۱۰} = (۱۰۰۱۰)_{۲} = (۰۰۰۱۰۰۱۰)_{۲}$

مکمل یک $(۰۰۰۱۰۰۱۰)_{۲} = (۱۱۱۰۱۱۰۱)_{۲}$

مکمل دو = مکمل یک +۱ = $(۱۱۱۰۱۱۰۱)_{۲} + ۱$

$= (۱۱۱۰۱۱۱۰)_{۲}$

درنتیجه: $(-۱۸)_{۱۰} = (۱۱۱۰۱۱۱۰)_{۲}$

بنابراین:

$۲۵۱ - ۱۸ = ۲۵۱ + (-۱۸) =$

$(۱۱۱۱۱۰۱۱)_{۲} + (۱۱۱۰۱۱۱۰)_{۲} = (۱۱۱۱۰۱۰۰۱)_{۲}$

از آنجا که مفروق و مفروق منه، هریک ۸ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۹ بیتی $(۱۱۱۱۰۱۰۰۱)_{۲}$ است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا به‌صورت ۸ بیتی درآید. درنتیجه:

$۲۵۱ - ۱۸ = (۱۱۱۰۱۰۰۱)_{۲} = (۲۳۳)_{۱۰} = ۲۳۳$

تمرین: حاصل تفریق ۳۰ − ۷۰ را با استفاده ازمکمل ۲ به‌دست آورید.

تمرین: حاصل تفریق ۳۶ − ۱۷۰ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

مثال: حاصل تفریق ۹۰− ۹۶ را با استفاده از مکمل ۲ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادل دودویی هریک از این اعداد را می‌نویسیم :

$(۹۶)_{۱۰} = (۱۱۰۰۰۰۰)_۲$

$(۹۰)_۲ = (۱۰۱۱۰۱۰)_۲$

$(۱۰۱۱۰۱۰)_۲ = (۰۱۰۰۱۰۱)_۲$ مکمل یک

مکمل دو = مکمل یک +۱ $= (۰۱۰۰۱۰۱)_۲ + ۱$

$= (۰۱۰۰۱۱۰)_۲$

درنتیجه : $(-۹۰)_{۱۰} = (۰۱۰۰۱۱۰)_۲$

$۹۶ - ۹۰ = (۱۱۰۰۰۰۰)_۲ + (۰۱۰۰۱۱۰)_۲ = (۱۰۰۰۰۱۱۰)_۲$

از آنجا که مفروق و مفروق منه، هریک ۷ بیتی و حاصل تفریق یک عدد ۸ بیتی است، از این‌رو بیت اضافی را از سمت چپ این عدد حذف می‌کنیم تا به‌صورت ۷ بیتی درآید. درنتیجه :

$۹۶ - ۹۰ = (۰۰۰۰۱۱۰)_۲ = (۱۱۰)_۲ = (۶)_{۱۰} = ۶$

نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر

گفتیم در علم کامپیوتر به مجموعه اعدادی که در آنها نقطهٔ اعشار وجود داشته باشد **اعداد اعشاری** می‌گویند. تمام اعداد اعشاری چه مثبت و چه منفی، به‌صورت **ممیز سیار یا ممیز شناور** Floating Point در حافظه کامپیوتر نمایش داده می‌شوند. منظور از ممیز سیار، نمایش اعداد اعشاری به‌صورت توانهای مختلف ۱۰ است که بالاجبار با کم یا زیاد شدن توان ۱۰ عدد، جای ممیز نیز تغییر می‌کند. از این‌رو به این نحوهٔ نمایش عدد اعشاری(ممیزشناور) یا**ممیز سیار** می‌گویند. به‌عنوان مثال عدد ۱۲۳/۴ را می‌توان به روشهای مختلف زیر نمایش داد :

$۱۲۳/۴ = ۱۲۳۴ \times ۱۰^{-۱}$

$۱۲۳/۴ = ۱۲۳/۴ \times ۱۰^{۰}$

$۱۲۳/۴ = ۱۲/۳۴ \times ۱۰^{۱}$

$۱۲۳/۴ = ۱/۲۳۴ \times ۱۰^{۲}$

$۱۲۳/۴ = ۰/۱۲۳۴ \times ۱۰^{۳}$

$۱۲۳/۴ = ۰/۰۱۲۳۴ \times ۱۰^{۴}$

همانگونه که در بالا ملاحظه می‌کنید تمام عبارتهای سمت راست، نمایش عدد ۱۲۳/۴ هستند و مشاهده می‌کنید که در اعداد سمت راست، نقطهٔ اعشار (یا اعشار) Decimal Pointجای ثابتی ندارد و حالت سیار یا شناور floating دارد. به همین دلیل به این نحوه ازنمایش اعداد اعشاری، **نمایش اعداد اعشاری با نقطه (ممیز)** شناور می‌گویند. آنچه که در روش نمایش اعداد اعشاری به طریقه ممیز شناور مورد توجه ماست، حالتی از این‌گونه نمایشهاست که ارزش عدد بدون درنظرگرفتن توان ۱۰، کمتر از یک باشد. ما در نمایش اعداد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر، به فرم **نرمال‌سازی شدهٔ** عدد ممیزدار در مبنای ۲ احتیاج داریم. اما قبلاً لازم است تعریفی از فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد اعشاری در مبنای ۱۰ ارائه دهیم و اعداد اعشاری را به فرم نرمال‌سازی شدهٔ مبنای ۱۰ نمایش داده، به کمک آن فرم نرمال‌سازی شدهٔ دودویی اعداد ممیزدار مبنای ۲ را تعریف کرده و نمایش می‌دهیم.

تعریف فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد اعشاری: فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد اعشاری به حالتی از نمایش عدد اعشاری به‌صورت ممیز شناور گفته می‌شود که اولین رقم بعد از ممیز مخالف صفر و قبل از ممیز نیز فقط صفر باشد.

مثال: عدد اعشاری ۱۲۳/۴ را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $۱۲۳/۴ = ۰/۱۲۳۴ \times ۱۰^{۳}$

مثال: عدد اعشاری ۰/۰۰۱۲۳۴ را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $۰/۰۰۱۲۳۴ = ۰/۱۲۳۴ \times ۱۰^{-۲}$

مثال: عدد اعشاری ۱۲/۳۴۵− را به فرم نرمال‌سازی شده در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: $-۱۲/۳۴۵ = -۰/۱۲۳۴۵ \times ۱۰^{۲}$

به‌طورکلی هر عدد به‌صورت $f \times ۱۰^{P}$ ، را در مبنای ۱۰ فرم نرمال‌سازی شده می‌گویند هرگاه $۰/۱ \le |f| < ۱$ باشد. به عدد اعشاری f، مانتیس یا جزء کسری عدد fractional و به p نما یا توان عدد power می‌گویند. حال به این پرسش که فرم نرمال‌سازی شدهٔ اعداد ممیزدار در مبنای ۲ چگونه به‌دست می‌آید پاسخ می‌دهیم :

تعریف فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد ممیزدار مبنای ۲: فرم نرمال سازی شدهٔ عدد ممیزدار مبنای ۲، به حالتی از نمایش عدد

ممیزدار مبنای ۲ به‌صورت ممیز شناور گفته می‌شود که اولین رقم بعد از ممیز یک و قبل از ممیز فقط صفر باشد.

مثال: عدد ممیزدار $(1011/110)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(1011/110)_2 = (0/1011110)_2 \times 2^4 = (0/1011110)_2 \times 2^{(100)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(11011/011)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(11011/011)_2 = (0/11011011)_2 \times 2^5 = (0/11011011)_2 \times 2^{(101)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(10/00101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(10/00101)_2 = (0/1000101)_2 \times 2^2 = (0/1000101)_2 \times 2^{(10)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/0010101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/0010101)_2 = (0/10101)_2 \times 2^{-2} = (0/10101)_2 \times 2^{-(10)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/00001010)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/00001010)_2 = (0/1010)_2 \times 2^{-4} = (0/1010)_2 \times 2^{-(100)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(0/011101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل: $(0/011101)_2 = (0/11101)_2 \times 2^{-1} = (0/11101)_2 \times 2^{-(1)_2}$

مثال: عدد ممیزدار $(110111/00101)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده نشان دهید.

حل:

$$(110111/00101)_2 = (0/11011100101)_2 \times 2^6 = (0/11011100101)_2 \times 2^{(110)_2}$$

آنچه که در این نمایش نیاز به کمی دقت دارد تعیین توان ۲ است، در اعداد ممیزدار مبنای ۲، جای ممیز یا نقطهٔ دودویی Binary Point در دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱ــ قبل از نقطهٔ دودویی حداقل یک رقم مخالف صفر وجود دارد.

۲ــ قبل از نقطهٔ دودویی فقط یک صفر وجود دارد.

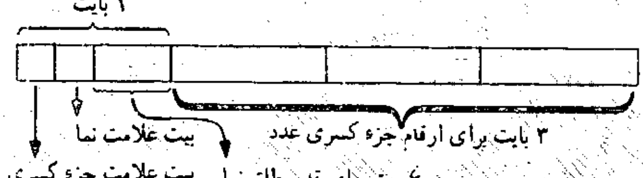
درحالتی که قبل از نقطهٔ دودویی یک یا چند رقم وجود دارد، توان ۲ی شکل نرمال‌سازی شده برابر تعداد ارقام قبل از نقطه دودویی است، مثلاً در عدد دودویی $(11011/001)$، تعداد ارقام قبل از نقطهٔ دودویی برابر ۵ است. درنتیجه فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد $(11011/001)_2$ به‌صورت زیر است:

$$(11011/001)_2 = (0/11011001)_2 \times 2^5 = (0/11011001)_2 \times 2^{(101)_2}$$

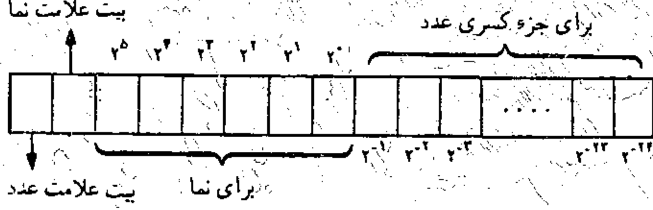
از آنجا که در نمایش اعداد نرمال‌سازی شده دودویی به مانتیس و توان در مبنای ۲ احتیاج است، به همین خاطر توان را از نمایش اعشاری به‌صورت دودویی تبدیل می‌کنیم. درحالتی که قبل از نقطهٔ دودویی فقط یک صفر وجود دارد مانند عدد ۰/۰۱۱۰۱، توان ۲ی شکل نرمال‌سازی شده برابر منفی تعداد صفرهای بعد از نقطهٔ دودویی است که قبل از اولین یک قرار دارند. مثلاً در عدد دودویی $(0/001101)_2$، تعداد صفرهای بعد از نقطهٔ دودویی قبل از اولین یک برابر ۲ است که منفی آن ۲- می‌شود. درنتیجه فرم نرمال‌سازی شدهٔ عدد $(0/001101)_2$ به‌صورت زیر است:

$$(0/001101)_2 = (0/1101)_2 \times 2^{-2} = (0/1101)_2 \times 2^{-(10)_2}$$

در نهایت، توان از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ تبدیل می‌شود. هر عدد اعشاری به‌صورت زیر در حافظهٔ کامپیوتر نمایش داده می‌شود:

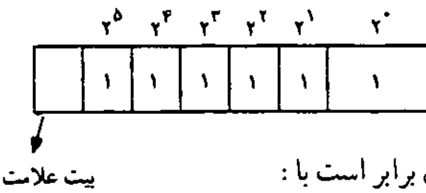


توجه دارید که قدرمطلق نما و ارقام جزء کسری عدد به‌صورت مبنای ۲ در حافظه ذخیره می‌شود. در حالت کلی ارزش مکانی بیتها در ذخیرهٔ اعداد اعشاری چنین است:



با توجه به نمایش بالا، ملاحظه می‌کنید برای ذخیرهٔ یک عدد اعشاری، به ۴ بایت حافظه احتیاج است که بایت سمت

چپ به علامت عدد، علامت نما و توان اختصاص دارد و ۳ بایت دیگر برای قدرمطلق جزء کسری عدد درنظر گرفته شده است. بیت علامت عدد و توان از همان قاعدهٔ علامت و قدرمطلق عدد پیروی می‌کند. اگر علامت عدد مثبت باشد در بیت علامت ۰ ذخیره می‌شود و اگر علامت عدد منفی باشد در بیت علامت ۱ ذخیره می‌شود. دریافته‌اید که برای ذخیرهٔ یک عدد اعشاری در حافظهٔ کامپیوتر به ۱ــ علامت عدد ۲ــ علامت نما ۳ــ قدرمطلق نما ۴ــ قدرمطلق جزء کسری عدد احتیاج است. در نمایش عدد اعشاری به‌صورت بالا، بزرگترین و کوچکترین مقدار نما، ۶۳+ و ۶۳- است زیرا بیتهای نما در حافظه به صورت زیر است:



که ارزش آن برابر است با:

$$(1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0) \text{ علامت نما}$$

$$=\pm(2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1)=\pm 63$$

مثال: عدد ۱۲۱/۳۷۵ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(121/375)_{10}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(121)_{10}=(1111001)_2$$

برای قسمت اعشاری داریم: $(0/375)_{10}=(?)_2$

$$\begin{cases}0/375\times2=0/750\\0/750\times2=1/500\\0/500\times2=1/000\end{cases}\Rightarrow(0/375)_{10}=(0/11)_2$$

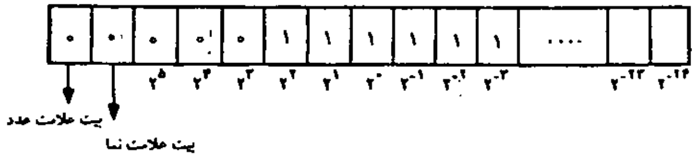
درنتیجه:

$$(121/375)_{10}=(1111001/011)_2$$

حال عدد $(1111001/011)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می‌کنیم:

$$(1111001/011)_2=0/1111001011\times2^7$$
$$=0/1111001011\times2^{(111)_2}$$

عدد داده شده مثبت و توان نیز مثبت است پس بیت علامت آنها با صفر پر می‌شود.



مثال: عدد $(-100/125)_{10}$ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(-100/125)_{10}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(-100/125)_{10}=-[(100)_{10}+(0/125)_{10}]$$

بنابراین:

$$(100)_{10}=(1100100)_2$$

برای قسمت اعشاری داریم:

$$\begin{cases}(0/125)_{10}=(?)_2\\0/125\times2=0/250\\0/250\times2=0/500\\0/500\times2=1/000\end{cases}\Rightarrow(0/125)_{10}=(0/001)_2$$

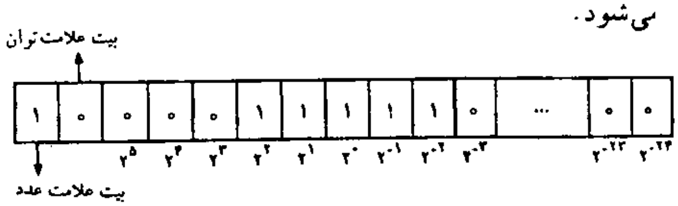
درنتیجه:

$$-(100/125)_{10}=-(1100100/001)_2$$

حال عدد $-(1100100/001)_2$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می‌کنیم:

$$-(1100100/001)_2=-0/1100100001\times2^7$$
$$=-0/1100100001\times2^{(111)_2}$$

جزء کسری این عدد منفی است پس بیت علامت عدد با ۱ پر می‌شود. توان مثبت است پس بیت علامت آن با صفر پر می‌شود.



مثال: عدد $(-0/047851562)_{10}$ را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.

حل: ابتدا معادل دودویی عدد $(-0/047851562)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$0/047851562\times2=0/095703125$$
$$0/095703125\times2=0/19140625$$
$$0/19140625\times2=0/3828125$$
$$0/3828125\times2=0/765625$$

۰/۷۶۵۶۲۵×۲=۱/۵۳۱۲۵
۰/۵۳۱۲۵×۲=۱/۰۶۲۵
۰/۰۶۲۵×۲=۰/۱۲۵
۰/۱۲۵×۲=۰/۲۵۰
۰/۲۵۰×۲=۰/۵۰۰
۰/۵۰۰×۲=۱/۰۰۰
۰/۰۰۰×۲=۰/۰۰۰

درنتیجه :

$-۰/۰۴۷۸۵۱۵۶۲=-(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱)_۲$

حال عدد $-(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱)_۲$ را به‌صورت نرمال‌سازی شده تبدیل می‌کنیم :

$-(۰/۰۰۰۰۱۱۰۰۱)_۲=-۰/۱۱۰۰۱×۲^{-۴}$

$=-۰/۱۱۰۰۱×۲^{-(۱۰۰)_۲}$

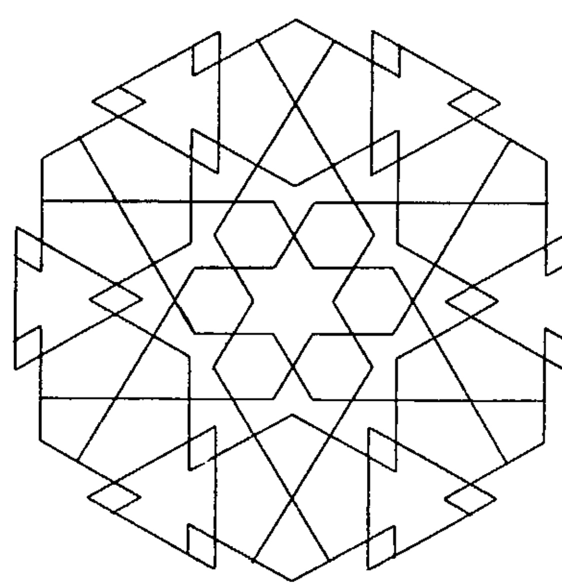
جزء کسری این عدد منفی است پس بیت علامت عدد با ۱ پر می‌شود. توان نیز منفی است پس بیت علامت آن نیز با ۱ پر می‌شود.

بیت علامت نما

۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	...	۰	۰	۰
		$۲^۵$	$۲^۴$	$۲^۳$	$۲^۲$	$۲^۱$	$۲^۰$	$۲^{-۱}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۳}$		$۲^{-۲۲}$	$۲^{-۲۳}$	$۲^{-۲۴}$

بیت علامت عدد

تمرین : عدد ۳۲/۷۵- را در حافظهٔ کامپیوتر نمایش دهید.



مسائل مسابقه‌ای

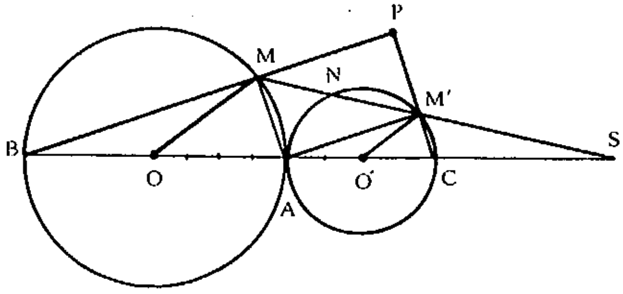
دو دایره (O) و (O′) به شعاعهای R=۴cm و R′=۲cm در نقطهٔ A مماس برون هستند. دو شعاع موازی و همجهت OM و O′M′ را در دو دایره رسم می‌کنیم. اگر S نقطهٔ برخورد MM′ با خط‌المرکزین OO′ باشد:

۱ـ طول پاره‌خط SO را تعیین کنید. در صورتی که شعاعهای OM و O′M′ به ترتیب حول نقطه‌های O و O′ به موازات یکدیگر دوران کنند، در مورد نقطهٔ S چه می‌توان گفت؟

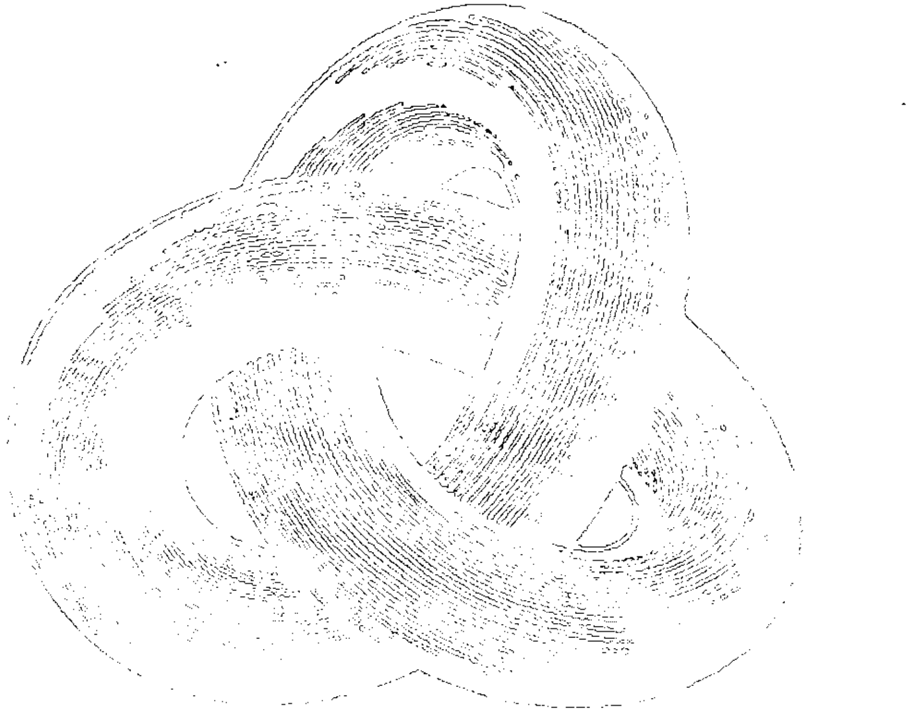
۲ـ چهارضلعی AMPM′ که در آن P نقطهٔ تقاطع BM و CM′ (B و C به ترتیب انتهای دیگر قطرهایی از دو دایرهٔ (O) و (O′) می‌باشند که از نقطهٔ A می‌گذرند) است، چگونه است؟

۳ـ مکان هندسی نقطهٔ P ، همچنین مکان هندسی نقطهٔ N وسط پاره‌خط MM′ را وقتی دو شعاع OM و O′M′ به ترتیب حول نقطه‌های O و O′ و به موازات هم دوران کنند، تعیین کنید.

۴ـ اندازهٔ قطرهای چهارضلعی AMPM′ را در صورتی که $A\hat{O}M=۶۰^\circ$ باشد، همچنین مساحت این چهارضلعی را تعیین کنید.



● محمد هاشم رستمی



بی‌نهایت

● پرویز شهریاری

«بی‌نهایت»، به معنای سادهٔ خود در ریاضیات، یعنی بزرگتر از هر عددی؛ ولی خود بی‌نهایت، یک عدد نیست، یک مفهوم است و بیشتر، معرف یک کیفیت است تا کمیتی مشخص. به همین دلیل است که، تا مدتها، ریاضی‌دانان وارد در چند و چون بی‌نهایت نمی‌شدند و از کنار آن می‌گذشتند. وقتی زنون، ریاضی‌دان یونانی، برای اثبات یک‌پارچگی جهان و نبودن حرکت در آن، با درکی ساده‌اندیشانه از «بی‌نهایت» استفاده کرد، هراس ریاضی‌دانان یونانی را از بی‌نهایت، بیشتر کرد، چرا که می‌دیدند، با سوءاستفاده از آن، می‌توان حقیقت را وارونه جلوه داد.

تنها ریاضی‌دان دنیای کهن، که، برخلاف تفکر رایج زمان خود بی‌نهایت را، به مفهوم ریاضی آن (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) بررسی کرد ارشمیدس بود. ارشمیدس، در نوشته‌های خود، از روشی استفاده می‌کند که، دو هزار سال بعد از او، منجر به کشف محاسبهٔ انتگرالی شد.

ساده‌ترین کاربرد این روش را در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» می‌بینیم. ارشمیدس در این رساله، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مسألهٔ اندازه‌گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد پی (π) را مطرح می‌کند و، در ضمن، میزان خطای موجود را، در هر مرحله از محاسبه، به دست می‌دهد.

ارشمیدس، با محاسبهٔ محیط چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، از دو سمت به محیط دایره نزدیک می‌شود. او از مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی آغاز می‌کند و، سپس، با دو برابر کردنهای متوالی تعداد ضلعها، خود را به ۹۶ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی می‌رساند. قطر دایره را برابر واحد می‌گیرد و ثابت می‌کند، در این حالت، محیط ۹۶ ضلعی محاطی بیشتر از $3\frac{10}{71}$ و محیط ۹۶ ضلعی محیطی کمتر از $3\frac{1}{7}$ است، یعنی

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

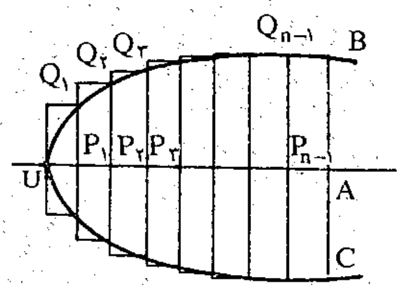
به این ترتیب، عدد $\frac{22}{7}$ را، به عنوان تقریب خوبی برای عدد π می‌پذیرد.

ارشمیدس که در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره»، به محاسبهٔ محیط و مساحت دایره پرداخته است، در رسالهٔ دیگر خود به نام «دربارهٔ کره و استوانه»، به حالت فضایی، یعنی سطح و حجم کره توجه می‌کند و، با استفاده از همان روش خود، ثابت می‌کند: سطح کره برابر است با چهار برابر سطح دایرهٔ عظیمه و حجم کره، برابر است با چهار برابر حجم مخروطی که قاعدهٔ آن، دایرهٔ عظیمه‌ای از کره و ارتفاع آن برابر طول شعاع کره باشد.

ارشمیدس، در همین رساله، نتیجه‌های مهم و جالب دیگری هم به دست آورده است. به طور مثال ثابت می‌کند، اگر در یک استوانهٔ متساوی‌الساقین (استوانه‌ای که، در آن، طول ارتفاع با طول قطر قاعده برابر باشد)، کره‌ای محاط کنیم، سطح کل و حجم استوانه، برابر $\frac{3}{2}$ سطح و حجم کره می‌شود.

ارشمیدس در رسالهٔ «دربارهٔ کونوئیدها و سفه روئیدها»، از روشی استفاده می‌کند که خیلی نزدیک به روش انتگرال گیری

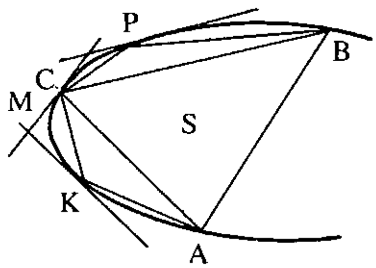
است. او به جسم‌هایی «کونوئید» می‌گفت که از دوران یک قطعه سهمی، دور محور خود به دست آیند، یعنی همان چیزی که امروز سهموی (پارابولوئید) نامیده می‌شود. باید گفت که، نامگذاری ارشمیدس از نامگذاری امروز ما بهتر است، زیرا «پارابولوئید» یعنی «شبه سهمی»، در حالی که یک حجم را نمی‌توان شبیه یک شکل مسطح دانست؛ ولی «کونوئید» یعنی «شبه مخروط». در واقع هم، جسم حاصل، به مخروط شباهت دارد.



(شکل ۱)

روش ارشمیدس را، برای پیدا کردن حجم کونوئیدی که، از دوران قطعه سهمی BOC دور محور OA، به دست می‌آید، می‌توان به این ترتیب شرح داد (شکل ۱) ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را به بخش‌های برابر OP_1، P_1P_2، P_2P_3، ....، $P_{n-1}A$ تقسیم می‌کنیم. از نقطه‌های تقسیم، که تعداد آن‌ها برابر n است، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ....، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را رسم می‌کنیم و آن طور که در شکل دیده می‌شود، مستطیل‌های محاطی و محیطی را می‌سازیم. اگر شکل را دور OA دوران دهیم، دوجسم پله‌ای به دست می‌آید که از استوانه‌های محاط در کونوئید و محیط بر آن به دست آمده‌اند. حجم جسم بیرونی بیشتر از حجم کونوئید و حجم جسم درونی کمتر از حجم کونوئید است، ارشمیدس، با آغاز از حجم این دو جسم، حجم کونوئید را به دست می‌آورد و، با زیاد کردن تعداد تقسیم‌ها (یعنی با میل n به سمت بی‌نهایت)، ثابت می‌کند، این حجم، برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر OA و شعاع قاعدهٔ آن برابر AB باشد.

ارشمیدس، در رسالهٔ «تربیع سهمی» (ساختن مربعی که مساحت آن، برابر با مساحت سهمی مفروض باشد)، از همین روش استفاده می‌کند. این رساله، به محاسبهٔ یک قطعه سهمی اختصاص دارد. فرض کنید، بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را، که به وسیلهٔ وتر AB از سهمی جدا شده است، محاسبه کنیم (شکل ۲).



(شکل ۲)

استدلال ارشمیدس چنین است. مماسی موازی وتر AB بر سهمی رسم و نقطهٔ تماس C را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. مساحت مثلث ABC، از نصف مساحت قطعه سهمی AMB بیشتر است. در قطعه‌های تازهٔ AKC و CPB، شبیه آن‌چه دربارهٔ قطعه AMB انجام دادیم، عمل می‌کنیم، یعنی مثلث‌های AKC و CPB را می‌سازیم. شکل محاطی AKCPB به دست می‌آید. این روش ساختمان مثلث‌ها را ادامه می‌دهیم، چندضلعی محاطی، همراه با مساحت آن، مرتب بزرگتر و، مساحت آن، به مساحت قطعه سهمی نزدیکتر می‌شود. ارشمیدس ثابت کرد، مساحت مثلث ACB، چهار برابر مجموع مساحتهای دو مثلث AKC و CPB است و از آن جا که، همین وضع، برای مثلث‌های بعدی پیش می‌آید، و با توجه به این که، مجموع مساحت‌های همهٔ این مثلث‌ها، به مساحت قطعه سهمی نزدیک است، اگر مساحت مثلث ACB را S بنامیم، مساحت قطعه سهمی چنین می‌شود:

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\frac{1}{64}S+....$$

ارشمیدس از «روح زمان» پیروی نکرد و سنتها را درهم شکست و راه درست بررسی را در محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک «رشتهٔ بی‌پایان» نشان داد. در واقع ارشمیدس، از همان رهنمودی پیروی می‌کرد که سده‌های بعد، به وسیلهٔ دکارت تنظیم شد:

«وقتی می‌خواهیم موضوعی را بررسی کنیم، نباید در جست‌وجوی چیزی باشیم که دیگران می‌اندیشند و یا در گمان خودمان وجود دارد. باید چیزی را جست‌وجو کنیم که یا آشکارا و به روشنی دیده می‌شود و یا با استدلال قیاسی قابل اثبات است، چرا که دانش، از راه دیگری به دست نمی‌آید.»

نزدیک به دو هزار سال طول کشید تا ریاضی‌دانان توانستند راه ارشمیدس را دنبال کنند: «بی‌نهایت» را به رسمیت بشناسند

و، به جای فرار از آن، آن را به خدمت دانش درآورند. فرانسوا ویت، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ شانزدهم، حاصل ضرب بی‌پایان زیر را، برای محاسبهٔ عدد π پیشنهاد کرد :

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\ldots=\frac{2}{\pi}$$

و والیس، ریاضی‌دان انگلیسی سدهٔ هفدهم، این ضرب بی‌پایان را :

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots=\frac{\pi}{2}$$

در رابطهٔ والیس، به این نکتهٔ جالب توجه کنید که از ضرب عددهای گویا، وقتی تعداد آن‌ها بی‌نهایت است، ممکن است عدد گنگ (و در این جا «غیر جبری») به دست آید، چیزی که هرگز برای ضرب تعداد محدودی عدد گویا، پیش نمی‌آید.

سرانجام، نیوتون و لایب نیتس، با کشف محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی و به خدمت گرفتن «بی‌نهایت کوچک‌ها» و «بی‌نهایت بزرگ‌ها»، دگرگونی عظیمی در پیشرفت ریاضیات، و به دنبال آن در همهٔ دانشها، به وجود آوردند.

این را هم نگفته نگذاریم که هگل، فیلسوف آلمانی، برای نخستین بار، مفهوم فلسفی بی‌نهایت را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد و بستگی ذاتی «بی‌نهایت» را با «نهایت» و «نامحدود» را با «محدود» نشان داد.

□

بی‌نهایت، یکی از ویژگی‌های فضا و زمان است و می‌توان آن را به یاری ریاضیات و کیهان‌شناسی مورد بررسی قرار داد. تا آن‌جا که دانش امروز نشان می‌دهد، جهان مادی، که به عنوان پراکندگی جرم در فضا و زمان شناخته می‌شود، نامحدود است. البته، بسته به دستگاهی که برای محاسبه انتخاب می‌شود، می‌توان «فضا ــ زمان» را متناهی یا نامتناهی در نظر گرفت. بی‌نهایت، بازتابی از واقعیت است و، بنابراین، با تکیه بر واقعیت، می‌توان آن را درک و تحلیل کرد.

مفهوم «بی‌نهایت» ریاضی، تنها وقتی قابل درک است که آن را، در وحدت منطقی با «نهایت» مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین، «بی‌نهایت» در ذات خود متضاد است و از بین بردن این تضاد، یعنی نفی بی‌نهایت. ولی، از طرف دیگر، می‌دانیم، در هر نظریهٔ ریاضی، بی‌تناقضی در رابطه‌های صوری مربوط به آن، از ضروریات است. چگونه می‌توان، ضرورت بی‌تناقضی را با ویژگی متناقض بی‌نهایت آشتی داد؟ در واقع، وقتی مثلاً در نظریهٔ حد، از حد بی‌نهایت ($a_n = \infty$ حد) و یا در نظریهٔ مجموعه‌ها از توان بی‌نهایت صحبت می‌کنیم، تنها به این دلیل، دچار تناقض نمی‌شویم که، این‌ها، تنها صورت‌های ویژهٔ کاملاً ساده شده‌ای از مفهوم بی‌نهایت‌اند و تنها طرحی، تصویری و جنبه‌ای از مفهوم بی‌نهایتِ جهان واقعی را بازتاب می‌دهند.

□

بی‌نهایت، یعنی بزرگتر از هر عدد دلخواه و، بنابراین، در همان حال که با مفهوم «کمیت» و «عدد» بستگی دارد، نمی‌توان آن را یک عدد به حساب آورد. از همین جاست که قانون‌های مربوط به عمل، در حالتی که با مجموع یا حاصل ضرب بی‌نهایت جمله سر و کار داریم، همیشه با قانون‌های دربارهٔ جمع و ضرب عادی تطبیق نمی‌کند. قانون‌های عمل، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، در همان حال که با استدلال‌های قیاسی به دست می‌آیند، باید با تجربه و با قانونمندی‌های حاکم بر طبیعت هم سازگار باشند. به این دو مثال توجه کنید :

دو متحرک A و B را در نظر می‌گیریم که به فاصلهٔ a متر از یکدیگر قرار دارند و هر دو، در یک لحظه، به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند : A با سرعت ۳ متر در ثانیه و B با سرعت ۱ متر در ثانیه. هر بار که A و B به هم می‌رسند، A بلافاصله به طرف مبدأ حرکت خود برمی‌گردد و با رسیدن به آن، دوباره به طرف B می‌رود. این گونه رفت و آمد A، آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا B، تمامی فاصلهٔ a متر را بپیماید. می‌خواهیم بدانیم، A چند متر راه رفته است.

راه حل بسیار ساده است. سرعت A سه برابر سرعت B است و، بنابراین، اگر در تمام مدت حرکت B، در راه باشد، مسافتی به اندازهٔ سه برابر B می‌پیماید. B، به اندازهٔ a متر راه رفته است. در نتیجه، مسافتی که A پیموده، برابر است با $3a$ متر.

ولی اگر مسأله را، مرحله به مرحله حل کنیم و ببینیم، متحرک A در هر رفت و برگشت چند متر پیموده است و، از مجموع آن‌ها، مسافتی را پیدا کنیم که A پیموده است، به مجموع بی‌پایان زیر می‌رسیم :

$$\left(\frac{3a}{4}+\frac{3a}{4}\right)+\left(\frac{3a}{8}+\frac{3a}{8}\right)+\left(\frac{3a}{16}+\frac{3a}{16}\right)+\ldots=$$

$$=2\left(\frac{3a}{4}+\frac{3a}{8}+\frac{3a}{16}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{۳a}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots\right)=\frac{۳a}{۲}\times ۲=۳a$$

و این، همان پاسخی است که در آغاز و به سادگی به دست آورده بودیم. واقعیت و عمل، درستی حد مجموع جمله های تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان را تأیید می کند :

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots=۲$$

مثال دوم : قیمت هر چهار بطری خالی شیر را، برابر با قیمت یک بطری پر از شیر فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم، با پولی که برای ۱۲ بطری پر از شیر می‌پردازیم، چقدر شیر (بدون بطری) می‌توانیم داشته باشیم؟

۱۲ بطری شیر را در ظرفی خالی می کنیم، شیشه های خالی را به فروشگاه می‌دهیم و ۳ بطری پر از شیر می گیریم. اگر ۳ بطری خالی را پس بدهید، باید $\frac{۳}{۴}$ بطری پر به شما بدهند (فرض را بر عملی بودن این دادوستد می گیریم). با پس دادن $\frac{۳}{۴}$ بطری خالی، $\frac{۳}{۱۶}$ بطری پر می گیرید و غیره. اگر واحد اندازه‌گیری مقدار شیری را که در اختیار شماست، یک بطری بگیریم، مقدار آن چنین خواهد شد :

$$۱۲+۳+\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۳}{۶۴}+\dots=$$
$$=۱۵+۳\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\dots\right)=$$
$$=۱۵+۳\times\frac{۱}{۳}=۱۵+۱=۱۶$$

ولی شما می‌توانستید به ترتیب دیگری استدلال و مسأله را، به صورتی حل کنید که، در عمل، ممکن است : در مرحلهٔ اول ۱۲ بطری خالی را با سه بطری پر عوض می کنید. در مرحلهٔ دوم، یک بطری پر از فروشگاه به امانت می گیرید، آن را در ظرف خود خالی می کنید و همراه با سه بطری خالی قبلی (که اکنون روی هم ۴ بطری خالی شده‌اند)، وام خود را به فروشگاه می‌پردازید (ارزش ۴ بطری خالی، با ارزش یک بطری پر برابر است). به این ترتیب، شما به اندازهٔ

$$۱۲+۳+۱=۱۶$$

بطری شیر دراختیار دارید. و این، همان پاسخ قبلی است. باز هم واقعیت و عمل، نظریهٔ ریاضی را تأیید کرد.

□

اقلیدس، در «مقدمات» مشهور خود، این اصل را، به عنوان حکمی بدیهی پذیرفته است :« کل از هر جزء خود بزرگتر است». در منطق ارسطویی که هنوز هم بر منطق کلاسیک حکومت می کند، کل و جزء را این طور تعریف می کنند :

«کل آن است که شامل همهٔ جزء های خود باشد».

«جزء آن است که بخشی از کل را شامل شود».

ولی ژرژ کانتور، مبتکر نظریهٔ مجموعه‌ها، روشن کرد که اصل اقلیدس، در قلمرو بی‌نهایت‌ها، همیشه و همه جا درست نیست. به عنوان نمونه، مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ عددهای فرد طبیعی را در نظر می‌گیریم. روشن است که عددهای فرد طبیعی، بخشی (یا به زبان ریاضی : زیرمجموعه‌ای) از مجموعهٔ عددهای طبیعی است. ولی آیا تعداد عددهای فرد طبیعی، از تعداد همهٔ عددهای طبیعی، کمتر است؟ عددهای فرد طبیعی را در یک سطر و عددهای طبیعی را زیر آن‌ها می‌نویسیم :

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱ & ۳ & ۵ & ۷ & ۹ & \cdots & ۲n+۱ & \cdots \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \cdots & n+۱ & \cdots \end{array}$$

در برابر هر عدد فرد، یک عدد طبیعی و در برابر هر عدد طبیعی یک عدد فرد وجود دارد و، اگر به زبان کانتور بگوییم، بین عددهای فرد طبیعی و همهٔ عددهای طبیعی، تناظر یک به یک برقرار است. به طور مثال عدد فرد ۱۳۷۵، متناظر با عدد طبیعی ۶۸۷ و عدد طبیعی ۹۹۸ متناظر با عدد فرد ۱۹۹۷ است. به این ترتیب، تعداد عددهای فرد، نه کمتر از تعداد عددهای طبیعی است و نه بیشتر از آن. کل با جزء خود برابر شد. می‌بینیم، وقتی گام به قلمرو بی‌نهایت‌ها می‌گذاریم، یک «اصل بدیهی» هم می‌تواند قدرت قانونی خود را از دست بدهد. شاید بتوان، این اصل را، به صورت زیر کامل کرد :« کل محدود، از هر جزء خود بزرگتر است» و، البته، اگر با کل نامحدود سر و کار داشته باشیم، ممکن است از جزء خود بزرگتر نباشد.

در جمع عددهای گویا، به شرطی که هم جمله های جمع و هم مجموع آنها را، کسرهای ساده نشدنی در نظر بگیریم، در مخرج کسر حاصل جمع، نمی‌تواند عاملی تازه، غیر از عامل هایی که در مخرج جمله های جمع وجود دارد، پدیدار شود. برای مثال از جمع $\frac{۱}{۳}$ با $\frac{۱}{۵}$، نمی‌توان به کسری ساده نشدنی رسید که، در مخرج آن، عاملی غیر از ۳ و ۵ وجود داشته باشد. ولی به این مجموع بی‌پایان توجه کنید :

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۱۲۵}+\dots=\frac{۱}{۴}$$

در مخرجهای جمله های جمع، تنها عامل ۵ وجود دارد، درحالی که در مخرج کسر حاصل جمع، عامل ۲ ظاهر شده

است.

در مجموع‌های محدود، با تغییر گروه‌بندی عددها، تغییری در حاصل جمع پدید نمی‌آید. برای مثال

۱۱ = (۵ + ۳) + (۲ + ۱) = (۵ + ۳ + ۲) + ۱ = ۵ + ۳ + ۲ + ۱

در حالی که، در مجموع‌های بی‌پایان، ممکن است تغییر گروه‌بندی جمله‌ها، منجر به تغییر مقدار مجموع شود. مجموع

S = ۱ − ۱ + ۱ − ۱ + ...

را در ریاضیات نامعین می‌دانند (به اصطلاح ریاضی، رشته‌ای واگرا یا متباعد است، یعنی مجموع جمله‌های آن، به سمت هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود). ولی اگر از قانون‌های عادی استفاده کنیم، می‌توانیم این طور بنویسیم :

S = (۱ − ۱) + (۱ − ۱) + (۱ − ۱) + ... = ۰

و یا این‌طور

S = ۱ − (۱ − ۱) − (۱ − ۱) − (۱ − ۱) − ... = ۱

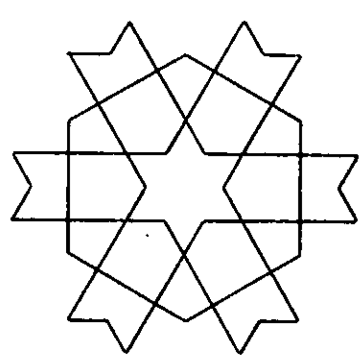
و یا سرانجام

S = ۱ − (۱ − ۱ + ۱ − ۱ + ...) = ۱ − S

که از آن‌جا به دست می‌آید : S = ۱/۲ (شگفتا! از مجموع عددهای درست، عددی کسری حاصل می‌شود).

در این‌جا، برخی از ساده‌ترین جنبه‌های مربوط به «بی‌نهایت» را، در مرزهایی که از ساده‌ترین و مقدماتی‌ترین روش‌های ریاضی خارج نشویم، فهرست‌وار بررسی کردیم. والا، «بحث مربوط به بی‌نهایت»، همچون خود «بی‌نهایت» پایانی ندارد.

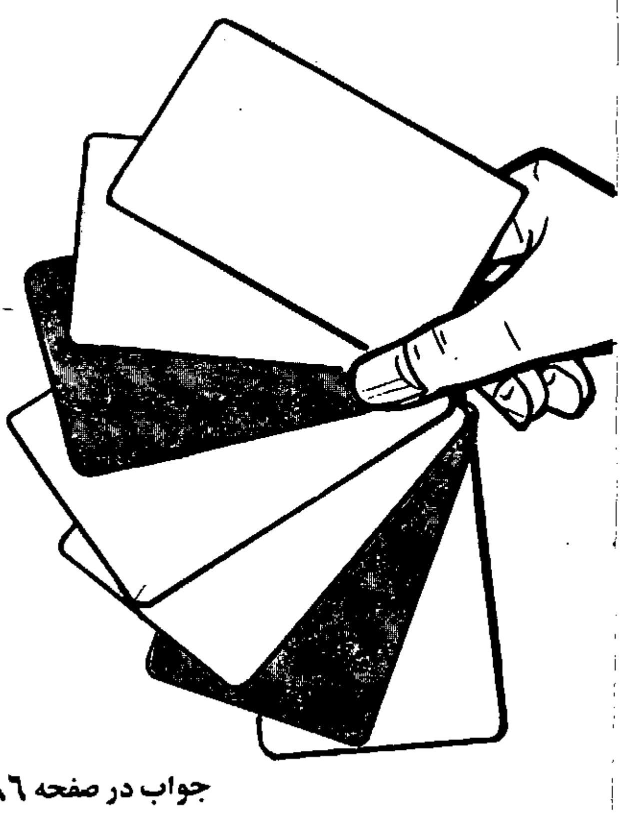
نماد « ∞ » برای «بی‌نهایت»، برای نخستین بار در سال ۱۶۵۵ میلادی در نوشته‌های جون والیس (۱۶۱۶ ـ ۱۷۰۳ میلادی)، ریاضی‌دان انگلیسی و به ویژه در کتاب «حساب بی‌نهایت» او به کار رفت و از آن پس به تدریج همگانی شد.





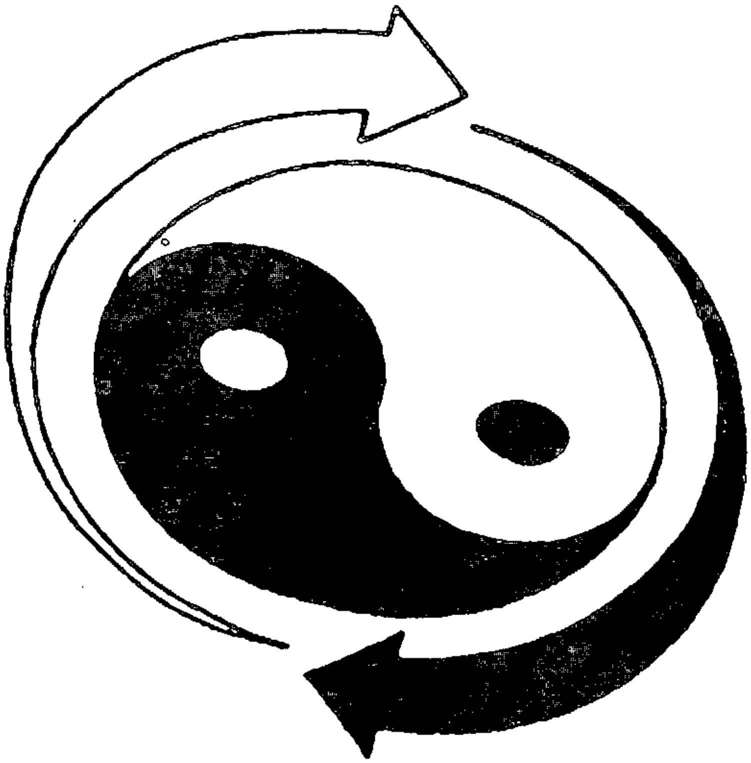
تفریح اندیشهٔ ۴

علی تعداد زیادی کارت رنگی در اختیار دارد. هر رنگ با شماره‌ای مشخص می‌شود، بدین ترتیب که: رنگ زرد، ۲؛ رنگ آبی، ۵؛ رنگ سرخ، ۳؛ رنگ بنفش، ۷. سعید مقداری از کارتها را جدا کرد. حاصلضرب شمارهٔ کارتها ۷۰۵۶۰ شد. از هر رنگ به چه تعداد انتخاب کرده است؟



جواب در صفحه ۸٦

ماکزیمم و مینیمم



● امیرمنصور خان محمّد و مجید اعتماد سعید
(دبیرستان سروش)

بحث ماکزیمم و مینیمم یکی از جالب‌ترین و کارامدترین مباحث ریاضی است که در تمامی شاخه‌های ریاضی چون هندسه، جبر و ... کارآمد است و به کمک آن می‌توان مسایل متعددی در زمینه‌های مختلف ریاضی حل کرده و به نتایج جالبی دست یافت.

◄ تعریف:

گویند تابع به معادله $y = f(x)$ به ازای $x = a$ ماکزیمم نسبی است به شرطی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(a+\alpha) < f(a)\ ,\ \ f(a-\alpha) < f(a)$$

در واقع در منحنی نمایش تغییرات $y = f(x)$ عرض نقطه‌ای که به ازای $x = a$ به‌دست آمده است از نقاط مجاور بیشتر است. همچنین تابع به معادله $y = f(x)$ به ازای $x = b$ مینیمم نسبی است وقتی که برای مقادیر بسیار کوچک α داشته باشیم:

$$f(b+\alpha) > f(b)\ ,\ \ f(b-\alpha) > f(b)$$

وقتی که می‌گوییم تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $a \le x \le b$ به ازای $x = m$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق است به این معناست که به ازای $x = m$ حداکثر یا حداقل مقدار برای y به دست می‌آید.

به زبان ساده‌تر اگر عبارت جبری $P(x, y, \cdots, z)$ و مقدار معین m وجود داشته باشد که نابرابری $P \le m$ به ازای هر مقدار دلخواه متغیرها برقرار باشد در این صورت مقدار m را ماکزیمم مطلق عبارت P گویند. و اگر نابرابری $P \ge m$ برقرار شود m را مینیمم مطلق عبارتِ P نامند.

◄ قضایای ماکزیمم حاصلضرب:

برای حل ماکزیمم و مینیمم معمولاً به قضایایی رجوع می‌شود که در این باره ارائه شده‌اند. اکنون به ذکر و اثبات آنها می‌پردازیم:

۱ــ اگر مجموع چند متغیر مقدار ثابت باشد حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات اول: فرض کنیم n متغیر مثبت x ، y ، z ،...، و t مجموع ثابتی داشته باشند:

$$x+y+z+\cdots+t = na$$

همان متغیرها را به‌صورت حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم:

$$P = xyz\cdots t$$

چون مجموع را na گرفته‌ایم وقتی که این متغیرها برابر نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و یکی دیگر از a کوچکتر است. اگر $x > a$ و $y < a$ باشد و فرض کنیم $x = a+\alpha$ حاصلضرب:

$$P_1 = a(y+\alpha)z\ldots t$$

همان مجموع na را داراست یعنی باز هم مجموع آنها مقدار ثابتی است. (چون از x به اندازهٔ α کم کرده‌ایم و به y به همان اندازه افزوده‌ایم.)

حال عبارت $P_1 - P$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P_1 - P = Z \dots t[a(y+\alpha) - (a+\alpha)y]$$

$$P_1 - P = Z \dots t[(a-y)\alpha]$$

مقدار داخل کروشه مثبت است زیرا فرض کردیم $y < a$ باشد بنابراین داریم:

$$P_1 - P > 0 \Rightarrow P_1 > P$$

معلوم شد که اگر یکی از متغیرها برابر a شود حاصل‌ضرب بزرگ می‌شود. با این استدلال درمی‌یابیم که اگر همهٔ متغیرها برابر با a شوند حاصل‌ضرب حداکثر خواهد بود.

۲ــ اگر x ، y ، z ، ... و t متغیرهای مثبت به مجموع ثابت باشند حاصلضرب

$$x^m . y^n . z^p . \dots . t^q$$

وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

(این قضیه در حقیقت تعمیم‌یافته ای از قضیهٔ قبل است.)

اثبات دوم: مقادیری از x ، y ، z ، ... و t که عبارت $x^m . y^n . z^p . \dots . t^q$ را ماکزیمم کنند عبارت $\frac{x^m}{m^m} . \frac{y^n}{n^n} . \frac{z^p}{p^p} \dots \frac{t^q}{q^q}$ را هم ماکزیمم خواهند کرد، ولی عبارت اخیر را می توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(\frac{x}{m} . \frac{x}{m} \dots \frac{x}{m})(\frac{y}{n} . \frac{y}{n} \dots \frac{y}{n})(\frac{z}{p} . \frac{z}{p} \dots \frac{z}{p}) \dots (\frac{t}{q} . \frac{t}{q} \dots \frac{t}{q})$$

این عبارت شامل $m+n+p+\dots+q$ جملهٔ مثبت است که شامل m جملهٔ شامل $\frac{x}{m}$، n جملهٔ شامل $\frac{y}{n}$، p جملهٔ شامل $\frac{z}{p}$، ... و q جملهٔ شامل $\frac{t}{q}$ است و بنابراین مجموع آنها برابر است با:

$$m \times \frac{x}{m} + n \times \frac{y}{n} + p \times \frac{z}{p} + \dots + q \times \frac{t}{q} = x + y + z + \dots + t$$

که این مقدار ثابت است. پس بر طبق قضیهٔ ۱ وقتی ماکزیمم است که:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{q}$$

مثال:

۱ــ اگر α ، β ، θ سه زاویهٔ حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ باشند، ماکزیمم عبارت $y = tg\alpha tg\beta tg\theta$ را به‌دست آورید.

حل:

$$\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\theta + tg\theta tg\alpha = 1$$

این حاصل جمع سه عامل برابر مقدار ثابت ۱ است پس حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که

$$tg\alpha tg\beta = tg\beta tg\theta = tg\theta tg\alpha$$

که درنتیجه حاصل می‌شود:

$$\alpha = \beta = \theta = \frac{\pi}{6}$$

به ازای این مقادیر عبارت $tg^2\alpha tg^2\beta tg^2\theta$ ماکزیمم خواهد بود و چون $tg\alpha$ و $tg\beta$ و $tg\theta$ مثبت هستند هنگامی که این عبارت ماکزیمم باشد عبارت زیر هم ماکزیمم است.

$$y = tg\alpha, tg\beta, tg\theta$$

$$Max(y) = (tg^3 \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

۲ــ پاره‌خط $AB = a$ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب قطعهٔ اوّل در مربع قطعهٔ دوّم در مکعب قطعه سوّم ماکزیمم باشد.

حل: اگر سه قطعه را x ، y ، z فرض کنیم مطلوبست ماکزیمم xy^2x^3 و چون $x+y+z=a$ مقداری است ثابت، بنابراین، ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

یعنی باید پاره خط را به نسبتهای ۱ و ۲ و ۳ تقسیم کنیم در این صورت مقادیر قطعه ها از دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x + y + z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{6} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{a}{2} \end{cases}$$

و مقدار ماکزیمم مساوی $\frac{a^6}{432}$ خواهد بود.

▶ قضایای مینیمم مجموع:

۳ــ اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد مجموع آنها وقتی مینیمم است که این متغیرها با هم برابر باشند.

اثبات سوم: فرض می‌کنیم که داشته باشیم:

$x.y.z.\dots.t = a^n$

اگر همهٔ متغیرها برابر a نباشند لااقل یکی از آنها از a بزرگتر و دیگری از a کوچکتر است. با شرط $(q>1)$ و این‌که $x = aq$ و $x>a$ و $y<a$، می‌توان داشت:

در این صورت اگر مجموع متغیرها را S بگیریم داریم:

$S = aq + y + z + \dots + t$

اولین جمله را مساوی a می‌گیریم و برای این‌که حاصل‌ضرب متغیرها تغییر نکند بجای جملهٔ دوم $\frac{y}{q}$ می‌گیریم:

$$S' = a + \frac{y}{q} + z + \dots + t$$

در این صورت داریم:

$$S - S' = a(q-1) + y(1 - \frac{1}{q})$$

که با توجه به این‌که $q>1$ فرض شد $S - S' > 0$ و درنتیجه $S > S'$ می‌شود.

به این ترتیب اگر یکی از متغیرها را برابر a بگیریم مجموع کوچک می‌شود و اگر این استدلال را ادامه دهیم درحالتی که همهٔ متغیرها برابر a باشند مینیمم مجموع به‌دست می‌آید.

۴ــ اگر برای متغیرهای مثبت x، y، z، ...، و t حاصلضرب $x^\alpha.y^\beta.z^\gamma.\dots.t^\lambda$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

اثبات چهارم[1]: وقتی که حاصلضرب $x^\alpha.y^\beta.z^\gamma.\dots.t^\lambda$ ثابت باشد حاصلضرب

$$(\frac{x}{\alpha})^\alpha.(\frac{y}{\beta})^\beta.(\frac{z}{\gamma})^\gamma.\dots.(\frac{t}{\lambda})^\lambda$$

نیز ثابت خواهد بود. در عبارت اخیر $(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda)$ عامل وجود دارد.

α عامل مساوی $\frac{x}{\alpha}$، β عامل مساوی $\frac{y}{\beta}$، ...، λ عامل مساوی $\frac{t}{\lambda}$. پس مجموع آنها برابر است با:

$$\alpha.\frac{x}{\alpha} + \beta.\frac{y}{\beta} + \gamma.\frac{z}{\gamma} + \dots + \lambda.\frac{t}{\lambda} =$$

$$x + y + z + \dots + t$$

که در حالت تساوی آنها مینیمم می‌شود یعنی:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \dots = \frac{t}{\lambda}$$

مثال:

۳ــ از بین چهارضلعی‌های محاطی با سطح ثابت، محیط کدامیک مینیمم است؟

حل:

اگر اضلاع چهارضلعی را a، b، c، d و محیط آن‌را 2P فرض کنیم باید مینیمم عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$2P = a + b + c + d =$$
$$(p-a) + (p-b) + (p-c) + (p-d)$$

ولی می‌دانیم:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

پس چهار متغیر مثبت دارای حاصل‌ضرب ثابت هستند پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$p-a = p-b = p-c = p-d \Rightarrow a = b = c = d$$

پس چهارضلعی جواب مربع است.

---

[1]ــ این قضایا به ویژه قضایای ۱ و ۳ از راههای مختلفی اثبات می‌شوند. از جمله با استفاده از اتحادها، نابرابریها، جبر تحلیلی، ... . در اینجا یکی از اثباتها را که به کمک نابرابری واسطه های حسابی و هندسی ارائه شده است می‌آوریم:

اثبات: بر طبق نابرابری فوق برای هر چند متغیر مثبت داریم:

$x_1.x_2.x_3.\dots.x_n = a \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}$$

قضیهٔ ۱: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = a \Leftrightarrow x_1.x_2.\dots.x_n \leq (\frac{a}{n})^n$ و $x_i > 0$ و چون برابری (یعنی حداکثر مقدار) وقتی به‌وقوع می‌پیوندد که متغیرها برابر باشند قضیه ثابت است.

قضیهٔ ۲: $x_1.x_2.\dots.x_n = b \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{b}$ و $x_i > 0$ تذکر این‌که این نابرابری به کمک روش استقرای ریاضی قابل استفاده و اثبات است.

۴ــ بدون استفاده از مشتق معلوم کنید که تابع $y=\frac{x^m+a}{x^n}$ به فرض $m>n$ به ازای چه مقدار از x ماکزیمم یا مینیمم است و مقدار این ماکزیمم یا مینیمم را به‌دست آورید.

حل: برای حل، تابع را به‌صورت $y=x^{m-n}+\frac{a}{x^n}$ می‌نویسیم و چون حاصلضرب

$$(x^{m-n})^n\times(\frac{a}{x^n})^{m-n}=a^{m-n}$$

مقدار ثابت است پس مجموع دو عامل x^{m-n} و $\frac{a}{x^n}$ یعنی y وقتی مینیمم است که:

$$\frac{x^{m-n}}{n}=\frac{\frac{a}{x^n}}{m-n}\Rightarrow x=\sqrt[m]{\frac{an}{m-n}}$$

و با توجه به این مقدار از x، مینیمم y مشخص می‌شود:

$$y=\frac{m}{n}\sqrt[m]{\frac{(an)^{m-n}}{(m-n)^{m-n}}}$$

تذکر: این مسایل حالت کلی مسایل مختلفی است که با این روش حل می‌شوند. از این‌رو از آن مانند بسیاری از حالات کلی حل مسایل به عنوان فرمول ذکر می شود.

◄ ماکزیمم و مینیمم در هندسه:

برخلاف آنچه که در ابتدا به نظر می رسد، ماکزیمم و مینیمم تنها در تابع و بدست آوردن مقدار عددی کاربرد ندارند بلکه همانطور که در ابتدا ذکر شد در موارد زیادی وارد می‌شوند. از آنجا که از این موارد هندسه بیش از همه نقش دارد و مسایل مطرح در این زمینه بسیار زیاد است، این بخش نیز به مقاله اضافه شد.

طبق سنت کهن هندسه ابتدا مسایل مهمی از آن، که برخورد زیادی با آنها خواهیم داشت را به‌عنوان قضیه مطرح می کنیم:

۱ــ مساحت مثلث قایم‌الزاویه با وتر مفروض، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

اثبات:

a را طول وتر، x را طول یک ضلع و y را طول ضلع دیگر فرض می کنیم. معلوم است که:

$$a^2=x^2+y^2$$

پس مجموع دو متغیر x^2 و y^2 مقدار ثابت a^2 است.

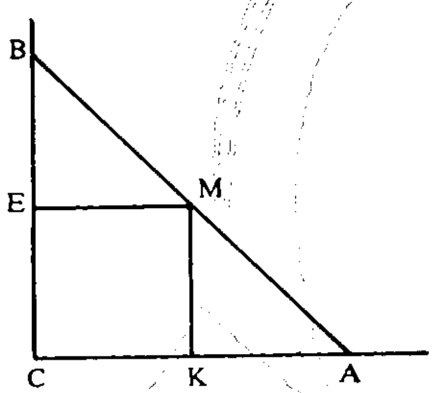
$$S=\frac{1}{2}xy\Rightarrow 4s^2=x^2y^2$$

مشخص است که ماکزیمم S با ماکزیمم $4S^2$ همراه است و $4S^2$ وقتی ماکزیمم است که:

$$x^2=y^2\ \Rightarrow x=y$$

پس مثلث مورد سؤال مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که متساوی‌الساقین است.

۲ــ از رأس M در مربع CEMK خط راستی بگذرانید که خط های راست CK و CE را در نقطه‌های A و B قطع کند و مساحت مثلث ABC حداقل مقدار ممکن باشد.



اثبات:

ضلع مربع مفروض را واحد می‌گیریم. طول پاره‌خط AK را x می‌گیریم. چون مثلثهای ΔAMK و ΔBEM متشابهند، پس داریم $BE=\frac{1}{x}$. واضح است که:

$$S(A\hat{B}C)=\frac{1}{2}BC.AC$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)(1+\frac{1}{x})=1+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$$

با توجه به رابطه، مینیمم $S(A\hat{B}C)$ همراه با مینیمم $x+\frac{1}{x}$ است. چون حاصلضرب این دو مساوی مقدار ثابت ۱ است پس حاصل جمع وقتی مینیمم است که $x=\frac{1}{x}$ باشد که درنتیجه داریم: $x=1$

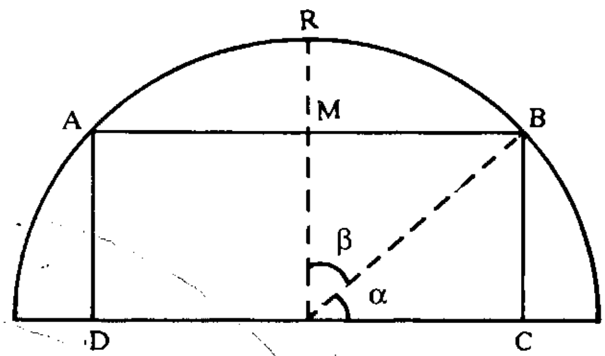
پس باید مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد.

۳ــ در نیم‌دایرهٔ مفروض، مستطیل ABCD را با حداکثر مساحت محاط کنید.

اثبات:

واضح است که مستطیل مذکور نسبت به قطر عمود متقارن است. پس در هر ربع دایره مستطیلهای دیگری پدید

می‌آید که ما دنبال ماکزیمم آنها نیز هستیم. اگر از B به O وصل کنیم زوایای α و β حاصل می‌شود.



اگر γ شعاع دایره باشد واضح است که :

$$\left.\begin{array}{l} BC = \gamma \sin\alpha \\ BM = \gamma \sin\beta \\ \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC^2 + OC^2 = \gamma^2$$

پس مجموع این دو متغیر مقدار ثابت است.

$S(OCBM) = OC.BC$

مشخص است که ماکزیمم $OC.BC$ با ماکزیمم $OC^2.OB^2$ همراه است. بر طبق قضیه چون حاصل جمع آن دو ثابت است حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که برابر باشند :

$$BC = OC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 2$$

◄ ماکزیمم و مینیمم در فیزیک:

ماکزیمم و مینیمم در فیزیک و به‌خصوص در مکانیک نقش بسیاری بازی می‌کند. این قسمت حتی می‌تواند به ما نشان دهد که این بحث درزندگی روزمره نیز کاراست. در اینجا به حل مسأله‌ای جالب از این دست می‌پردازیم :

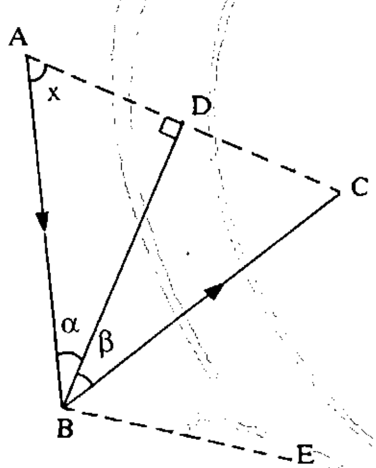
◄ مقابله با باد مخالف:

برای اینکه یک قایق بادبانی، با حداکثر سرعت به سمت شمال حرکت کند، چگونه باید با باد شمال مقابله کند؟

در اینجا به حل این مسأله می‌پردازیم ونشان می‌دهیم که مقابله با باد مخالف یعنی چه و یک قایق بادبانی چگونه در جهت مخالف باد حرکت می‌کند؟

(برای روشن بودن موقعیت فرض می‌کنیم که باد به‌طور مداوم از شمال بوزد :) در شکل جهت حرکت باد را با بردار $\vec{AB}$ و جهت حرکت قایق را با بردار $\vec{BC}$ نشان داده‌ایم. BC مسیر قایق را مشخص می‌کند. قایقران می‌تواند با استفاده از سکان و دیرک کف قایق آن را در این مسیر نگه دارد. برای این که نیروی باد از طریق بادبان به قایق منتقل شود و آن را در جهت BC به حرکت درآورد بادبان را در راستای BD در نظر گرفته‌ایم. جهت بادبان هم بوسیلهٔ قایقران کنترل می‌شود. مسأله این است : جهت‌های BD و BC برای بادبان و مسیر قایق چگونه باشند تا قایق با حداکثر سرعت ممکن به سمت شمال حرکت کند؟

(هر خواننده‌ای که با قایق‌رانی آشنایی داشته باشد متوجه می‌شود که ما در اینجا مسأله را ساده کرده‌ایم و بسیاری از جنبه‌های آن‌را کنار گذاشته‌ایم. درواقع با این ساده کردن خواسته‌ایم به نخستین مرحله از حل مسأله نزدیک شویم.)

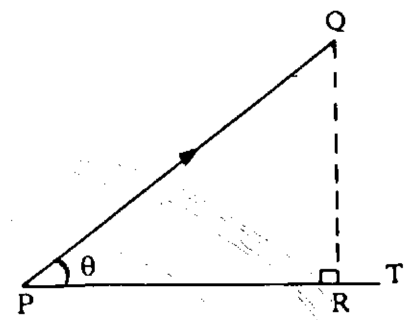


نکتهٔ مهم در اینجا داشتن تصور دوستی از مؤلفه‌های نیرو وسرعت است. اگر نیروی F را با بردار $\vec{PQ}$ نشان دهیم آن‌وقت مؤلفهٔ این نیرو در راستای PT با تصویر PQ بر PT نشان داده می‌شود ($\vec{PR}$). اندازهٔ این مؤلفه به زبان سادهٔ مثلثاتی برابر است با $F.\cos\theta$ که در آن θ برابر است با زاویهٔ بین نیرو و مؤلفه. مؤلفهٔ سرعت را هم می‌توان به همان طریق تقسیم کرد. در شکل اول زاویه های $A\hat{B}D$ و $D\hat{B}C$ را به ترتیب α و β می‌نامیم. اگر نیروی باد را با f نشان دهیم ضربهٔ باد بر بادبان عبارت است از مؤلفهٔ F در راستای AD، عمود بر بادبان. این مؤلفه برابر است با :

$$f.\cos\lambda = f.\cos(90^\circ - \alpha) = f.\sin\alpha$$

نیروی $F.\sin\alpha$ جز این که قایق را در جهت BC به حرکت درآورد اثر دیگری ندارد. بنابراین باید مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ را در راستای BC پیدا کنیم. زاویه بین AD (امتداد $F.\sin\alpha$) و BC(امتداد مسیر قایق) برابر است با $90^\circ - \beta$. بنابراین برای پیدا کردن مؤلفهٔ $F.\sin\alpha$ در راستای BC باید $F.\sin\alpha$ را در $\cos(90^\circ - \beta)$ ضرب کرد:

$$f.\sin\alpha.\cos(90^\circ - \beta) = f\sin\alpha\sin\beta$$



و این همان نیروی مؤثر باد بر قایق است که از طریق بادبان منتقل می‌شود و سرعت قایق در طول مسیر خود متناسب با همین نیروی مؤثر است. اگر شدت حرکت باد را ثابت بگیریم F مقداری ثابت می‌شود که درنتیجه سرعت حرکت قایق در مسیر BC متناسبْ با $\sin\alpha\sin\beta$ خواهد بود. این استدلال نشان می‌دهد که قایق بادبانی می‌تواند برخلاف جهت باد حرکت کند اگرچه این حرکت بطورمستقیم در جهت مخالف حرکت باد نیست. برای حل مسئله نباید به دنبال حداکثر مقدار $\sin\alpha\sin\beta$ برویم زیرا هدف ما افزایش مؤلفهٔ سرعت قایق در راستای شمال است. حرکت روی مسیر BC انجام می‌گیرد و زاویهٔ $A\hat{B}C$ برابر $\alpha+\beta$ است. بنابراین مؤلفهٔ سرعت در راستای شمال با $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$ متناسب است. اگر فرض کنیم $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$ آنگاه مسئله این‌طور می شود که: α و β و γ را طوری انتخاب کنیم که $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ماکزیمم باشد. و این درحالی است که می‌دانیم $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$. پس با توجه به آنچه گفته شده ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ باشد. (اثبات بر عهدهٔ خواننده)

به این ترتیب برای اینکه حرکت قایق به طرف شمال با حداکثر سرعت ممکن انجام گیرد باید مسیری برای آن انتخاب کرد که با سمت شمال زاویهٔ 60° بسازد (چه در طرف شمال باختری و چه در طرف شمال خاوری) و بادبان را بین جهت باد و جهت حرکت قایق تنظیم کرد.

ماکزیمم و مینیمم در مثلثات

برای مشخص شدن نقش ماکزیمم و مینیمم در مثلثات در مورد دو تا از اتحادهای مثلثاتی (که به کمک ماکزیمم و مینیمم و این اتحادها بسیاری از مسایل قابل حل است) بررسی می کنیم.

اتحادهای مثلثاتی زیر واضح است:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad tg\alpha.\cot g\alpha = 1$$

در اولی مجموع دو متغیر برابر مقدار ثابت یک است و در دومی حاصل ضرب دو متغیر، در هر دو اتحاد برای بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم می‌توان به سرعت به قضایا رجوع کرد. به طور مثال برای اتحاد اوّلی می‌توان به قضایای ۱ و ۲ و برای دومی به قضایای ۳ و ۴ که در آنها به ترتیب مجموع ثابت فرض شده و حاصل ضرب ثابت فرض شده رجوع کرد. البته این بدان معنا نیست که ماکزیمم و مینیمم در مسایل نامربوط به این دو اتحاد کارآیی نداشته باشد. بلکه در آنها نیز بسته به نوع مسأله می‌توان تدابیری برگزید. در اینجا مسأله‌ای را در حالت کلی حل می‌کنیم که خود راه حل تمام مسایل مشابه است:

مسئله: مطلوبست ماکزیمم و مینیمم عبارت:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

حل: می‌خواهیم ثابت کنیم ماکزیمم عبارت فوق برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ و مینیمم آن برابر $-\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد. برای حل آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

برای هر عدد حقیقی a و b از آنجا که می‌دانیم

$$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1 \ , \ -1 \le \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

پس فرض می کنیم:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \ , \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta$$

بنابراین رابطهٔ ذکر شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$$

برای این که این عبارت به حداکثر مقدار خود برسد لازم

است-که $\sin(\alpha+\beta)=1$ باشد که در این صورت داریم :

$$Max(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}$$

و به‌دلیل مشابه داریم :

$$Min(a\sin\alpha+b\cos\alpha)=-\sqrt{a^2+b^2}$$

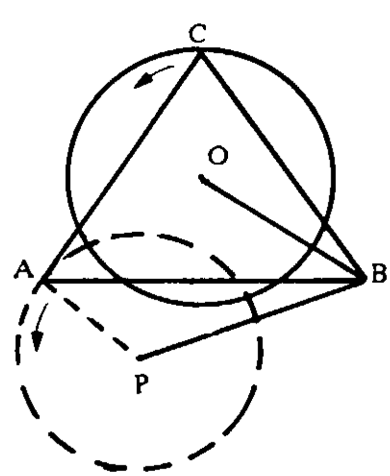
ماکزیمم و مینیمم در المپیادهای ریاضی:

ما در این قسمت به بحث و بررسی مسایل ماکزیمم و مینیممی می‌پردازیم که در المپیادهای ریاضی معتبر در دنیا مطرح گردیده است. در ابتدا به المپیادهای ریاضی شوروی از سال ۱۹۶۱ تا سال ۱۹۷۹ رفته و به بحث و بررسی مسایل مورد نظر می‌پردازیم :

المپیادهای ریاضی شوروی:

سال ۱۹۶۱ (مسکو) ؛ سؤال b6 : فاصلهٔ نقطه ثابت P واقع در صفحهٔ مثلث ABC، تا دو رأس A و B از این مثلث برابر است با $AP=2$ و $BP=3$. حداکثر مقدار فاصلهٔ CP چقدر است؟

حل: نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می کنیم. ضمن حرکت A روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP=3$ از P قرار دارد، حرکت می کند (مثلث OPB متساوی الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P به فاصلهٔ $OC+OP$ یعنی ۵، قرار دارد، در نابرابری $PC\le AP+PB$ هم (برای هر مثلث متساوی الاضلاع ABC و هر نقطه P)، وقتی به برابری می‌رسیم که نقطهٔ P روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.



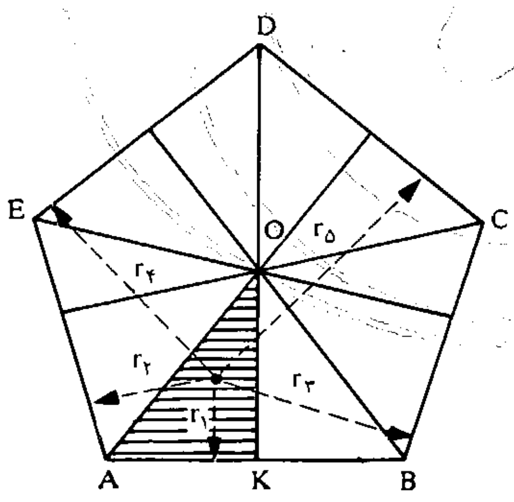
سال ۱۹۶۲ (مسکو) ؛ سؤال ۸ : پنج ضلعی منتظمی داده شده است. M ، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را از ضلع‌های پنج ضلعی (و یا امتداد آنها) به ترتیب مقدارهای صعودی آنها شماره‌گذاری می کنیم :

$$r_1\le r_2\le r_3\le r_4\le r_5$$

* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، به ازای آنها، r_3 مینیمم مقدار ممکن را قبول کند.
* همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، برای آنها، r_3 ماکزیمم مقدار ممکن را قبول کند.

حل: پنج ضلعی منتظم ABCDE را به وسیلهٔ محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می کنیم. کافی است نقطهٔ M را تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و به طور مثال مثلث AOK مورد بررسی قرار دهیم. برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم کافی است روشن کنیم که، نقطهٔ M در کدام طرف نیمساز این زاویه قرار دارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M ، تا ضلع‌های پنج ضلعی : AB، AE، BC، DE و CD به ترتیب صعودی است :

$$r_1\le r_2\le r_3\le r_4\le r_5$$



اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که نقطهٔ M روی رأس A قرار گیرد، و وقتی به حداقل خود می‌رسد که نقطهٔ M روی نقطه K قرار گیرد.

سال ۱۹۶۲ (مسکو) ؛ سؤال ۱۱ : حداکثر مساحت مثلثی

را پیدا کنید که برای ضلعهای آن a، b و c، داشته باشیم:
$0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۳ (مسکو): سؤال ۶: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل مقدار d را پیدا کنید که، به ازای آن، پاره خط راست به طول d، در حالی که دو انتهای آن، روی ضلعهای مثلث است بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

سال ۱۹۶۵ (مسکو): سؤال ۱ (a: هر یک از عددهای x_1، x_2، ....، x_n، می‌تواند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱ و ۰ یا ۱- را قبول کند. حداقل مجموع حاصلضربهای دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

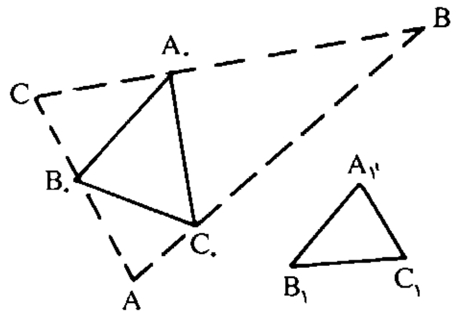
b) حداقل مقدار مجموع همهٔ حاصلضربهای دو به دوی x عدد x_1، x_2، ....، x_n چقدر است، به شرطی که قدرمطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

(حل بر عهدهٔ دانش‌آموزان)

◀ المپیادهای بین‌المللی ریاضی:

سال ۱۹۶۷ (نهمین دوره): سؤال ۴: فرض می‌کنیم $A_0\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ دو مثلث حاده الزوایا باشند. تمام مثلث‌های ABC را که مشابه $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ (چنانکه رئوس A_1 و B_1 و C_1 به ترتیب با رئوس A و B و C متناظر باشند) و محیط بر مثلث $A_0B_0C_0$ (به طوری که A_0 بر BC و B_0 بر CA و C_0 بر AB واقع باشد) می‌باشند در نظر می‌گیریم. از بین چنین مثلث‌های ممکنی، مثلث با مساحت ماکزیمم را معین و آن را رسم کنید.

حل: از A_0 و B_0 و C_0 خطوطی به ترتیب موازی B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 رسم می‌کنیم: این کار اضلاع BC و AC و AB از $\overset{\Delta}{ABC}$ را که مشابه مثلث $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ است تشکیل می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم هر یک از خطوطی را که به این ترتیب رسم کرده‌ایم به ترتیب حول A_0 و B_0 و C_0 و با یک اندازه دوران بدهیم. در این صورت آنها با همان زوایای قبلی با

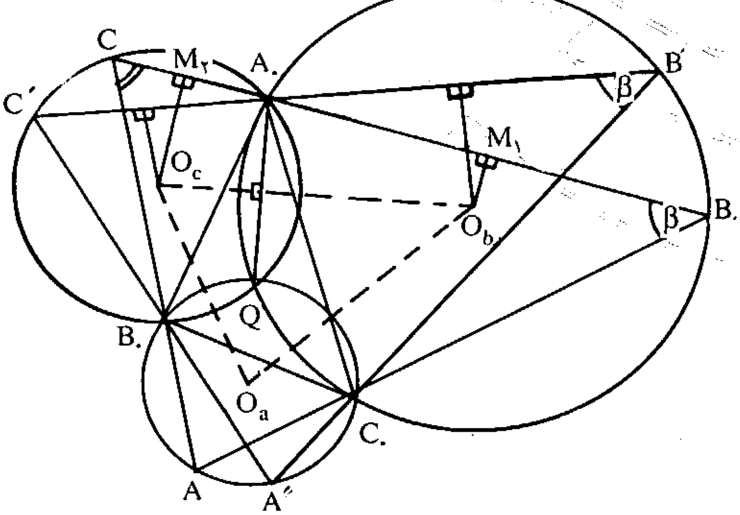


یکدیگر تلاقی می‌کنند و مثلث‌هایی مشابه با $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ می‌سازند و در میان آنها مثلث به مساحت ماکزیمم مثلثی است که اضلاع ماکزیمم داشته باشد. برای یافتن این مثلث بخاطر می‌آوریم که مکان هندسی تمام نقاط مانند B که در آنها $A_0\hat{B}C_0$ دارای مقدار معلوم β است کمانی از دایره‌ای با وتر A_0C_0 می‌باشد.

این مطلب مطرح می‌کند که دوایر محیطی مثلث‌های $A_0\overset{\Delta}{B}C_0$ و $A\overset{\Delta}{B_0}C_0$ و $A_0\overset{\Delta}{B_0}C$ را رسم کنیم. مراکز این دوایر را به ترتیب O_b و O_a و O_c نشان می‌دهیم. اثبات اینکه این دوایر محیطی دارای نقطهٔ مشترک Q می‌باشند آسان است.*

حال نشان می‌دهیم. $\hat{C} = \frac{1}{2}A_0\hat{Q}B_0$ و O_cO_b و O_cO_a زیرا $O_a\hat{O}_cO_b = \frac{1}{2}\widehat{A_0Q} + \frac{1}{2}\widehat{QB_0}$ به ترتیب کمانهای B_0Q و A_0Q را نصف می‌کنند. بنابراین $\hat{C} = O_a\hat{O}_cO_b$ می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{A} = O_b\hat{O}_aO_c$ و $\hat{B} = O_a\hat{O}_bO_c$ بنابراین:

$$O_a\overset{\Delta}{O_b}O_c \sim A\overset{\Delta}{B}C \sim A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$$



* اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه ـ مثلثهای ناپلئون

سرانجام نشان می‌دهیم که بزرگترین مثلث ABC ی گذرنده از نقاط .A و .B و .C مثلثی است که اضلاعش موازی اضلاع $O_a\hat{O}_bO_c$ باشد.

اثبات: از آنجا که عمودهای از O_b و O_c وترهای .BA و .CA را در M_1 و M_2 نصف می‌کنند داریم: $M_1M_2 = \frac{1}{2}BC$ اما M_1M_2 تصویر قایم O_bO_c بر BC است و زمانی ماکزیمم است که $BC \parallel O_bO_c$ باشد. از آنجا که $O_a\hat{O}_bO_c \sim A\hat{B}C$ است، جمیع اضلاع مثلث به مساحت ماکزیمم یا بزرگترین مورد بحث، موازی اضلاع نظیرشان از $O_a\hat{O}_bO_c$ هستند.

به این ترتیب برای رسم مثلث بزرگترین مذکور ابتدا از .A و .B و .C مثلثی متشابه با $A_1\hat{B}_1C_1$ رسم می‌کنیم. بعد O_a و O_b و O_c مراکز دوایر محیطی مثلث‌های $A\hat{B}.C.$ و $A.\hat{B}.C$ و $A.\hat{B}\ C.$ را رسم می‌کنیم و سرانجام از .A و .B و .C به ترتیب خطوطی موازی O_bO_c و O_aO_c و O_aO_b می‌کشیم. این خطوط اضلاع BC و AC و AB از مثلث بزرگترین مطلوب را تشکیل می‌دهند.

سال ۱۹۷۴ (پانزدهمین دوره): سؤال ۳: فرض می‌کنیم a و b اعدادی حقیقی باشند که به ازای آنها معادلهٔ:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

حداقل یک جواب حقیقی داشته باشد. به ازای جمیع ازواج (b و a)، مینیمم مقدار $a^2 + b^2$ را بیابید.

حل: ابتدا معادلهٔ $x + \frac{1}{x} = y$ به ازای y حقیقی را در نظر می‌گیریم. این معادله معادل $x^2 - yx + 1 = 0$ است که معادلهٔ درجه دومی بر حسب x است که دارای ریشه‌های حقیقی است اگر و فقط اگر بین آن $y^2 - 4$ بزرگتر یا مساوی با صفر باشد. یعنی اگر و فقط اگر $|y| \geq 2$ باشد. اکنون برای حل:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

آن را بر x^2 تقسیم می‌کنیم و سپس y را مساوی $x + \frac{1}{x}$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$y^2 + ay + (b-2) = 0$$

ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم عبارتند از:

$$y = x + \frac{1}{x} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}$$

و در این صورت این شرط که قدرمطلق حداقل یکی از آنها بزرگتر از یا مساوی با ۲ باشد این است که:

$$|a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4$$

این شرط معادل:

$$\sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4 - |a|$$

است. پس از مربع کردن دو طرف و تفریق a^2:

$$8|a| \geq 4b + 8$$

را خواهیم داشت. تقسیم این نامساوی بر ۴ و مربع کردن آن:

$$4a^2 \geq b^2 + 4b + 4$$

را به دست می‌دهد که با افزودن $4b^2$ به دو طرف آن:

$$4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$$

و بنابراین:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5})$$

و به دنبال آن:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}(b + \frac{2}{5})^2 + \frac{4}{5}$$

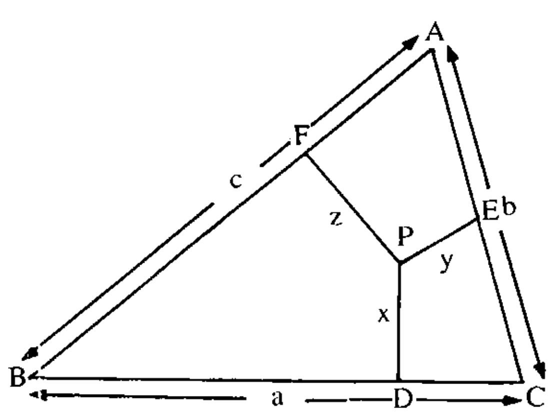
را خواهیم داشت. کمترین مقدار عضو سمت راست این نامساوی وقتی $b = -\frac{2}{5}$ باشد رخ می‌دهد و برابر $\frac{4}{5}$ است. بنابراین کمترین مقدار $a^2 + b^2$ برابر $\frac{4}{5}$ است.

سال ۱۹۸۱ (بیست و دومین دوره): سؤال ۱: P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث مفروض $A\hat{B}C$ است. D و E و F به ترتیب پاهای عمودهای مرسوم از P به خطوط BC و AC و AB هستند. تمام Pهایی را که به ازای آنها:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{AC}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

مینیمم است را بیابید.

حل: طول اضلاع مقابل به A و B و C را به ترتیب a و b و c و از آن پاره‌خطهای PD و PE و PF را با x و y و z نمایش می‌دهیم.



k مساحت مثلث در رابطهٔ :

$$2k = ax + by + cz \qquad (1)$$

صدق می کند. می‌خواهیم کمترین مقدار :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \qquad (2)$$

را تحت قید (۱) به دست آوریم. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم. ساده‌ترین راه احتمالاً استفاده از نامساوی کوشی[1] است :

$$(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \le (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)$$

با $\sqrt{ax}$ و $\sqrt{by}$ و $\sqrt{cz}$ به جای u ها و $\sqrt{\frac{a}{x}}$ و $\sqrt{\frac{b}{y}}$ و $\sqrt{\frac{c}{z}}$ به جای v ها از نابرابری فوق استفاده می کنیم :

$$(a+b+c)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

$$= 2k\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

و یا :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2k}$$

تساوی اگر و فقط اگر سه‌تایی‌های $(\frac{a}{x},\frac{b}{y},\frac{c}{z})$ و (ax, by, cz) متناسب باشند یعنی اگر و فقط اگر : $x=y=z$ باشد برقرار است. بنابراین کمترین مقدار (۲) وقتی رخ می‌دهد که P مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

سال ۱۹۸۵ (بیست و ششمین دوره) : مسألهٔ تمرینی برای آمادگی : به ازای هر نقطهٔ P واقع در داخل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض می‌کنیم. D و E و F به ترتیب نقاط تقاطع خطوط AP و BP و CP به اضلاع مقابل A و B و C باشند. P را به طریقی تعیین کنید که مساحت مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ ماکزیمم مقدار ممکن باشد.

حل: واضح است که :

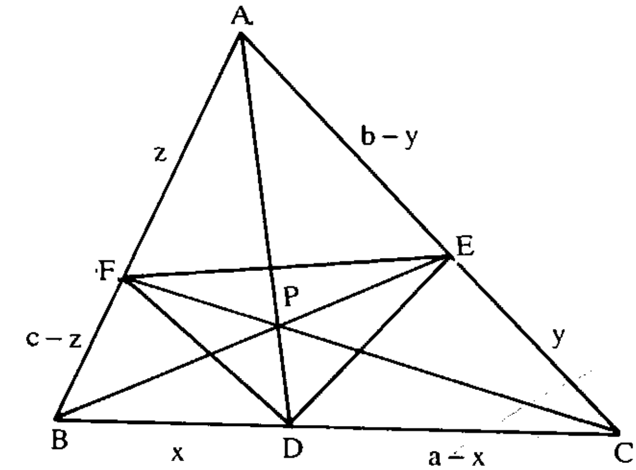
$$S(\overset{\Delta}{DEF}) = S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{AFE}) - S(\overset{\Delta}{BDF}) - S(\overset{\Delta}{CED})$$

همچنین اثبات می‌شود :

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}ac\sin B$$

است پس داریم :

$$\frac{1}{2}\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{ac}$$



در نتیجه :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = \frac{1}{2}x(c-z)\sin B = \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})x(c-z)}{ac}$$

عبارات مشابهی برای مثلثهای دیگر به دست می‌آید. با قرار دادن این روابط در رابطهٔ اصلی داریم :

$$S(\overset{\Delta}{BDF}) = S(\overset{\Delta}{ABC})\left[1-\frac{x(c-z)}{ac}-\frac{y(a-x)}{ab}-\frac{z(b-y)}{bc}\right]$$

$$= S(\overset{\Delta}{ABC})\,[1-u(1-w)-v(1-u)-w(1-v)]$$

که در آن $u=\frac{x}{a}$ و $v=\frac{y}{b}$ و $w=\frac{z}{c}$ است. می‌خواهیم عامل سمت راست را که می‌توان به صورت زیر نوشت ماکزیمم کنیم :

$$F = (1-u)(1-v)(1-w) + uvw$$

بنا به قضیه سوا[2] u و v و w در رابطهٔ :

$$uvw = (1-u)(1-v)(1-w)$$

صدق می‌کنند. اگر $G=uwv$ باشد بنا به رابطهٔ قبل $F=2G$ و F وقتی به ماکزیمم خود می‌رسد که G برسد. و G وقتی ماکزیمم می‌شود که G^2 باشد یعنی :

$$G^2 = u(1-u)v(1-v)w(1-w)$$

ماکزیمم شود. ملاحظهٔ ماکزیمم G^2 از این حقیقت که $s(1-s) \le \frac{1}{4}$ است، یا از نامساوی تصاعد حسابی و هندسی که قبلاً گفته ($G^{\frac{1}{3}} \le \frac{1}{2}$) حاصل می‌شود و وقتی تساوی به وجود می‌آید که :

$$u = v = w = \frac{1}{2}$$

---

۱ ـ اثبات در کتاب عبارتهای جبری ـ بخش نابرابریهای معروف

۲ـ اثبات در کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه

بنابراین :

$$\text{Max } S\left[\overset{\Delta}{DEF}\right] = \frac{1}{2} S\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$$

و این نتیجه وقتی به وجود می‌آید که P مرکز ثقل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد.

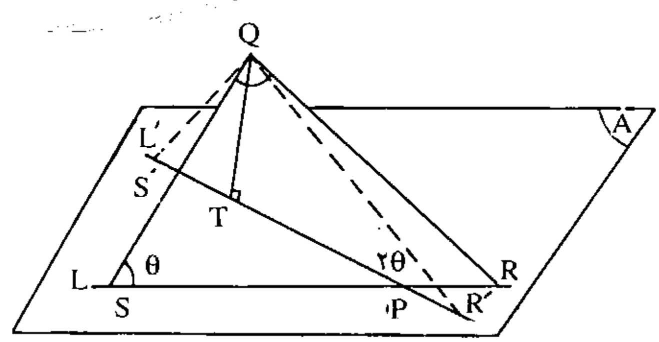
سال ۱۹۷۹ (بیست و یکمین دوره) : سؤال ۴: صفحهٔ A، نقطه P در این صفحه و نقطهٔ Q غیر واقع در A مفروضند. جمیع نقاط R در A را چنانکه نسبت $\frac{QP+PR}{QR}$ ماکزیمم باشد، بیابید.

حل: در مورد هر نقطهٔ R (که باید تعیین شود) خط گذرنده از R و P را با L نمایش و $Q\hat{P}R$ را با ۲θ نمایش می دهیم. اکنون همانطور که در شکل نشان داده شده نقطهٔ S را روی L چنان مشخص می کنیم که $QP = SP$ باشد، در این صورت : $SR = QP + PR$ و بنا به قانون سینوسها در مثلث $\overset{\Delta}{SQR}$ داریم :

$$\alpha = \frac{SR}{aR} = \frac{\sin S\hat{Q}R}{\sin\theta} = \frac{QP+PR}{QR}$$

α به ازای جمیع نقاط R واقع بر Lچون $S\hat{Q}R = 90°$ باشد ماکزیمم می‌شود. اکنون باقی می‌ماند که ماکزیمم $\frac{1}{\sin\theta}$ را مشخص کنیم و به این منظور وقتی نائل می‌شود که ۲θ مینیمم باشد و این هنگامی که L از P و T (پای عمود از Q بر صفحهٔ A) بگذرد رخ می‌دهد.

اگر T و P نقاط متمایزی باشند در این صورت R به طور منحصر به فرد معین می‌شود و اگر نباشد R می‌تواند هر نقطهٔ واقع بر دایرهٔ به شعاع OP و به مرکز P باشد.



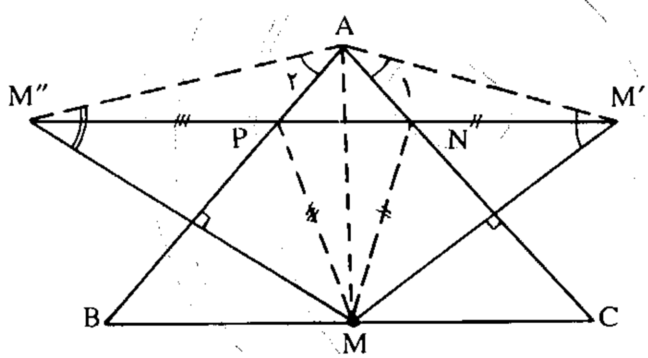
◄ المپیادهای کشوری:

سال ۱۳۶۵ (جلسهٔ بعدازظهر) : سؤال ۱ : مثلث ABC مفروض است. مثلثی در آن محاط کنید که محیطش مینیمم باشد.

حل: اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم از بین مثلث‌هایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود :

(توجه : $\hat{A} = B\hat{A}C$) .

$$\hat{M} + \hat{A} = \pi \rightarrow (\hat{M}' + \hat{M}'') + \hat{A} = \pi$$
$$\Rightarrow (\frac{\pi}{2} - \hat{A}_1) + (\frac{\pi}{2} - \hat{A}_2) + \hat{A} = \pi$$
$$\rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$$
$$\rightarrow M''\hat{A}M' = 2\hat{A}$$



قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به اضلاع AC و AB به ترتیب M′ و M″ می‌نامیم. خط M′M″ دو ضلع AC و AB را به ترتیب در نقاط N و P قطع می‌کند. مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ با محیط M′M″ جواب این قسمت از مسئله است اما مثلث $\overset{\Delta}{AM'M''}$ متساوی‌الساقین به زاویه رأس $M'\hat{A}M'' = 2\hat{A}$ است. حال مسئله به تعیین نقطه M به طوری که قاعده مثلث حاصل (M′M″) مینیمم شود تبدیل می‌شود.

چون مثلثهای حاصل ($\overset{\Delta}{AM'M''}$) متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $2\hat{A}$ می‌باشند پس قاعده M′M″ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد. از طرفی $AM = AM' = AM''$ پس باید AM مینیمم باشد یعنی Mپای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع AC و BC مثلث مورد نظر مثلث ارتفاعیه محاط در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ خواهد بود.

تمرین برای شما

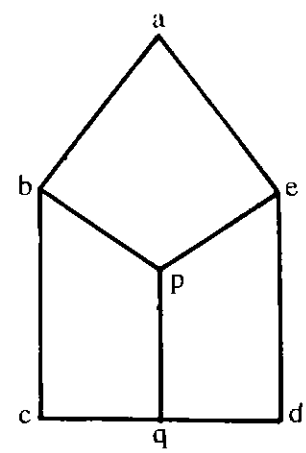
۱ـ اگر a، b، c، ... ، l و x، y، z، ... ، t اعدادی مثبت

و $ax + by + cz + \ldots + lt = k$ ثابت باشد. ثابت کنید حاصل ضرب $p = xyz\ldots t$ وقتی ماکزیمم است که:

$$ax = by = cz = \ldots = lt$$

۲ ــ ثابت کنید یک چهارضلعی با ضلعهای مفروض وقتی دارای ماکزیمم مساحت است که قابل محاط شدن در یک دایره باشد.

۳ ــ در شکل مقابل abcde نمای قایم خانه‌ای را نشان می‌دهد (دو نقطهٔ b و e ارتفاعهای برابر دارند). سازندهٔ خانه در نظر دارد مجرایی برای آبهای باران متشکل از سه ناودان مستقیم‌الخط bp و cp و pq ایجاد کند که مسیر از p به پایین قایم باشد. مکان نقطهٔ p کجا باشد تا طول کل ناودانها مینیمم باشد.



۴ ــ از میان همهٔ مثلثهای محاط در یک دایرهٔ مفروض کدام، یک ماکزیمم مساحت و کدام یک ماکزیمم محیط را داراست؟

۵ ــ ثابت کنید عبارت

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$

هرگاه $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ باشد مینیمم است.

مأخذ:

۱ ــ روشهای جبر ــ پرویز شهریاری
۲ ــ عبارتهای جبری ــ عبدالحسین مصحفی
۳ ــ آشنایی با ریاضیات (جلد ۲۸) ــ پرویز شهریاری
۴ ــ مسائل جبر و آنالیز ــ علی حسن‌زاده ماکویی
۵ ــ بازآموزی و بازشناخت هندسه ــ عبدالحسین مصحفی
۶ ــ ماکزیمم و مینیمم بدون مشتق ــ ایوان نیون
۷ ــ نابرابری هندسی ــ محمد حسین بیژن‌زاده
۸ ــ المپیادهای ریاضی بین‌المللی ــ پرویز شهریاری
۹ ــ المپیادهای ریاضی کشوری ــ آرمان تقیان
۱۰ ــ المپیادهای ریاضی بلژیک ــ عبدالحسین مصحفی
۱۱ ــ المپیادهای ریاضی مجارستان ــ یوژف کورشاک
۱۲ ــ المپیادهای ریاضی شوروی ــ نیکلای یوری سوویچ واسیلیف، آندره آلکساندرویچ یه گوروف



ادب ریاضی

«چنانکه ملاحظه می‌شود ... حساب احتمالات به واقع چیزی جز عقل سلیم نیست که به محاسبه درآمده است. این حساب، چیزی راکه صاحبان فکر درست بدون آنکه متوجه باشند به غریزه درمی‌یابند با دقت و صحت بیان می‌دارد.

... این نکته درخور توجه است که این علم که با ملاحظات مربوط به بازیهای قمار و تصادف به وجود آمد، به درجه‌ای اهمیت یافته است که از مهمترین مسایل معرفت آدمی می‌باشد.»

پی‌یر سیمون لاپلاس



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۶)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت دوم)

یکی از مشهورترین سؤالهای بی‌پاسخ مربوط به اعداد اول *حدس گلدباخ*[۱] است. *کریستین گلدباخ*[۲] در نامه‌ای به *لئونهارد اویلر*[۳]، نوشته شده در ۱۷۴۲، حدس زد که هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دو عدد اول است. به عنوان نمونه،

۴=۲+۲
۶=۳+۳
۸=۳+۵
۱۰=۵+۵
۱۲=۵+۷

تحقیقات کامپیوتری حدس *گلدباخ* را به ازای جمیع اعداد زوج تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ محقق کرده است، اما اثبات یا عدم اثبات کلی آن تا به امروز مشخص نشده است.

آزمون اول بودن

گرچه اغلب مسأله‌های کلاسیک مربوط به اعداد اول حل نشده باقی مانده‌اند، سالهای اخیر با گسترشهای عظیمی در روشهایی مواجه بوده‌اند که به کمک آنها می‌توان اول بودن یا نبودن اعداد را آزمود. ممکن است گفته شود «روشهای آزمون اول بودن؟ ولی این که خیلی واضح است.» و در واقع، طریق کاملاً طبیعی و ساده‌ای برای ملاحظهٔ اول بودن یا نبودن یک عدد موجود است.

با معلوم بودن عددمان، مثلاً n، ابتدا ملاحظه می‌کنیم ۲ آن را می‌شمارد یا نه. اگر بشمارد، در این صورت n اول نیست و غائله ختم شده است. سپس ۳ را آزمایش می‌کنیم. اگر ۳، n را بشمارد در این صورت n اول نیست و باز هم کار تمام است. پس بخشپذیری n را بر ۵ در نظر می‌گیریم. (از ۴ می‌توان صرفنظر کرد: از آنجا که ۲، n را نمی‌شمارد اگر جلوتر برویم، ۴ نیز نمی‌تواند n را بشمارد.)

اگر ۵ از شمردن n بازماند، ۷ را آزمایش می‌کنیم. (باز هم، می‌توان از ۶ صرفنظر کرد زیرا ۲ و ۳، n را نمی‌شمرند.) و همین طور الی آخر. اگر بدون یافتن عددی که n را بشمرد تا $\sqrt{n}$ پیش برویم، آنگاه خواهیم دانست که n باید اول باشد. (برای این که در صورتی n اول نباشد حاصل ضرب دو عدد u و vی بین ۱ و n خواهد بود، و البته یکی از دو مورد u یا v بزرگتر از $\sqrt{n}$ است.)

فرایند فوق به *تقسیم آزمایشی*[۴] معروف است، و با وجود این که در مورد اعداد به نسبت کوچک به کفایت کاراست، برای عددهای بسیار بزرگ فاقد کارایی است. برای ملاحظهٔ غیرعملی بودن آن، فرض می‌کنیم بخواهیم برنامه‌ای با کارایی بالایی برای اجرای تقسیم آزمایشی مورد بحث بر سریعترین کامپیوتر در دسترس (که در ابتدای این فصل به آن اشاره شد) بنویسیم. برنامهٔ مورد نظر در مورد عددی ۱۰ رقمی فوراً اجرا می‌شود ــ پاسخ بلافاصله آشکار می‌شود. در مورد عددی ۲۰ رقمی اندکی زحمت می‌برد و دو ساعت به درازا می‌انجامد. در مورد عددی ۵۰ رقمی به مدت گیج کنندهٔ ده میلیارد سال نیاز دارد. عددی ۱۰۰ رقمی به

۱ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

(در این عدد سی و شش صفر وجود دارد) نیازمند است. این موضوع، تنها، محاسبه‌ای معمولی برای عددی بسیار بزرگ نیست، و همانگونه که بعداً در این فصل توضیح خواهیم داد، برای یکی از امنترین دستگاههای رمزگذاری سری مورد استفادهٔ امروزه به اولهایی با ارقامی بین ۶۰ و ۱۰۰ نیاز است.

بنابراین برای تشخیص اول بودن یا نبودن یک عدد ۱۰۰ رقمی چه کاری باید انجام داد؟ در حال حاضر بهترین روش در دسترس روش بسیار پیچیده‌ای است که در حدود ۱۹۸۰ توسط ریاضیدانان *آدلمن*[۵]، *روملی*[۶]، *کوهن*[۷]، و *لنسترا*[۸] مطرح شده است، و اغلب به آن، با استفاده از حروف اول نامهایشان، به عنوان آزمون ARCL اشاره می‌شود.

زمانهای لازم برای آزمون ARCL ، بر کامپیوتر یاد شده، عبارتند از، برای عددی ۲۰ رقمی، ۱۰ ثانیه؛ برای عددی ۵۰ رقمی، ۱۵ ثانیه؛ برای عددی ۱۰۰ رقمی، ۴۰ ثانیه. کامپیوتر مزبور حتی عددی ۱۰۰۰ رقمی را، در صورتی یک هفته به آن مهلت داده شود، مشخص می‌کند.

اما آزمون مورد بحث چگونه به کار می‌رود؟ این عمل بستگی به مبالغ قابل ملاحظه‌ای ریاضیاتی بسیار پیچیده دارد ــ روشی ریاضی خارج از ریاضیات معمول دورهٔ کارشناسی ــ بنابراین به دست دادن پاسخ کامل در این مرحله ممکن نیست. اما توضیح ایدهٔ اصلی روش مذکور مشکل نیست. ایدهٔ مزبور قسمت ساده‌ای از ریاضیات (گرچه بسیار هوشمندانه) از ریاضیدان بزرگ فرانسوی *پیردوفرما*[۹] (۱۶۰۱ ــ ۱۶۶۵) است.

فرما گرچه ریاضیدانی «آماتور» بود (وی حقوقدان بود) بعضی از هوشمندانه‌ترین دستاوردهای ریاضی‌ای را، که تاکنون دیده شده‌اند، مطرح کرد. یکی از ملاحظاتش این بود که اگر P عددی اول باشد، در این صورت به ازای هر عدد a ی کمتر از P، عدد $a^{P-1}-1$ بر P بخشپذیر است. به عنوان نمونه، فرض می‌کنیم $P=7$ و $a=2$ را در نظر بگیریم. در این صورت

$$a^{P-1}-1=2^6-1=64-1=63$$

و در واقع ۶۳ بر ۷ بخشپذیر است. قضیه را خودتان به ازای هر مقدار (اول) P و هر مقدار (کمتر از P ی) a امتحان کنید. نتیجه همواره یکسان است.

بنابراین در اینجا روشی ممکن برای آزمون اول بودن یا نبودن n وجود دارد. عدد $2^{n-1}-1$ را محاسبه و ملاحظه می‌کنیم n آن را می‌شمارد یا خیر. اگر نشمارد، در این صورت n نمی‌تواند اول باشد. (زیرا اگر n اول بود، آنگاه بنا به ملاحظهٔ فرما بخشپذیری $2^{n-1}-1$ بر n را داشتیم.)

اما در صورتی که دریابیم n عدد $2^{n-1}-1$ را نمی‌شمارد چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ متأسفانه نمی‌توانیم نتیجه بگیریم n باید اول باشد. (گر چه کاملاً احتمال دارد که چنین باشد.) مشکل در اینجاست که، در حالی که دستاورد فرما این را بیان می‌کند که هرگاه n اول باشد $2^{n-1}-1$ را می‌شمارد، بر این نیست که اعداد مرکبی با این ویژگی وجود ندارند. (این مطلب مانند این است که گفته شود تمام اتومبیلها چرخ دارند؛ و این از چرخ داشتن سایر چیزها ــ به طور مثال، دوچرخه‌ها ــ جلوگیری نمی‌کند.) و در واقع عددهای غیر اولی موجودند که دارای ویژگی فرما هستند. کوچکترین آنها ۳۴۱ است، که از آنجا که حاصل ضرب ۱۱ و ۳۱ است، اول نیست. اما اگر (بر کامپیوتری) آزمایش کنید درخواهید یافت ۳۴۱ عدد $2^{340}-1$ را می‌شمارد. (بزودی ملاحظه خواهیم کرد که برای انجام این آزمایش نیاز به محاسبهٔ 2^{340} نیست.)

اعداد مرکبی که با عنایت به ویژگی فرما شبیه عددهای مرکب عمل می‌کنند به *شبه اول*[۱۰] موسومند. بنابراین اگر، هنگامی که با استفاده از دستاورد فرما، به آزمون اول‌بودن پرداخته‌اید، کشف کنید که n عدد $2^{n-1}-1$ را می‌شمارد، تمام چیزی که می‌توانید نتیجه بگیرید این است که n یا اول‌است یا شبه اول. (در این حالت شانس به صورت بسیار بالایی به نفع اول بودن n است. زیرا گرچه در واقع بینهایت عدد شبه اول وجود دارند، با فراوانی بسیار کمتری از اولهای حقیقی رخ می‌دهند. به عنوان

نمونه تنها دو چنین عدد کمتر از ۱۰۰۰ی موجودند، و تنها ۲۴۵ مورد زیر یک میلیون.)

در ضمن در صورتی که، در آزمون ویژگی فرما، به جای ۲ از عدد دیگری، مثلاً ۳ یا ۵، استفاده کنیم تفاوت چندانی نمی‌کند. هر عددی که به کار برید اعداد شبه اولی موجود می‌شوند که از به دست آوردن پاسخی مطلق به مسألهٔ اول بودن یا نبودن ممانعت به عمل می‌آورد.

در کاربرد این آزمون، لزومی به محاسبهٔ عدد $۲^{n-۱}$، عددی که ملاحظه کردید که حتی به ازای اعداد کاملاً کوچک n بسیار بزرگ است، نیست. در این مورد تمام کاری که نیاز به انجام دادن آن داریم یافتن این مطلب است که n عدد $۱-۲^{n-۱}$ را می‌شمارد یا خیر. و این بدان معنی است که می‌توان از مضربهای n در **هر مرحلهٔ محاسبه** صرفنظر کرد. به عبارت دیگر، آنچه که باید محاسبه شود باقیمانده‌ای است که در صورت تقسیم $۱-۲^{n-۱}$ بر n به جا می‌ماند. و هدف ملاحظهٔ این موضوع است که باقیماندهٔ مزبور صفر است یا خیر، اما از آنجا که مضربهای n آشکارا در باقیمانده تأثیر نمی‌گذارند، می‌توان از آنها چشم پوشید. ریاضیدانها (و برنامه‌نویسهای کامپیوتر) برای نمایش باقیمانده‌ها طریقی استاندارد دارند: باقیماندهٔ تقسیم A بر B را به صورت زیر می‌نویسند:

$$A \bmod B$$

به این ترتیب، به‌طور مثال، ۵ mod ۲ برابر ۱ است، ۷ mod ۴ برابر ۳، و ۸ mod ۴ برابر ۰.

از این طریق برای آزمون اول بودن عدد ۶۱، به عنوان مثالی از آزمون فرما، استفاده می‌کنیم. در این صورت نیاز به محاسبهٔ عدد:

$$(۲^{۶۰}-۱) \bmod ۶۱$$

داریم. ۶۱، در صورتی که این باقیمانده صفر نباشد، اول نیست. اگر صفر باشد، در این صورت ۶۱ یا اول است یا شبه‌اول (و در حقیقت، همان طور که می‌دانیم، اولی خالص).

در این مورد سعی می‌کنیم از محاسبهٔ عدد بزرگ $۲^{۶۰}$ خودداری کنیم. کار را با ملاحظهٔ این مطلب آغاز می‌کنیم که

$۲^۶ = ۶۴$، و در نتیجه

$$۲^۶ \bmod ۶۱ = ۳$$

در این صورت، از آنجا که $(۲^۶)^۵ = ۲^{۳۰}$، به دست می‌آوریم

$$۲^{۳۰} \bmod ۶۱ = (۲^۶ \bmod ۶۱)^۵ \bmod ۶۱ = ۳^۵ \bmod ۶۱$$

$$= ۲۴۳ \bmod ۶۱ = ۶۰$$

بنابراین،

$$۲^{۶۰} \bmod ۶۱ = (۲^{۳۰})^۲ \bmod ۶۱ = (۲^{۳۰} \bmod ۶۱)^۲ \bmod ۶۱$$

$$= ۶۰^۲ \bmod ۶۱ = ۳۶۰۰ \bmod ۶۱ = ۱$$

به این ترتیب،

$$(۲^{۶۰}-۱) \bmod ۶۱ = ۰$$

از آنجا که پاسخ ۰ است، نتیجه این است که، همان طور که پیش‌بینی شد، ۶۱ یا اول است یا شبه اول.

در این مرحله ممکن است مایل باشید خود محاسبه‌ای انجام دهید. در این صورت، تحقیق کنید که

$$۲^{۱۰} \bmod ۳۴۱ = ۱$$

سپس با استفاده از این واقعیت نشان دهید که

$$۲^{۳۴۰} \bmod ۳۴۱ = ۱$$

این نتیجه بر این است که عدد ۳۴۱ یا اول است یا شبه اول. (در این حالت، همانگونه که قبلاً متذکر شدیم، ۳۴۱ در واقع شبه‌اول است.)

آزمون ARCL با استفاده از تغییر آزمون *فرما*، چنان که نتواند توسط شبه اولی به اشتباه بیفتد، عمل می‌کند، و این تغییر است که به ریاضیاتی بسیار عمیق نیاز دارد. (در صورتی که *واقعاً* مایل به ملاحظهٔ این مطلب هستید به مقالهٔ

Primdity testing and Jacobi sums

نوشتهٔ Cohen و Lenstra در مجلهٔ تحقیق ریاضی زیر رجوع کنید.

Mathematics of Computation, Volume 42 (1984). PP. 297_330)

اولهای مرسن

آزمون ARCL سریعترین آزمون عام اول بودنی است که در حال حاضر در دسترس است. عبارت «عام» در اینجا بدان معنی است که آزمون مزبور در مورد هر عدد مفروض n به کار می‌رود. اما در مورد عددهایی با ساختارهای مخصوص اغلب روشهای دیگری موجودند که با سرعت بخشیدن به فرایند مزبور با بهره گرفتن از ساختار مخصوص عدد مورد نظر بسیار سریعتر انجام می‌گیرند. چشمگیرترین مثال در این مورد در رابطه با اعدادی به صورت $۲^n - ۱$ است. این عددها را امروزه به نام *مارتین مرسن*[۱۱]، راهب فرانسوی قرن هفدهم، *اعداد مرسن*[۱۲] می‌نامند.

مرسن در مقدمهٔ کتابش – Cogitata Physica Mathematica، انتشار یافته در ۱۶۴۴، اظهار کرد که عدد

$M_n = 2^n - 1$

به ازای

$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$

اول، و به ازای جمیع مقادیر کوچکتر از ۲۵۷ دیگر n مرکب است. چگونه این موضوع را دانست؟ کسی نمی‌داند. اما به هر تقدیر به نحوی شگفت‌آور با حقیقت نزدیک بود. سرانجام تنها در ۱۹۴۷، هنگامی که ماشینهای حساب رومیزی در دسترس قرار گرفتند، بررسی ادعای وی امکانپذیر شد. وی تنها مرتکب پنج اشتباه شده بود: M_{67} و M_{257} اول نیستند، و M_{61}، M_{89}، و M_{107} اولند.

اعداد مرسن روشی عالی برای به دست آوردن عددهای اول بسیار بزرگ مطرح می‌کنند. رشد سریع تابع 2^n هنگامی که n بزرگ شود تضمین می‌کند که اعداد مرسن M_n بزودی بسیار بزرگ شوند، و بنابراین ایدهٔ روش مورد بحث جستجوی مقادیر nی است که به ازای آنها M_n اول است. چنین اولهایی را ***اولهای مرسن*** می‌نامند.

مختصری جبر مقدماتی مشخص می‌کند M_n اول نخواهد بود مگر این که خود n اول باشد، بنابراین تنها لازم است که به مقادیر اول n نظر داشته باشیم. ولی حتی اغلب اولهای n نیز به عدد **مرسن** مرکب M_n ی منجر می‌شوند، بنابراین جستجوی مقادیر مناسب n آسان نیست ــ گر چه این مطلب به هیچ وجه از چند حالت اولیه آشکار نیست، زیرا

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$

$M_5 = 2^5 - 1 = 31$

$M_7 = 2^7 - 1 = 127$

جمیعاً اولند. اما پس از این مرحله الگوی مزبور، با

$M_{11} = 2047 = 23 \times 89$

تغییر جهت می‌دهد. سپس سه مقدار اول دیگر می‌آیند:

$M_{13} = 8191 ,\ M_{17} = 131071 ,\ M_{19} = 524287$

پس از آن یافتن اعداد مرسن سخت‌تر می‌شود. پنج مقدار بعدی nی که M_n به ازای آنها اول است عبارت است از

۳۱، ۶۱، ۸۹، ۱۰۷، ۱۲۷

اغلب مردم، هنگامی که برای اولین بار مقادیر فوق را ملاحظه می‌کنند، این نتیجهٔ عجولانه را می‌گیرند که اگر P خود اولی **مرسن** باشد، آنگاه M_p نیز اول است. این نتیجه محققاً در آغاز کاراست: ۳ اولی **مرسن** است و M_3 نیز؛ ۷ اولی **مرسن** است و M_7 نیز؛ ۳۱ اولی **مرسن** است و M_{31} نیز؛ به همین ترتیب است مورد ۱۲۷ و M_{127}. اما در اینجا الگو توقف می‌کند، و هر چند ۸۱۹۱ (با M_{13} بودن) اولی **مرسن** است، M_{8191} (که دارای ۲۴۶۶ رقم است) مرکب است. این موضوع در سال ۱۹۵۳ با استفاده از کامپیوتری اولیه کشف شد. (بعداً در این فصل، بخش مربوط به اعداد تام را ملاحظه کنید.)

در واقع تا این تاریخ تنها سی اول **مرسن** شناخته شده موجودند. دوازده مقدار n که در فوق فهرست کردیم و به ازای آنها M_n اول است جمیعاً در سالهای اولیهٔ این قرن شناخته شده بودند. هفت مورد بعدی تماماً در ۱۹۵۲ توسط ***رافائل روبینسون***[۱۳] با استفاده از کامپیوتر SWAC یافت شدند. مقدار n = ۳۲۱۷ در ۱۹۵۷ توسط ***هنس ریزل***[۱۴] با استفاده از کامپیوتر BESK کشف شد. ***الکساندر هارویتس***[۱۵] برای به‌دست آوردن مقادیر n = ۴۲۵۳ و ۴۴۲۳ از کامپیوتر IBM۷۰۹۰ بهره گرفت، و در ۱۹۶۳ ***دونالد جیلیس***[۱۶] و ILLIAC–II مقادیر n = ۹۶۸۹، ۹۹۴۱، و ۱۱۲۱۳ را یافتند. IBM.360–91 ***براینت توکرمن***[۱۷] در ۱۹۷۱ مقدار n = ۱۹۹۳۷ را آشکار کرد.

با کشف بعدی، در ۱۹۷۸، سابقهٔ اعداد اول در صفحات اول اخبار با این خبر مطرح شد که پس از سه سال کار شامل ۳۵۰ ساعت وقت کامپیوتری بر CYBER 174 در دانشگاه ایالتی ***کالیفرنیا***[۱۸] در ***هیوارد***[۱۹]، دو دانش‌آموز ۱۸ سالهٔ دبیرستانی، ***لورانیکل***[۲۰] و ***کورت نول***[۲۱]، عدد اول مرسن ۶۵۳۳ رقمی M_{21701} را یافته‌اند.

یک سال بعد، **نول** رکورد مزبور را با اول ۶۹۸۷ رقمی M_{23209} بهبود بخشید. بعداً در همین سال رکورد مزبور بار دیگر شکست، و این بار توسط ***دیوید اسلووینسکی***[۲۲]، برنامه‌نویس جوانی که برای تحقیقات کری[۲۳] در Chippewa Falls ***ویسکانسین***[۲۴] کار می‌کرد. وی با استفاده از کامپیوتر بسیار قدرتمند CRAY–۱ اول ۱۳۳۹۵ رقمی M_{44497} را پیدا کرد.

در ۱۹۸۲ همین ترکیب ماشینی نشان داد که M_{86243} (عددی ۲۵۹۶۲ رقمی) اول است. سپس، ***اسلووینسکی***، با کار بر کامپیوتر حتی قدرتمندتر CRAY – XMP، با اول

۳۹۷۵۱ رقمی $M_{۱۳۲۰۴۹}$ از این هم فراتر رفت.

سرانجام (تا این زمان)، در سپتامبر ۱۹۸۵، در **هوستون، تکزاس**، CRAY – XMP از آن Chevron Geosciences، عدد ۶۵۰۵۰ رقمی $M_{۲۱۶۰۹۱}$، رکورد نگهدار فعلی، را به دست آورد. (از آنجا که Chevron برنامهٔ اول یاب *اسلووینسکی* را اجرا می‌کرد، اعتبار این کشف در واقع از آن اوست. شرکت مزبور برنامهٔ مزبور را به این علت اجرا می‌کرد که روشی نیکو برای نشان دادن اشتباهات دستگاههای کامپیوتر به دست می‌داد.)

اما آیا این پایان داستان است؟ احتمالاً خیر. حدس بر این است که اولهای **مرسن** را پایانی نیست ــ یعنی بینهایت عدد از آنها موجودند. اما این موضوع به اثبات نرسیده است، و تمام آنچه که **به تحقیق** می‌توان دانست این است که حداقل سی عدد از آنها وجود دارند (یعنی، آنهایی که شناخته شده‌اند.)

روش به کار رفته در بررسی اول بودن اعداد **مرسن** بسیار ساده است (گرچه ریاضیات پشتوانهٔ آن چنین نیست). این روش به یاد *ادوارد لوکاس*[۲۵] (که ایدهٔ اصلی آن را در ۱۸۷۶ کشف کرد) و **دریک لمر**[۲۶] (که آن را در ۱۹۳۰ مهذب کرد) به عنوان *آزمون لوکاس ــ لمر*[۲۷] معروف است. برای آزمون اول بودن عدد مرسن M_n (با فرض اول بودن n)، اعداد $U(۰)$، $U(۱)$، ...، $U(n-۲)$ را با استفاده از قاعده‌های زیر محاسبه می‌کنیم:

$$U(۰) = ۴$$

$$U(K+۱) = \left[U(K)^{۲} - ۲\right] \bmod M_n$$

اگر در پایان کار دریابیم که $U(n-۲) = ۰$، آنگاه M_n اول است. اگر $U(n-۲) \neq ۰$ آنگاه M_n اول نیست.

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم می‌خواهیم از آزمون لوکاس‌ـلمر برای ملاحظهٔ اول بودن $M_۵$ استفاده کنیم. (البته، از آنجا که $M_۵ = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$، می‌دانیم در این حالت ساده عدد مورد بحث اول است، اما این موضوع را با روش مورد نظر روشن می‌کنیم.) در این صورت محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

$$U(۰) = ۴$$

$$U(۱) = (۴^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۱۴ \bmod ۳۱ = ۱۴$$

$$U(۲) = (۱۴^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۱۹۴ \bmod ۳۱ = ۸$$

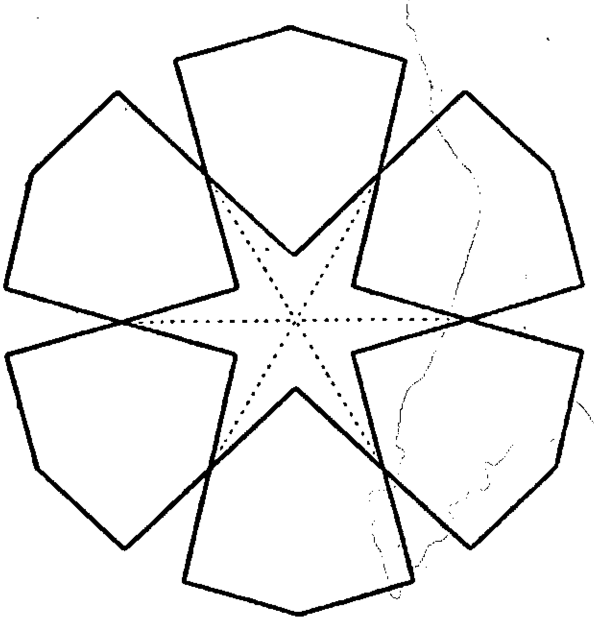
$$U(۳) = (۸^۲ - ۲) \bmod ۳۱ = ۶۲ \bmod ۳۱ = ۰$$

از آنجا که $U(۳) = ۰$، $M_۵$ باید اول باشد.

می‌توانید خودتان این روش را با استفاده از دو عدد $M_۷ = ۱۲۷$ (که اول است) و $M_{۱۱} = ۲۰۴۷$ (که اول نیست ــ پیشین را ملاحظه کنید) به کار برید.

یادداشتها:

۱ ـ Goldbach's Conjecture
۲ ـ Christian Goldbach
۳ ـ Leonhard Euler
۴ ـ Trial division
۵ ـ Adleman
۶ ـ Rumely
۷ ـ Cohen
۸ ـ Lenstra
۹ ـ Pierre de Fermat
۱۰ ـ Pseudo primes
۱۱ ـ Martin Mersenne
۱۲ ـ Mersenne numbers
۱۳ ـ Rafael Robinson
۱۴ ـ Hans Riesel
۱۵ ـ Alexander Hurwitz
۱۶ ـ Donald Gillies
۱۷ ـ Bryant Tuckerman
۱۸ ـ California State University
۱۹ ـ Hayward
۲۰ ـ Laura Nickel
۲۱ ـ Curt Noll
۲۲ ـ David Slowinski
۲۳ ـ Cray Research
۲۴ ـ Wisconsin
۲۵ ـ Edovard Lucas
۲۶ ـ Derrick Lehmer
۲۷ ـ Lucas - Lehmer test



دسته خط

● سیامک جعفری

تعریف : مجموعه خطوط مستقیم همرس در نقطه A را دسته خط به مرکز A تعریف می‌کنند.

اگر معادلات $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ دو خط از دسته خط بالا باشند آنگاه معادله

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که در آن α و β با هم صفر نیستند، خطی متعلق به دسته خط مذکور است و از A می‌گذرد. توجه کنید : اگر $\alpha\neq 0$ و $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ فرض کنیم معادله بالا را می‌توان به این صورت نوشت :

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که شامل تمام حالتهای دسته خط هست به جز وقتی $A_2x+B_2y+C_2=0$ باشد.

تذکر : با توجه به مطالب کلاسیک درباره خطوط موازی و منطبق، اگر دو معادله مفروض $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ طوری باشند که

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\Rightarrow$ دو خط موازی

$\Rightarrow$ دسته‌خط مرکز نخواهد داشت.

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Rightarrow$ دو خط منطبق

$\Rightarrow$ دسته خط بی‌نهایت مرکز دارد.

شیب و عرض از مبدأ دسته خط :

اگر معادله را مرتب کنیم.

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+C_1+\lambda C_2=0$$

شیب دسته خط $m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$

عرض از مبدأ دسته خط $y_0=-\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2}$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $6x+5y+13=0$ موازی باشد و از محل تلاقی دو خط $11x+17y-19=0$ و $5x+12y-2=0$ بگذرد.

حل:

شیب دسته $m=-\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}$

$$\longrightarrow\longrightarrow -\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}=-\frac{6}{5}\Rightarrow\lambda=-1$$

شیب خط اول $m'=-\frac{6}{5}$

اگر این مقدار λ را در معادله دسته خط بگذاریم خط مورد نظر بدست می‌آید.

$$(11x+17y-19)-1(5x+12y-2)=0$$

$6x+5y-17=0$ خواهد شد.

توجه: اگر می‌خواستیم بدون استفاده از دسته خط مسأله

را حل کنیم باید ابتدا دستگاه زیر را حل کرده سپس معادله خطی را بنویسیم که از یک نقطه می‌گذرد و شیب معلوم دارد.

$$\begin{cases}5x+12y-2=0\\ 11x+17y-19=0\end{cases}$$

مثال: دسته خط به معادلهٔ $\alpha(x-4)+\beta(x-y+4)=0$ مفروض است. مرکز این دسته خط کدام نقطه است.

a) $(8,-4)$ b) $(4,-8)$

c) $(8,4)$ d) $(4,8)$

حل:

$$\begin{cases}x-4=0 & \Rightarrow x=4\\ x-y+4=0 & \xrightarrow{\downarrow} y=8\end{cases}$$

جواب d

* می‌توان نشان داد معادله خطی که از محل تلاقی دو خط $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ گذشته و عمود برخط $A_3x+B_3y+C_3=0$ است خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

اثبات: معادلهٔ دسته خط را به دست آورده و شرط عمود بودن را اعمال می‌کنیم.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

$$\Rightarrow m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$$

$$L_3 \text{ شیب خط } m'=-\frac{A_3}{B_3}$$

$$-\frac{A_1+A_2\lambda}{B_1+B_2\lambda}\times\left(-\frac{A_3}{B_3}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

که معادله خط به دست می‌آید.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

** اکنون معادله خطی را به دست می‌آوریم که متعلق به یک دسته خط باشد و با خط سومی موازی است.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

شرط توازی را اعمال خواهیم کرد.

$$\begin{cases}\text{شیب دسته}=-\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}\\ \qquad\qquad\Rightarrow -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}=-\dfrac{A_3}{B_3}\\ L_3 \text{ شیب خط}=-\dfrac{A_3}{B_3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{A_1B_3-B_1A_3}{A_2B_3-B_2A_3}$$

خط مورد نظر خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1B_3-A_3B_1}{A_2B_3-A_3B_2}$$

*** اگر معادلهٔ $Ax+By+C=0$ را به صورت $f(x,y)=0$ نمایش دهیم، آنگاه معادله دسته خط شامل دو خط $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ خواهد شد.

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$$

می‌توان نشان داد معادله خطی از دسته خط بالا که از نقطه (x_1,y_1) گذشته است به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f(x_1,y_1)+\lambda g(x_1,y_1)=0$$

نقطه در خط صدق می‌کند.

$$\lambda=-\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

خط خواهد شد.

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

که اگر بخواهیم روابط را باز شده بنویسیم خواهیم داشت.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{A_2x_1+B_2y_1+C_2}$$

**** دسته خط مزدوج (قایم)

اگر $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ یک دسته خط باشد. و نقطه‌ای مانند $\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$ باشد، معادله خطی که از این نقطه گذشته و برخطی از دسته خط بالا عمود است چنین به

دست می‌آید.

$$\begin{cases} \text{شیب دسته} = -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2} \\ \text{شیب خط} = -\dfrac{A}{B} \end{cases} \quad \overset{\text{شرط}}{\underset{\text{عمود}}{\Rightarrow}} -\frac{A}{B} = \frac{B_1+\lambda B_2}{A_1+\lambda A_2}$$

و خط مورد نظر خواهد شد.

$(B_1+\lambda B_2)x-(A_1+\lambda A_2)y-$

$(B_1+\lambda B_2)x_2+(A_1+\lambda A_2)y_2=0$

از آنجا که (x_1,y_1) مرکز دسته خط در معادلات خطوط اول و دوم صدق می‌کند معادله دسته خط را می‌توان چنین تبدیل کرد:

$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y-(A_1+\lambda A_2)x_1-$

$(B_1+\lambda B_2)y_1=0$

با تبدیلات $A_1+\lambda A_2=a$ و $B_1+\lambda B_2=b$ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} ax+by-ax_1-by_1=0 \\ bx-ay-bx_2+ay_2=0 \end{cases}$$

معادله $bx-ay-bx_2+ay_2=0$ یا $bx-ay+C'=0$ را دسته خط مزدوج می‌گوییم.

مثال: اگر d_2 فاصله نقطه (x_1,y_1) از خط مزدوجش، و d_1 فاصله نقطه (x_2,y_2) از دسته خط اصلی باشد ثابت کنید.

$bd_1+ad_2=\sqrt{a^2+b^2}(y_2-y_1)$

$ad_1-bd_2=\sqrt{a^2+b^2}(x_2-x_1)$

حل: اثبات این مسأله با نوشتن فرمولهای فاصله و جمع مناسب به سادگی به دست می‌آید.

مثال: دسته خط $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ را در نظر بگیرید و خطی را به دست آورید که از نقطه $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ گذشته و با این خط از دسته خط بالا موازی باشد. و آنرا دسته خط موازی بنامید.

حتماً تاکنون متوجه شده‌اید که این دو نقطه (x_1,y_1)، (x_2,y_2) در واقع می‌توانند دو سر قطر یک دایره باشند. خطی که (قطر دایره) دو نقطه را به هم وصل می‌کند، مزدوج ندارد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دسته خطوط متعلق به معادلات $3x-2y+5=0$ و $4x+3y-1=0$ بوده و به علاوه محور عرضها را به عرض ۳- قطع کند.

حل:

$$\text{عرض از مبدأ} = -\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2} = -3 \Rightarrow -\frac{-1+5\lambda}{3-2\lambda} = -3$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{10}{11}$$

معادله خط $\quad 4x+3y-1+\frac{10}{11}(3x-2y+5)=0$

مثال: α را طوری تعیین کنید که خط $\alpha x+5y+9=0$ متعلق به دسته خط زیر باشد.

$\alpha(5x+3y-7)+\beta(3x+10y+4)=0$

حل: دسته خط را مرتب می‌کنیم.

$(5\alpha+3\beta)x+(3\alpha+10\beta)y-7\alpha+4\beta=0$

با مقایسه با خط مورد نظر:

$$\begin{cases} 5\alpha+3\beta=\alpha \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha+3\beta=0 \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{15}{31}$$

*** این موضوع دسته خط را می‌توان برای سه خط هم بسط داد. سه خط به معادلات

$f(x,y)=A_1x+B_1y+C_1=0$

$g(x,y)=A_2x+B_2y+C_2=0$

$h(x,y)=A_3x+B_3y+C_3=0$

در یک نقطه همرسند، اگر و تنها اگر، بتوان سه عدد ثابت λ_1، λ_2 و λ_3 پیدا کرد (که همه آنها صفر نباشند) به طوری که

$\lambda_1 f(x,y)+\lambda_2 g(x,y)+\lambda_3 h(x,y)=0$

اثبات: اگر $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ همرس باشند، هرکدام از آنها، مثلاً $f(x,y)=0$ را می‌توان یک خط از دسته خط $\alpha g(x,y)+\beta h(x,y)=0$ فرض کرد. یعنی:

$f(x,y)=\alpha g(x,y)+\beta h(x,y) \Rightarrow f-\alpha g-\beta h=0$

که همان شکل $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ است.

از طرف دیگر، اگر ثوابتی مانند λ_1، λ_2 و λ_3 باشند به گونه‌ای که $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ آنگاه $f=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}g-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}h$

که نشان می‌دهد $f(x,y)=0$ از نقطه تقاطع $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ می‌گذرد درنتیجه هر سه خط همرس می‌شوند.

مثال: ثابت کنید ارتفاعهای یک مثلث همرسند.

حل: اگر BC و CA و AB اضلاع مثلثی به معادلات $h(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $f(x,y)=0$ باشند. آنگاه $g(x,y)+\lambda h(x,y)=0$ معادله خطی است به ضریب زاویه $-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}$ که از رأس A می‌گذرد. اگر این خط بر $f(x,y)=0$ عمود باشد داریم.

$$\left(-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}\right)\times\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)=-1\Rightarrow\lambda=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}$$

معادله ارتفاع AH خواهد شد.

$$g(x,y)-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}.h(x,y)=0$$

به عبارت دیگر

ارتفاع AH: $k(x,y)\equiv(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)-(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)=0$

ارتفاع BH': $k'(x,y)\equiv(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)-(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)=0$

ارتفاع CH'': $k''(x,y)\equiv(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)-(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)=0$

به سادگی مشخص است که

$$k(x,y)+k'(x,y)+k''(x,y)=0$$

که نشان می‌دهد ارتفاع‌های مثلث همرس هستند.

مثال: دو دسته خط به معادلات زیر مفروض‌اند. بدون پیدا کردن مراکز آنها معادله خطی را پیدا کنید که از مراکز هر دو دسته خط بگذرد (خطی که به هر دو دسته متعلق باشد).

$$5x+3y-2+\lambda(3x-y-4)=0$$

$$x-y+1+\lambda'(2x-y-2)=0$$

حل: بر عهدهٔ دانش‌آموزان عزیز.

مسایل:

۱) مقدار λ را طوری تعیین کنید که دو خط $\Delta:\lambda x+2y-4=0$ و $\Delta':3x-y=6$ روی محور طولها متقاطع باشند.

۲) مختصات نقطه ثابتی را که دسته خط (مرکز دسته خط) به معادله زیر از آن می‌گذرد را به دست آورید.

$$(m+1)x+(m-1)y-5=0$$

۳) α را طوری تعیین کنید که نقطه تلاقی دو خط $y+5x-1=0$ و $y=2x-1$ روی خط $\alpha x+(2\alpha-1)y-2=0$ قرار داشته باشد.

۴ ـ ثابت کنید که سه خط به معادلات زیر در یک نقطه همرسند. $\Delta'':y-\frac{5}{2}x=-2$ ، $\Delta':y=-2x+7$ و $\Delta:y-2x+1=0$.

۵ ـ اگر $(\alpha-1,\alpha+1)$ مرکز دسته خط $mx+(m-1)y-2=0$ باشد مختصات مرکز دسته خط را پیدا کنید.

منابع

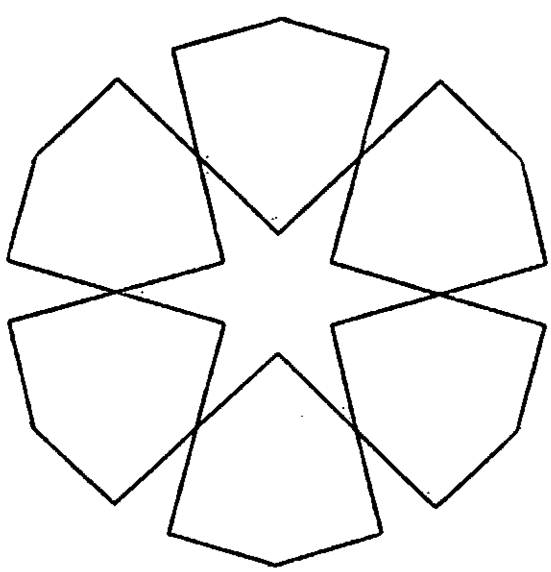
۱ ـ جبر تحلیلی — غلامرضا عسجدی

۲ ـ هندسه تحلیلی — ترجمه حسین ابراهیم زاده قلزم

۳ ـ مسایل هندسه تحلیلی

۴ ـ حساب — جورج. ب. توماس

5. Problems in analytical geometry D. KLETENIK



طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۷)

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مسأله پرگار ماچرونی

اثبات این که هر شکلی را که بتوان با پرگار و خط‌کش نامدرج رسم کرد می‌توان با پرگار تنها نیز رسم کرد.

ماچرونی «L.Mascheroni» (۱۷۵۰ ــ ۱۸۰۰) ریاضیدان ایتالیایی مسألهٔ ترسیمهای هندسی تنها با استفاده از پرگار (بدون استفاده از خط‌کش نامدرج) را مطرح و آن را در کتاب *Lageometria del compasso*، که در ۱۷۹۷ در پاویا «Pavia» به چاپ رسید، به طریقی ماهرانه حل کرد.

در صورتی که مرحله‌های جداگانه‌ای را که ترسیمهای دایره و خط مستقیم انجام می‌دهند در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم هر مرحله شامل یکی از سه ترسیم اساسی زیر است:

I. یافتن نقطهٔ تقاطع دو خط مستقیم؛

II. یافتن نقطهٔ تقاطع یک خط مستقیم و یک دایره؛

III. یافتن نقطهٔ تقاطع دو دایره.

درنتیجه، تنها نیاز به نشان دادن این است که دو ترسیم اساسی I و II را می‌توان تنها با پرگار انجام داد. (طبیعی است که در هندسهٔ پرگاری ماچرونی، خط مستقیم، در صورتی که دو نقطه‌اش مشخص باشد، مفروض یا معلوم در نظر گرفته می‌شود.)

ابتدا باید دو مسألهٔ مقدماتی زیر را حل کنیم.

مسألهٔ مقدماتی ۱. *رسم مجموع یا تفاضل دو پاره‌خط معلوم* a و b.

به عبارت دیگر: قطعهٔ $QX = b$ را به قطعهٔ معلوم $PQ = a$ افزودن یا از آن کم کردن.

حل: ۱. کمان $Q|b$ (این کمان به معنی کمان دایره‌ای است که نقطهٔ وسطش Q و شعاعش b است) را رسم می‌کنیم، نقطهٔ دلخواه H را روی این کمان در نظر گرفته، H' قرینهٔ H را نسبت به خط g، که توسط نقطه‌های P و Q مشخص شده است، رسم می‌کنیم، و قطعهٔ HH' را با h نمایش می‌دهیم.

۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $KHH'K'$ را، که ساقهای KH و $K'H'$ آن برابر b اند و قاعدهٔ KK' آن برابر $2h$ است، رسم می‌کنیم. (K نقطهٔ تقاطع کمانهای $Q|h$ و $H|h$، K' قرینهٔ K نسبت به g است.) قطر $KH' = HK'$ این ذوزنقه را d می‌نامیم.

از آنجا که ذوزنقهٔ مورد بحث چهار ضلعی‌ای قابل محاط شدن در دایره است، طبق قضیهٔ بطلمیوس (که در هر چهارضلعی محاطی مجموع حاصلضربهای اضلاع روبرو برابر حاصلضرب دو قطر است) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$d^2 = b^2 + 2h^2$$

از طرف دیگر، از مثلث قایم‌الزاویهٔ $QK'X$، که در آن $K'X$ به صورت x در نظر گرفته شده است، نتیجه می‌شود که

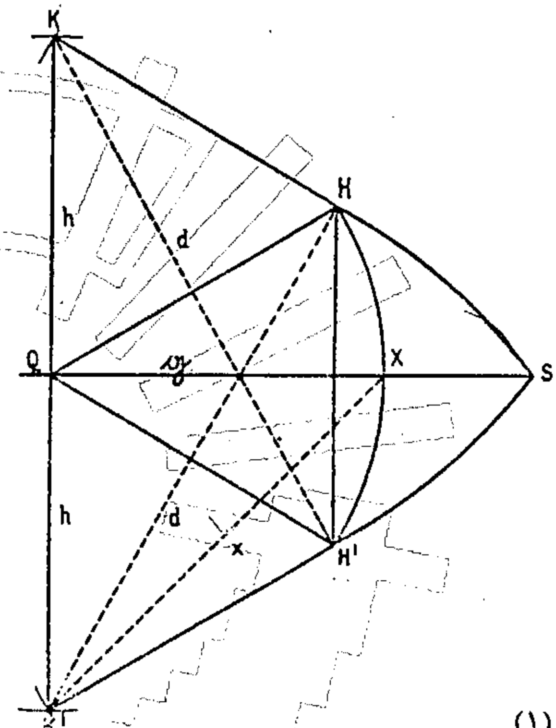
$$x^2 = b^2 + h^2$$

از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که

$d^2 = x^2 + h^2$

بنابراین x یکی از ساقهای مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که وتر آن d و ساق دیگرش h است. در این صورت اگر s نقطهٔ تقاطع کمانهای K|d و K′|d را بر خط مستقیم g بیابیم، QS = S .

۳. نقطهٔ تقاطع کمانهای K|x و K′|x را رسم می‌کنیم؛ یعنی نقطهٔ X را که سعی در یافتنش داشتیم.



شکل (۱)

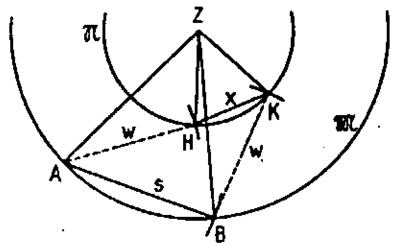
مسألهٔ مقدماتی ۲. یافتن چهارمین قطعهٔ x ی که متناسب با سه قطعهٔ معلوم m، n، s است (یافتن چهارمین جزء تناسب).

به عبارت دیگر، قطعهٔ

$x = \frac{n}{m} s$

را رسم می‌کنیم. راه‌حلی که ماچرونی برای این مسألهٔ اساسی به دست آورد به خاطر کوتاهی و سادگیش قابل توجه است.

دوایر هم مرکز DR = Z|m و R = Z|n را رسم کنید، وتر AB = s را در DR بکشید، با پرگار از A و B طول دلخواه w را روی R جدا کنید، و از فاصلهٔ بین H و K، نقاط تقاطع حاصل، قطعهٔ مطلوب x را به دست آورید.



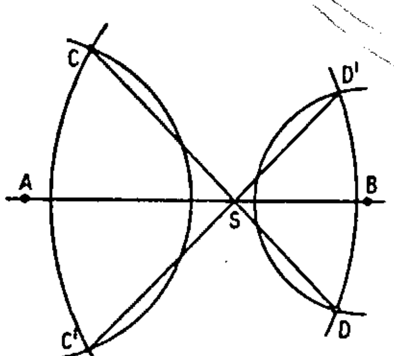
شکل (۲)

در این ترسیم فرض بر این است که s داخل دایرهٔ DR قرار می‌گیرد. اما اگر چنین نباشد، ابتدا کسر n / m را به N / M تبدیل می‌کنیم، که در آن N و M، به ترتیب، ضریبهای درست و به قدر کافی بزرگی از n و m و چنان‌اند که می‌توانند طبق مسألهٔ مقدماتی اول رسم شوند. (یک روش نسبتاً ساده دو برابر کردن نتیجه است، به عنوان مثال، هنگامی که PQ = m، و m شعاع دایرهٔ P|PQ سه بار متوالی از Q اندازه گرفته شده باشد. نقطهٔ انتهایی بعد از این اندازه گرفتن به اندازهٔ ۲m از Q فاصله دارد.)

پس از حل مسأله‌های مقدماتی مورد بحث، به حل دو مسألهٔ مهم می‌پردازیم.

I′. یافتن S، نقطهٔ تقاطع دو خط مستقیم AB و CD (که هر یک از آنها با دو نقطه داده شده است)، با پرگار تنها.

II′. تعیین S، نقطهٔ تقاطع دایرهٔ مفروض R و خط مستقیم مفروض AB با پرگار تنها.



شکل (۳)

حل I′. C′ و D′ قرینه‌های C و D را نسبت به AB رسم می‌کنیم. در این صورت S، نقطهٔ تقاطع مطلوب نیز بر

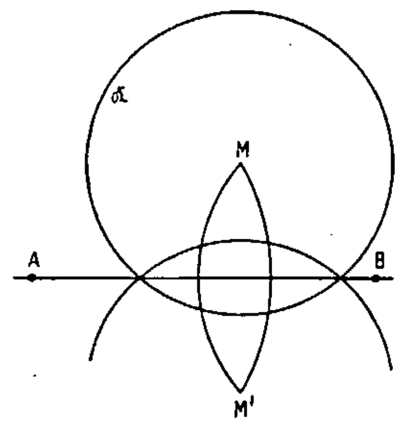
C′D′ قرار دارد. طبق قضیهٔ پرتوی نتیجه می‌شود

$$CS / SD = CC' / DD'$$

یعنی، اگر قطعه‌های CS، CD، CC′، DD′ را، به ترتیب، به صورت x، e، c، d نمایش بدهیم، $x/(e-x)=c/d$ یا

$$x = \frac{c}{c+d}.e$$

اکنون کار را با رسم $CH = c + d$ (H به عنوان نقطهٔ تقاطع کمانهای C′|d و D|e) آغاز می‌کنیم؛ در این صورت قطعهٔ x را طبق مسألهٔ مقدماتی ۲ رسم می‌کنیم؛ و سرانجام S، نقطهٔ تقاطع مطلوب، را به عنوان تقاطع کمانهای C|x و C′|x رسم می‌کنیم.



شکل (۴)

حل II′. فرض می‌کنیم مرکز دایرهٔ مفروض به صورت M و شعاع آن به صورت r مشخص شده باشد. M′ قرینهٔ M را نسبت به خط مستقیم AB رسم می‌کنیم و پرگاری که به اندازهٔ شعاع r باز باشد r را روی R از M′ جدا می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع نتیجه نقطه‌های تقاطع خط مستقیم AB با دایرهٔ مفروض R اند.

ترسیم در صورتی که خط مستقیم AB از M بگذرد انجام‌پذیر نیست. در این حالت استثنایی قطعهٔ AM را به اندازهٔ r، طبق مسألهٔ مقدماتی ۱، امتداد می‌دهیم یا کوتاه می‌کنیم. نقطه‌های انتهایی قطعه‌های امتداد یافته یا کوتاه شده نقطه‌های تقاطع R و AB اند.

بدین ترتیب حل مسألهٔ ماچرونی تکمیل می‌شود.

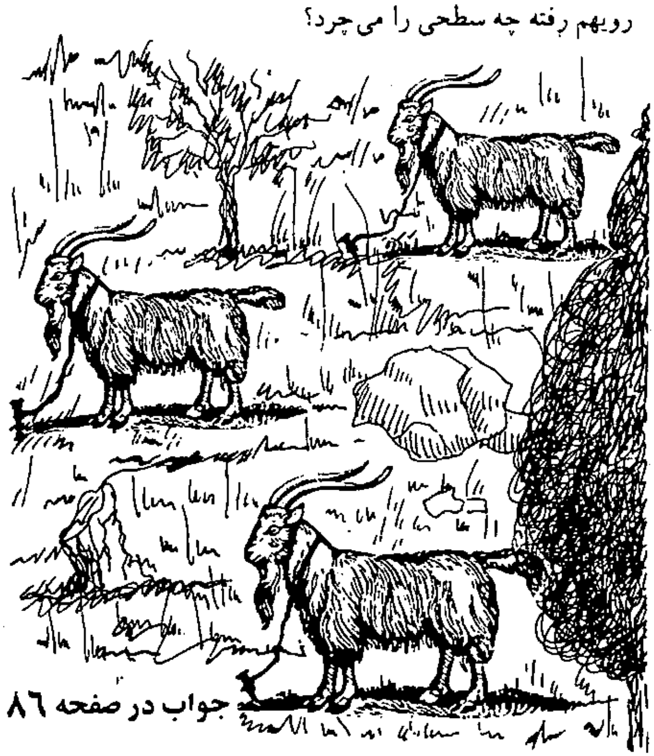


تفریح اندیشهٔ ۵

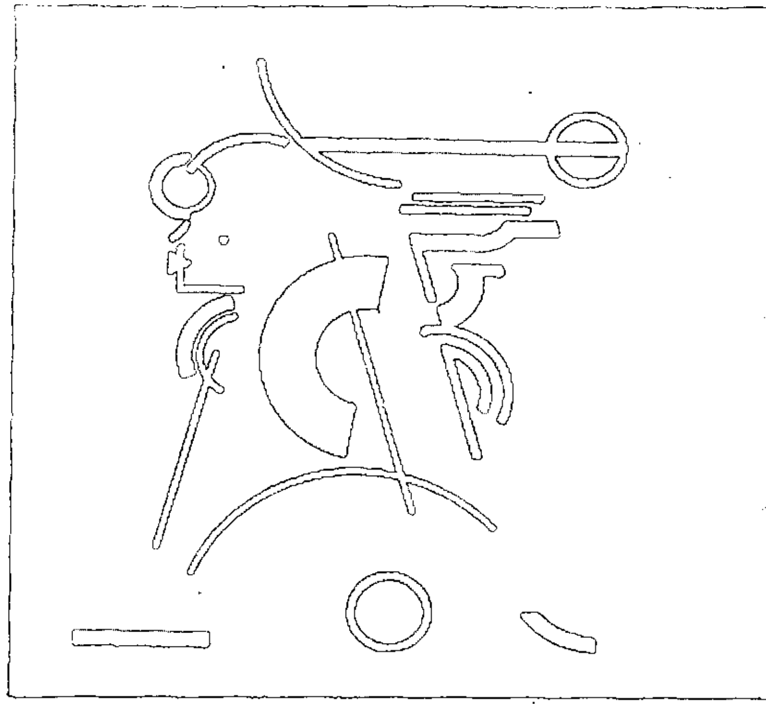
مرا محصور مکن

سه بز، چمنی محصور به مساحت ۱۲۰ متر مربع و به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع را می‌چرند. هر یک از بزها با طناب به گوشه‌ای متفاوت از چمن بسته شده و طول طنابها چنان است که هر بز می‌تواند به وسط حصار مقابل برسد.

اگر در نظر بگیریم که هر بز تمام سطحی را که به تنهایی می‌تواند به آن برسد، نیمی از سطحی را که دو بز در آن شریکند، و یک سوم سطحی را که هر سه بز در آن مشترکند، می‌چرد، رویهم رفته چه سطحی را می‌چرد؟



جواب در صفحه ۸۶



ریاضیات گسسته

(قسمت چهارم)

اصول منطق

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

در فصل اول و در مثال ۱ ــ ۳۵ (بخش ۴.۱) فرمولی مجموع‌یابی استخراج کردیم. فرمول مزبور را، با شمارش یک گردایه ازاشیاء (تعداد دفعاتی را که یک گزاره در قطعه برنامهٔ معینی به کار می‌رود) به دو طریق متفاوت و سپس مساوی قرار دادن نتایج حاصل، به دست آوردیم، در نتیجه چنین می‌گوییم که نتیجهٔ مزبور را با استفاده از اثباتی ترکیباتی[1] محقق کردیم. این روش یکی از روشهای متفاوت بسیاری است که برای رسیدن به اثبات در سراسر این کتاب با آنها سر و کار خواهیم داشت.

در این فصل نگاه دقیق‌تری به آنچه که اثبات قراردادی‌تر یا استدلال درست را تشکیل می‌دهد می‌اندازیم. زمانی که ریاضیدانی مایل به اقامهٔ اثبات وضعیتی مفروض است، باید از دستگاه منطق استفاده کند. این موضوع زمانی که یک دانشمند کامپیوتر الگوریتمهای لازم برای برنامه یا دستگاهی از برنامه‌ها را طرح می‌کند، نیز صادق است. منطق ریاضیات برای مشخص کردن این که گزاره‌ای از یک یا بیش از یک گزاره نتیجه می‌شود، یا نتیجهٔ منطقی آنهاست، به کار می‌رود.

بعضی از قواعد حاکم بر این فرآیند را در این فصل مشخص کرده‌ایم. سپس، در سراسر فصول آتی، از قواعد مزبور در اثباتها(ی آمده در متن) استفاده خواهیم برد. اما، در هیچ زمانی نمی‌توان امیدوار بود که به مرحله‌ای برسیم که در آن بتوانیم قواعد مورد بحث را به گونه‌ای خودکار به کار بریم. و باید، چون در کاربرد مفاهیم شمارش مورد بحث فصل ۱، همواره برای درک وضعیت مفروض تحلیل و جستجو کنیم. و این کار غالباً به صفاتی، چون بصیرت و خلاقیت، که نمی‌توان آنها را در کتابها آموخت، نیازمند است، و صرف کوشش در به کاربردن فرمولها یا کمک گرفتن از قواعد فایدهٔ چندانی در اثبات نتایج(ی چون قضایا) یا حل مسایل شمارش ندارد.

رابطهای مبنایی و جداول ارزش

در گسترش هر نظریهٔ ریاضی، اظهارات را به صورت جمله‌ها مطرح می‌کنیم. اظهارات کتبی یا لفظی‌ای چنین، که به ***گزاره***[2] یا ***قضیه***[3] موسوم‌اند، جمله‌هایی خبری‌اند که یا راست یا دروغ‌اند، برای مثال، موارد زیر گزاره‌اند.

a) p : ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.

b) q : من متخصص کامپیوترم.

c) r : دستگاه رسّام امروز خراب است.

قضایا را می‌توان به عنوان ***گزاره‌های ساده***[4] در نظر گرفت، زیرا به واقع راهی برای تجزیهٔ آنها به موردی ساده‌تر وجود ندارد. گزاره‌های ساده همراه با ***رابطهای منطقی***[5] در ساختن ***گزاره‌های مرکب***[6] به کار می‌روند.

به طریق زیر می‌توان گزاره‌ای را نقض یا دو گزاره را ترکیب کرد.

۱. نقیض: *نقیض*[۷] گزارهٔ p با $\sim p$ نمایش داده و به صورت «نه p» خوانده می‌شود. در مورد p ی فوق، $\sim p$ گزارهٔ زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم نیست.»

۲. ترکیب عطفی: *ترکیب عطفی*[۸] p و q را با $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و « p و q» می‌خوانیم. در مثال‌مان، گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، و من متخصص کامپیوترم».

۳. ترکیب فصلی: عبارت $p \vee q$ *ترکیب فصلی*[۹] p ، q را نمایش می‌دهد، و « p یا q» خوانده می‌شود، در نتیجه «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، یا من متخصص کامپیوترم» ترجمهٔ لفظی $p \vee q$ است. در این مرحله کلمهٔ «یا» را به معنی «*جامع*[۱۰]» به کار می‌بریم. در نتیجه، $p \vee q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q، یا هر دو آنها راست باشند. در زبان فارسی گاهی برای خاطر نشان کردن این مطلب «و/یا» می‌نویسیم. «یا»ی مانع[۱۱] را با « $p \veebar q$» نمایش می‌دهیم. گزارهٔ مرکب $p \veebar q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q ، اما نه هر دو، راست باشد. در مثال فوق، یکی از راههای بیان $p \veebar q$ عبارت از «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، یا من متخصص کامپیوترم، اما نه هردو.»

۴. استلزام: برای مشخص کردن *استلزام*[۱۲] q توسط p، می‌گوییم « p مستلزم q است» و می‌نویسیم $p \to q$. به طریق دیگر، می‌توان گفت (a) اگر p، آنگاه q ؛ (b) p کافی برای q است؛ (c) p تنها اگر q ؛ و (d) q لازم برای p است. در این مثال، یکی از ترجمه‌های لفظی $p \to q$ عبارت است از «اگر ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم باشد، آنگاه من متخصص کامپیوترم.» گزارهٔ p به *فرض*(مقدم[۱۳]) استلزام، و q به *نتیجهٔ* (تالی[۱۴]) آن موسوم است. هنگامی که گزاره‌ها را به این شیوه ترکیب می‌کنیم، لازم به وجود رابطه‌ای تصادفی بین آنها نیست، و چه p و q به هم بستگی داشته باشند چه نه، به طور ساده و با توجه به تعریف پیشین استلزام، $p \to q$ را می‌نویسیم.

۵. هم‌ارزی: سرانجام، *هم‌ارزی*[۱۵] دو گزاره p ، q را با $p \leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و « p هم ارز q است»، « p اگر و تنها اگر q »، یا « p لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم. در مثال p ، q مان «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است اگر و تنها اگر من متخصص کامپیوتر باشم» معنی $p \leftrightarrow q$ را انتقال می‌دهد. گاهی « p اگر و تنها اگر q » را به صورت « p iff q » مختصر می‌کنیم.

در سراسر بحث مربوط به منطقمان، از گزاره شمردن بعضی از انواع جمله‌های خبری، چون آنهایی که به نظر شخصی نیاز دارند یا به زمان جاری وابسته‌اند، و در نتیجه نه راست نه دروغ‌اند، خودداری می‌کنیم، علاوه بر این، باید دریابیم که جمله‌ای چون عدد x عددی صحیح است.

گزاره *نیست* زیرا *ارزش راستی*[۱۶] (راست یا دروغ)اش را نمی‌توان تا زمانی که مقداری عددی به x نسبت نداده‌ایم مشخص کرد. اگر به x مقدار ۷ را تخصیص دهیم، نتیجهٔ کار گزاره‌ای راست است. درحالی که تخصیص مقادیری چون ۱/۲، $\sqrt{2}$ ، یا π به x گزاره را دروغ می‌سازد.

حضور متغیر یا مقداری مجهول در یک جمله، خود به خود به مفهوم گزاره نبودن جمله نیست. برای مثال، جمله

اگر $x = ۳$ ، آنگاه $x^{۲} = ۹$

گزاره‌ای راست است، در حالی که گزارهٔ

اگر $x = ۳$ ، آنگاه $x + ۲ = ۶$

گزاره‌ای دروغ است.

در بحث پیشین، وضعیاتی را ذکر کردیم که طبق آنها گزاره‌های $p \vee q$ ، $p \veebar q$ بر مبنای راستی مؤلفه‌های سادهٔ p ، q راست در نظر گرفته می‌شدند. ارزش دارد که به بررسی بیشتر این مطلب که صدق یا کذب گزاره‌ای مرکب تابعی از ارزشهای راستی مؤلفه‌های ساده آن است، بپردازیم. جداول ۱.۲ و ۲.۲ صدق و کذب نقیض و گزاره‌های مرکب دیگر را بر مبنای ارزشهای راستی مؤلفه‌های اولیه‌شان خلاصه می‌کنند. در تشکیل چنین *جداول ارزشی*[۱۷] به جای دروغ ۰ و به جای راست ۱ می نویسیم.

◄ جدول ۱

p	$\bar{p}$
۰	۱
۱	۰

▶ جدول ۲

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\underline{\vee}q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱

چهار تخصیص راستی ممکن p و q را می‌توان در هر ترتیب فهرست کرد. اما برای کارهای بعدی، فهرست ارائه شده در فوق سودمندتر است.

ملاحظه می‌کنیم که ستونهای ارزشهای راستی p، $\bar{p}$ مقابل یکدیگرند. گزارهٔ $p\wedge q$ تا وقتی که p، q هر دو راست باشند، راست است، در حالی که $p\vee q$ تنها وقتی که هر دو گزارهٔ ساده آن دروغ باشند، دروغ است. همان گونه که قبلاً توجه کردیم، $p\underline{\vee}q$ زمانی که دقیقاً یکی از موارد p، q راست باشد، راست است.

نتیجهٔ استلزام $p\rightarrow q$ در جمیع حالات، جز حالتی که p راست و q دروغ باشد، راست است. مایل نیستیم که گزاره‌ای راست به پذیرش مطلبی که دروغ است منجر شود. امـا، گزاره‌ای چون «اگر ۶ = ۳ + ۲، آنگاه ۷ = ۴ + ۲» را، با وجود این که هر دو گزارهٔ «۶ = ۳ + ۲» و «۷ = ۴ + ۲» دروغ‌اند، راست می‌پنداریم.

سرانجام، گزارهٔ $p\leftrightarrow q$، زمانی که گزاره‌های سادهٔ آن ارزش راستی یکسان داشته باشند، راست است.

معمولاً اشخاص در برخورد اولشان با جدول ارزش استلزام $(p\rightarrow q)$، چنان که در جدول ۲.۲ آمده، مخصوصاً نتایج واقع در دو سطر اول، آن را (که p ارزش راستی ۰ دارد) به سختی می‌پذیرند. مثال زیر به دریافت آسانتر تخصیصات ارزش راستی مزبور مدد می‌رساند.

▶ **مثال ۲.۱:**

سناریوی زیر را در نظر بگیرید. تقریباً یک هفته پیش از کریسمس است و پنی در آن هفته در چند مهمانی شرکت خواهد کرد. او، نگران از اضافه وزنش، قرار می‌گذارد تا روز بعد از کریسمس خود را وزن نکند. با در نظر آوردن این که مهمانیهای مزبور چه بلایی سر قطرشکمش می‌آورند، تصمیم زیر را برای ۲۶ دسامبر می‌گیرد: «اگر وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر شود، در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.»

فرض می‌کنیم p و q گزاره‌های (سادهٔ) زیر را نمایش دهند.

p : وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر است.

q : در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.

در این صورت گزارهٔ (استلزام) پنی با $p\rightarrow q$ داده می‌شود.

ارزشهای راستی مثال خاص $p\rightarrow q$ ی فوق را در سطرهای جدول ۲.۲ بررسی می‌کنیم، و ابتدا حالات ساده‌تر سطرهای ۴ و ۳ را در نظر می‌گیریم.

● سطر ۴ : هم p هم q دارای ارزش راستی اند. در ۲۶ دسامبر پنی درمی‌یابد که وزنش بیش از ۱۲۰ پوند است و بلافاصله همانگونه که عهد کرده، در کلاس بدنسازی نام نویسی می‌کند. در این حالت $p\rightarrow q$ را راست در نظر می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۳ : p دارای ارزش راستی ۱ و q دارای ارزش راستی ۰ است. ۲۶ دسامبر فرا می‌رسد، پنی وزنش را بیش از ۱۲۰ پوند می‌بیند، اما کوششی در نوشتن نام خود در کلاس بدنسازی به عمل نمی‌آورد. در این حالت احساس می‌کنیم که پنی عهدش را شکسته است ــ به عبارت دیگر، استلزام $p\rightarrow q$ دروغ است (و ارزش راستی ۰ دارد).

امکان دارد که حالات سطرهای ۱ و ۲ بی‌درنگ با شهودمان نخواند، اما مثال فوق می‌تواند قبول این نتایج را آسانتر کند.

● سطر ۱ : هم p، هم q دارای ارزش راستی ۰ اند. در این حالت پنی در ۲۶ دسامبر درمی‌یابد که وزنش ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن است و در کلاس بدنسازی نام نمی‌نویسد. در این صورت برخلاف پیمانش عمل نکرده است؛ و بنابراین گزارهٔ $p\rightarrow q$ اش را راست می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۲ : p دارای ارزش راستی ۰ و q دارای ارزش راستی ۱ است. پنی، در این حالت آخر، در ۲۶ دسامبر وزنش را ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن می‌بیند و با این همه در کلاس بدنسازی نام‌نویسی می‌کند. شاید وزنش ۱۱۹ یا ۱۲۰ پوند باشد و احساس می‌کند که این مقدار هم چنان زیاد است. یا شاید به

کلاس بدنسازی رفتنش به این علت است که تصور می‌کند که این کار برای تندرستیش سودمند است. در این صورت بدون این که دلیل این کارش مهم باشد، عهد $p \to q$ اش نقض نکرده است. بار دیگر، گزارهٔ مرکب مزبور را راست می‌پذیریم، و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

□

مثال بعدیمان به بحث مفهومی مرتبط، یعنی، ساختار ***تصمیم‌گیری***[18] یا ***(انتخاب)***[19] در برنامه‌نویسی کامپیوتری، می‌پردازد.

◀ مثال ۲.۲

در علوم کامپیوتری ساختارهای تصمیم‌گیری If-Then، If-Then-Else در زبانهایی چون **بیسیک** و **پاسکال** رخ می‌دهند. فرض p غالباً عبارتی رابطه‌ای[20] چون $x > 2$ است. در این صورت عبارت مزبور به گزاره‌ای (منطقی) تبدیل می‌شود که بسته به مقدار متغیر x در آن مرحله در برنامه، ارزش راستی ۰ و ۱ دارد. نتیجهٔ q ممکن است حکمی اجراپذیر هدایت‌کنندهٔ برنامه به سطری دیگر باشد، یا موجب نتیجه‌ای برای چاپ شدن شود. (در نتیجه، q به عنوان «حکمی اجراپذیر» یکی از گزاره‌ها یا قضایایی که در بحثشان بودیم، نیست.) در این زمینه، کامپیوتر، هنگامی که با «اگر p آنگاه q» سروکار داریم، q را تنها با این شرط که p راست باشد اجرا می‌کند. و به ازای p‌ی دروغ به سطر (احتمالاً شماره‌دار) بعدی واقع در دنبالهٔ برنامه می‌رود. در ساختار تصمیم‌گیری «اگر p آنگاه q جز این r»، q هنگامی که p راست باشد اجرا می‌شود و r زمانی که p دروغ باشد.

پیش از ادامهٔ مطلب، کلمه‌ای در باب احتیاط می‌آوریم. هنگام به کار بردن نمادهای $\to$ و $\leftrightarrow$ محتاط باشید. استلزام و هم‌ارزی، همانگونه که از دو ستون آخر جدول ۲.۲ آشکار است، یکی نیستند.

اما، در **تعریف**، دو مفهوم فوق همراه یکدیگر می‌آیند. برای مثال در تعریف مثلث متساوی‌الساقین می‌توان نوشت: «اگر دو ضلع مثلثی به طولهای برابر باشند، مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامیم.» اما باید این برداشت را نیز داشته باشیم که هرگاه مثلثی را به عنوان متساوی الساقین تعریف کرده باشیم، دارای دو ضلع به طول برابر است. در نتیجه، هنگامی که تعریفی به صورت $p \to q$ داده شده باشد، در می‌یابیم که منظور واقعی آن $p \leftrightarrow q$ است.

اما، آنچه که در حالت تعاریف رخ می‌دهد در گزاره‌های استلزامی در حالت عمومی روی نمی‌نماید. بررسی بیشتر این نکته را برای مثال ۱۳.۲ می‌گذاریم.

نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ گرچه برای گزاره‌های سادهٔ p و q داده شده‌اند، چون به جای نمادهای p و q گزاره‌های مرکبی بنشانیم همچنان در کارند. مثالهای ۳.۲ تا ۵.۲ در توضیح این مطلب‌اند.

◀ مثال ۳.۲

به بررسی جدول ارزش گزارهٔ مرکب زیر می‌پردازیم: «من متخصص کامپیوترم، و اگر دستگاه رسام امروز خراب نباشد، ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.» این گزاره در زبان نمادها عبارت است از $q \wedge (\bar{r} \to p)$، که q، p و r آن قضایای نمایش داده شده در آغاز این بخش‌اند. آخرین ستون جدول ۳.۲ حاوی ارزشهای راستی این مطلب است. ستونهای قبل آن چگونگی تشکیل جدول ارزش را با در نظر گرفتن اجزای کوچکتر گزارهٔ مرکب مورد بحث و استفاده از نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ نشان می‌دهند.

◀ جدول ۳

p	q	r	$\bar{r}$	$\bar{r} \to p$	$q \wedge (\bar{r} \to p)$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱

◀ مثال ۴.۲

در جدول ۴.۲ جداول ارزش گزاره‌های مرکب $p \vee (q \wedge r)$ (ستون ۵) و $(p \vee q) \wedge r$ (ستون ۷) را مطرح کرده‌ایم.

◄ جدول ۴

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$[p\vee q]\wedge r$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

به علت متفاوت بودن ارزشهای راستی ستونهای ۵ و ۷ (در سطرهای ۵ و ۷)، باید از نوشتن گزارهٔ مرکبی چون $p\vee q\wedge r$ خودداری کنیم، چه بدون پرانتزهایی که مشخص کنند که کدام یک از رابطهای $\wedge$ و $\vee$ را باید ابتدا به کار برد، ایده‌ای دربارهٔ این که با $p\vee(q\wedge r)$ سروکار داریم یا با $(p\vee q)\wedge r$، نخواهیم داشت.

□

آخرین مثال این بخش به توضیح دو نوع خاص از قضایا می‌پردازد.

◄ مثال ۵.۲

نتایج ستونهای ۴ و ۶ جدول ۵.۲ آشکار می‌کنند که گزارهٔ $p\to(p\vee q)$ همواره راست است، در حالی که گزارهٔ $p\wedge(\bar{p}\wedge q)$ همواره دروغ است.

□

◄ جدول ۵

p	q	$p\vee q$	$p\to(p\vee q)$	$[\bar{p}\wedge q]$	$p\wedge[\bar{p}\wedge q]$
۰	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۰	۰

تعریف ۱.۲

گزارهٔ همواره راست را ***صادق*** (راستگو)[21] و گزارهٔ همیشه دروغ را کاذب[22] می‌نامیم.

در سراسر این بخش نماد .T را برای نمایش هر صادق و نماد .F را برای نمایش هر کاذب به کار می‌بریم.

می‌توانیم از مفاهیم صادق و استلزام در توصیف مقصودی که از قضیه داریم استفاده کنیم. در حالت عمومی، **قضیه**[23] گزاره‌ای است ریاضی که می‌توان (به کمک اثبات) راستی آن را نشان داد. خواننده بی‌شک با قضایا و اثباتهای آن در جبر و هندسهٔ دبیرستان برخورد کرده است.

بسیاری از قضایا را می‌توان به صورت زیر داد. اگر گزاره‌های p_1، p_2، p_3، ....، p_n فرضهای یک استلزام را نمایش دهند و q نتیجهٔ آن باشد، آنگاه چنین می‌گوییم که استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n)^* \to q$

هنگامی که راستی $p_1,p_2,p_3,\dots,p_n$ منجر به راستی q شود، قضیه است. (بنابراین اگر هر یک از $p_1,p_2,p_3,\dots,p_n$ دارای ارزش راستی ۱ باشند، q نیز هست.)

اگر هر یک از $p_1,p_2,p_3,\dots,p_n$ دروغ باشد، آنگاه $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n$ دروغ می‌شود. و استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n)\to q$، بی‌توجه به ارزش راستی q، راست است. در نتیجه، استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n)\to q$ با توجه به وضعیاتی که در این مرحله به توصیفشان پرداختیم، به شرطی که ارزش راستی q، هنگامی که هر p_i، $1\le i\le n$، دارای ارزش راستی ۱ است، ۱ باشد، قضیه (و صادق) است.

در بخش ۳.۲ مطالب بیشتری دربارهٔ قضایایی از این دست و چگونگی اثباتشان خواهیم آورد.

* تا این مرحله تنها با ترکیب عطفی دو گزاره سر و کار داشته‌ایم، بنابراین باید خاطر نشان کنیم که ترکیب عطفی n گزاره‌ای $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n$ تنها وقتی راست است که هر p_i، $1\le i\le n$، راست باشد. در مثال ۸.۴ بخش ۱.۴، با تفصیل بیشتری به ترکیب عطفی تعمیم یافتهٔ فوق خواهیم پرداخت.

یادداشتها:

1. combinatorial proof
2. statement
3. proposition
4. primitive
5. logical connectives
6. compound
7. negation
8. conjunction
9. disjunction
10. inclusive
11. exclusive
12. implication
13. hypothesis
14. conclusion
15. equivalence
16. truth value
17. truth tables
18. decision
19. solection
20. relational expression
21. Tautology
22. contradiction
23. theorem



تفریح اندیشهٔ ٦

تقاطع جاده و راه‌آهن

در حالی که از ویلای دوستمان به دهکدهٔ مجاور اتومبیل می‌راندیم، مجبور شدیم در مقابل تقاطع جاده و راه‌آهن سر راه توقف کنیم. هنگامی که منتظر برداشته شدن میله بعد از گذشتن قطار بودیم، میزبانم به طرف من برگشت و گفت: «چیز عجیبی است.»

پرسیدم: «چه‌چیز؟»

«خوب، به نظر می‌رسد در اغلب مواردی که من در این تقاطع توقف می‌کنم قطار، درست مثل حالا، از غرب به شرق می‌رود.»

پاسخ دادم: «تا آنجا که می‌شود ملاحظه کرد، مطلب غریبی در این موضوع نیست.»

در حالی که می راندیم دوستم گفت: «اما، نگاه کن، این خط تنها یک خط فرعی است و بین دهکده و ترمینال خط اصلی رفت و آمد می‌کند. برنامهٔ حرکت قطارها را نیز چک کرده‌ام. قطار بیست و چهار ساعته حرکت می‌کند و مسافرت در هر طرف نیم‌ساعت طول می‌کشد.»

در حالی که تنها در مورد آن خط از دیگران چیزهایی شنیده بودم، گفتم «در مورد تأخیرها چه؟»

«حرفش را هم نزن، قطار در هیچ یک از دو ترمینال بیش از دیگری نمی‌ایستد.»

با قیافه‌ای از خود راضی گفتم: «در این صورت یا خیالات برت داشته یا اتفاق محض است، چه برداشتم از حرفهایت این است که قطار هر ساعت یک‌بار از این تقاطع از غرب به شرق می‌رود، و یکبار در جهت مخالف، و واضحاً، احتمال توقف کردنت مقابل قطار در جهت غرب درست برابر احتمال آن در جهت شرق است.»

دوستم گفت: «نه، نمی‌تواند اتفاقی باشد. من صدها بار در ساعات شب و روز در دو جهت این جاده رانندگی کرده‌ام و الگویی برای دفعاتی که در این تقاطع ایستاده‌ام موجود نیست.»

دوستم، هنگامی که به مقصدمان رسیدیم، بازیرکی گفت: «خیالات هم برم نداشته است، در این مورد باید توضیحی عقلایی موجود باشد.»

این توضیح چیست؟

جواب در صفحه ۸٦

جواب نامه‌ها

آقای علی‌احمد هروی (مشهد)

از مقاله ارسالی شما متشکریم. برای مطالعهٔ خوانندگان، در اینجا خلاصه‌ای از آن را با کمی اصلاح می‌آوریم:

روش به‌دست آوردن مربع اعداد ، اگر a و b دو رقم یک عدد دو رقمی باشند، مربع این اعداد را می‌توان به‌روش زیر محاسبه کرد:

$$(\overline{ab})^2=\overline{\overline{a^2}\ \overline{2ab}\ \overline{b^2}}$$

برهان: درصورتی که $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی باشد می‌توان نوشت:

$$(\overline{ab})^2=(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$$

و باتوجه به‌مرتبهٔ یکان و دهگان و ... خواهیم داشت:

$$(\overline{ab})^2=\overline{\overline{a^2}\ \overline{2ab}\ \overline{b^2}}$$

مثال: مربع اعداد ۳۴ و ۴۱ را محاسبه کنید.

$$(34)^2=\overline{\overline{3^2}\ \overline{2\times3\times4}\ \overline{4^2}}=\overline{\overline{9}\ \overline{24}\ \overline{16}}=\overline{\overline{9}\ \overline{25}\ \overline{6}}$$

$$=\overline{\overline{11}\ \overline{5}\ \overline{6}}=1156$$

روش به‌دست آوردن مکعب، توان چهارم و توان پنجم و ... نیز به‌طریق مشابه می‌باشد:

$$(\overline{ab})^3=\overline{\overline{a^3}\ \overline{3a^2b}\ \overline{3ab^2}\ \overline{b^3}}$$

$$(\overline{ab})^4=\overline{\overline{a^4}\ \overline{4a^3b}\ \overline{6a^2b^2}\ \overline{4ab^3}\ \overline{b^4}}$$

. . . .

$$(\overline{ab})^n=\overline{\overline{a^n}\ \overline{\frac{n}{1!}a^{n-1}b}\ \overline{\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2}\ \ldots\overline{b^n}}$$

مربع اعداد سه رقمی را نیز می‌توان از طریق زیر محاسبه کرد:

$$(\overline{abc})^2=\overline{\overline{a^2}\ \overline{2ab}\ \overline{2ac+b^2}\ \overline{2bc}\ \overline{c^2}}$$

مربع اعداد چهار رقمی:

$$(\overline{abcd})^2=\overline{\overline{a^2}\ \overline{2ab}\ \overline{2ac+b^2}\ \overline{2bc+2bd}\ \overline{2ad+c}\ \overline{2cd}\ \overline{d^2}}$$

آقای احسان کامرانی، دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (پل‌دختر)

ضمن تشکر از ارسال مسایلی همراه با حل و راه‌حلی برای دستگاه منسوب به‌خیام به‌عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم از مسایل شما در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

آقای امیر توانبخش دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

از ارسال «جدولهای متقاطع اعداد» شما متشکریم. در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای یاسر علمی (مشهد)

از ارسال مطلبی در رابطه با محاسبهٔ $f^{(n)}(x)$ (مشتق nام $F(x)$) با

استفاده از تعریف مشتق متشکریم. اکنون برای مطالعهٔ خوانندگان این روش محاسبه را عیناً می‌آوریم.

طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

حال اگر $f'(x)$ را با $g(x)$ نمایش داده از $g(x)$ مشتق بگیریم، مشتق دوم عبارت $F(x)$ به‌دست می‌آید:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overbrace{(f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x))}^{g(x+\Delta x)} - (f(x+\Delta x) - f(x))}{(\Delta x)^2} \right)$$

پس از اختصار لازم داریم:

$$g'(x) = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} \right)$$

مثال: اگر $F(x)=x^2$، آنگاه $f''(x)$ طبق تعریف چنین است:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+2\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)^2 + x^2}{(\Delta x)^2} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 2$$

حال اگر از مشتق دوم $F(x)$ مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3} \right)$$

و مشتق چهارم $F(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f^{(4)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+4\Delta x) - 4f(x+3\Delta x) + 6f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^4} \right)$$

توجه: ضرایب fها همان ضرایب بسط دوجمله‌ای است.

به‌همین طریق می‌توان رابطهٔ زیر را حدس زد و به‌روش استقراء آن را ثابت کرد:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i f(x+(n-i)\Delta x)}{(\Delta x)^n} \right)$$

توجه: منظور از $f^{(n)}(x)$ مشتق nام $F(x)$ می‌باشد، و داریم:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

✎ آقای احمد فضلی دانشجوی رشته مهندسی مکانیک (شیراز)

ضمن تشکر از ارسال مطلب ارسالی شما تحت عنوان «راههای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط» و حل یک مسأله به‌عرض می‌رسانیم که در شماره‌های آینده مجله در جای مناسب از آن استفاده خواهیم کرد.

✎ شهرزاد توفیقیان، دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از مسایل حل شده ارسالی شما متشکریم. برای شماره‌های آینده مجله از آنان استفاده خواهیم کرد.

✎ خانم لالهٔ تراب‌نژاد دانش‌آموز رشته ریاضی (تبریز)

از مسایل حل‌شدهٔ ارسالی شما متشکریم. از آنها در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

✎ آقای حمیدرضا محمدی دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (اراک)

از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما متشکریم. در شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد.

✎ آقای سیدامیر موسوی، دانش‌آموز رشته ریاضی (قائمشهر)

ضمن تشکر از مسایل حل شدهٔ ارسالی شما به‌عرض می‌رسانیم که در صورت لزوم و در جای مناسب از آنان استفاده خواهیم کرد. آدرس مجلهٔ انگلیسی SPECTRUM برای ارسال مقالات چنین است:

MATHEMATICAL SPECTRUM HICKS BUILDING, THE UNIVERSITY SHEFFIELD S3 7RH, U.K.



حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۱۷

حل مسألهٔ ۱ :

می‌خواهیم ثابت کنیم $\sqrt{n}$ گنگ است. (n عددی طبیعی و مربع کامل نیست.)

توضیح: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b را با نماد (a,b) نمایش می‌دهند و ثابت می‌شود، اگر $(a,b)=1$ آنگاه $(a^n,b^n)=1$ و نیز اگر $a|b$ آنگاه $(a,b)=|a|$ حال به حل مسأله برمی‌گردیم:

فرض کنیم $\sqrt{n}$ گنگ نباشد (فرض خلف) و مثلاً $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ که $(p,q)=1$ در این صورت داریم،

$$n=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow nq^2=p^2 \Rightarrow q^2|p^2 \Rightarrow (p^2,q^2)=q^2 \qquad (1)$$

$$(p,q)=1 \Rightarrow (p^2,q^2)=1 \qquad (2)$$: از طرفی طبق فرض

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow q^2=1 \Rightarrow q=1$$

و $q=1$ تناقض است زیرا در این صورت $n=p^2$ و در صورت مسأله n مربع کامل نبوده، پس $\sqrt{n}$ گنگ است.

حل مسألهٔ ۲ :

بدیهی است که $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2 \geq 0$ بنابراین اگر قرار دهیم،

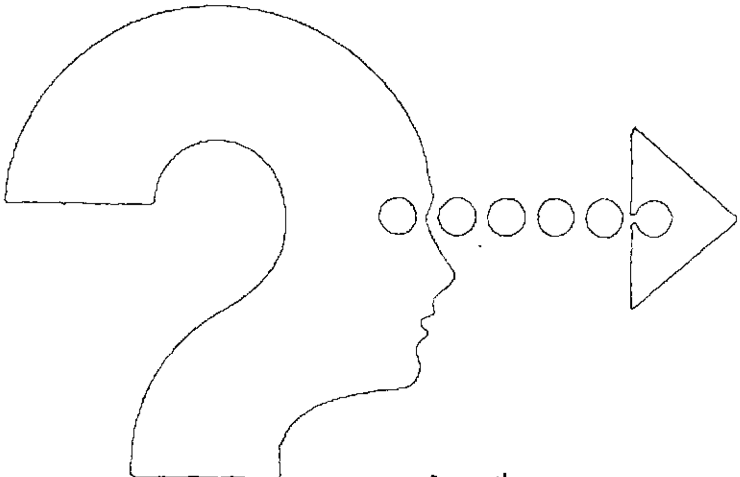
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=A \quad , \quad \sum_{k=1}^{n}a_kb_k=B \; , \; \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2=C$$

در این صورت داریم:

$$0\leq \sum(a_kx+b_k)^2=Ax^2+2Bx+C$$

از طرفی همواره $A\geq 0$ بنابراین برای برقراری نامساویِ $Ax^2+2Bx+C\geq 0$ باید $\Delta<0$ باشد یعنی باید $4B^2-4AC<0$ یا $B^2<AC$ که همان نامساویِ مطلوب است. (در حالت $A=0$ اثبات نامساوی کاری است بسیار ساده)

(حل هر دو مسأله از آقای هانی اسکندری، دبیرستان نمونه مردمی، بابل)



مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

■ مسائل ریاضیات ۲ (نظام جدید)

۱ ـ معادلات دو قطر مربعی به صورت $y=-2x-1$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ می‌باشند، فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات را حساب کنید.

۲ ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,2)$ از خط $y=2x+h$ برابر $\frac{\sqrt{5}}{h}$ است، مقدار مثبت h را حساب کنید.

۳ ـ خطی از دو نقطهٔ $A(-1,1)$ و $B(2,2)$ می‌گذرد. اگر این خط از نقطهٔ $C(m,\frac{1}{3})$ نیز بگذرد، مقدار m را حساب کنید.

۴ ـ نقاط A و B به ترتیب به طولهای ۳- و ۴ و نقطهٔ M روی یک محور مفروضند، اگر $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{-5}{6}$ باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

۵ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{2\sqrt[6]{16}}{5\sqrt[3]{16}-7\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{4}+2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}}$$

۶ ـ الف) معادلهٔ $m^3x=\frac{m^2}{3}+9x$ به ازای چه مقداری از m جواب ندارد؟

ب) معادلهٔ $m^2x+2(x+m)-3mx+1=0$ به ازای چه مقداری از m ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۷ ـ اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]$$

۸ ـ درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$(y-x)^2\sin^2 150^\circ-(x+y)^2\cos^2 120^\circ+xy=0$$

۹ ـ در سهمی به معادلهٔ $y=x^2-mx$ مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $x=2$ محور تقارن آن باشد.

■ مسائل ریاضیات ۴

۱ ـ مجموعهٔ جوابهای مشترک دو نامعادلهٔ:

$$2x^2-6x>0 \quad \text{و} \quad -3x^2-4x<1$$

را با شرط $x^2<\frac{1}{16}$ ، بیابید.

۲ ـ عبارت زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

$$P=\frac{x\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}}$$

۳ ـ عبارت زیر را تعیین علامت کنید:

$$P=\frac{(-x^2+3x-2)x}{(x^4+1)(x^2-1)(x^3+1)}$$

۴ ـ نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{|x-1|}{x+2}<1$$

۵ ــ ثابت کنید :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \ : \ a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \geq ab+bc+ac$$

۶ ــ ثابت کنید :

$$tg\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$$

۷ ــ اگر $\bar{x}$ و $S^{۲}$ و S به ترتیب میانگین، واریانس و انحراف معیار داده‌های آماری $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{n}$ باشند ثابت کنید میانگین، واریانس و انحراف معیار داده‌های آماری $kx_{۱}+b, kx_{۲}+b, \ldots, kx_{n}+b$ به ترتیب عبارت است از $(k\bar{x}+b)$ و $k^{۲}S^{۲}$ و kS.

۸ ــ اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ بوده به‌طوری که حاصل جمع درآیه‌های روی هر ستون آنها مساوی با ۳ باشد، ثابت کنید $A \times B$ ماتریسی است که حاصل جمع درآیه‌های روی هر ستون آن ۹ است.

۹ ــ دستگاه معادلات زیر را با روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases} ۴x-۵y=۳ \\ ۳x+۲y=۴ \end{cases}$$

۱۰ ــ حدود m را چنان تعیین کنید که دستگاه‌های معادلات زیر فاقد جواب باشند.

$$\begin{cases} ۲x-my=۱ \\ ۲mx+y=۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} -mx+y=۴ \\ ۲x-my=۲ \end{cases}$$

۱۱ ــ معادلهٔ ماتریسی زیر را حل کرده و در صورت وجود x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & x & x^{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=۶$$

۱۲ ــ به روش برداری ثابت کنید در هر مثلث اگر از وسط یک ضلع به وسط ضلع دیگر وصل کنیم پاره‌خط حاصل موازی و مساوی با نصف ضلع سوم است.

۱۳ ــ با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۵ رقمی :

الف) زوج می‌توان نوشت؟

ب) بزرگتر از سی هزار می‌توان نوشت؟

ج) مضرب ۵ و فرد می‌توان نوشت؟

۱۴ ــ از بین سه دانش‌آموز سال اول و چهار دانش‌آموز سال دوم سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است :

الف) احتمال آن که سه نفر همکلاسی باشند.

ب) فقط ۲ نفر از کلاس دوم باشند.

ج) لااقل ۱ نفر از کلاس اول باشند.

د) حداکثر ۲ نفر از کلاس دوم باشند.

مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

۱ـ الگوریتمی بنویسید که میانگین هندسی دو عدد مثبت مفروض را حساب کند. (میانگین هندسی دو عدد مثبت جذر حاصلضرب آنهاست. نمودار گردشی آن را رسم کنید.)

۲ـ الگوریتمی بنویسید که ماکسیمم سه عدد مفروض را بیابد. (راهنمایی: الگوریتم ماکسیمم یا الگوریتم MAX را تعمیم دهید. تعمیم کدام الگوریتم ساده‌تر است؟) نمودار گردشی آن را رسم کنید.

مسائل حسابان (۲)

۱ ــ تابع f به معادله

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx & x \geq ۲ \\ bx+۴ & x<۲ \end{cases}$$

مفروض است. اگر تابع f در $x_{۰}=۲$ مشتق‌پذیر باشد (($f'(۲)$ وجود داشته باشد) a و b را بیابید.

۲ ــ سوی تقعر و نقاط عطف منحنی تابع به معادله $y=\sqrt[۳]{۱-x^{۲}}$ را بیابید.

۳ ــ تناوب اصلی تابع f به معادله $f(x)=nx-[nx]$ را به کمک تعریف تابع متناوب بیابید. $n \in N$ و نماد [ ] نماد جزء صحیح است.

۴ ــ مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادله $y=\cos^{۲}x-\cos x$ وقتی $۰ \leq x \leq ۲\pi$.

۵ ــ مطلوبست محاسبه

$$\lim_{x \to ۱} (۲-x)^{tg\frac{\pi x}{۲}}$$

(حد)

۶ ــ مطلوبست رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع به معادله $y=x^{۲}e^{x}$.

۷ ــ مشتق تابع به معادله $y=e^{\frac{x}{Lnx}}$ را نسبت به x بیابید.

۸ ـ جدول تغییرات تابع به معادله $y=\log\frac{x}{x-1}$ را رسم کنید.

۹ ـ مطلوبست رسم هذلولی به معادله $4x^2-y^2-8x-2y-1=0$ و تعیین معادلات مجانبها و تعیین مختصات کانونها.

۱۰ ـ مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{8dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$$

مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

۱ ـ تابع f به معادله $f(x)=|x-1|-1$ در شرایط $f(2)=f(0)=0$ صدق می‌کند. آیا $f'(1)$ وجود دارد. چرا؟ آیا این مسأله با قضیه رول متناقض است چرا؟

۲ ـ تابع به معادله $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ را دربازه $[0,2]$ در نظر بگیرید. نقطه‌ای به طول c، $0<c<2$ را با استفاده از قضیه مقدار میانگین بیابید.

۳ ـ تابع f به معادله $f(x)=x^3(x-2)^2$ را دربازه $[-1,3]$ در نظر بگیرید. نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی و مطلق این تابع را دربازه $[-1,3]$ بیابید.

۴ ـ ثابت کنید هرگاه حاصلضرب دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی می‌نیمم است که دو عدد با هم مساوی باشند.

۵ ـ جدول رفتار و نمودار تابع به معادله $f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x}$ را رسم کنید.

۶ ـ با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$$

را بیابید.

۷ ـ بدون استفاده از محاسبه انتگرال، کران بالا و کران پایینی برای $\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx$ بدست آورید.

۸ ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(4x^5+6x^4)dx$

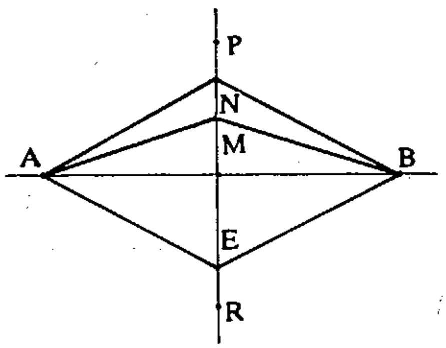
ب) $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x\left(e^{tgx}+e^2\right)}$

ج) $\int\frac{4x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

د) $\int \mathrm{Arctg}x\ dx$

سؤالات امتحان درس هندسه یک نظام جدید خرداد ماه ۷۵ (بعدازظهر)

۱ ـ نقطه‌های N ،M و E بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع و از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند.

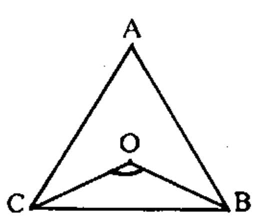


الف) نقاط P و R را برروی این عمودمنصف انتخاب می‌کنیم، حدس شما درباره فاصلهٔ P و R از دو سر خط پاره‌خط AB چیست؟

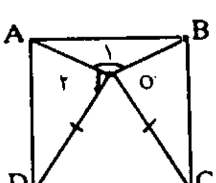
ب) براساس چه نوع استدلالی این حدس را زدید؟

پ) با استفاده از چه نوع استدلالی می‌توانیم با اطمینان بگوییم که فاصله هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است؟

۲ ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و OB و OC نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند. اندازهٔ زاویه $\hat{O}$ را پیدا کنید.

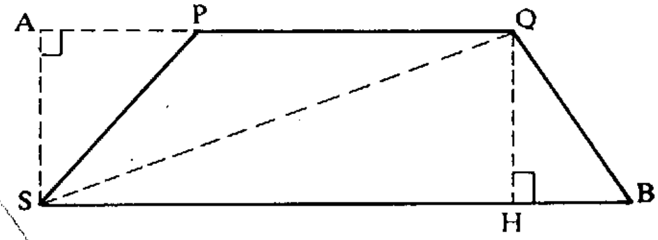


۳ ـ در شکل زیر ، ABCD مربع است. اندازهٔ $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ را به دست آورید.



۴ ــ ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند مساحت چهارضلعی برابر نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ قطرها خواهد بود.

۵ ــ در شکل زیر، $AS = h$ ، $PQ = a$ و $SB = b$ است. مساحت ذوزنقهٔ SPQB را حساب کنید. (با دلیل)

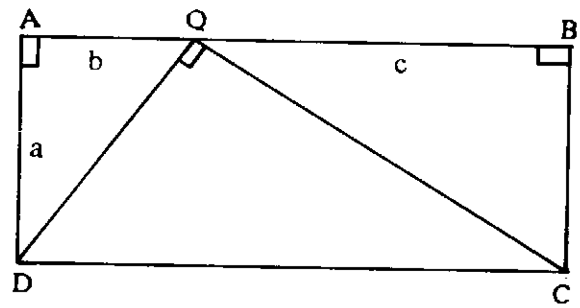


۶ ــ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a را حساب کنید.

۷ ــ مستطیل ABCD و مثلث قائم‌الزاویهٔ DQC در آن را در نظر بگیرید. اگر $AD = a$ ، $AQ = b$ و $QB = c$ ، ثابت کنید:

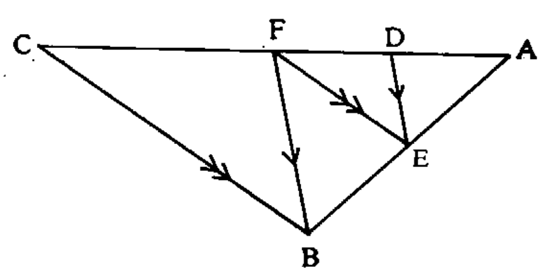
الف) $DC = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$

ب) a میانگین هندسی بین b و c است.

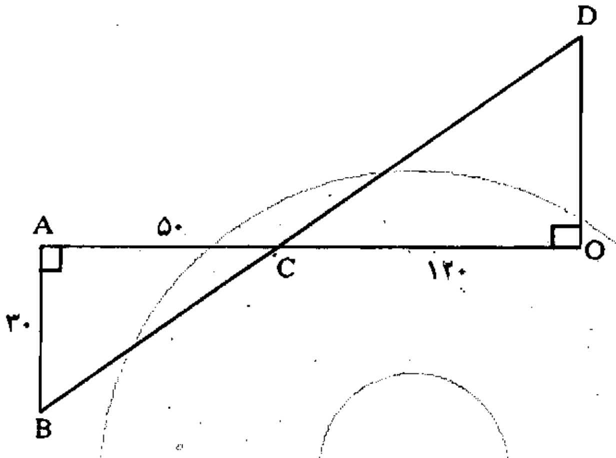


۸ ــ در مثلث ABC ، پاره‌خط DE موازی FB و پاره‌خط EF موازی BC است. با استفاده از قضیهٔ تالس، ثابت کنید:

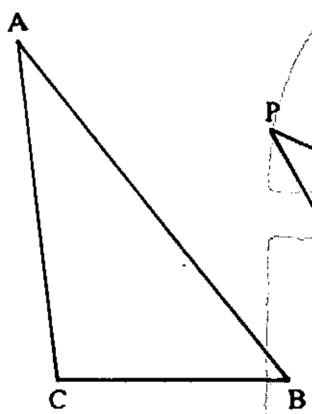
$$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

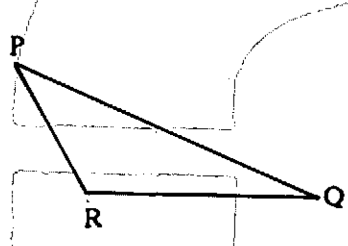


۹ ــ شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبهٔ عرض یک رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه یعنی اندازهٔ OD را محاسبه کنید.



۱۰ ــ طول ضلع‌های مثلث ABC ، ۱۰/۵ سانتی‌متر، ۱۳/۵ سانتی‌متر و ۲۱ سانتی‌متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول کوچکترین ضلع آن ۷ سانتی‌متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.





۱۱ ــ قطر مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ را به دست آورید.

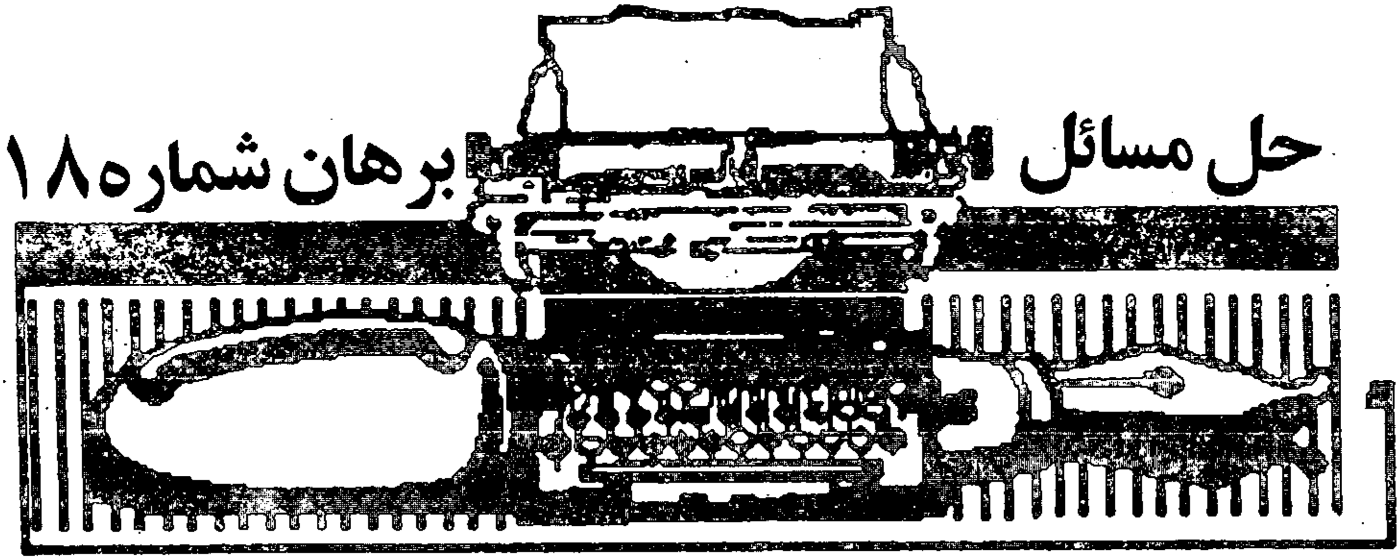
۱۲ ــ اصل کاوالیری را دربارهٔ مساحت‌ها بنویسید.

۱۳ ــ اگر ارتفاع و شعاع قاعدهٔ مخروطی به ترتیب ۲ و ۳ برابر شوند، حجم مخروط چند برابر می‌شود؟

۱۴ ــ مساحت سطح یک کره ۱۱۳/۰۴ سانتی‌متر مربع است.

الف) شعاع این کره را به دست آورید.

ب) حجم این کره را محاسبه کنید.



حل مسائل برهان شماره ۱۸

حل مسائل ریاضیات ۱ نظام جدید و ریاضیات جدید و جبر سال اول نظام قدیم

۱ ــ طبق قضیه‌های اصلی اجتماع و اشتراک داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B & (1) \\ A \cap B = A & (2) \end{cases}$$

از طرفی: $(A \cap B) \subseteq A \overset{\text{بنابر } 1}{\Rightarrow} (A \cap B) \cup A = A$

و نیز داریم: $A \subseteq (A \cup B) \overset{\text{بنابر } 2}{\Rightarrow} (A \cup B) \cap A = A$

۲ ــ طبق فرض $U = \{1, 2, \dots, k\}$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{2, 3, \dots, (k-4)\}$ و $B = \{1, 2, \dots, (k-6)\}$ و $k \geq 10$

بنابراین

$$A' = U - A = \{1, (k-3), (k-2), (k-1), k\}$$
$$B' = U - B = \{(k-5), (k-4), \dots, k\}$$
$$(A - B) = A \cap B' = \{(k-5), (k-4)\}$$
$$(B - A) = (B \cap A') = \{1\}$$

۳ ــ داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 2a + 2b + 2c$$
$$\Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = 0$$
$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

طرف اول همواره نامنفی است. پس تساوی وقتی برقرار است که هر یک از عبارتها برابر صفر باشد:

$$(a-1)^2 = 0 \quad , \quad (b-1)^2 = 0 \quad , \quad (c-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = b = c = 1}$$

۴ ــ می‌دانیم $a^2 \geq 0$ و $b^2 \geq 0$ پس:

$$a^2 + b^2 \geq 0 \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$2a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab \geq 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq ab}$$

۵ ــ

$$\begin{cases} x^2yz = 48 \\ xy^2z = 72 \\ xyz^2 = 96 \end{cases}$$

معادلات دستگاه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(x^2yz)(xy^2z)(xyz^2) = 48 \times 72 \times 96$$
$$\Rightarrow x^4y^4z^4 = 2^4 \times 3 \times 2^3 \times 3^2 \times 2^5 \times 3 = 2^{12} \times 3^4$$
$$\Rightarrow x^4y^4z^4 = 2^{12} \times 3^4 \Rightarrow (xyz)^4 = (2^3 \times 3)^4$$
$$\Rightarrow xyz = \pm 24 \qquad (1)$$

در این جا هر یک از معادلات دستگاه را به معادله (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2yz}{xyz} = \frac{48}{\pm 24} \Rightarrow x = \pm 2 \quad ,$$
$$\frac{xy^2z}{xyz} = \frac{72}{\pm 24} \Rightarrow y = \pm 3 \quad ,$$
$$\frac{xyz^2}{xyz} = \frac{96}{\pm 24} \Rightarrow z = \pm 4$$

با توجه به مثبت بودن x و y و z داریم:

$$x = 2 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = 4$$

۶ ــ ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم:

$$A = 3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} \times \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}-5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} \times \frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+2} - \frac{7\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= 3\left(\frac{2\sqrt{10}-10}{-15} + \frac{5\sqrt{10}+10}{6} - \frac{7\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= \frac{10-2\sqrt{10}}{5} + \frac{5\sqrt{10}+10}{2} - \frac{21\sqrt{10}}{10}$$
$$= \frac{20-4\sqrt{10}+25\sqrt{10}+50-21\sqrt{10}}{10} = \frac{70}{10} = 7 \Rightarrow \boxed{A = 7}$$

۷ ــ داریم:

$$3^{6x} = 81^{x+1} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{4(x+1)}$$
$$\Rightarrow 6x = 4(x+1) \Rightarrow 6x = 4x + 4$$
$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۸ ــ

$$A = \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9}} \quad (x \neq 0)$$
$$= \frac{x^7\left(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)}{\frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}$$
$$= \frac{x^7}{\frac{1}{x^3}} = x^{10} \Rightarrow \boxed{A = x^{10}}$$

۹ ــ با فرض $a = b + 1$ یا $a - b = 1$ خواهیم داشت:

$$A = 1 \times (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$= (a^8-b^8)(a^8+b^8) = a^{16} - b^{16}$$
$$\Rightarrow \boxed{A = a^{16} - b^{16}}$$

۱۰ ــ داریم:

$$n^4 - 2n^2 + 49 = n^4 + 14n^2 - 16n^2 + 49$$
$$= (n^4 + 14n^2 + 49) - 16n^2$$
$$= (n^2 + 7)^2 - 16n^2$$
$$= (n^2 + 7 - 4n)(n^2 + 7 + 4n)$$
$$= (n^2 + 4n + 7)(n^2 - 4n + 7)$$

حل مسائل ریاضیات ۳ (نظام جدید)

۱ ــ داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 = n - 1 \\ 1 + 2 = m + n \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \quad , \quad n = 1$$
$$B(1, 2) \; , \; D(-1, 1) \Rightarrow BD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \boxed{BD = \sqrt{5}}$$

۲ ــ نقاط M و N نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ قرینه‌اند، پس:

$$\begin{cases} y_M = x_N \\ y_N = x_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 1 = 3m - 1 \\ 2n = m + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = 3m \\ n = \dfrac{m+1}{2} \end{cases} \Rightarrow 3m = \frac{m+1}{2}$$

$$\Rightarrow 6m = m+1 \Rightarrow 5m = 1 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{5}} \,.$$

$$n = 3m = 3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{n = \frac{3}{5}}$$

۳ ــ با توجه به رابطهٔ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ و تساوی $\overline{AB} = -\overline{BA}$، داریم :

$$\frac{\overline{BC} + \overline{AB} - \overline{CA} - \overline{AC}}{\overline{CB} - \overline{CA} + \overline{BA} - \overline{AC}} = \frac{(\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{AC} - \overline{AC}}{-\overline{BC} - \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{AC}}$$

$$= \frac{\overline{AC}}{-(\overline{AB} + \overline{BC})} = \frac{\overline{AC}}{-\overline{AC}} = -1$$

(نقاط A و B و C متمایزند، بنابراین : $\overline{AC} \neq 0$)

۴ ــ قرینهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ نسبت‌به مبدأ مختصات $M'(-x,-y)$ است. بنابراین اگر در معادلهٔ خط مورد نظر x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم، قرینهٔ تمام نقاط خط نسبت به مبدأ مشخص می‌شوند :

$$13x - 7y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 13(-x) - 7(-y) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -13x + 7y - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad \boxed{13x - 7y + 5 = 0}$$

۵ ــ داریم :

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3 \times 2\sqrt{2}}} = \sqrt[15]{\sqrt{2^8 \times 2}} =$$

$$\sqrt[30]{2^9} = 2^{\frac{9}{30}} = 2^{0/3}$$

$$\left(\sqrt[20]{8}\right)^2 = \sqrt[20]{8^2} = \sqrt[20]{2^6} = 2^{\frac{6}{20}} = 2^{0/3}$$

بنابراین :

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2} + 2^{0/3} - 2^{0/3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$\frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$$

۶ ــ دامنهٔ متغیر x از حل دستگاه نامعادلات :

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 4x - 2\sqrt{4x-1} \geq 0 \\ 4x + 2\sqrt{4x-1} \geq 0 \end{cases}$$

به دست می‌آید : $x \geq \frac{1}{4}$

همچنین با مجذور کردن دو طرف معادله خواهیم داشت :

$$4x + 2\sqrt{4x-1} + 4x - 2\sqrt{4x-1} +$$

$$2\sqrt{16x^2 - 4(4x-1)} = 4$$

$$\Rightarrow 8x + 2\sqrt{16x^2 - 16x + 4} = 4$$

$$\Rightarrow 8x + 2\sqrt{(4x-2)^2} = 4$$

$$\Rightarrow 8x + 2|4x-2| = 4 \Rightarrow 8x + 4|2x-1| = 4$$

$$\Rightarrow 2x + |2x-1| = 1$$

$$x \geq \frac{1}{2} :\ 2x + 2x - 1 = 1 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} :\ 2x - (2x-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

بنابراین هر عدد حقیقی که در شرط $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ صدق کند، جواب معادله است، یعنی مجموعه جواب معادله چنین است :

$$\text{مجموعه جواب معادله} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

۷ ــ با توجه به شرط یک‌به‌یک بودن تابع f :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$\forall x_1 \,,\ x_2 \in D_f :\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\forall x_1 \,,\ x_2 \in D_f :\ \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}$$

$$\Rightarrow (ax_1 + b)(cx_2 + d) = (ax_2 + b)(cx_1 + d)$$

$$\Rightarrow acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd =$$

$$acx_1x_2 + adx_2 + bcx_1 + bd$$

$$\Rightarrow (ad - bc)x_1 - (ad - bc)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0$$

بنابراین با شرط $ad - bc \neq 0$ یا $ad \neq bc$ خواهیم داشت : $x_1 = x_2$

یعنی تابع f در $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ با شرط $ad \neq bc$ یک به یک است.

۸ ــ می‌دانیم رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ چنین است :

$$S\left(-\frac{b}{2a} \,,\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

بنابراین رأس سهمی به معادله $y = x^2 + px + q$ چنین است :

$$S\left(-\frac{p}{2} \,,\ \frac{4q - p^2}{4}\right) \,,\quad S(2 \,,\ -3)$$

پس :

$$\begin{cases} -\dfrac{p}{2} = 2 \\ \dfrac{4q - p^2}{4} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -4 \\ q = \dfrac{p^2 - 12}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{p = -4} \,,\ \boxed{q = 1}$$

۹ ــ داریم :

الف) $4^{3+6+9+\dots+3n} = 4^{3(1+2+3+\dots+n)}$

می‌دانیم :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

پس :

$$3 \times 4^{3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} = 3 \times 64 \Rightarrow 2^{3n(n+1)} = 2^6$$

$$\Rightarrow 3n(n+1) = 6 \Rightarrow n(n+1) = 2 \Rightarrow n^2 + n - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)(n+2) = 0 \Rightarrow n = 1 \ \text{یا}\ n = -2 \,,$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{n = 1}$$

ب) با فرض $a > 0$ و $x > 0$:

$$a^{\log x} = x^{\log a}$$

بنابراین :

$$x^{\log 3} + 3^{\log 10x} = 3^{\log x} + 3^{\log 10 + \log x}$$

$$= 3^{\log x} + 3 \times 3^{\log x} = 4 \times 3^{\log x} = 36$$

$$\Rightarrow 3^{\log x} = 9 \Rightarrow 3^{\log x} = 3^2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 100}$$

۱۰ ــ داریم :

$$a_{10} + a_{17} = 5m + 3n \,,$$

$$a_k + a_s = 3m + 2n + 2m + n = 5m + 3n$$

$$(a_s = 2m + n \,,\ a_k = 3m + 2n) \,,\ a_{10} + a_{17} = a_k + a_s$$

پس :

$$\begin{cases} a_k = a_{10} \\ a_s = a_{17} \end{cases} \ \text{یا}\ \begin{cases} a_k = a_{17} \\ a_s = a_{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 10 \\ 2m + n = 17 \end{cases} \quad \text{یا}$$

$$\begin{cases} 3m + 2n = 17 \\ 2m + n = 10 \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m = 3 \,,\ n = 4 \\ \text{یا} \\ m = -31 \,,\ n = 24 \end{array}\right.$$

حل مسائل جبر و احتمال(سال‌سوم ریاضی نظام جدید)

۱ ــ فرض کنیم $A \times \varnothing \neq \varnothing$ پس باید (x,y)ای در $A \times \varnothing$ وجود داشته باشد و طبق تعریف ضرب دکارتی باید $x \in A$ و $y \in \varnothing$، که $y \in \varnothing$ امکان ندارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی $A \times \varnothing = \varnothing$.

۲ ــ می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد صحیح بر k یکی از k عدد ۰ یا ۱ یا ۲ ... یا $(k-1)$ می‌تواند باشد مثلاً باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر ۵ یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ می‌تواند باشد حال اگر $(k+1)$ عدد صحیح داشته باشیم آنها را کبوترهایی فرض کنیم و k عدد صفر تا $(k-1)$ را لانه‌های کبوتر در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری لااقل در یکی از لانه‌ها می‌بایست بیش از یک کبوتر جای بگیرد یعنی لااقل دو عدد از این $(k+1)$ عدد باقی مانده تقسیمشان بر k، مساوی یکدیگر است.

۳ ــ می‌خواهیم به استقراء ثابت کنیم تعداد زیر مجموعه‌های یکی مجموعهٔ n عضوی مانند A برابر است با 2^n . اگر $n = 1$ در این صورت A تک عضوی است و زیرمجموعه‌های آن عبارتند از A و $\varnothing$ که $2 = 2^1$ نیز همین عدد را نشان می‌دهد.

حال فرض کنیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی 2^k باشد (فرض استقراء). ثابت می‌کنیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی، 2^{k+1} است. از طرفی اگر یک عضو به اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲ برابر می‌شود زیرا با اضافه کردن همان یک عضو به هر یک از زیرمجموعه‌های قبلی به همان تعداد زیرمجموعهٔ جدید ساخته می‌شود پس :

= تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $(k+1)$ عضوی

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی $\times 2 = 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

۴ ــ طبق فرض داریم :

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (b-d) = 5(a-c)$$

انعکاسی: ۱) $\overbrace{(b-b)} = 5\overbrace{(a-a)} \Rightarrow (a,b)R(a,b)$

تقارنی: ۲) فرض کنیم $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (b-d) = 5(a-c)$

$$\Rightarrow (d-b) = 5(c-a) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$$

تعدی: ۳) فرض کنیم $(a,b)R(c,d)$ و $(c,d)R(e,f)$

$$\Rightarrow (b-d) = 5(a-c) \ \text{و}\ (d-f) = 5(c-e)$$

جمع طرفین تساوی‌ها

$$\Rightarrow (b - d + d - f) = (5a - 5c + 5c - 5e)$$

$$\Rightarrow (b-f) = 5(a-e) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

۵ ــ کافی است سه دایره به شعاع ۱ و به مرکز هر یک از سه رأس مثلث رسم کنیم. مطابق شکل اگر نقطه در داخل مثلث و خارج هر یک از سه دایره انتخاب شود فاصله‌اش از هر یک

از سه رأس از ۱ بیشتر است و احتمال آن برابر است با مساحت قسمت ذکر شده به مساحت کل مثلث، و برای محاسبهٔ قسمت هاشور خورده کافی است مساحت سه قطاع را محاسبه و حاصل جمع آنها را از مساحت کل مثلث کم کنیم:

$$\text{مساحت هر قطاع} = \frac{60}{360}\times\pi\times 1^2 = \frac{1}{6}\pi$$

$$\text{مساحت سه قطاع} = 3\times\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = \left(\frac{9}{4}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}$$

$$P(A) = \frac{\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}}{\frac{9}{4}\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{9\sqrt{3}} = 1-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

۶ ــ دو پیشامد داده شده مستقل از هم بوده و می‌توان از اصل ضرب احتمالات در پیشامدهای مستقل از هم استفاده کرد و خواهیم داشت:

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)}_{\text{هردو آبی}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{هردو قرمز}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\right)}_{\text{هردو سفید}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times 0\right)}_{\text{هردو سبز}}$$

۷ ــ

الف) $A-(B\cup C) = A\cap(B\cup C)' = (A\cap A)\cap(B'\cap C')$

$\overset{\text{جابجایی و شرکت‌پذیری}}{=} (A\cap B')\cap(A\cap C') = (A-B)\cap(A-C)$

ب) $A-(B\cap C) = A\cap(B\cap C)' = A\cap(B'\cup C')$

$\overset{\text{توزیع‌پذیری}}{=} (A\cap B')\cup(A\cap C') = (A-B)\cup(A-C)$

۸ ــ اگر بخواهیم عدد کوچکتر از ۴ باشد باید به مجموعهٔ {۱،۲،۳} تعلق داشته باشد از طرفی طبق فرض احتمال آمدن هر عدد زوج ۳ برابر احتمال آمدن هر عدد فرد است پس بنابراین قوانین احتمالات و قانون تخصیص احتمال مقبول داریم:

$$\left.\begin{matrix}P(1)=P(3)=P(5)\\ P(2)=P(4)=P(6)\end{matrix}\right\} \ ,\ P(2)=3P(1)$$

$$\Rightarrow P(1)+P(2)+\dots+P(6)=1$$
$$\Rightarrow P(1)+3P(1)+P(1)+3P(1)+P(1)+3P(1)=1$$
$$\Rightarrow P(1)=\frac{1}{12}$$
$$P(1)=\frac{1}{12}\Rightarrow P(2)=\frac{3}{12}\ ,\ P(3)=\frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow P(A)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

۹ ــ برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم

$$A = 1^{1375}+3^{1375}+7^{1375}+5^{1375}$$

بر ۵ از هم نهشتی به پیمانهٔ ۵ کمک می‌گیریم:

$$I)\ 1^{1375}=1\overset{5}{\equiv}1$$

$$II)\ 3^2=9\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow(3^2)^{687}\overset{5}{\equiv}(-1)^{687}\Rightarrow 3^{1374}\overset{5}{\equiv}-1$$

$$\Rightarrow 3^{1374}\times 3\overset{5}{\equiv}(-1)\times 3=-3\ ,\ -3\overset{5}{\equiv}2\Rightarrow 3^{1375}\overset{5}{\equiv}2$$

$$III)\ 7^2=49\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow(7^2)^{687}\overset{5}{\equiv}-1\Rightarrow 7^{1374}\times 7\overset{5}{\equiv}-1\times 7$$

$$\Rightarrow 7^{1375}\overset{5}{\equiv}-7\ ,\ -7\overset{5}{\equiv}3\Rightarrow 7^{1375}\overset{5}{\equiv}3$$

$$IV)\ 5\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow 5^{1375}\overset{5}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}1+2+3+0=6\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}6\ ,\ 6\overset{5}{\equiv}1\Rightarrow A\overset{5}{\equiv}1$$

۱۰ ــ چون طبق فرض $z_1=1+i$ پس $tg\theta=\frac{x}{y}=1$ بنابراین $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta\Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

اگر $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$$z_0^{1375}=\cos\left(1375\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(1375\frac{\pi}{3}\right)$$

از طرفی $1375\frac{\pi}{3}=458\pi+\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow z_0^{1375}=\cos\left(458\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(458\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z_0^{1375}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=z_0$$

حل مسائل حسابان (۱)

۱ ــ حل اولاً: برد دو تابع f و g هر دو $[-1,1]$ است و تابع gof وقتی قابل تشکیل است که اشتراک R_f و D_g تهی نباشد. چون $R_f=[-1,1]$ و $D_g=R$ درنتیجه $R\cap[-1,1]=[-1,1]$ پس تابع gof قابل تشکیل است.

حل ثانیاً:

$$D_{gof}=\{x \mid x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}$$
$$(1):\ x\in D_f\Rightarrow x\in R$$
$$(2):\ f(x)\in D_g\Rightarrow \sin x\in R$$

همواره برقرار است $\Rightarrow D_{gof}=R$

۲ ــ

$$f(x)=mx^3+(m-1)x^2+(n-2)x+(n+1)$$
$$f(-x)=-mx^3+(m-1)x^2-(n-2)x+(n+1)$$

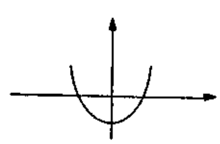
اگر f فرد باشد باید ضریب x^2 و $(n+1)$ صفر باشد یعنی $m=1$ و $n=-1$ زیرا:

$$\Rightarrow f(x)=x^3-3x$$
$$\Rightarrow f(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$$

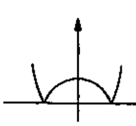
اگر f زوج باشد باید ضریب x^3 و ضریب x صفر باشد. یعنی $m=0$ و $n=2$ زیرا

$$\Rightarrow f(x)=-x^2+3\Rightarrow f(-x)=-x^2+3=f(x)$$

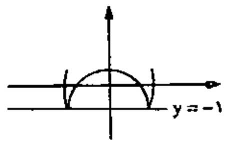
۳ ــ ابتدا نمودار تابع $y_1=x^2-2$ را رسم می‌کنیم.



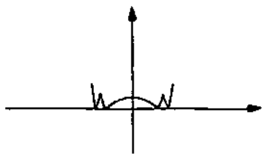
سپس نمودار تابع $y_2=|x^2-2|$ را رسم می‌کنیم.



آنگاه نمودار تابع $y_3=\left||x^2-2|-1\right|$ را رسم می‌کنیم.



حال نمودار تابع $y=\left|\left||x^2-2|-1\right|\right|$ را رسم می‌کنیم.



۴ ــ

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{\sin x^2}\sim\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(2x)^2}{x^2}=8\end{cases}$$

$$\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\times\right.$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=$$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{1+\sin x-1+\sin x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{2\sin x}\sim$$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}=$$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

۵ ــ

$$y=\frac{1}{(x-a)^2}\Rightarrow y'=\frac{-2}{(x-a)^3}\Rightarrow y''=\frac{-6}{(x-a)^4}$$

$$y''=-\frac{6}{(x-a)^4}=-3\times\frac{-2}{(x-a)^3}\times(x-a)\times\frac{1}{(x-a)^2}$$

$$\Rightarrow y''=-3y'(x-a)y\Rightarrow y''+3y'y(x-a)=0$$

۶ ــ

$$x\to\frac{\pi^-}{6}\Rightarrow$$

حد چپ $\quad \lim f(x)=\left[\frac{1^-}{2}-\frac{1}{2}\right]+a=[0^-]+a=-1+a$

$$x\to\frac{\pi^+}{6}\Rightarrow$$

حد راست $\quad \lim f(x)=\left[\frac{1^+}{2}+\frac{1}{2}\right]+b=[1^+]+b=1+b$

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left[-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\right]=\left[-\left(\frac{3/14}{6}+0/5\right)\right]=$$

مقدار تابع $\quad [-(0/52+50)]=[-1/02]=-2$

$-1+a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$,

$1+b=-2 \Rightarrow \boxed{b=-3}$

۷ ـ فرض می‌شود

$\frac{a}{c}=m \;,\; \frac{b}{c}=n \;,\; \frac{d}{c}=k$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{mx+n}{x+k} \quad o\left|\begin{matrix} 2= \text{مجانب قائم} \\ 1= \text{مجانب افقی}\end{matrix}\right.$$

مجانب قائم : $x=-k=2 \Rightarrow \boxed{k=-2}$,

مجانب افقی : $y=m=1 \Rightarrow \boxed{m=1}$

$$A\Big|_{-1}^{0} \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} -1=\frac{0+n}{0+k} \Rightarrow -1=\frac{n}{-2} \Rightarrow \boxed{n=2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x+2}{x-2}$$

۸ ـ

$S=80t-20t^2$

$$V=\frac{ds}{dt}=80-40t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ V=0 \end{cases}$$

یعنی پس از (۲) ثانیه قطار متوقف می‌شود.

$t=2 \Rightarrow S=80(2)-20\times 4=160-80=80$ متر

حل مسائل انتگرال دیفرانسیل(۱)

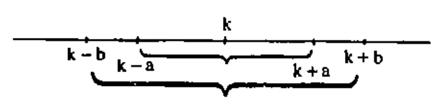
۱ ـ فرض می‌کنیم $a,b,k\in R$ و k عدد مورد نظر باشد. N و N' دو همسایگی متقارن عدد k باشند.

$N(k,a)=(k-a,k+a)$

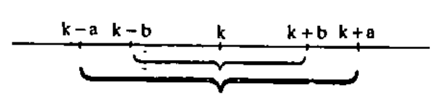
و

$N'(k,b)=(k-b,k+b)$

اگر $b>a$ $\quad (k-a,k+a)\cap(k-b,k+b)=(k-a,k+a)$



اگر $a>b$ $\quad (k-a,k+a)\cap(k-b,k+b)=(k-b,k+b)$



۲ ـ می‌دانیم

$$\forall x\in[1,+\infty) \Rightarrow \begin{cases} [x]=n \quad \text{یک عدد فرد} \\ \text{یا} \\ [x]=n \quad \text{یک عدد زوج} \end{cases}$$

درنتیجه دنباله $\{(-1)^{[x]}\}$ وقتی، عدد فرد $n=[x]$ برابر (-1) و وقتی عدد زوج $n=[x]$ برابر $(+1)$ است. حال ثابت می‌کنیم جملات این دنباله نمی‌تواند در ε همسایگی هیچ عددی قرار گیرد. فرض می‌کنیم این دنباله همگرا و حدّ آن عدد L باشد.

$$n>M \Rightarrow |(-1)^{[x]}-L|<\varepsilon$$

(الف) $\begin{cases} n>M \Rightarrow |-1-L|<\varepsilon \Rightarrow |L+1|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<L+1<\varepsilon \\ n \text{ فرد باشد} \\ \Rightarrow -1-\varepsilon<L<-1+\varepsilon \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} n>M \Rightarrow |+1-L|<\varepsilon \Rightarrow |L-1|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<L-1<\varepsilon \\ n \text{ زوج باشد} \\ \Rightarrow 1-\varepsilon<L<1+\varepsilon \end{cases}$

حال اگر $\varepsilon=\frac{1}{4}$ فرض شود از یک طرف $-\frac{5}{4}<L<-\frac{3}{4}$ و از طرفی $\frac{3}{4}<L<\frac{5}{4}$ و قرار گرفتن L در آن واحد در این دو نامساوی غیرممکن است پس دنباله فوق همگرا نیست.

۳ ـ می‌خواهیم نشان دهیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$ همگرا است.

می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=1$$

پس سری فوق به عدد (۱) همگرا است.

۴ ـ

$$\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1}{4x^2+1}=1\right.$$

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists M\in N \;:\; x>M\in N \Rightarrow \left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{4x^2+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{2}{4x^2+1}<\varepsilon$$

توجه: $2=|-2|$ و $|4x^2+1|=4x^2+1$

هرگاه طرفین این نامساوی را معکوس کنیم جهت عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{4x^2+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 4x^2+1>\frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow 4x^2>\frac{2}{\varepsilon}-1 \Rightarrow x^2>\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |x|>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}} \qquad \text{داریم:} \begin{cases} |x|=x \\ x\to+\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow x>\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

اگر $M\geq\left[\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}}\right]+1$ آنگاه استلزام فوق درست است.

۵ ـ

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+x^2\right)=3 \quad \text{یا}$$

$$\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)=3$$

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0 \;:\; 0<x-1<\delta \Rightarrow |x^2+x+1-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2+x-2|<\varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی به مرکز ۱ و شعاع ۱ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x\to1^+ \\ R=1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<2$$

$$\Rightarrow 3<x+2<4$$

عدد (۴) کران بالای $|x+2|$ است.

اگر $|x-1|\times4<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |x-1|_{x\to1^+}<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0<x-1<\frac{\varepsilon}{4} ,$$

$$\delta=\operatorname{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

۶ ـ می‌دانیم

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to0}(1-\cos x)=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

۷ ـ منحنی این تابع می‌تواند یک مجانب افقی و حداکثر دو مجانب قائم داشته باشد.

الف:

$$\Delta<0 \Rightarrow m^2-12<0 \Rightarrow m^2<12 \Rightarrow -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$$

ب:

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-12=0 \Rightarrow m^2=12 \Rightarrow m=\pm2\sqrt{3}$$

ج:

$$\Delta>0 \Rightarrow m^2-12>0 \Rightarrow m^2>12 \Rightarrow \begin{cases} m>2\sqrt{3} \\ \text{یا} \\ m<-2\sqrt{3} \end{cases}$$

۸ ـ یک فرمول از مشتق $k,n\in R$

$$\text{اگر } y=\frac{k}{(x-a)^n} \Rightarrow y'=\frac{-kn}{(x-a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow y'=\frac{-3}{(x-1)^4} \;,\; y''=\frac{12}{(x-1)^5}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{12}{(x-1)^5}=-4\times\frac{-3}{(x-1)^4}\times\frac{1}{(x-1)^3}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow y''=-4y'y(x-1)^2 \Rightarrow y''+4y'y(x-1)^2=0$$

۹ ـ

$$y=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$x=8 \Rightarrow y=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$m_{\text{مماس}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{2}{3\times2}=\frac{1}{3} \Rightarrow m_{\text{قائم}}=-3 \Rightarrow A\Big|_{4}^{8} \;,\; m_{\text{قائم}}=-3$$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۴ = -۳(x - ۸)$ قائم

$\Rightarrow y = -۳x + ۲۸$ معادله خط قائم

$\begin{cases} y = -۳x + ۲۸ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = -۳x + ۲۸ \Rightarrow ۴x = ۲۸$

$\Rightarrow x = ۷ \Rightarrow M \begin{vmatrix} ۷ \\ ۷ \end{vmatrix}$

نقطه تقاطع خط قائم با خط نیمساز ربع اول

۱۰ ـ متر بر ثانیه ۱۳ = x'_1 و $S^۲ - x^۲ = (۵۰)^۲$

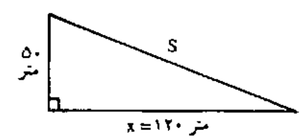
نسبت به t مشتق می‌گیریم $۲SS'_1 - ۲xx'_1 = ۰$

داریم $S^۲ - x^۲ = ۵۰^۲ \Rightarrow S^۲ - (۱۲۰)^۲ = (۵۰)^۲$

$\Rightarrow S^۲ = ۱۴۴۰۰ + ۲۵۰۰ = ۱۶۹۰۰ \Rightarrow S = ۱۳۰$

$۲SS'_1 - ۲xx'_1 = ۰ \Rightarrow SS'_1 = xx'_1 \Rightarrow ۱۳۰ S'_1 = ۱۲۰(۱۳)$

$\Rightarrow S'_1 = ۱۲$ متر بر ثانیه



پس قایق با سرعت ۱۲ متر بر ثانیه به ناظر نزدیک می‌شود

حل مسائل کامپیوتر سال سوم نظام جدید

۱ـ حل:

۰ـ شروع کن

۱ـ سه عدد را بگیرید و آنها را به ترتیب A، B و C بنامید.

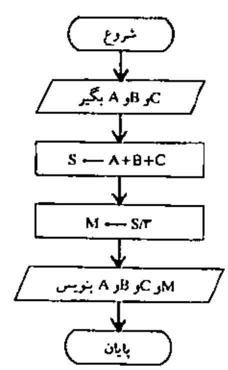
۲ـ مقدار A+B+C را در S جایگزین کنید S ⟵ A+B+C.

۳ـ خارج قسمت S/۳ را در M جایگزین کنید M ⟵ S/۳

۴ـ مقادیر A، B، C و M را چاپ کنید.

۵ـ پایان

نمودار گردشی آن به صورت زیر است:



۲ـ حل:

۰ـ شروع کن

۱ـ سه عدد مثبت را بگیرید و آنها را به ترتیب A، B و C بنامید.

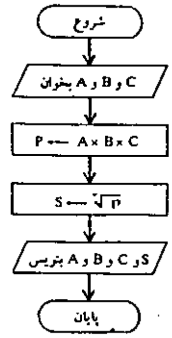
۲ـ مقدار P ⟵ A×B×C را به دست آورید.

۳ـ حاصل $\sqrt[۳]{P}$ را S بنامید. $S \leftarrow \sqrt[۳]{P}$

۴ـ A، B و C و S را چاپ کنید.

۵ـ پایان

نمودار گردشی آن به صورت زیر است:



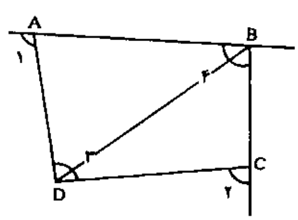
پاسخ سؤالهای امتحان درس هندسهٔ یک نظام جدید متوسطه رشته عمومی در خرداد ماه ۱۳۷۵ نوبت صبح

۱ ـ الف) هر یک از این دو نقطه از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

ب) استقرایی

پ) استنتاجی

۲ ـ چهار ضلعی حاصل را ABCD می‌نامیم و قطر BD را رسم می‌کنیم. زاویهٔ ۱، زاویهٔ خارجی مثلث ABD و زاویهٔ ۲ زاویهٔ خارجی مثلث BCD است پس داریم:



$\hat{۱} = A\hat{B}D + A\hat{D}B$ (۱)

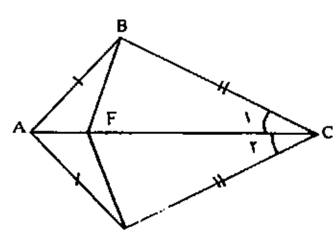
$\hat{۲} = C\hat{B}D + C\hat{D}B$ (۲)

از جمع کردن عضوهای نظیر این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$\hat{۱} + \hat{۲} = (A\hat{B}D + C\hat{B}D) + (A\hat{D}B + C\hat{D}B)$

و از آنجا داریم: $\hat{۱} + \hat{۲} = \hat{۳} + \hat{۴}$

۳ ـ دو مثلث ABC و ACD به دلیل تساوی سه ضلع



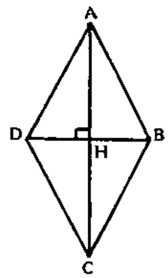
نظیر همنهشتند، زیرا:

AB = AD ، BC = CD ، AC = AC

در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، و از آنجا مثلثهای BCF و DCF به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع همنهشت هستند زیرا: $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و CF = CF ، BC = CD بنابراین BF = DF است.

۴ ـ در لوزی ABCD داریم:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$



با توجه به اینکه قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، اگر نقطهٔ برخورد دو قطر لوزی را H بنامیم، خواهیم داشت:

$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} DB.AH \ ,\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲} DB.CH$

از آنجا:

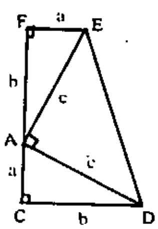
$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} DB.AH + \frac{۱}{۲} DB.CH$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} DB(AH + CH) = \frac{۱}{۲} DB.AC$

$\Rightarrow \boxed{S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} DB.AC}$

۵ ـ الف) $S_{CDEF} = \frac{۱}{۲}(a+b)(a+b)$

$S_{CDEF} = \frac{۱}{۲}(a+b)^۲$



ب) $S_{ACD} = \frac{۱}{۲}ab \ ,\ S_{AEF} = \frac{۱}{۲}ab$

$S_{ADE} = \frac{۱}{۲} AE.AD = \frac{۱}{۲} C.C = \frac{۱}{۲} C^۲$

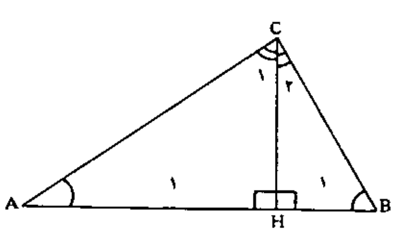
پ) $S_{CDEF} = S_{ACD} + S_{AFE} + S_{ADE}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(a+b)^۲ = \frac{۱}{۲}ab + \frac{۱}{۲}ab + \frac{۱}{۲}c^۲$

$\Rightarrow (a+b)^۲ = ۲ab + c^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab = ۲ab + c^۲$

$\Rightarrow \boxed{c^۲ = a^۲ + b^۲}$

۶ ـ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH متشابه‌اند زیرا $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰°$ و $\hat{B} = \hat{A}_1$ زیرا هر دو متمم زاویهٔ A هستند.



از تشابه این مثلث نتیجه می‌شود:

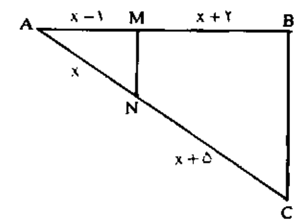
$\frac{CH}{AH}=\frac{HB}{CH}\Rightarrow CH^{۲}=AH.HB$

۷ ــ

$C=\sqrt{۴\times ۲۵}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

۸ ــ بنابر قضیهٔ تالس داریم:

$MN\parallel BC\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB}\Rightarrow$



$\frac{x}{x+۵}=\frac{x-۱}{x+۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x=x^{۲}+۴x-۵$

$\Rightarrow ۲x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$

۹ ــ از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و ACD داریم:

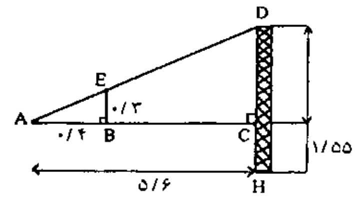
$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}\Rightarrow \frac{۰/۴}{۵/۶}=\frac{۰/۳}{CD}$

$\Rightarrow CD=۴/۲m$

از طرفی

از آنجا خواهیم داشت:

$DH=CH+CD=۱/۵۵+۴/۲=۵/۷۵m$



۱۰ ــ نسبت ضلعهای متناظر این دو مثلث را می‌نویسیم

داریم:

الف) $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \frac{y}{AB}=\frac{۲/۵}{۷/۵}=\frac{۲}{x}$

اگر AB = ۳ آنگاه y = ۱ می‌باشد. $\Rightarrow x=۶\Rightarrow y=۱$

ب) نسبت محیطهای مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است یعنی $\frac{۲P'}{۲P}=\frac{۱}{۳}$ محاسبهٔ محیطها نیز این مطلب را نشان می‌دهد زیرا

$۲P'=۲+۲/۵+۱=۵/۵$

$۲P=۶+۷/۵+۳=۱۶/۵$

$\frac{۲P'}{۲P}=\frac{۵/۵}{۱۶/۵}=\frac{۱}{۳}$

پ) نسبت ارتفاعهای متناظر نیز برابر نسبت تشابه دو مثلث است یعنی $\frac{C'H'}{CH}=\frac{۱}{۳}$ از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه A'H'C' و AHC نیز ثابت می‌شود که نسبت ارتفاعهای متناظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۱ ــ دو برابر می‌شود زیرا:

طول یال $= a \Rightarrow$ طول قطر مکعب $= a\sqrt{۳}$

طول یال $= ۲a \Rightarrow$ طول قطر مکعب $= ۲a\sqrt{۳}$

۱۲ ــ در شکل فضایی و صفحه‌ای را که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند در نظر می‌گیریم. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطعهای حاصل دارای مساحتهای برابر باشند، آنگاه حجم این دو شکل برابر است.

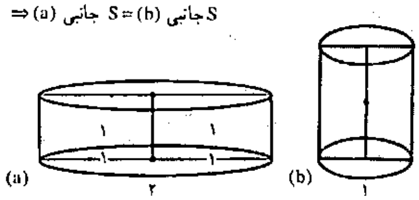
۱۳ ــ

الف) ارتفاع × محیط قاعده = S جانبی استوانه قائم

S جانبی (a) $= ۲\pi\times ۲\times ۱=۴\pi cm^{۲}$

S جانبی (b) $= ۲\pi\times ۱\times ۲=۴\pi cm^{۲}$

$\Rightarrow$ S جانبی (a) = S جانبی (b)



ب) ارتفاع × سطح قاعده = حجم استوانه $= \pi R^{۲}h$

حجم (a) $= \pi(۲)^{۲}\times ۱=۴\pi cm^{۳}$

حجم (b) $= \pi(۱)^{۲}\times ۲=۲\pi cm^{۳}$

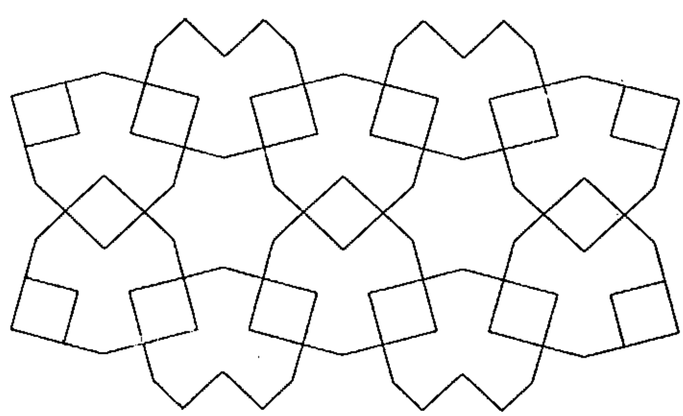
$\Rightarrow$ حجم (a) = ۲ × حجم (b)

۱۴ ــ داریم:

سطح کره $= ۴\pi R^{۲} \Rightarrow$ سطح توپ $= ۴\pi\times ۱۰۰=۴۰۰\pi cm^{۲}$

حجم کره $= \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow$ حجم توپ $= \frac{۴}{۳}\pi\times ۱۰^{۳}$

$=\frac{۴۰۰۰}{۳}\pi cm^{۳}$



جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱: M، F، B، C، و S در طبقه‌های اول تا پنجم زندگی می‌کنند.

روش معقول حل معماهایی از این دست استفاده از جدولی ساده (ایتالیک) است.

		طبقه				
		۱	۲	۳	۴	۵
خانوادهٔ B	A					×
خانوادهٔ C	B	×		×		×
خانوادهٔ F	C	×		×		×
خانوادهٔ M	D	×	×			
خانوادهٔ S	E			×		

هر محل واقع در ماتریس فوق مکانی ممکن برای یک خانواده است. هنگامی که تمام محلهای واقع در یک سطر یا یک ستون، جز یکی، حذف شود، جای باقیمانده محلی صریح و مشخص است.

شرط ۱، A ۵ را حذف می‌کند. شرط دوم B۱ را حذف می‌کند. C ۱ و C ۵ توسط شرط سوم حذف می‌شوند؛ D ۱، D ۲، و B ۵ توسط شرط چهارم؛ و E ۳ توسط شرط پنجم. مکانهای B ۳ و C ۳ توسط شرط ۶ حذف می‌شوند.

در این مرحله ضروری است که با روش آزمایش کردن اقدام شود. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم B در طبقهٔ ۱ زندگی می‌کند. این فرض A۲، A۳، A۴، و E۱ را حذف کرده M را تنها برای طبقهٔ سوم و در این صورت S را تنها برای طبقهٔ پنجم باقی می‌گذارد. اکنون C و F نمی‌توانند، بدون به هم زدن شرط ۴ یا ۵، در محلهای باقیمانده قرار گیرند: ×ی در محل A۱ قرار داده به کار خود ادامه بدهید.

جواب ۲: (۹+۸+۱۲)-۳۴

جواب ۳: کمبود ایجاد شده (-) یا افزایش حاصل (+) طی هر دورهٔ ۳ ساعتی برابر ۳۰۰۰ گالن ورودی منهای تعداد مصرف در آن دوره است. جریانهای خالص مزبور به ترتیب متوالی عبارت‌اند از ۱۰۰۰+، ۲۰۰۰ -، ۱۵۰۰-، ۵۰۰+، ۱۰۰۰-، ۲۰۰۰+، ۱۰۰۰- و ۱۵۰۰+ گالن.

از آنجا که جریان آب در شبانه‌روز پیوسته است، ساعت آغاز مهم نیست، و تنها رعایت ترتیب اهمیت دارد.

فرض می‌کنیم Q مقدار آب واقع در برج در آغاز دورهٔ اول باشد، مقدار آب در پایین دورهٔ اول Q+۱۰۰۰ ؛ در پایان دورهٔ دوم

(Q+۱۰۰۰)-۲۰۰۰=Q-۱۰۰۰

در پایان دورهٔ سوم تا هشتم، Q-۲۵۰۰، Q-۲۰۰۰، Q-۳۰۰۰، Q-۵۰۰، Q-۱۵۰۰، و Q گالن خواهد بود.

Q باید حداقل ۳۰۰۰ گالن باشد، وگرنه شهر طی دورهٔ پنجم بی‌آب می‌ماند. بیشترین مقدار آب در هر زمان Q+۱۰۰۰ گالن در پایان دورهٔ اول است. بنابراین کمترین ظرفیت برج باید ۳۰۰۰+۱۰۰۰=۴۰۰۰ گالن باشد.

جواب ۴: پنج تا زرد. دو تا سرخ. یک آبی و دو تا بنفش. به عوامل اول تجزیه کنید.

جواب ۵: همانگونه که هر دهقان می‌تواند بگوید، از آنجا که کل چمن چریده شده است و هر بز به اندازهٔ بز دیگر می‌تواند بچرد، هر بز $\frac{۱}{۳}$ از ۱۲۰ متر مربع، یا ۴۰ مترمربع را چریده است.

جواب ۶: در واقع برای این معما توضیحی عقلایی موجود است: تقاطع مزبور باید به ترمینال شرقی نزدیکتر از ترمینال غربی باشد. در این صورت، در هر زمان مفروض احتمال بودن قطار در غرب تقاطع بیشتر از بودن آن در شرق آن است، زیرا قسمت بیشتر خط در این جهت قرار دارد و قطار قسمت بیشتری از مسافرت دوسرهٔ یک ساعته را در آن صرف می‌کند. قطار، هنگامی که در غرب تقاطع است، چه متوجه مشرق باشد، چه به جانب مغرب، بعد در حالی که از مغرب به مشرق می‌رود از تقاطع عبور می‌کند.

اشتباه از اینجا ناشی می‌شود که تعداد عبورهای برگشت غربی قطار به طور منظم برابر تعداد عبورهای برگشت شرقی آن است. مهندسان برق بی‌شک این پدیده را به عنوان اشتباه فرکانس یا فاز می‌شناسند، اما نداشتن تخصص برای حل نکردن این معمّا پذیرفتنی نیست.

باسمه تعالی

قابل توجه واحدهای آموزشی ـ معلمان ـ دانش‌آموزان

شما علاقه‌مندان گرامی می‌توانید کتب ریاضی درخواستی خود را پس از انتخاب و محاسبه وجه آن (بعلاوه به‌ازای هر جلد کتاب ۲۵۰ ریال بابت هزینه ارسال) به حساب شماره ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبه کریمخان‌زند واریز و اصل فیش را همراه تقاضای درخواستی خود براساس فرم ذیل به نشانی انتشارات مدرسه ارسال نمائید.

نام کتاب	قیمت (ریال)	نام کتاب	قیمت (ریال)
● **دورهٔ راهنمایی:**		جبر پایه ۲ سال چهارم دبیرستان	۱۱۰۰۰
ریاضیات پایه ۴	۳۵۰۰	جبر و آنالیز	۱۰۰۰۰
ریاضیات پایه ۵	۲۸۰۰	دایرةالمعارف هندسه	۸۰۰۰
ریاضیات پایه ۶	۳۵۰۰	هندسه تحلیلی چندمحوری	۶۳۰۰
● **دورهٔ دبیرستان:**		هندسه ساده	۴۵۰۰
آشنایی با ماتریسها	۷۴۰۰	هندسه‌های جدید	۹۰۰۰
بازآموزی و بازشناخت هندسه	۴۵۰۰	جبر، حساب و آنالیز	۱۲۰۰۰
بحث ریاضی با دانش‌آموز	۳۰۰	● **کتابهای کوچک‌ریاضی دورهٔ دبیرستان:**	
تست جبر و احتمال	۸۵۰	روشهایی از جبر	۲۷۰۰
تست حسابان ۱ـ۲	۱۱۰۰	بخش‌پذیری در جبر	۲۵۰۰
تست ریاضی ۵	۸۵۰	مجانبها و رسم منحنی	۴۰۰۰
تست ریاضیات عمومی ۱ـ۲	۱۸۰۰	حد، مفهوم، تعریف	۳۵۰۰
تست ریاضی پایه علوم‌انسانی	۹۰۰	مبانی ریاضیات	۳۰۰۰
جبر پایه ۱ سال سوم دبیرستان	۹۰۰۰	تعیین دامنه و برد توابع	۳۰۰۰

نام متقاضی:

نشانی کامل پستی: کدپستی:

ردیف	نام کتاب	تعداددرخواستی	قیمت واحد	قیمت کل

قیمت کل کتاب	
هزینه پستی	
جمع کل	

خواهشمند است حتماً از فرم درخواستی و فیش واریزی برای خود فتوکپی تهیه نمایید تا در مقابل هر مشکلی مجدداً قابل پیگیری باشد.

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، نرسیده به پل کریمخان‌زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶،

صندوق‌پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، ۸۹۳۸۰۹ نمابر (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹

فرم نظرخواهی

از همهٔ شما دانش‌آموزان، دانش‌جویان و دبیران محترم درخواست می‌کنیم در جهت، پربارتر شدن و رفع هرگونه نقص احتمالی در مجله خودتان، فرم نظرخواهیِ زیر را به دقت مطالعه و به سؤالات پاسخ دهید و برای ما ارسال کنید. قبلاً از همکاری و دلسوزی شما تشکر می‌کنیم.

۱ـ مجله برهان را به چه صورت تهیه می‌کنید؟

مشترک هستم ☐ به طور آزاد تهیه می‌کنم ☐ از کتابخانه مدرسه استفاده می‌کنم ☐

۲ـ آیا مجله مرتب به دست شما می‌رسد؟ بلی ☐ خیر ☐

چه مشکلاتی در تهیهٔ مجله دارید؟ ....

....

۳ـ چه شماره‌هایی از مجله را در اختیار داشته و چه شماره‌هایی از آن را خواهانید؟

....

۴ـ اگر مقاله‌های موجود در مجله را به چهار دستهٔ عمومی، درسی، تخصصیِ کمک‌درسی و مجموعهٔ مسائل، تقسیم کنیم شما کدام‌یک از مقاله‌های ذکر شده را بیشتر مورد مطالعه و استفاده قرار می‌دهید. (به ترتیب اولویت شماره بزنید.)

عمومی ☐ درسی ☐ تخصصی کمک درسی ☐ مسائل ☐

۵ـ در بین مقاله‌های باعنوان ثابت که در زیر مشخص شده‌اند کدام مقاله بیشتر مورد استفاده شما است؟ (به ترتیب اولویت شماره گذاری کنید)

تاریخچه مجلات ☐ آموزش ترجمه متون ریاضی ☐ حرف اول ☐

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید ☐ مقالات کوتاه ار مجلات معتبر جهان ☐

طرح و حل مسائل اساسی به روشهای مقدماتی ☐ مکان هندسی ☐

ریاضیات گسسته ☐ مسائل برای حل ☐

۶ـ نظر خود را راجع به مقالات درسی و درصد کمک آنها به شما در جهت فهم مطالب درسی و ارتباط آنها با کتاب درسی، بنویسید. (اگر پیشنهادی دارید مطرح فرمایید) ....

....

۷ـ به نظر شما جای چه نوع مطالب یا مقالاتی در مجله خالی است؟ ....

....

۸ـ به نظر شما کدام‌یک از مقالات مجله را می‌توان حذف کرد و در این صورت چه مقالاتی را جایگزین آنها کنیم؟

آیا با وجود تست در مجله موافق هستید؟..

....

۹ـ آیا مایلید برای ما مقاله یا مسأله (با حل) ارسال کنید؟

۱۰ـ آیا دبیران ریاضیِ شما از این مجله در کلاس استفاده کرده و آن را به شما توصیه می‌کنند؟

۱۱-در بین مؤلفین و مترجمین مجله که تاکنون مقالاتی را از آنها خوانده‌اید کدام‌یک از آنها به زبان بهتری با شما ارتباط برقرار کرده و مقالاتشان را بهتر درک کرده‌اید؟ (به ترتیب اولویت بنویسید) ....

....

۱۲-هر پیشنهاد، انتقاد و یا نظری دارید، بنویسید..

....

با تشکر: هیأت تحریریه

مشخصات تکمیل‌کننده پرسشنامه

دانش‌آموز ☐ کلاس : .... ساکن شهر: ....

دانشجو ☐ سال: .... رشته: .... دانشگاه: ....

دبیر ☐ سابقهٔ تدریس: .... ساکن شهر : ....

Borhan
Vol. 6 No. 2
Serial numbers: 19 Winter 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:
Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

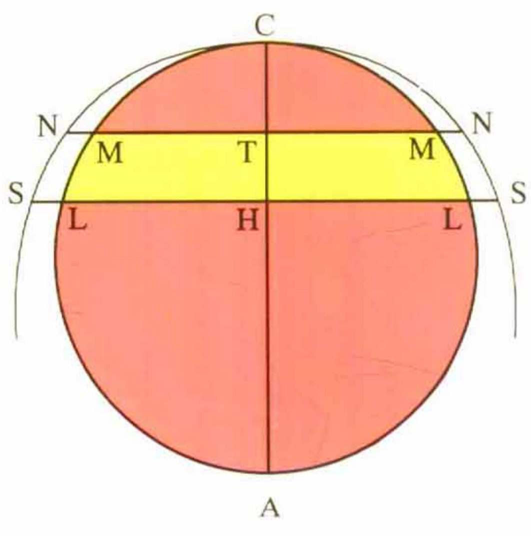
Contents:

1. Function and concept of function — H.R. Amiri
2. Solving a analysis problem with geometry method — A. Sharafeddin
3. Pencil of lines — S. Jafari
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
5. Infinity — A. P. Shahriari
6. Maximum and minimum — A.Khanmohammad
7. Instruction of translation of mathematics articles. — H. R. Amiri
8. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
9. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
10. A brief history of mathematics magazins in Iran.
11. Descrete mathematics — G. R. Yassipour
12. Contest problem
13. Locus (9) — M. H. Rostami
14. 20. Radical — S. M. R. Hashemi mosavi
15. Problems.

روش ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان و منجم مسلمان (۳۸۷ـ۳۲۸ ه.ق)، در ساختن آیینهٔ سوزان* در کتاب اعمال هندسی

آیینهٔ سوزان آیینه‌ای است که اگر آن را مقابل شعاع آفتاب نگاه داریم، جسمی را که در فاصلهٔ معینی واقع است بسوزاند. [خاطرنشان می‌کنیم که جسم باید در کانون آیینهٔ مقعر (کاو) قرار گیرد.]

روش تهیهٔ طرح سطح آیینهٔ سوزان: دایره‌ای به قطر AC رسم می‌کنیم که شعاع آن دو برابر فاصله‌ای باشد که می‌خواهیم جسم را در آن فاصله از مرکز آیینه قرار دهیم. روی قطر AC از آن دایره پاره‌خطهای متساوی CT و TH و مانند آنها را جدا می‌کنیم. هر چه این پاره‌خطها کوچکتر باشند، سطح آیینه دقیقتر و بهتر از کار درمی‌آید. از نقاط T و H و غیره عمودهایی بر قطر AC رسم می‌کنیم. این عمودها دایره را از دو طرف در نقاطی مانند M و L و نظایر آنها قطع می‌کنند. پاره‌خطهای CM و CL و مانند آنها را از دو طرف رسم کرده پاره‌خطهای TN=CM و HS=CL و غیره را مطابق با شکل مشخص می‌کنیم. سپس نقاط C و N و S و مانند آنها را به هم وصل می‌کنیم. از وصل‌کردن این نقاط طرح سطح آیینهٔ سوزان معین می‌شود.



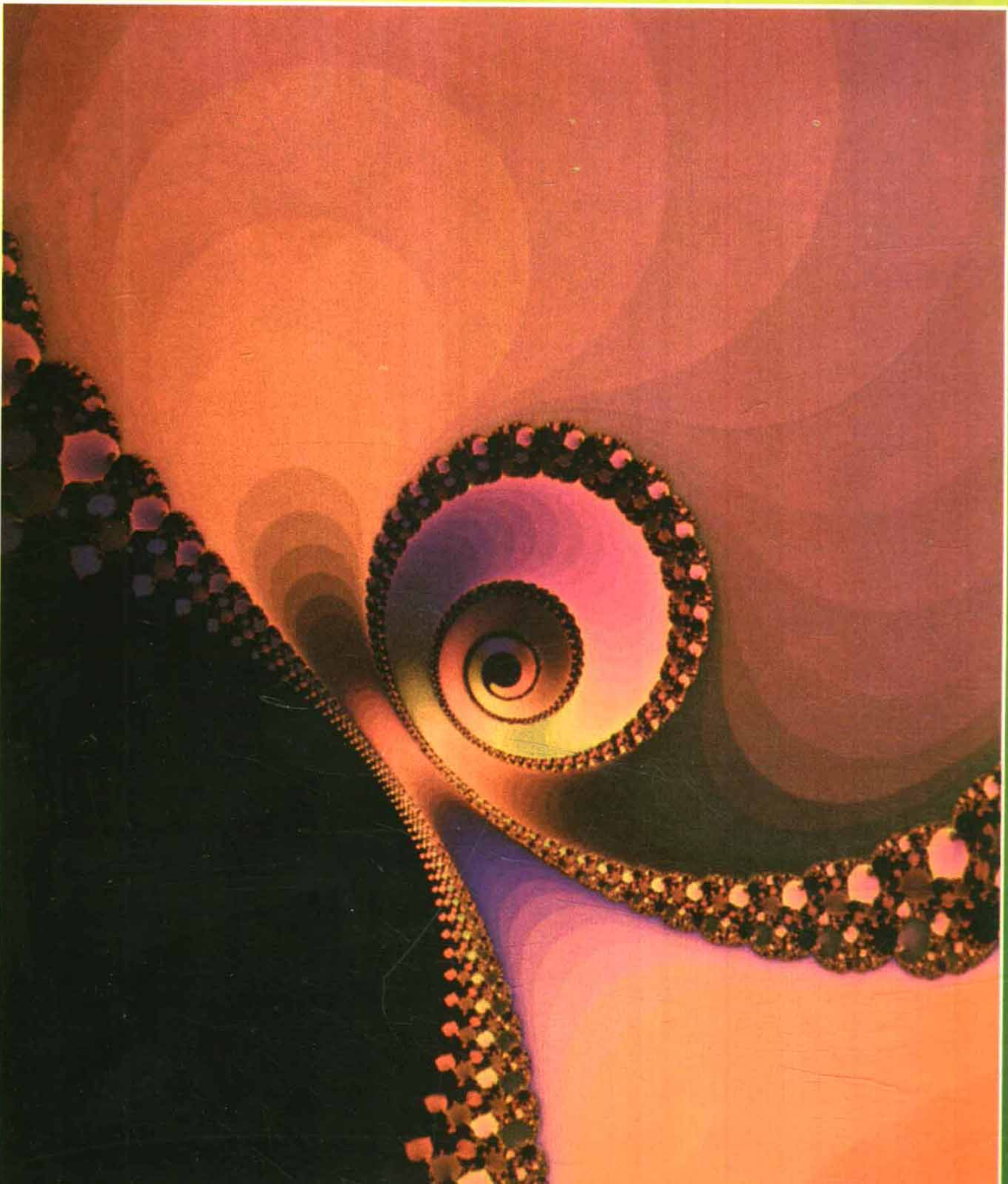
* نقل از کتاب بوزجانی نامه، ابوالقاسم قربانی و محمدعلی شیخان.

مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۲۰



سال ششم ، بهار ۱۳۷۶ شمارهٔ سوم ، بها ۲۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

انتشارات مدرسه وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه ❏ مدیر مسئول: محمود ابراهیمی

سردبیر: حمیدرضا امیری ❏ مدیر داخلی: سیدمحمّدرضا هاشمی موسوی

❏ اعضای هیئت تحریریه: آقایان: ❏ حمیدرضا امیری ❏ محمدهاشم رستمی ❏ احمد قندهاری ❏ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ❏ غلامرضا یاسی‌پور (با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری و با تشکر از آقای حسین ابراهیم‌زاده قُلزم در بخش کامپیوتر مجله)

❏ مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی ❏ طراح و صفحه‌آرا: احمد پیرحسینلو ❏ رسّام: سیّدجعفر طرازانی ❏ چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

مطالب این شماره

◆ حرف اوّل 1
◆ شماهم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۰) / پرویز شهریاری 2
◆ تغییرات و انتقال منحنی‌ها / احمد قندهاری 8
◆ تاریخچه مجلات ریاضی ایران (۱۹) / غلامرضا یاسی‌پور 15
◆ در حاشیه تابع و مفهوم تابع (قسمت دوم) / حمیدرضا امیری 18
◆ مبانی کامپیوتر و برنامه‌ریزی با BASIC (۹) / حسین ابراهیم‌زاده قُلزم 23
◆ آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۶) / محمدصادق عسگری 31
◆ رادیکال (قسمت چهارم) / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی 34
◆ مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۷) / غلامرضا یاسی‌پور 41
◆ اصل ردّ و شمول / امیرمنصور خانمحمد / امیر فرزاد 45
◆ طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۸) / غلامرضا یاسی‌پور 51
◆ ریاضیات گسسته (قسمت پنجم) / غلامرضا یاسی‌پور 52
◆ سرگرمی برای اندیشه‌ورزی / حسن نصیرنیا 57
◆ مکان هندسی (قسمت دهم) / محمدهاشم رستمی 59
◆ مشاهیر ریاضی جهان / غلامرضا یاسی‌پور 61
◆ یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه و کاربرد آن در صنعت / دکتر احمد شرف‌الدین 63
◆ بررسی وضع دو دایره نسبت به هم / محمدهاشم رستمی 65
◆ محاسبهٔ مساحت دایره / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی 70
◆ معرفی کتاب 71
◆ جواب نامه‌ها 73
◆ مسائل برای حل 75
◆ حل مسائل برهان ۱۹ 81
◆ جوابهای تفریح اندیشه 87

■ سال ششم، بهار ۱۳۷۶ شمارهٔ سوم.

برهان تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱ـ نگارش مقالات کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتب ریاضی راهنمایی) ۲ـ طرح مسائل کلیدی (برای دانش‌آموزان) به‌همراه‌حل آن ۳ـ طرح مسائل مسابقه‌ای (برای دانش‌آموزان) به‌همراه حل آن ۴ـ طرح معماهای ریاضی ۵ـ نگارش یا ترجمهٔ مقالات عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

■ هیئت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافهٔ مقالات آزاد است. ■ مقالات مجله با رسم‌الخطِ انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقالات وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد. ■ مقالات رسیده مسترد نمی‌شود.

برهان هر ۳ ماه یک شماره منتشر می‌شود. کد ۴۷۳/۱

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، پل کریمخان‌زند، کوچه شهیدمحمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹ صندوق‌پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

حرف اوّل

انسان موجودی هدف‌دار و آینده‌نگر است و همواره برای تحقق بخشیدن به آرمانها و ایده‌های خویش بـه دنـبال الگـوها و بهترینها می‌باشد. این الگوپذیری در واقع معیارهای سنجش ارزشهای خوب و بد انسانها قرار می‌گیرد.

در فرهنگ اصیل و جهانشمولِ اسلام و کتاب عظیم آن؛ قرآن کریم، همواره این الگوها در تمامی جنبه‌ها و ابعاد معرفی شده‌اند و علاوه بر آن امامان ما (علیهم‌السلام) که آینهٔ تمام نمای اسلام و قرآن هستند، بهترین الگوها و اسوه‌های بشری برای پیروان حق و حقیقت و رستگاریِ دنیا و آخرت هستند.

در قسمتی از آیهٔ ۲۱ در سورهٔ احزاب می‌خوانیم:

«رسول خدا برای شما الگویی شایسته است»

عزیزان دانش‌آموز! آیا شما از این حجّتهای آشکار و برحق الگو می‌گیرید؟ آیا تاکنون توانسته‌اید در جنبه‌های مختلف زندگی خود از جمله برای دستیابی به ارزشهای مثبت و والای انسانی از وجود پرفیض و از سرچشمهٔ پربرکت و زلالِ ولایت استفاده کنید؟

بیایید از همینِ امروز و با تمسک به معصومین علیهم‌السلام و در پناه رهنمودها و بیاناتِ آن بزرگواران، همواره جزو بهترینها باشیم و در این مسیر ابتدا باید بهترینها را بشناسیم و توصیه‌های آنان را برای بهترین بودن به گوش جان بسپریم و ـ إن‌شاءا... ـ به آنها عمل کنیم.

نمونه‌هایی از سخنان گهربار معصومین علیهم‌السلام را در چند مورد خاصّ تقدیم رهروان و عاشقان آنها می‌کنیم باشد که با تمسک به گلواژه‌های پاکان زندگی خود را از انوار الهی آنها روشن سازیم.

بهترین انسان: پیامبراکرم صلی‌الله علیه و آله و سلم فرمودند: «بهترین انسانها، کسانی هستند که برای مردم سودمندتر و مفیدتر باشند.»

بهترین بندگان خدا: امام علی علیه‌السلام فرمودند: «بهترین بندگان خدا، کسی است که وقتی کار نیک و خوب انجام دهد، شادمان باشد و اگر مرتکب خلافی شد از خدا طلب آمرزش کند.»

بهترین یاران: از رسول‌اکرم(ص) سؤال شد که بهترین یاور چه کسی است؟ ایشان فرمودند: «کسی است که وقتی خدا را یاد کردی تو را کمک کند و وقتی خدا را فراموش کردی، تو را به یاد خدا بیندازد.»

بهترین برادران: پیامبراکرم (ص) فرمودند: «بهترین برادران شما کسی است که عیبهایتان را به عنوان هدیه به شما بگوید.»

بهترین جوان: پیامبرگرامی اسلام (ص) فرمودند: «بهترین جوانان شما کسی است که از نظر متانت و وقار و دوراندیشی مثل پیرمردان باشد.»

بهترین مردان: پیامبراکرم (ص) فرمودند: «بهترین مردان شما کسی است که باتقوا، پرهیزکار، بخشنده و نگاهش پاک و نسبت به پدر و مادرش مهربان و نیک‌اندیش بوده و خانواده‌اش را به پناه بردن به دیگران واندارد.»

بهترین زیور برای زنان: رسول‌اکرم (ص) فرمودند: «پاکدامنی زیور زنان است.» و هم ایشان در جای دیگر فرمودند: «خدا زنان مردنما و مردان زن‌نما را لعنت کند و از رحمت خویش دور سازد.»

والسلام ـ سردبیر

شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۲۰)

○ پرویز شهریاری

نقش شکل در مسأله‌های هندسهٔ فضایی

اگر در هندسه روی صفحه، باید مراقبت کرد تا شکل درست و دقیق رسم شود و سپس با استدلال و با پیدا کردن رابطه‌های موجود بین عنصرهای شکل (زاویه‌ها و پاره‌خط‌های راست و غیره) درستی آن را تأیید کرد، در هندسه فضایی، اغلب خود رسم شکل، دشواری به وجود می‌آورد و پیدا کردن رابطه‌هایی که ممکن است بین عنصرهای شکل وجود داشته باشد، چندان ساده نیست. رسم برخی جسم‌های فضایی، مثل مکعب مستطیل، هرم یا منشور با قاعدهٔ سه ضلعی یا چهار ضلعی چندان دشوار نیست، ولی رسم جسم‌هایی مثل هرمی با قاعدهٔ هفت ضلعی، یا پیدا کردن شکلی که از برخورد یک صفحه با جسم فضایی یا دو جسم فضایی به دست می‌آید، یا تلاش برای یافتن «سایهٔ» یک جسم (یعنی تصویر مرکزی آن)، گاهی بسیار دشوار می‌شود. گذشته از رسم شکل، جست‌وجوی رابطه‌های لازم بین عنصرهای جسم هم اغلب سردرگمی به وجود می‌آورد.

در این‌جا با مثالهای مختلف، راهنمایی‌هایی برای رفع این دشواریها (تا آنجا که ممکن است) شده است، ولی تردیدی نیست، که ذهن خلاق جوانان، بهتر و بیشتر از این راهنماییها می‌تواند کارساز باشد. در آغاز برای نوع برخورد با مسأله‌های هندسه فضایی، سفارشی داریم و سپس به بحث دربارهٔ رفع دشواریهای مختلف مربوط به رسم شکل می‌پردازیم.

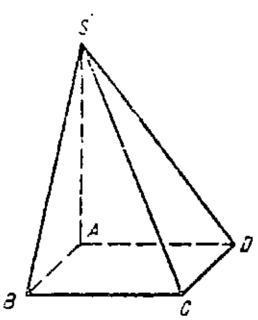
۱. از شکلی که رسم کرده‌اید، چه نتیجه‌هایی می‌گیرید؟

به این مسأله توجه کنید:

مسألهٔ ۱. در هرم SABCD می‌دانیم:

۱) قاعدهٔ ABCD یک مربع است؛

۲) یال جانبی SA بر صفحهٔ قاعده است.



شکل (۱)

اگر ضلع قاعده، طولی برابر a و یال SA طولی برابر b داشته باشد، مساحت سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

موقعیت خاصی از یک هرم در برابر شماست. پیش از هر چیز، و بدون توجه به آن چه مسأله خواسته است، تلاش کنید، هر نتیجه‌ای را که می‌توان از موقعیت این مسأله گرفت، فهرست کنید و، سپس، به اثبات درستی آنها بپردازید. با هر مسأله‌ای،

چه در هندسه روی صفحه و چه در هندسهٔ فضایی می‌توان به این گونه عمل کرد، ولی به ویژه در هندسهٔ فضایی اهمیت بیشتری دارد. دربارهٔ مسألهٔ ۱، می‌توان این ویژگیها یا رابطه‌ها را نتیجه گرفت (با فرض وجود ویژگیهای ۱ و ۲) :

۳) یال SD برضلع CD از مربع قاعده عمود است :

۴) یال جانبی SB بر ضلع BC از قاعده عمود است :

۵) صفحهٔ SAD بر صفحهٔ SAB عمود است :

۶) دو صفحهٔ SAB و ABC بر هم عمودند :

۷) مثلث‌های SAD و SAB با هم برابرند :

۸) مثلث‌های SBC و SDC با هم برابرند :

۹) همهٔ وجه های جانبی هرم، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌اند.

پیدا کردن این نتیجه‌ها، اهمیت بیشتری دارد تا اثبات آنها، زیرا اثبات آنها چندان دشوار نیست (نتیجه‌های ۳ و ۴ به یاری قضیهٔ سه عمود : ۵ و ۶ با توجه به معیار عمود بودن دو صفحه بر هم).

این بررسی به شما کمک می‌کند که، اگر مثلاً بخواهیم از رأس S، عمودهایی بر خط‌های راست DC و BC رسم کنیم، آنها را به اشتباه، غیر از SD و SB در نظر نگیریم. بدون این بررسی قبلی، ممکن است از این‌گونه اشتباهها پیش آید. درضمن، این بررسیها، حل مسألهٔ ۱ را کم و بیش حاضر و آماده در برابر ما قرار می‌دهد.

با تجزیه و تحلیل منطقی موقعیت شکل می‌توان به نتیجه‌های دیگری هم رسید. مثلاً، می‌توانیم در این‌باره بیندیشیم : آیا می‌توان جای گزاره‌های فرض را با گزاره‌های حکم عوض کرد؟ اندکی دقت نشان می‌دهد که می‌توان گزارهٔ ۲) را از گزاره‌های ۱) و ۵) و ۶) نتیجه گرفت، یعنی فرض ۲)، با دو فرض ۵) و ۶) هم‌ارز است. در این صورت مسأله ۱ را می‌توان به این صورت تغییر داد :

مسأله ۲. سطح جانبی هرم SABCD را پیدا کنید، به شرطی که قاعدهٔ ABCD مربع به ضلع برابر a باشد و وجه‌های SAB و SAD بر صفحهٔ قاعده عمود با ارتفاعی به طول برابر b باشند.

اگر شکل را بررسی کرده باشیم، متوجه می‌شویم که مسأله‌های ۱ و ۲)، دو مسألهٔ مختلف نیستند و می‌توان آنها را مسأله‌های هم ارز نامید.

مسأله را به صورت دیگری هم می‌توان مطرح کرد، که باز هم با مسأله‌های ۱ و ۲ هم‌ارز است.

مسألهٔ ۳. مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی هرم SABCD، به شرطی که ABCD، مربعی با ضلع به طول a باشد، همهٔ وجه‌های جانبی هرم،مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند و ارتفاع هرم، طولی برابر b داشته باشد.

در این‌جا نتیجه گرفتن گزارهٔ ۲) از گزارهٔ ۹) اندکی دشوارتر است. برای برطرف کردن این دشواری، ابتدا این پرسش ساده را در برابر خود قرار می‌دهیم : آیا ممکن است دو یال جانبی هرم، بر قاعده عمود باشند؟ روشن است که، پاسخ این پرسش، منفی است : اگر دو یال جانبی هرم بر قاعده عمود باشند، آن وقت با هم موازی‌اند، در حالی که، همهٔ یال‌های جانبی، در رأس S به هم رسیده‌اند.

سپس، فرض می‌کنیم SBC، زاویه‌ای قائمه، یعنی خط راست SB بر خط راست BC عمود باشد. به این ترتیب، (BC) بر (SB) و بر (AB) عمود است، یعنی (BC) بر صفحهٔ SAB عمود می‌شود : ولی (BC) بر صفحه ABC واقع است، پس دو صفحهٔ SAB و ABC برهم عمودند. چون بنا بر فرض، مثلث SAB قائم‌الزاویه است، دو حالت ممکن وجود دارد :

اول $S\hat{B}A = 90^\circ$ به جز این (SB) هم بر (BC) عمود است، پس (SB) بر صفحهٔ ABC عمود است و، به این ترتیب ثابت می‌شود، یکی از یال‌های جانبی بر صفحهٔ قاعده عمود است.

دوم $S\hat{B}A \neq 90^\circ$ و، در این صورت $S\hat{A}B = 90^\circ$، یعنی $(SA) \perp (AB)$ و چون دو صفحهٔ SAB و ABC برهم عمودند، بنابراین (SA) بر صفحهٔ ABC عمود می‌شود.

ممکن است پرسشی پیش آید : آیا حالت سومی وجود ندارد؟ آیا ممکن نیست زاویهٔ ASB قائمه باشد؟ ولی اگر در یک وجه جانبی، زاویهٔ رأس S قائمه، و بقیهٔ راس‌ها هم، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه باشند، آن‌وقت باید همهٔ وجه‌های جانبی در راس S قائمه باشند، زیرا اگر تنها یکی از یال‌های جانبی بر ضلعی از قاعده عمود باشد، آن وقت، با توجه به تجزیه و تحلیلی که از

شکل کرده‌ایم، آن وقت هیچ یک از زاویه‌های قائمهٔ مثلث‌های جانبی، در رأس هرم قرار نمی‌گیرد. از طرف دیگر، هر چهار زاویهٔ رأس هرم، نمی‌توانند قائمه باشند، زیرا در این صورت، مجموع آنها برابر ۳۶۰ درجه می‌شود، که ممکن نیست.

به این ترتیب، ثابت می‌شود که از گزاره‌های ۱) و ۹) می‌توان گزارهٔ ۲) را نتیجه گرفت؛ یعنی مسألهٔ ۳ با مساله‌های ۱ و ۲ هم‌ارز است.

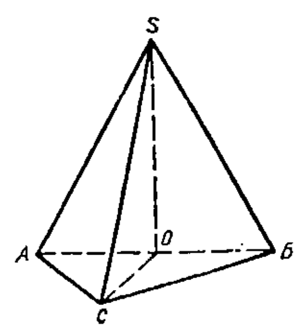
مثال دیگری از این گونه می‌آوریم.

مسألهٔ ۴. مطلوب است حجم هرم SABC، به شرطی که، در آن قاعدهٔ ABC مثلثی قائم‌الزاویه با وتر به طول c و زاویهٔ حاده برابر α باشد و در ضمن هر یال جانبی طولی برابر b داشته باشد.

بنابر فرض، در هرم SABC می‌دانیم:

۱) ABC مثلثی قائم‌الزاویه است ($\hat{C} = 90°$)؛

۲) یال‌های جانبی، طولی برابر دارند: $|SA| = |SB| = |SC|$ (شکل ۲).



شکل (۲)

اکنون باید به جست‌وجوی نتیجه‌های ناشی از دو فرض برویم، سیاههٔ این نتیجه‌ها را در این جا داده‌ایم:

۳) تصویر یال‌های جانبی بر صفحهٔ قاعده، طولی برابر دارند؛

$$|AO| = |BO| = |CO|$$

۴) SO، یعنی ارتفاع هرم، از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی قاعده می‌گذرد؛

۵) ارتفاع هرم، از وسط ضلع AB می‌گذرد؛

۶) صفحهٔ ASB بر صفحهٔ ABC عمود است؛

۷) مثلث‌های SAO، SBO و SCO قائم‌الزاویه‌اند؛

۸) مثلث‌های SAO، SBO و SCO برابرند؛

۹) همهٔ یال‌های جانبی، نسبت به صفحهٔ قاعده، شیبی برابر دارند:

$$S\hat{A}O = S\hat{B}O = S\hat{C}O$$

اثبات گزاره‌های ۳) تا ۹) دشوار نیست و، با توجه به آنها، مسألهٔ ۴، به سادگی حل می‌شود. در ضمن، ساختن مسأله‌هایی هم‌ارز با مسألهٔ ۴، چندان دشوار نیست. به عنوان نمونه:

مسألهٔ ۵. در هرم SABC، قاعدهٔ ABC، مثلثی است قائم‌الزاویه با وتر $|AB| = C$ و زاویهٔ حادهٔ $\hat{A} = \alpha$. در ضمن، وجه جانبی SAB بر صفحهٔ قاعده عمود است (یا ارتفاع هرم در صفحهٔ SAB قرار دارد، یا ارتفاع از وسط پاره‌خط راست AB، یا از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قاعده بگذرد و غیره) و طول یال جانبی SA برابر است با b. حجم هرم را محاسبه کنید.

می‌توان مسأله‌های هم‌ارز را با پیش‌فرض‌های ۱) و ۳) یا ۱) و ۴) یا ۱) و ۵) یا ۱) و ۶) یا ۱) و ۹) در نظر گرفت. حالت انتخاب ۴) و ۶) می‌تواند مسأله‌ای جالب باشد.

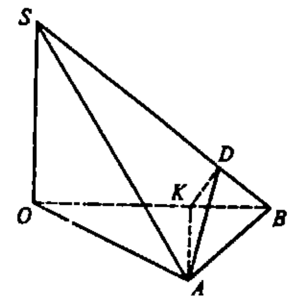
II. چگونه از یک شکل فضایی پیچیده، به شکل ساده‌تر و عملی‌تری برسیم؟ به این مسأله توجه کنید:

هرمی منتظم با قاعدهٔ شش ضلعی، که زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن برابر α است، داده شده است. مقدار زاویهٔ دو وجهی بین دو وجه مجاور آن را پیدا کنید.

در این جا، رسم تمامی هرم، چندان ساده نیست. به جز آن، تعداد پاره‌خط‌های راست، صفحه‌ها، زاویه‌ها و زاویه‌های دو وجهی، چنان زیادند که انتخاب عنصرهای لازم را بر حل مساله دشوار می‌کنند. ولی حقیقت این است که ما، به تمامی شکل نیازی نداریم و کافی است، بخش ساده‌ای از آن را انتخاب کنیم که هم رسم آن ساده باشد و هم شامل همهٔ عنصرهای لازم (برای حل) باشد.

هرمی با قاعدهٔ مثلثی شکل را در نظر می‌گیریم که $\frac{1}{6}$ هرم اصلی باشد: دو راس آن، دو انتهای ارتفاع هرم اصلی و یک

ضلع قاعدهٔ آن، ضلعی از قاعدهٔ هرم اصلی باشد (شکل ۳).



شکل (۳)

در این هرم (با توجه به نام‌گذاریهای شکل ۳)

$$|OB| = |OA| \;,\; B\hat{O}A = ۶۰^\circ \;,\; A\hat{S}B = \alpha$$

در ضمن، پاره‌خط راست SO بر صفحهٔ ABC عمود است.

زاویهٔ دو وجهی بین صفحه‌های ASB و OBS (یا OAS) برابر است با نصف زاویهٔ دو وجهی مجهول (زاویهٔ دو وجهی مجهول را φ می‌نامیم).

از نقطهٔ A، عمودهای AD و AK را به ترتیب بر BS و OB فرود می‌آوریم؛ در این صورت $K\hat{D}A = \frac{\varphi}{۲}$. اگر $|OA| = |OB| = R$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$|AK| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \;,\; |AB| = R \;,\; |AD| = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{۲}} \;,$$

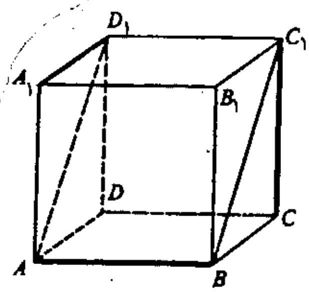
$$\sin\frac{\varphi}{۲} = \frac{|AK|}{|AD|} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} \;.$$

$$\varphi = ۲\arc\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\right)$$

در برخی موردها باید برعکس با اضافه کردن عنصرهایی شکل فضایی را ملموستر کرده بویژه وقتی که در مسأله، تنها از خط‌ها و صفحه‌ها صحبت شده است، آنها را «بی‌پناه و سرگردان» در فضا رها نکنید و تلاش کنید یک جسم فضایی (که رسم آن ساده باشد) پیدا کنید که، این خط‌ها و صفحه‌ها وابسته به آن باشند. دو نمونه از این‌گونه می‌آوریم:

مسألهٔ ۶. سه خط راست در فضا داده شده است که دو به‌دو بر هم عمودند و فاصلهٔ بین هر دو تا از آنها برابر واحد است. مساحت متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که، دو رأس آن، روی یکی از این خط‌های راست و، دو رأس دیگر آن، روی دو خط راست دیگر باشد.

مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ به ضلع واحد را به عنوان چند وجهی تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم (شکل ۴). خط‌های راست AB، $CC_۱$ و $D_۱A_۱$ دو به دو برهم عمودند و فاصله‌ای برابر ۱ دارند. متوازی‌الاضلاع $ABC_۱D_۱$ (که در عین حال، مستطیل است) با شرطهای مسأله می‌سازد و مساحتی برابر $\sqrt{۲}$ دارد. هر متوازی‌الاضلاع دیگری هم که با شرطهای مسأله در نظر بگیریم، همین مساحت را دارد (خودتان این حکم را ثابت کنید).

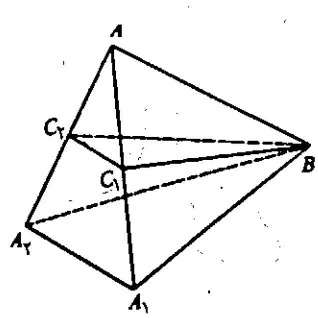


شکل (۴)

البته، همهٔ مسأله‌ها به همین سادگی قابل تفسیر نیستند. به این مسأله توجه کنید:

مسألهٔ ۷. پرتو نور با زاویهٔ α بر یک آینهٔ مسطح تابیده است. صفحهٔ آینه به اندازهٔ زاویهٔ β دور تصویر پرتو بر آینه دوران می‌کند. پرتو باز تابیده به اندازهٔ چه زاویه‌ای منحرف می‌شود؟

اندیشهٔ حل مسأله در این جاست، که به جای بازتاب پرتو از آینه (یعنی به جای درک فیزیکی مساله) به قرینهٔ نقطهٔ نورانی نسبت به صفحهٔ آینه (یعنی درک ریاضی آن) توجه کنیم. A را نقطهٔ سرچشمهٔ نور فرض کنید (شکل ۵). B را نقطه‌ای، که در



شکل (۵)

آن‌جا پرتو نوری به آینه تابیده است، A_1 و A_2 را قرینه‌های A به ترتیب نسبت به حالت نخستین و حالت دوران یافتهٔ آینه، C_1 را وسط پاره‌خط راست AA_1 (C_1، تصویر A بر آینه در حالت نخستین است) و C_2 را وسط AA_2 می‌گیریم. چون بازتاب پرتو در امتداد پاره‌خط‌های راست A_1B و A_2B است، بنابراین زاویهٔ مجهول برابر است با زاویهٔ A_1BA_2. خط‌های راست AC_1 و AC_2، به ترتیب بر حالت نخستین آینه و بر حالت دوران یافته آن عمودند، یعنی $C_1\hat{A}C_2 = A_1\hat{A}A_2 = \beta$ بنا به فرض $A\hat{B}C_1 = \alpha$. اگر $|AB| = |A_1B| = |A_2B| = a$ فرض کنیم، آن وقت

$|AC_1| = a\sin\alpha \quad |C_1C_2| = |AC_1|\sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta$

($A\hat{C_2}C_1 = 90°$، زیرا C_1C_2 متعلق به آینهٔ دوران یافته، و C_2 تصویر A بر آن است). به این ترتیب

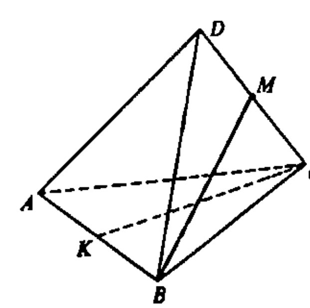
$|A_1A_2| = 2|C_1C_2| = 2a\sin\alpha\ \sin\beta$

اکنون با توجه به معلوم بودن طول ضلع‌های مثلث متساوی‌الساقین A_1BA_2 می‌توان مقدار زاویهٔ A_1BA_2 را به دست آورد. این زاویه برابر است با:

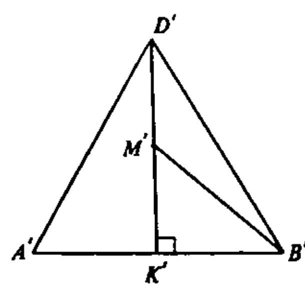
$2\arcsin(\sin\alpha\ \sin\beta)$

گاهی شکل فضایی تنها برای روشن کردن موقعیت لازم است (و گاهی برای این منظور هم لازم نیست) و می‌توان تمامی استدلال و محاسبه را روی یک شکل واقع بر صفحه انجام داد. به این مساله توجه کنید:

مسأله ۸. در چهار وجهی ABCD، همهٔ یال‌ها طولی برابر واحد دارند. نقطه‌های K و M را به ترتیب وسط پاره‌خط‌های راست AB و CD انتخاب کرده‌ایم. فاصلهٔ بین دو خط راست CK و BM را پیدا کنید.



شکل (۶)



شکل (۷)

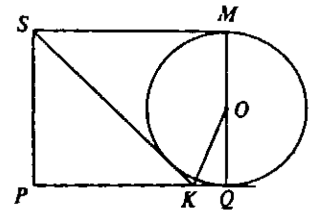
شکل ۶ موقعیت مسأله و بستگی بین عنصرهای آن را روشن می‌کند. از خط راست AB صفحه‌ای عمود بر خط راست CK می‌گذرانیم و سپس هرم را بر این صفحه تصویر می‌کنیم (شکل ۷). در این عمل، خط راست CK بر نقطهٔ K' تصویر می‌شود، که وسط پاره‌خط راست $A'B'$ است $|A'B'| = |AB| = 1$. ارتفاع $D'K'$ از مثلث $A'B'D'$ طولی برابر طول ارتفاع هرم دارد، یعنی $|D'K'| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. M' وسط پاره‌خط راست $D'K'$، تصویر نقطهٔ M است. فاصلهٔ بین خط‌های راست CK و BM برابر است با فاصلهٔ از نقطهٔ K' تا خط راست $B'M'$ (چرا؟). با یک مسألهٔ ساده روی صفحه سر و کار پیدا می‌کنیم. مطلوب است طول ارتفاع وارد بر وتر، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که، طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن برابر $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ و $\frac{1}{2}$ است. و این طول (یعنی فاصلهٔ مورد نظر مسأله) برابر $\frac{1}{\sqrt{10}}$ است.

شکلهای فضایی، که همراه با خط‌ها و سطح‌های منحنی هستند، جای ویژه‌ای دارند. در این حالتها اغلب می‌توان (و باید) از تلاش برای رسم تمامی شکل فضایی صرفنظر کرد و به شکلی (که ممکن است مسطحه یا فضایی باشد) متوسل شد که شامل مرکزها، محورها، نقطه‌های اصلی، مماس‌ها و سایر عنصرهای اصلی مساله باشد. مثلاً، اگر با چهار کرهٔ دو به‌دو مماس بر هم، سر و کار داشته باشیم، می‌توان یک چهار وجهی در نظر گرفت که یال‌های آن، طولی برابر قطرهای این کره‌ها داشته باشد و راس‌های آن، معرف مرکزهای این کره‌ها باشند. گاهی بهتر است شکل فضایی را در ذهن خود نگه داریم و تنها روی یک شکل سادهٔ مسطحه (و یا حتی بدون آن) استدلال خود را ادامه دهیم، زیرا علاوه بر آن که رسم شکل اصلی دشواریهایی ایجاد می‌کند، ممکن است از چارچوب صفحهٔ کاغذ ما هم تجاوز کند و یا آن قدر شلوغ شود، که نتوان عنصرهای لازم آن را دید. به یک مساله توجه کنیم:

مسألهٔ ۹. چهار کره با شعاع‌های برابر بر صفحه‌ای مماس‌اند؛ در ضمن، هر کره بر دو کرهٔ مجاور خود مماس است. مخروطی را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن روی صفحهٔ مماس بر کره‌ها باشد و ارتفاعی برابر قطر این کره‌ها

داشته باشد؛ در ضمن سطح جانبی مخروط بر هر یک از این کره‌ها مماس است. نسبت حجم‌های مخروط و کره‌ها را پیدا کنید.

اگر شعاع هر کره را برابر R بگیریم، آن وقت مرکزهای آنها، مربعی با ضلع به طول ۲R تشکیل می‌دهند. شکل ۸ برای حل



شکل (۸)

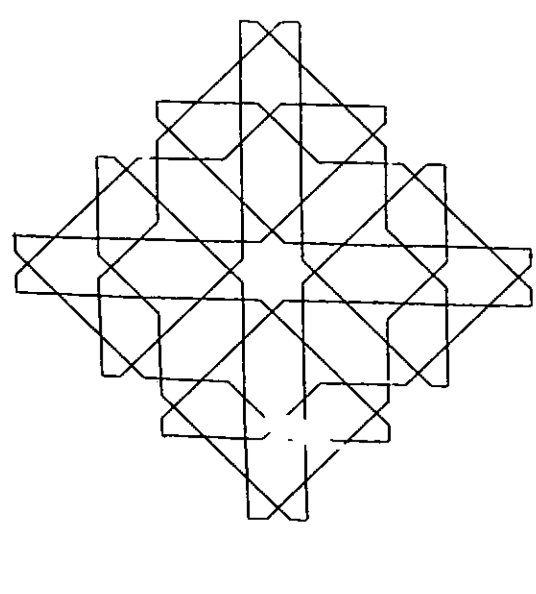
مساله کفایت می‌کند. در این شکل SP محور مخروط، MQ قطر یکی از کره‌ها (Q نقطهٔ تماس کره با صفحه است) و SK مولد مخروط مماس بر کره است. روشن است که $|SM| = R\sqrt{۲}$ (نصف قطر مربع با ضلع به طول ۲R). اگر $M\hat{S}O = \varphi$، آن وقت $tg\varphi = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یعنی

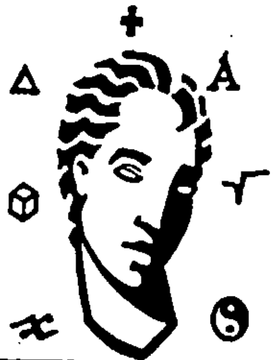
$$P\hat{S}K = ۹۰^\circ - ۲\varphi$$

$$|PK| = ۲R tg(۹۰^\circ - ۲\varphi) = R\frac{۱ - tg^۲\varphi}{tg\varphi} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}R$$

اکنون دیگر به سادگی نسبت مورد نظر به دست می‌آید که برابر است با $\frac{۱}{۴}$.

تا بعد





تفریح اندیشهٔ ۱

مربع وفقی

مربع وفقی زیر ظاهر ساده، اما در واقع بسیار غیر متعارف است. چون اعداد آن را به طور قائم، افقی، یا سطری جمع کنیم حاصل ۲۶۴ است.

در مربع وفقی چهار در چهاری چون این مربع می‌توان انتظار داشت که چهار مربع گوشه‌ای، چهار مربع میانی، و هریک از چهار مربع موجود به مجموع وفقی یکسانی برسند. تا اینجا مطلب شگفت‌انگیزی موجود نیست.

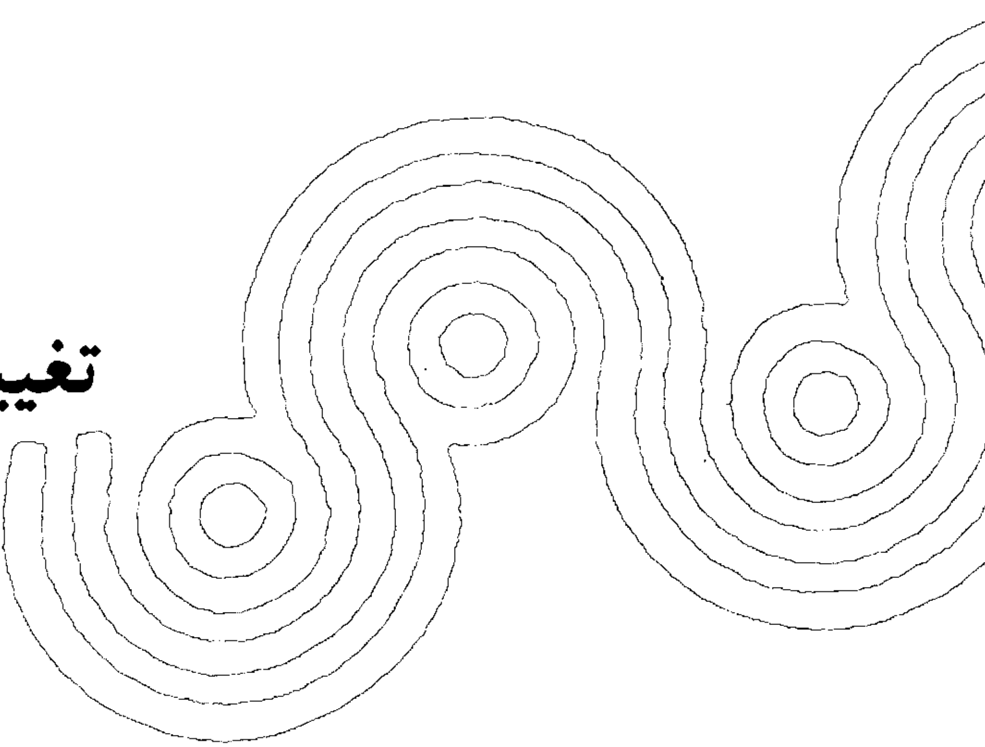
در این صورت ویژگی جالب این مربع وفقی چیست؟ این دقیقاً همان چیزی است که باید بیابید.

۱۸	۹۹	۸۶	۶۱
۶۶	۸۱	۹۸	۱۹
۹۱	۱۶	۶۹	۸۸
۸۹	۶۸	۱۱	۹۶

جواب در صفحه ۸۷

تغییرات و انتقال منحنی‌ها

● احمد قندهاری



تابع f به معادله $y = f(x)$ مفروض است.

می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های به معادلات $y_1 = -f(x)$
و $y_2 = f(-x)$ و $y_3 = f(|x|)$ و $y_4 = |f(x)|$ و $y_5 = f(x-a)$ و
$y_6 = b + f(x)$ و $y_7 = b + f(x-a)$ و $y_8 = f(kx)$ و
$y_9 = kf(x)$ و نمودار رابطه $|y_{10}| = f(x)$ را رسم کنیم.

همچنین اگر منحنی‌های دو تابع f و g معلوم باشد، می‌خواهیم نمودارهای تابع‌های $f+g$ و $f-g$ را رسم کنیم.

۱ ــ رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$.

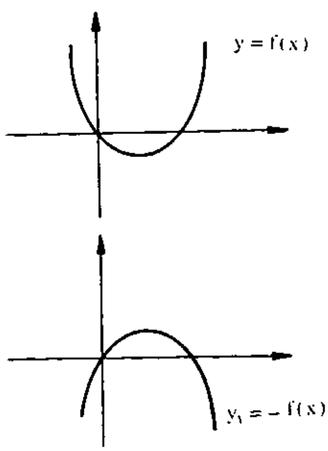
اگر نقطه $M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$، نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\left|\begin{smallmatrix}x_0\\-y_0\end{smallmatrix}\right.$، نقطه ای از منحنی تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ است.

و بالعکس:

اگر $M' \in y_1 \Rightarrow -y_0 = -f(x_0) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right. \in f$

چون دو نقطه $M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$ و $M'\left|\begin{smallmatrix}x_0\\-y_0\end{smallmatrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت به محور xها می‌باشند.

درنتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_1 = -f(x)$ باید قرینه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم. در شکلهای زیر نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y_1 = -f(x)$ نشان داده شده است.



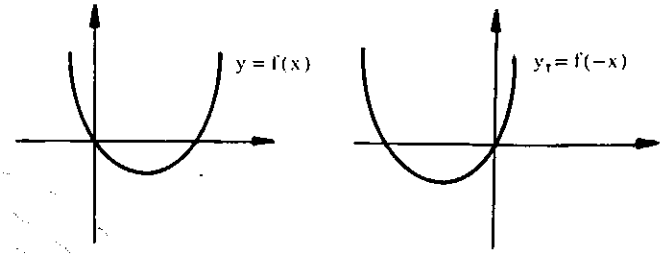
۲ ــ رسم تابع به معادله $y_2 = f(-x)$

اگر نقطه $M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$ روی منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\left|\begin{smallmatrix}-x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$ روی منحنی تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ است و بالعکس:

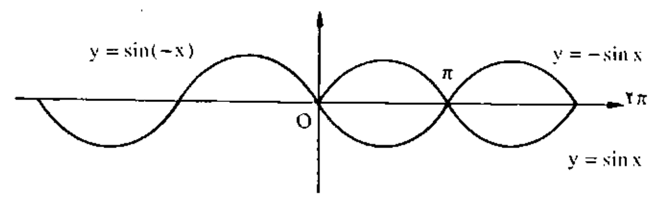
اگر $M'\left|\begin{smallmatrix}-x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right. \in y_2 \Rightarrow y_0 = f(-(-x_0)) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Rightarrow$

$M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right. \in f$

چون نقطه $M\left|\begin{smallmatrix}x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$ و $M'\left|\begin{smallmatrix}-x_0\\y_0\end{smallmatrix}\right.$ قرینه یکدیگر نسبت به محور yها می‌باشند، درنتیجه برای رسم نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ باید قرینه نمودار تابع f به معادله $y = f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم. در شکلهای بعد نمودارها دو تابع به معادلات $y = f(x)$ و $y_2 = f(-x)$ رسم شده است.



مثال : نمودار تابع به معادله $y = \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ معلوم است. می‌خواهیم نمودارهای دو تابع به معادلات $y_1 = -\sin x$ و $y_2 = \sin(-x)$ را رسم کنیم.

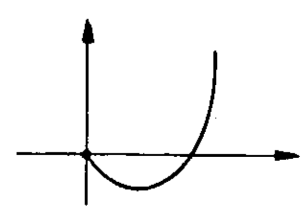


۳ ـ رسم تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$

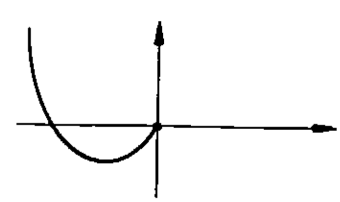
می‌دانیم
$$|x| = \begin{cases} +x \;, & x \ge 0 \\ -x \;, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = f(x) \;, & x \ge 0 \\ y_3 = f(-x) \;, & x < 0 \end{cases}$$

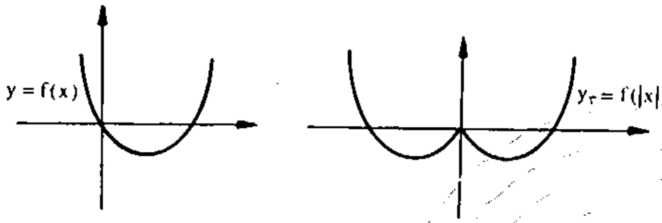
پس برای رسم تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ ، باید از نمودار تابع f قسمتی را انتخاب کرد، که $x \ge 0$ یعنی این قسمت :



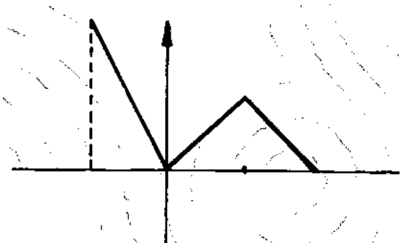
و از نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ ، باید قسمتی را انتخاب کرد که $x < 0$ یعنی این قسمت :



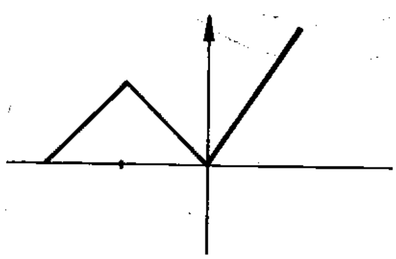
بنابراین نمودار تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ چنین خواهد شد.



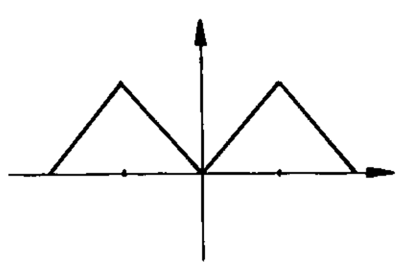
مثال : اگر نمودار تابع به معادله $y = f(x)$ به صورت زیر باشد



آنگاه نمودار تابع به معادله $y_2 = f(-x)$ چنین است :



و نمودار تابع به معادله $y_3 = f(|x|)$ چنین است



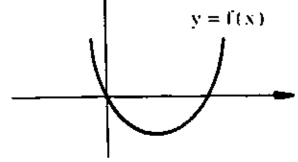
۴ ـ رسم تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$

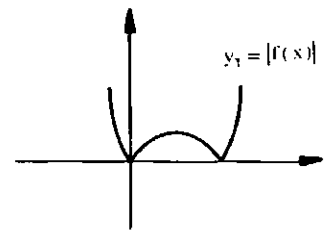
اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{|y_0|}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$ است.

چنانچه منحنی تابع f به معادله $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور xها باشد آنگاه نمودار تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$ نیز همان

نمودار تابع f است.

و اگر قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور xها باشد، برای رسم تابع به معادله $y_4 = |f(x)|$ باید قرینه این قسمت از منحنی را نسبت به محور xها رسم کنیم.





۵ ــ رسم تابع به معادله $y_5 = f(x-a)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{y_\circ}^{x_\circ+a}$ روی منحنی تابع به معادله $y_5 = f(x-a)$ است و بالعکس:

$M'\Big|_{y_\circ}^{x_\circ+a} \in y_5 \Rightarrow y_\circ = f(x_\circ + a - a) \Rightarrow$ اگر

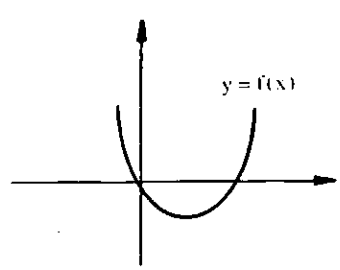
$y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ} \in f$

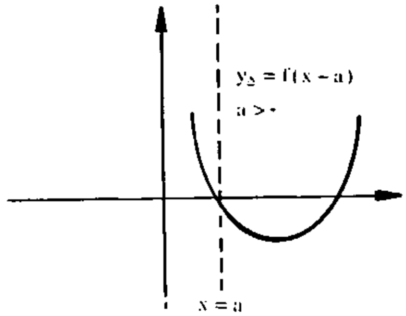
پس می‌توان گفت هر نقطه به طول $x_\circ$ واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی به معادله $y_5 = f(x-a)$ به نقطه‌ای به طول $(x_\circ + a)$ تبدیل می‌شود.

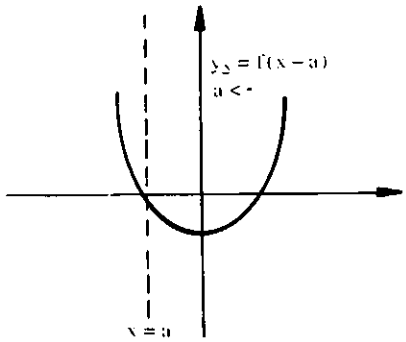
به‌عبارت‌دیگر می‌توان‌گفت‌هر نقطه‌از منحنی تابع f بابردار انتقال $\vec{V}(a,\circ)$ به‌نقطه‌ای‌از منحنی‌به‌معادله $y_5 = f(x-a)$ تبدیل می‌شود.

بنابراین برای رسم تابع به معادله $y_5 = f(x-a)$ کافیست کلیهٔ نقاط منحنی تابع f را به اندازه $x = a$ در راستای محور xها تغییر مکان می‌دهیم.

اگر $a > \circ$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت راست محور xها انتقال می‌یابد و اگر $a < \circ$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $x = a$ به سمت چپ محور xها انتقال می‌یابد.







۶ ــ رسم تابع به معادله $y_6 = b + f(x)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{b+y_\circ}^{x_\circ}$ روی منحنی تابع به معادله $y_6 = b + f(x)$ است و بالعکس

$M'\Big|_{b+y_\circ}^{x_\circ} \in y_6 \Rightarrow b + y_\circ = b + f(x_\circ) \Rightarrow$ اگر

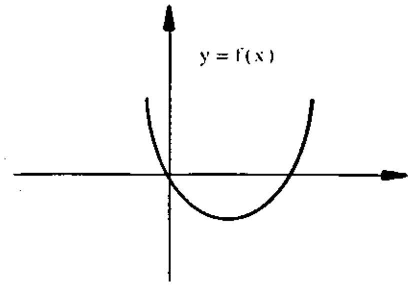
$y_\circ = f(x_\circ) \Rightarrow M\Big|_{y_\circ}^{x_\circ} \in f$

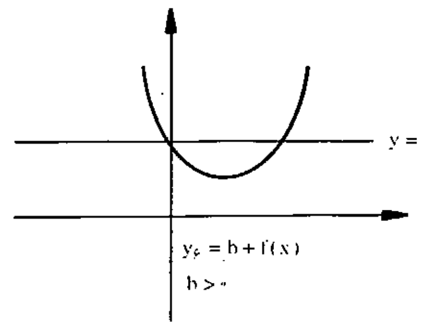
پس هر نقطه به عرض $y_\circ$ واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادله $y_6 = b + f(x)$ به عرض $b + y_\circ$ تبدیل می‌شود.

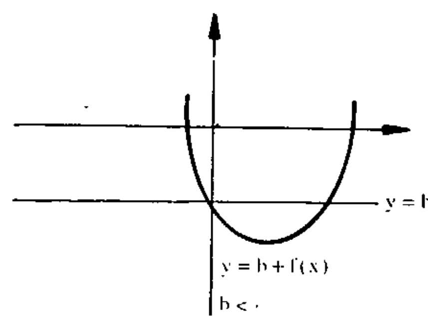
به عبارت دیگر می‌توان گفت هر نقطه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ با بردار انتقال $\vec{V}(\circ, b)$ به نقطه‌ای از منحنی به معادله $y_6 = b + f(x)$ تبدیل می‌شود.

در نتیجه برای رسم تابع به معادله $y_6 = b + f(x)$ کافیست کلّیه نقاط منحنی تابع f را به اندازه $y = b$ در راستای محور yها تغییر مکان می‌دهیم.

اگر $b > \circ$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y = b$ به طرف بالای محور yها انتقال می‌یابد و اگر $b < \circ$، آنگاه هر نقطه از منحنی تابع f به اندازه $y = b$ به طرف پائین محور yها انتقال می‌یابد.







۷ ــ رسم تابع به معادله $y_7 = b + f(x-a)$

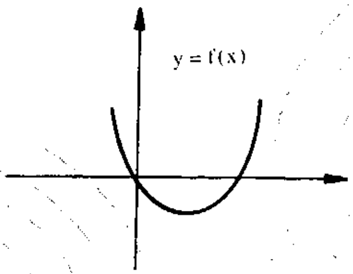
در حقیقت رسم این تابع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y_5 = f(x-a)$ و $y_6 = b + f(x)$ است.

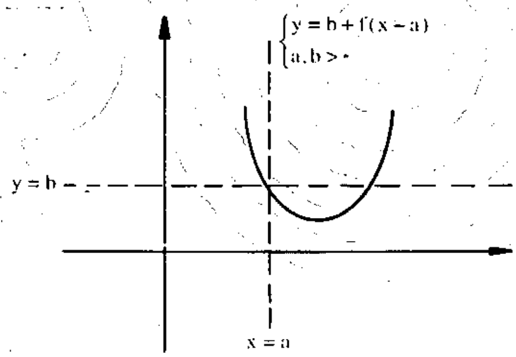
اگر نقطه $M\Big|^{x_0}_{y_0}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|^{x_0+a}_{y_0+b}$، روی منحنی تابع به معادله $y_7 = b + f(x-a)$ واقع است و بالعکس.

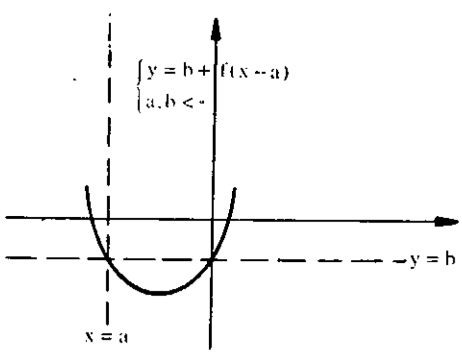
اگر $M'\Big|^{x_0+a}_{y_0+b} \in y_7 \Rightarrow y_0 + b = b + f(x_0 + a - a) \Rightarrow$

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow M\Big|^{x_0}_{y_0} \in f$$

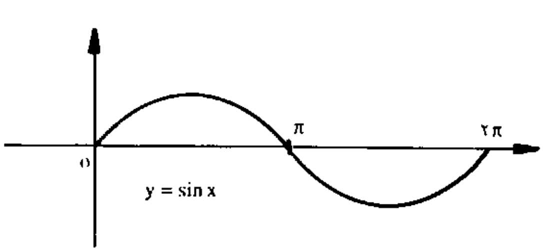
بنابراین برای رسم نمودار تابع به معادله $y_7 = b + f(x-a)$، هر نقطه از منحنی تابع f را به اندازه a در راستای محور xها و به اندازه b در راستای محور yها انتقال می‌دهیم. به عبارت دیگر هر نقطه منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ با بردار انتقال $\vec{V}(a,b)$ به نقطه‌ای از منحنی تابع به معادله $y_7 = b + f(x-a)$ تبدیل می‌شود.

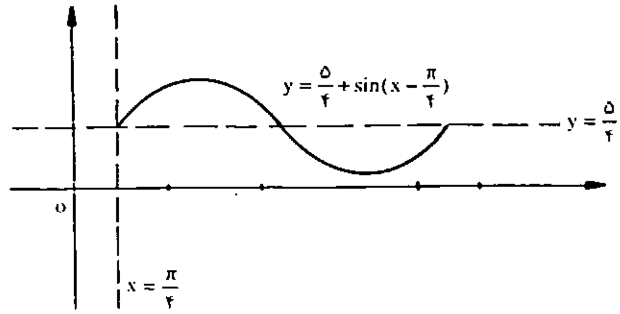


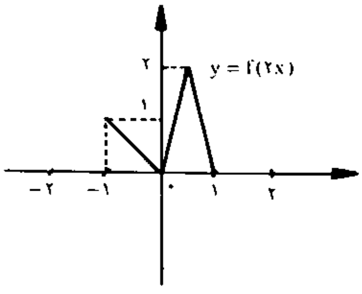




مثال: منحنی تابع به معادله $y = \sin x$، $0 \le x \le 2\pi$ مفروض است. نمودار تابع به معادله $y = \frac{5}{4} + \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را رسم کنید.







$D_{f(2x)}=[-1,1]$

۸ ــ رسم تابع به معادله $y_8=f(kx)$

اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{y_0}^{\frac{x_0}{k}}$ روی منحنی تابع به معادله $y_8=f(kx)$ است و بالعکس

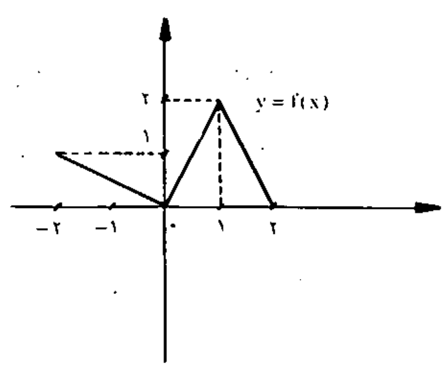
$$M'\Big|_{y_0}^{\frac{x_0}{k}}\in y_8 \Rightarrow y_0=f(k\times\frac{x_0}{k})\Rightarrow y_0=f(x_0)\Rightarrow$$ اگر

$$M\Big|_{y_0}^{x_0}\in f$$

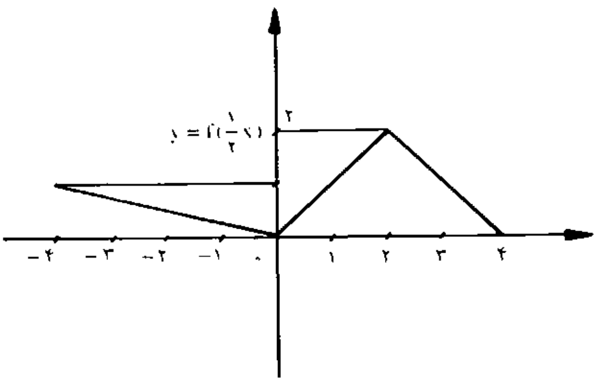
بنابراین برای رسم تابع به معـادله $y_8=f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی f را (با حفظ مقدار عرض آن) بر عدد (K) تقسیم کنیم.

یعنی اگـر $k=2$، آنگاه نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ از منحنی تابع f به نقطه $M'\Big|_{y_0}^{\frac{x_0}{2}}$ و اگر $k=\frac{1}{2}$ آنگاه نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ از منحنی تابع f به نقطه $M\Big|_{y_0}^{2x_0}$ تبدیل می‌شود.

چنانچه حـوزهٔ تعریف تابع f فـاصله $[a,b]\subset\mathbb{R}$ باشـد، آنگاه حــوزه تعــریف تابع به مــعــادله $y_8=f(kx)$، فـاصله $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]\subset\mathbb{R}$ خواهد شد.



$D_{f(x)}=[-2,2]$



$D_{f(\frac{1}{2}x)}=[-4,4]$

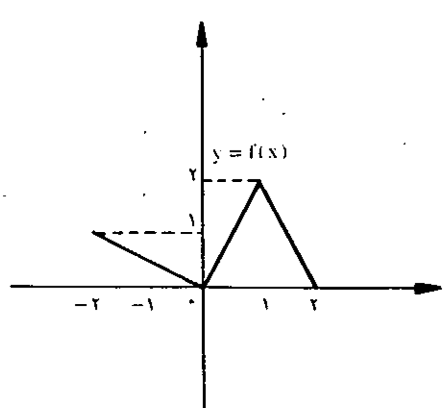
۹ ــ رسم نمودار تابع به معادله $y_9=kf(x)$

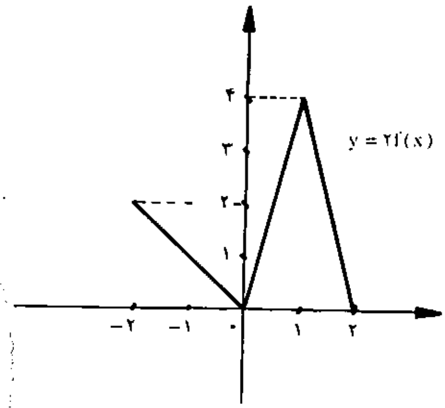
اگر نقطه $M\Big|_{y_0}^{x_0}$ روی منحنی تابع به معادله $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه $M'\Big|_{ky_0}^{x_0}$ روی منـحنی تابع به مـعــادله $y_9=kf(x)$ است. و بالعکس:

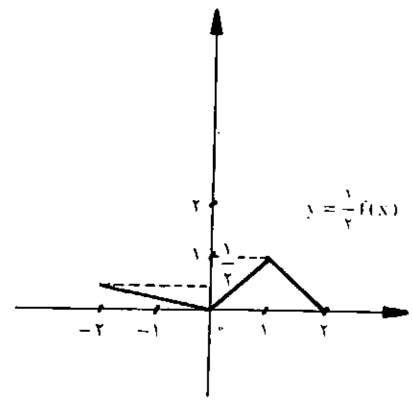
$$M'\Big|_{ky_0}^{x_0}\in y_9\Rightarrow ky_0=kf(x_0)\Rightarrow y_0=f(x_0)\Rightarrow$$ اگر

$$M\Big|_{y_0}^{x_0}\in f$$

پس برای رسم تابع به مـعـادله $y_9=kf(x)$ باید عـرض هر نقطه از منحنی تابع f را (با حـفظ طول آن) در عـدد k ضـرب کنیم.





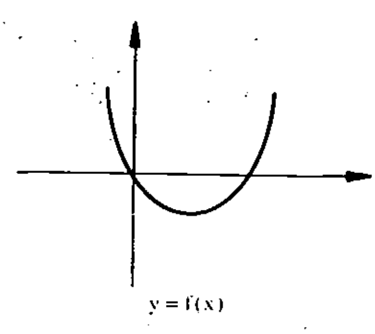


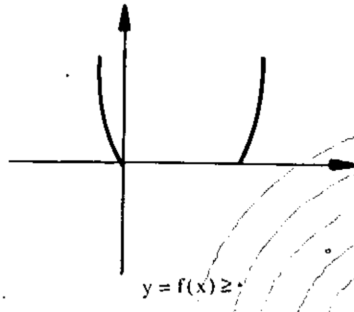
۱۰ ـ نمودار رابطه $|y_{1\cdot}| = f(x)$

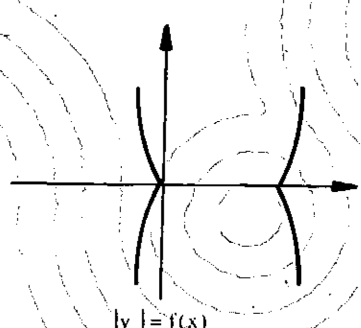
اولاً : $f(x) \geq 0$ یعنی از منحنی تابع f باید قسمتهایی را انتخاب کرد که روی محور xها یا بالای محور xهاست،از طرفی :

$$|y_{1\cdot}| = f(x) \Rightarrow y_{1\cdot} \pm f(x)$$

ثانیاً : باید قرینه همین قسمت از منحنی f که روی محور xها یا بالای محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها هم رسم کنیم.







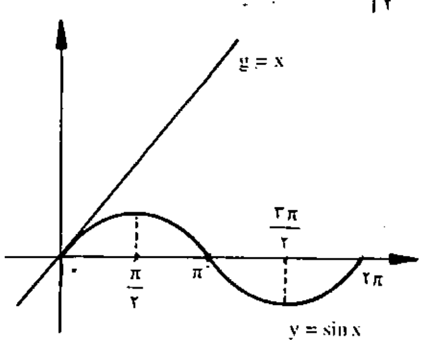
۱۱ ـ رسم تابع f+g

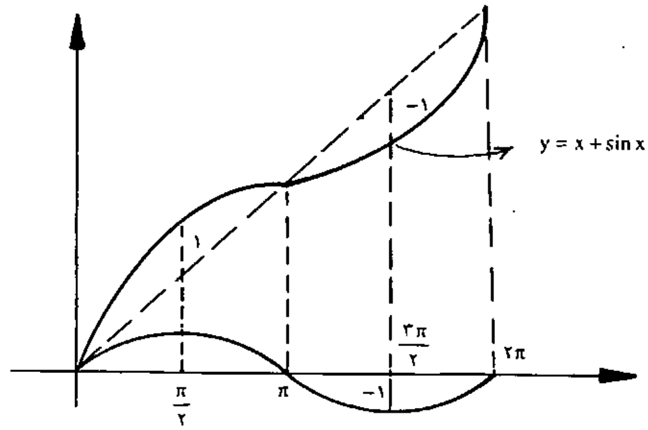
فرض می‌کنیم $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ و $D_f = D_g = [a,b] \subset \mathbb{R}$ اگر نقطه‌ای به طول $x_\circ$ روی منحنی تابع f و روی منحنی تابع g باشد داریم :

نقطه $M_1\Big|^{x_\circ}_{f(x_\circ)}$ روی منحنی تابع f و نقطه $M_2\Big|^{x_\circ}_{g(x_\circ)}$ روی منحنی تابع g است درنتیجه نقطه $M\Big|^{x_\circ}_{f(x_\circ)+g(x_\circ)}$ روی منحنی تابع f+g است. پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x)+g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای تقاط هم طول روی دو منحنی f و g را با هم جمع کرد.

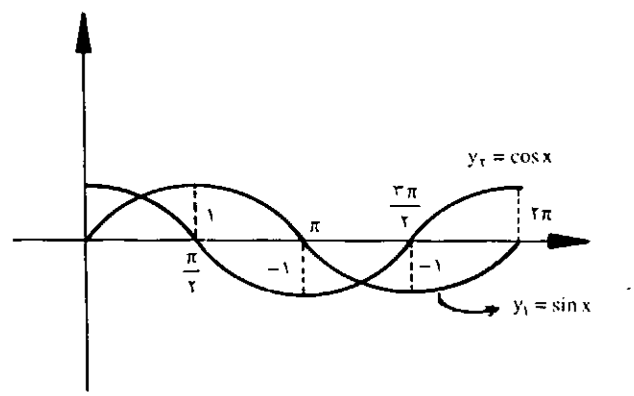
مثال منحنی نمایش تابع به معادله $y = x+\sin x$ را وقتی $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

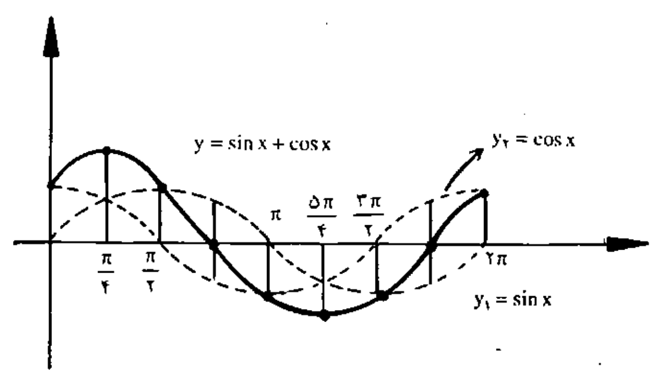
توجه : اگر $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+1 \Rightarrow M\Big|^{\frac{\pi}{2}}_{\frac{\pi}{2}+1}$





مثال : با در دست داشتن منحنی‌های به معادله $y_۱ = \sin x$ و $y_۲ = \cos x$ و $۰ \le x \le \pi$ آنگاه منحنی تابع به معادله $y = \sin x + \cos x$ ، $۰ \le x \le ۲\pi$ را رسم کنید.





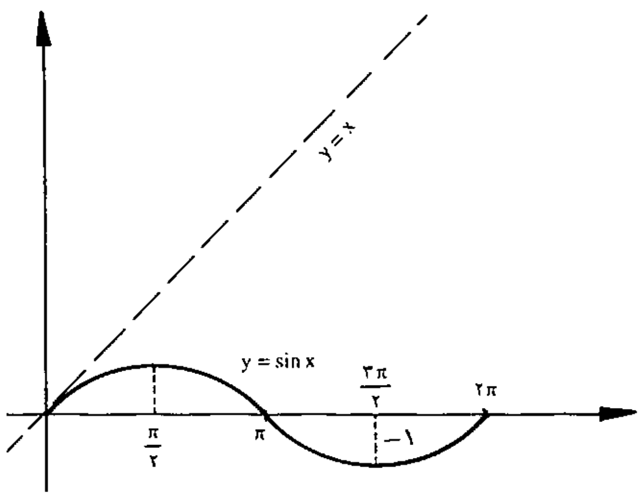
۱۲ ــ رسم تابع $f - g$

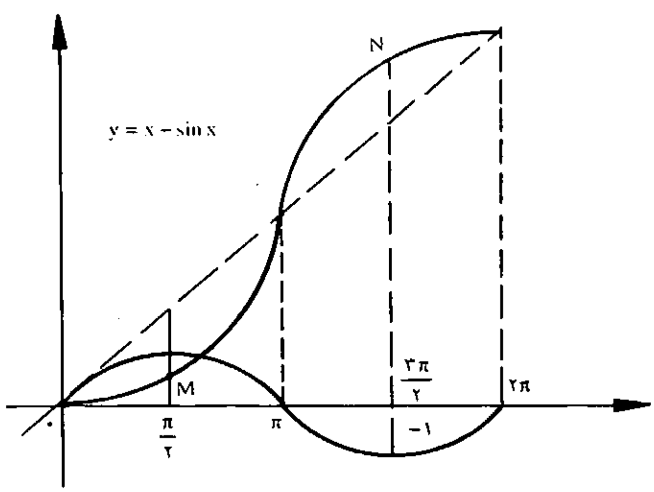
فرض می‌کنیم $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ و $D_f = D_g = [a,b] \subset \mathbb{R}$ اگر نقطه‌ای به طول $x_۰$ روی منحنی‌های تابع‌های $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ باشد داریم :

نقطه $M_۱\Big|^{x_۰}_{f(x_۰)}$ روی منحنی تابع f و نقطه $M_۲\Big|^{x_۰}_{g(x_۰)}$ روی منحنی تابع g است درنتیجه نقطه $M\Big|^{x_۰}_{f(x_۰)-g(x_۰)}$ روی منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ قرار دارد.

پس برای رسم منحنی تابع به معادله $y = f(x) - g(x)$ باید برای هر نقطه از منحنی این تابع عرضهای نقاط هم طول روی دو منحنی f و g را از هم کم کرد.

مثال : منحنی نمایش تابع به معادله $y = x - \sin x$ ، $۰ \le x \le ۲\pi$ را رسم کنید.

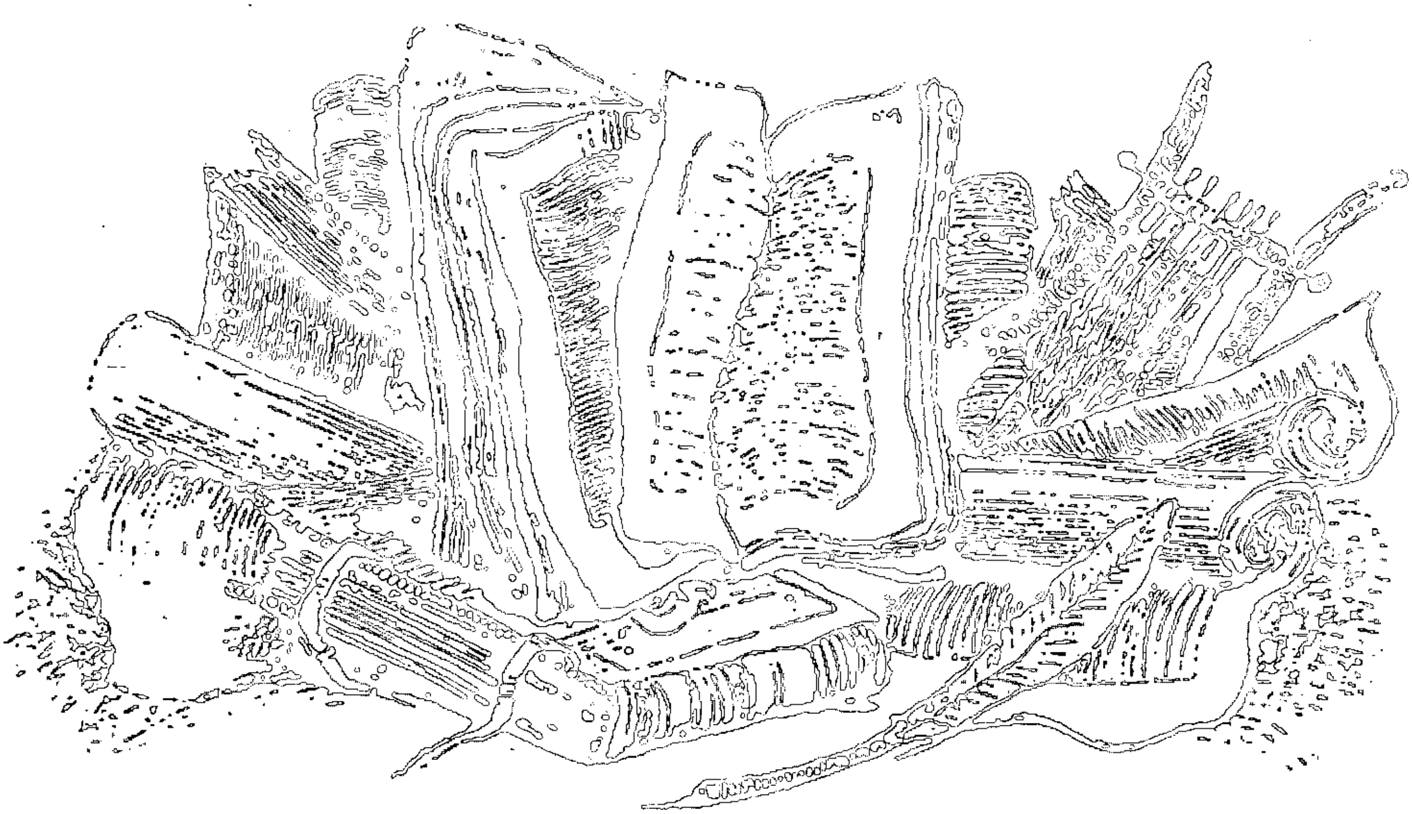




توجه :

$$x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} - ۱ \Rightarrow M\Big|^{\frac{\pi}{۲}}_{\frac{\pi}{۲}-۱}$$

$$x = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳\pi}{۲} - \sin\frac{۳\pi}{۲} = \frac{۳\pi}{۲} + ۱ \Rightarrow N\Big|^{\frac{۳\pi}{۲}}_{\frac{۳\pi}{۲}+۱}$$



تاریخچهٔ مجلات ریاضی در ایران (۱۹)

● غلامرضا یاسی‌پور

در شمارهٔ ۲۲ مجلهٔ یکان و در سر مقالهٔ آن که به مناسبت سالروز انتشار یکان نوشته شده چنین آمده است که :

اولین شمارهٔ مجله یکان در بهمن ماه دو سال قبل تقدیم علاقه‌مندان گردید. استقبالی که از این مجلهٔ صددرصد علمی به عمل آمد برای وی این امکان را فراهم ساخت، که قائم بالذات به حیات علمی خویش ادامه دهد و اتکای وی منحصراً به خوانندگان و علاقه‌مندان خویش باشد. کوششهایی که تاکنون به عمل آمده است تنها در راه بهبود وضع مجله در جهت مطلوب آن و در جهت تمایلات خوانندگان آن انجام گرفته است و غیر از آن، حتی برای شناساندن مجله به مقامات ذی‌نفوذ، کوچکترین اقدامی معمول نشده است، مگر آنچه که آیین‌نامه و قانون مطبوعات ایجاب می‌نموده است.

در همین شماره تحت عنوان : **بی‌آنکه عصبانی شوید این مسأله را حل کنید** مسألهٔ زیر را می‌خوانیم :

سه نفر از دانایان یونان قدیم در باغ آکادمی استراحت کرده و به خواب رفته بودند : رجاله‌ای که گذارش به آنجا افتاده بود پیشانی هر کدام از آنها را با دوده سیاه کرد، بعد در اثر صدایی که از ناحیه‌ای برخاست هر سه نفر از دانایان بیدار شده هر یک، از دیدن پیشانی دو نفر دیگر، شروع به خنده کردند. اما بعد از لحظه‌ای، هر سه نفر از خنده باز ایستادند، زیرا هر کدام دریافته بودند که پیشانی خود آنها نیز سیاه است. به چه دلیل منطقی؟

در شمارهٔ بعد، یعنی شمارهٔ ۲۲، که در تاریخ اسفند ماه ۱۳۴۴ منتشر شده مقاله‌ای از استاد **احمدبیرشک** تحت عنوان **توسعه‌طلبی ریاضی**، که مقاله‌ای کوتاه اما با کیفیت است، و ما برای استفادهٔ بیشتر خوانندگان کل این مقاله را در اینجا

می‌آوریم:

«میان هندسه و زیست‌شناسی اختلافی است ناشی از این واقعیت که خط راست ساختهٔ مجرد طرز تفکر نظری است و در طبیعت زنده همانند کاملی ندارد. چنین استنباط می‌شود که این طبیعت زنده، که در قالبی بسیار سخت که به اندازهٔ آن نیست قرار داده شده عاصی گردیده است و به زودی نشانه‌های رنج روحی در آن ظهور می‌کند». آنچه نوشتیم قسمتی است از یک مقالهٔ **دکتر برژ**، پزشک روانکاو و رییس «**مدرسهٔ والدین**» که در تازه‌ترین شمارهٔ مجلهٔ «**دفترهای زندگی**» چاپ شده است، و از نوعی طغیان در مقابل طرز تفکر ریاضی، که در تکامل علوم کنونی تأثیر دارد، حکایت می‌کند. بسیاری از دانشمندان، به ویژه زیست‌شناسان، و گاهی هم فیزیکدانان از نوعی توسعه‌طلبی ریاضی نگران هستند که بیم آن می‌رود که راه پیشرفت علم را در برخی رشته‌ها **کج کند** و در نتیجه اوضاع و شرایط حیات بشری را منحرف سازد.

در بیشتر مقالات و رسالات زیست‌شناسی و زمین‌شناسی (و همچنین پزشکی و کشاورزی) که از نظر من گذشته است، سطح ریاضیاتی که در آنها به کار رفته است از حدود محاسبات عددی دورهٔ شش سالهٔ ابتدایی تجاوز نمی‌کند. فقط در بعضی رشته‌ها مثلاً «علم توارث» (ژنتیک) ریاضیات به معنی واقعی وارد می‌شود اما همه جا علاقهٔ خاصی به «دقت» به چشم می‌خورد که از هیچ یک از محکمترین استدلالهای ریاضی پای کمی ندارد. راست است که ممکن است این سؤال پیش بیاید که آیا زیست‌شناسان و زمین‌شناسان مجبور نخواهند شد در کارهای پیشرفته‌تر خود با کمال صداقت، ریاضیات و طرز بیان آن را به کار برند؟

نتیجه برای من روشن است: همهٔ جوانانی که خود را برای پیش گرفتن رشته‌های زیست‌شناسی و زمین‌شناسی آماده می‌سازند و حتی «مرد شریف» آینده [نوع ظریف مردان قرن بیستم] باید سعی کنند که خود را به دقت (به اصطلاح ریاضی) و به استدلال معتاد سازند و فکر خود را در جهت علمی، یعنی سازنده پرورش دهند آنان نمی‌توانند ریاضیات و فواید آن را نادیده انگارند.

می‌دانم چه ایرادی به من خواهند گرفت، خواهند گفت: «هر دانشجوی مشتاق علوم طبیعی دارای استعداد ریاضی نیست» این مطلب درست، اما آیا در رفتار این دانشجوی مشتاق هم دقت شده است؟ در هر لحظه استدلالی از نوع ریاضی به کار می‌برد و بالاتر از آن، همان‌طور که «**مسیو ژوردن**» نیز می‌گفت، مجردات مفاهیم ریاضی از این دانشجو تراوش می‌کند، او سرعت رشد بچهٔ قورباغه را از میزان دراز شدن روزانهٔ دم آن اندازه می‌گیرد و از بین رفتن دم نتیجه می‌گیرد که استحاله نزدیک است. در حقیقت او تغییرات تابع را از روی مقدار و علامت مشتق آن نتیجه می‌گیرد. آیا می‌توان تصور کرد که این جوان به راستی نسبت به ریاضی یاغی است؟

مجبور کردن او به محدود ماندن در یک تاریخ طبیعی عتیق، که روزی ارزشی داشته است، خطاست، بلکه بالاتر از خطاست. مطمئن هستم ریاضیاتی که به این آسانی بر مسائل دشوار غالب می‌شوند، به حل مسئلهٔ جوان دانشجویی که در این مورد به اصطلاح «از دست چپ بیدار شده است» نیز موفق خواهند شد و او را وادار خواهند کرد که اندکی چشمان خود را بمالد.

اندیشه‌های باریک‌بین از آن‌چه گذشت تصور خواهند کرد که من میل دارم توسعه‌طلبی ریاضی به صورت یک «قدرت روشنفکرانهٔ پدری» تکامل یابد. از کسانی که چنین می‌اندیشند خواهش می‌کنم که کمی دربارهٔ سطور زیر در «**خلقت علمی**» تألیف «**آ. مول**» به تفکر بپردازند: «از مجرای موارد استعمال فنی است که علم مجبور شده است از برج عاج پدیده‌های محض فرود آید و پیچیدگی را به عنوان یکی از اجزای اصلی جهان نوین بپذیرد و با آن نخست در ساخته‌های مغز بشری و سپس در طبیعت، که در آن در کمال وضوح وجود دارد، مواجه شود...» اما به نظر می‌رسد که هنوز مغز آدمی در جستجوی کمی و کیفی پیچیدگی پیشرفتی نکرده است... هنوز «فلسفهٔ پیچیدگی» به وجود نیامده است و فقدان این ابزار فکری اندک‌اندک احساس می‌گردد.

یکی از مشخصات طرز فکر علمی کنونی تمایل به دقت است، که حتی در نیروی خلاق تصور دیده می‌شود. تسلط بر

پیچیدگی، که به کار بستن علوم طبیعی موجب بسط آن است، صفت مشخصهٔ دوم است. و نیز صفات ممیزهٔ دیگر وجود دارد:

تصور این که «چون دانشجویی در ریاضیات قوی است طرز تفکر علمی دارد» درست نیست. و توزیع دانشجویان بین رشته‌های مختلف علوم بر مبنای ریاضی، و آموختن ریاضی به آنان، برای آن که بهتر بتوان بین آنان فرق قایل شد، راه‌حلی است تنبلانه، توأم با رنگ بی‌اطلاعی از ارزش تربیتی ریاضیات.

منحصر کردن قسمتهای به اصطلاح علمی به معدودی مواد متشکله، که ریاضیات در رأس آنها (حتی اگر علوم طبیعی هم افتخار محسوب شدن جزء این مواد معدود را داشته باشند) از جنبهٔ تربیتی عوام فریبی است:

با این ترتیب فکرها به غلط پرورده خواهد شد و نتایجی را که دکتر برژ از آنها می‌ترسید به بار خواهد آورد.

در همین شماره جواب مسألهٔ منطقی شمارهٔ قبل را که در آغاز این مقاله آوردیم، چنین می‌خوانیم:

هر یک از آنها چنین استدلال می‌کند: «هر کدام از ما (من، B و C) فکر می‌کند که پیشانیش تمیز می‌باشد. B که خیال می‌کند پیشانیش پاک باقی مانده است از دیدن پیشانی سیاه C به خنده می‌افتد. اما B چنانچه می‌دید که پیشانی من پاک است بایستی از خندهٔ C دچار تعجب شود، زیرا در چنین صورتی برای خندهٔ C علتی وجود نداشت. چون B از خندهٔ C دچار تعجب نشده است چنین استنباط می‌شود که وی خیال می‌کند به خاطر پیشانی سیاه شدهٔ من است که C می‌خندد، پیشانی من نیز سیاه شده است.»

با بررسی مطالب این شماره‌ها به این نتیجه‌گیری می‌رسیم که تعداد مقالات توصیفی مجله بسیار کم و در عوض تعداد مسائل امتحانی و مسائل جنب کتاب درسی بسیار زیاد شده است، که البته همراه با آن کیفیت مطالب مجله نیز پایین آمده است.



ادب ریاضی

مشهور است که زرگر متقلبی، که بنا بود تاجی از طلا برای هیرون بسازد، مقداری نقره در آن وارد کرده بود و پادشاه که تقلب صنعتگر را حدس زده بود، از ارشمیدس خواست که دربارهٔ حل این مسأله راه چاره‌ای بیابد.

امروزه هر محصل مدرسهٔ متوسطه می‌داند، که چه‌گونه می‌تواند با تجربه‌ای ساده و با حساب مختصری دربارهٔ وزن مخصوصها این مسأله را حل کند و نیز همهٔ مبتدیان جوان و مهندسان بحر پیمایی و کشتی‌سازی موارد استعمال بیشمار قانونی را که به اصل ارشمیدس معروف است می‌دانند. اما مردی که برای اولین بار توانست از تجربه‌ای عادی چنین قانونی را نتیجه بگیرد، در مقامی مطلقاً مافوق مشاهده‌کنندگان عادی قرار داشته است.

از این نکته اطلاعی نداریم که بالاخره زرگر را مقصر شناختند یا نه، اما به اتکای افسانهٔ مزبور معمولاً به این سؤال پاسخ مثبت داده می‌شود.

«داوید هیلبرت»

در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع
(قسمت دوم)
(ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان ۱)

◄ حمیدرضا امیری

تشخیص تابع بودن یک رابطه:

در شمارهٔ قبل دیدیم که اگر رابطهٔ f از A در B یک تابع باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن یافت شود ؛ به عبارت دیگر این مفهوم را می‌توان به صورتهای زیر تعبیر کرد :

الف) اگر نمودار پیکانی رابطهٔ f رسم شود (هر عضو دامنه را با یک فلش یا پیکان به عضو متناظرش در بُرد مرتبط کنیم)، و از هر عضو دامنه فقط و فقط حداکثر یک پیکان خارج شود در این صورت رابطه f تابع می‌باشد. به مثالهای زیر توجه کنید :

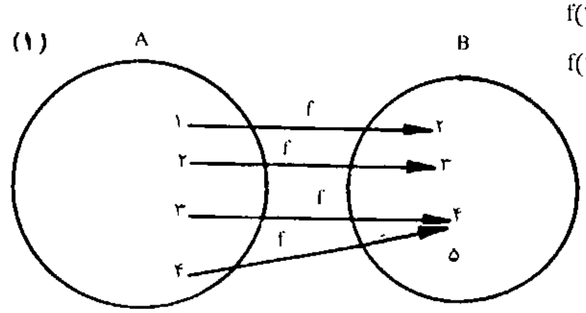
$f(۱)=۲$

$f(۲)=۳$

$f(۳)=۴$

$f(۴)=۳$

(۱)

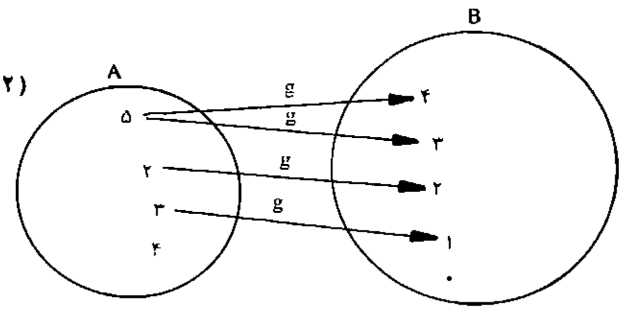


$D_f=\{۱،\ ۲،\ ۳،\ ۴\}$ ، $R_f=\{۲،\ ۳،\ ۴\}$

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$

f تابع است.

(۲)



$D_g=\{۵،\ ۲،\ ۳\}$

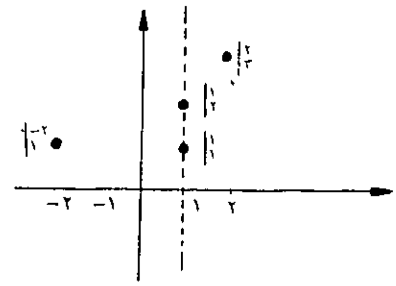
$R_g=\{۴،\ ۳،\ ۲،\ ۱\}$

در این مثال رابطهٔ g از A در B، یک تابع **نیست**، زیرا از ۵ که عضو دامنهٔ g می‌باشد دو پیکان خارج شده است. در واقع: $(۵,۴)\in g$ و $(۵,۳)\in g$ که با تعریف تابع تناقض دارد و درنتیجه، $g=\{(\underline{۵},۴),(\underline{۵},۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$ تابع نیست.

ب) اگر نمودار مختصاتی رابطهٔ f را رسم کنیم (به هر زوج مرتب در f یک نقطه نسبت بدهیم، که مؤلفهٔ اول طول نقطه و مؤلفهٔ دوم عرض آن باشد) و هیچ دو نقطه‌ای روی خطی موازی با محور **yها** واقع نشوند، رابطهٔ f تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید :

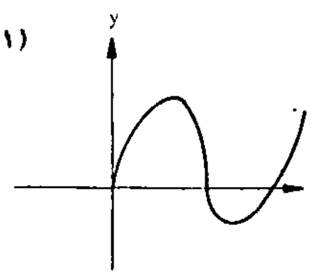
۱) اگر $f=\{(۱,۲)(۱,۱),(۲,۳)(-۲,۱)\}$ در این صورت نمودار مختصاتی رابطهٔ f به این صورت است.

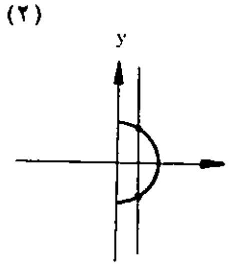
همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه از این نقاط روی خطی موازی با محور yها قرار دارند (طول نقاط با هم برابر و

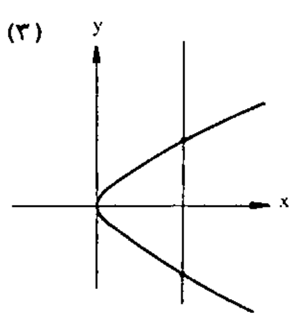


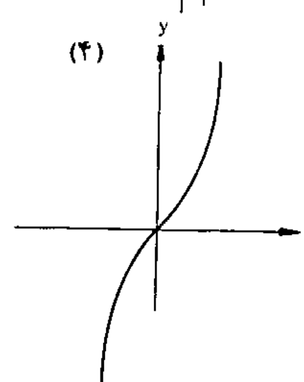
عرض آنها متمایز است) و لذا f تابع نیست.

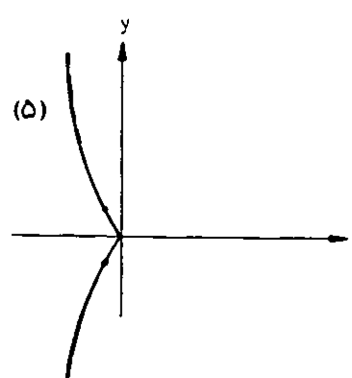
لازم به تذکر است که عکس این مطلب برای تشخیص تابع بودن یک رابطه مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی اگر نمودار یک رابطه مفروض باشد، برای تشخیص تابع بودن آن کافی است خطوطی موازی با محور yها رسم کنیم، اگر حتی یک خط نمودار رابطه را در بیش از یک نقطه قطع کند، رابطهٔ مزبور تابع نیست و اگر هیچ خطی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نکند، آن رابطه تابع است، به مثالهای زیر توجه کنید:

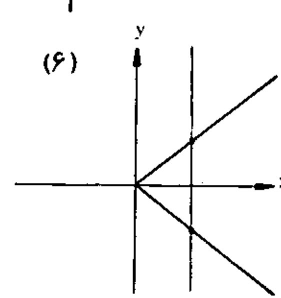
(۱)


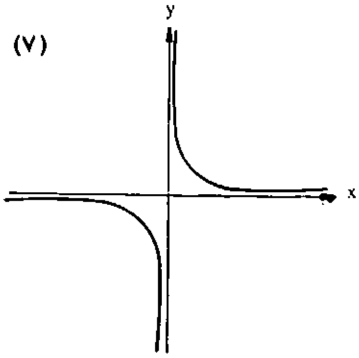
(۲)


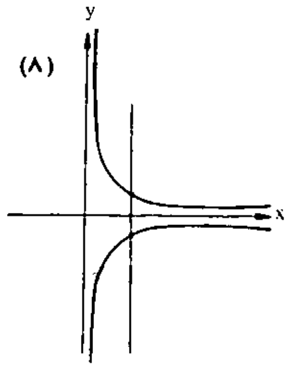
(۳)


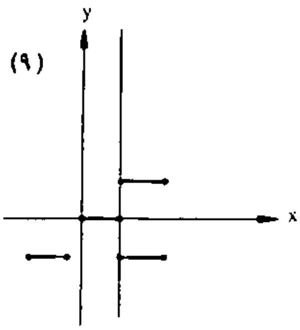
(۴)


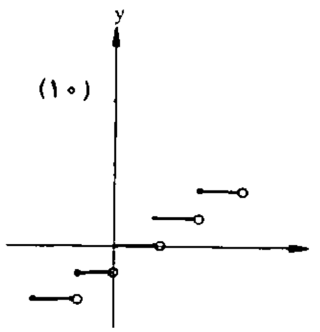
(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)


(۱۰)


با توجه به این مطالب مشاهده می‌کنید که نمودارهای (۲) و (۳) و (۵) و (۶) و (۸) و (۹) نمی‌توانند نمودار یک تابع باشند، زیرا در هر کدام از آنها می‌توانید خط یا خطوطی موازی با محور yها رسم کنید، به‌طوری که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

ج) اگر بخواهیم تعریفی به زبان ریاضی برای تابع f بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم:

رابطهٔ f تابع است $\Leftrightarrow [(x_1,y_1)\in f \ , \ (x_1,y_2)\in f] \Rightarrow y_1 = y_2$

و تعریف فوق به این معنی است، که اگر رابطهٔ f تابع باشد، نباید دو زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول برابر داشته باشد، و اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر در f یافت شود، باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند، تا در واقع دو زوج متمایز نباشند.

حال اگر f را با ضابطه‌اش مشخص کنند، با استفاده از تعریف فوق می‌توان پی‌برد، که آیا f تابع است یا خیر؟

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$f: R \to \mathbb{R}$$

۱) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $f(x) = x^2$ تابع است؟

طبق فرض داریم $\to f(x) = y = x^2$

اگر $(x_1,y_1)\in f, (x_1,y_2)\in f \Rightarrow f(x_1) = y_1, f(x_1) = y_2$

$\Rightarrow x_1^2 = y_1 \ , \ x_1^2 = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow$ f تابع است

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

۲) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $y = f(x) = 2x^3 + 1$ تابع است؟

اگر $(x_1, y_1) \in f \ , \ (x_1, y_2) \in f \Rightarrow f(x_1) = y_1 \ , \ f(x_1) = y_2$

$\Rightarrow 2x_1^3 + 1 = y_1 \ , \ 2x_1^3 + 1 = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

۳) آیا رابطهٔ f با ضابطهٔ $y = f(x) = \pm\sqrt{x}$ تابع است؟

$f(x) = y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow f(2) = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow f(2) = \sqrt{2} \ , \ f(2) = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow (2, \sqrt{2}) \in f \ , \ (2, -\sqrt{2}) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

تذکر مهم: هرگاه ضابطهٔ رابطهٔ f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم، اگر برای هر x حداکثر یک y حاصل شود، ضابطهٔ یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست.

۴) اگر : $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ ، آیا رابطهٔ f یک تابع است؟

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

اگر $x = 1$ $y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (1, \sqrt{3}) \in f$

$, \ (1, -\sqrt{3}) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

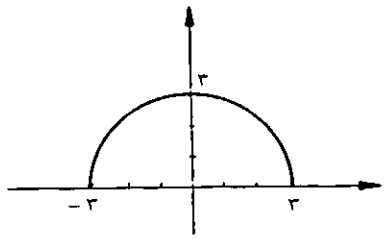
تذکر مهم: در مثال (۴) نمودار رابطهٔ f دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $r = 2$ ، و دیدیم که f تابع نبود، این مطلب را می‌توان به صورت کلی نیز پذیرفت که «نمودار هر رابطه که به شکل یک منحنی یا چند ضلعی بسته باشد، همواره مشخص کنندهٔ یک تابع نیست» (همواره در هر شکل بسته می‌توان خطی موازی محور yها چنان رسم کرد، که منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کند.)

۵) اگر $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | x^2 + y^2 = 9\}$ ، آیا رابطهٔ g یک تابع است؟

$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2} \ , \ y \geq 0$

$\Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow$ g تابع است

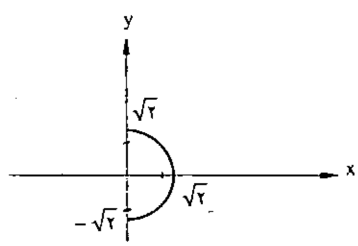
(توجه دارید، که اگر $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ در این صورت $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}^+$) نمودار تابع فوق در واقع قسمتی از دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است، که همهٔ نقاط واقع بر آن قسمت، عرض مثبت داشته باشند، مطابق شکل زیر :



۶) اگر $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 2\}$ ، آیا رابطهٔ h یک تابع است؟

$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$

مثلاً اگر قرار دهیم $x = 1$ در این صورت $y = \pm 1$ یعنی برای $x = 1$ که عضوی از دامنه است دو عضو از برد $(y = \pm 1)$ به دست می‌آید لذا h تابع نیست و نمودار آن به شکل زیر است (قسمتی از دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{2}$ که هر نقطهٔ واقع بر آن دارای طول مثبت باشد)، مطابق شکل زیر :

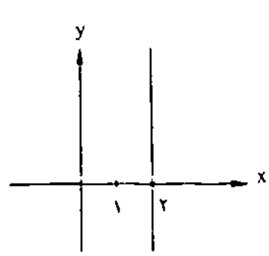


و همان‌طور که مشاهده می‌کنید، می‌توان خطی موازی محور yها چنان رسم کرد که نمودار این رابطه را در دو نقطه قطع کند.

۷) اگر $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2\}$ ، آیا رابطهٔ f تابع است؟

در این رابطه y به x بستگی ندارد (واضح است که y تابع متغیر x نیست) و همواره می‌توان هر مقدار دلخواه برای y و به ازای هر یک مقدار x، در نظر گرفت مثلاً : $(2, 1) \in f$ و $(2, 2) \in f$ ، پس f تابع نیست.

نمودار رابطهٔ f خطی است موازی با محور yها و به فاصلهٔ ۲ واحد از مرکز، مطابق شکل زیر :



(خط $x = ۲$ ، خودش موازی با محور yها است و بی‌شمار نقطه با طولهای مساوی را در بردارد.)

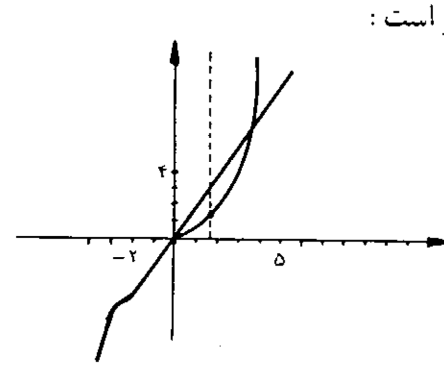
حال قبل از آن که به سراغ تعریف و خواص و کاربردهای انواع تابع‌ها برویم، ابتدا رابطه‌های چند ضابطه‌ای را معرفی می‌کنیم و به بررسی خاصیتهای آنها می‌پردازیم.

هرگاه دامنهٔ یک رابطه را چند قسمت کنیم (ممکن است این قسمتها با هم اشتراک داشته باشند) و روی هر قسمت ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک رابطهٔ چند ضابطه‌ای حاصل می‌شود.

مثال ۱) رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ ۲x & -۲<x<۵ \\ x^{۳} & x\leq -۲ \end{cases}$$

در این مثال و مثالهای مشابه آن همواره در قسمتهایی از دامنه که ضابطه‌ها با هم اشتراک دارند، برای یک مقدار x دو مقدار برای y می‌توان یافت که با تعریف تابع تناقض ایجاد می‌شود، در این مثال ضابطه‌های اوّلی و دومی در دامنه‌شان اشتراک دارند و مثلاً، $f(۱)=۱^{۲}=۱$ و $f(۱)=۲\times۱=۲$ یعنی $(۱,۱)\in f$ و $(۱,۲)\in f$ پس f تابع نیست، نمودار این رابطه به صورت زیر است:

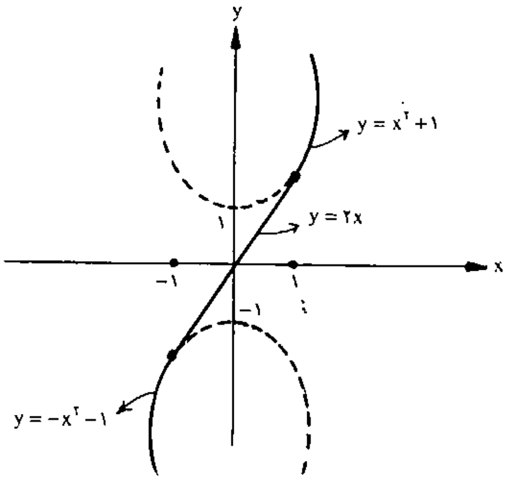


مثال ۲) رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده آیا این رابطه تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x>۱ \\ ۲x & -۱\leq x\leq ۱ \\ -x^{۲}-۱ & x<-۱ \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید ضابطه‌های تعریف در این رابطه در دامنه‌هایشان عضو مشترک ندارند و در ضمن در هر قسمت، ضابطهٔ تعریف شده می‌تواند یک تابع را مشخص می‌کند (برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای $f(x)$ به دست می‌آید).

اگر نمودار این رابطه را رسم کنیم به صورت زیر است:



با توجه به شکل واضح است که f یک تابع است و در واقع به تابع f یک **تابع چند ضابطه‌ای** می‌گویند.

تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساوی یکدیگرند، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $D_f = D_g$

ب) برای هر $x\in D_g = D_f$ همواره $f(x)=g(x)$

مثال ۱) آیا دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ مساوی یکدیگرند؟

اگر کمی بی‌توجهی کنیم و مثلاً تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=(x+۱)$ بنویسیم **شاید** گمان ببریم که $f = g$ است، **ولی** شرط اول تساوی دو تابع برای این **تابعها** برقرار نیست، زیرا: $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ و چون $D_f\neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

مثال ۲) آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}}$ و $g(x)=|x|$ مساوی یکدیگرند؟

جواب مثبت است، زیرا اولاً: $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و ثانیاً برای هر $x\in\mathbb{R}$ همواره:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x|=g(x)$$

مثال ۳) آیا دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x|x|$ مساوی یکدیگرند؟

خیر، زیرا شرط دوم تساوی بین دو تابع برای این تابعها برقرار نیست، در صورتی که : $D_f = D_g$ ، ولی مثلاً :

$f(-۱) = ۱$ و $g(-۱) = -۱\times۱ = -۱$

$\Rightarrow f(-۱) \neq g(-۱) \Rightarrow$ پس دو تابع مساوی نیستند.

مثال ۴) دو تابع $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = x^۳ + ۳x^۲$ مفروض‌اند، با چه‌شرایطی می‌توان ادعا کرد که $f = g$ ؟

چون $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$ است پس شرط اول تساوی دو تابع برقرار است، لذا می‌بایست برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، یعنی باید :

$$x^۳ + ۳x^۲ = x^۲ - x \Rightarrow x^۳ + ۲x^۲ + x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x^۲ + ۲x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x(x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۱$$

در واقع مقدار دو تابع f و g فقط در $x = ۰$ و $x = -۱$ با هم مساوی است، یعنی همواره :

$$f(۰) = ۰ \;,\; g(۰) = ۰ \;,\; f(-۱) = ۲ \;,\; g(-۱) = ۲$$

پس شرط تساوی این دو تابع آن است، که دامنه‌های آنها را از مجموعهٔ $\mathbb{R}$ به مجموعهٔ $D = \{۰, -۱\}$ محدود کنیم، در واقع این دو تابع در دامنهٔ تعریف خودشان مساوی نیستند و فقط در صورتی که دامنهٔ هر یک را $\{۰, -۱\}$ تعریف کنیم با هم مساویند.

انواع تابعها

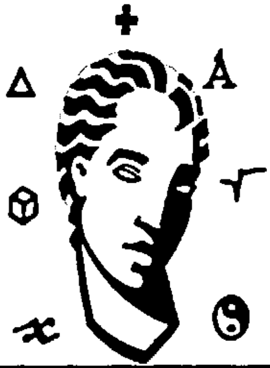
۱ ــ تابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه باشد و روی هر مجموعه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم، در این صورت یک تابع با چند ضابطه یا اصطلاحاً یک **تابع چند ضابطه‌ای** به دست می‌آید، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال: تابع f به صورت زیر تعریف شده است، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۱ \\ ۲ & -۱ \leq x \leq ۱ \\ -۲x & x < -۱ \end{cases}$$

برای رسم تابع فوق کافی است نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کنیم و روی هر کدام از نمودارها قسمتهایی را که در دامنه‌اشان است، پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.



تفریح اندیشهٔ ۲

بازی چینی

چند سال پیش دریک فیلم گیج‌کنندهٔ فرانسوی مردی در راهروهای قصری به‌این طرف و آن طرف می‌رفت و تمام اشخاص را در یک بازی ساده شکست می‌داد. در این بازی شانزده امتیاز شمار (به‌طور مثال چوب کبریت) در ردیفهای ۱، ۳، ۵ و ۷تایی قرار داده شده‌اند. دو بازیکن، به‌نوبت، می‌توانند از چوب کبریتها هر قدر که بخواهند انتخاب کنند. (چوب کبریتها برای انتخاب شدن نیاز به‌مجاور بودن ندارند؛ انتخاب آنها از وسط هر ردیف امتیاز نمی‌آورد.) برای بردن باید حریف را وادار کنید تا آخرین امتیاز شمار روی میز را بردارد.

بازی مزبور توسط چینیهای باستان اختراع شده، و برنده‌شدن در آن ـ اگر راه آن را بدانید ـ آسان است. برای شروع، آیا ابتدا خود عمل می‌کنید یا این امتیاز را به‌حریفتان می‌دهید؛ یا، این مطلب دارای اهمیت نیست؟ برای بردن چگونه بازی می‌کنید؟

جواب در صفحه ۸۷



(سوّم ریاضی نظام جدید و قدیم)

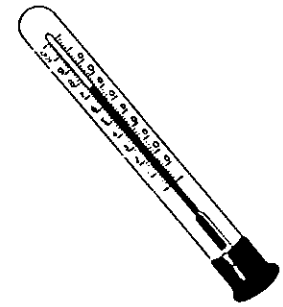
□ حسین ابراهیم‌زادهٔ قُلزم

مبانی کامپیوتر ــ آشنایی با سخت‌افزار و نرم‌افزار

امروزه نقش کامپیوتر در زندگی روزمره بر همه روشن شده است. گسترش و فراگیر شدن آن به تنهایی بستر اصلی رشد جامعه بشری را فراهم ساخته است. مخالفتهای اولیه با کامپیوتر تبدیل به استفادهٔ همگانی و بیشتر از آن شده است، طوری که کامپیوتر به عنوان بخشی جداناپذیر از زندگی روزانه درآمده است. در پرتو دستاوردهایی که کامپیوتر به همراه داشت، عصر حاضر، عصر **انقلاب اطلاعاتی** نامیده شده است؛ انقلابی که مانند **انقلاب صنعتی** تمام ارکان جوامع بشری را دگرگون ساخته است.

در این مقاله سعی می‌کنیم مطالب نظری مربوط به کامپیوتر را که از اهمیت بیشتری برخوردار است بیان کنیم و به همراه آن با ساختمان فیزیکی و قابل لمس کامپیوتر آشنا شویم، تا بتوانیم از این تکنولوژی معاصر، بهترین استفاده را به عمل آوریم.

در آغاز قبل از هر چیز به این پرسش پاسخ می‌دهیم که کامپیوتر چیست؟ در تعریف کلی و عام، **کامپیوتر** به هر وسیله یا ابزاری گفته می‌شود که می‌تواند داده‌هایی را به عنوان **ورودی** دریافت کند و سپس یک سری عملیات روی داده‌ها انجام می‌دهد، که به آن **پردازش** می‌گویند و در پایان نتیجهٔ عملیات انجام شده را در خروجی نشان می‌دهد. سرعت‌سنج (کیلومتر شمار) اتومبیل و دماسنج جیوه‌ای در منازل نمونه هایی از کامپیوتر هستند، زیرا سرعت‌سنج اتومبیل مقدار مسیر طی شده (دادهٔ ورودی) توسط حرکت دورانی چرخ اتومبیل را با ضرب تعداد دورهای چرخ، مثلاً طی یک ساعت در محیط هر چرخ محاسبه می‌کند (انجام عملیات یا پردازش)، آن را به یک عدد حقیقی تبدیل می‌کند و عدد به دست آمده را توسط عقربه‌های سرعت‌سنج (کیلومتر شمار) روی یک صفحه نشان می‌دهد (اطلاعات خروجی)، یا دماسنج جیوه‌ای در منزل، مقدار گرما یا سرمای اتاق را می‌گیرد (دادهٔ ورودی)، با توجه به میزان گرما یا سرما، جیوهٔ درون آن منبسط یا منقبض می‌شود (انجام عملیات یا پردازش) و در پایان شاخص دماسنج، عددی را به عنوان



مقدار دمای اتاق به ما نشان می‌دهد (اطلاعات خروجی).

همهٔ این مراحل به صورت دیگر، در کامپیوتر مدرن و الکترونیکی پیش‌بینی شده است و وجود دارد. ایدهٔ داشتن سه واحد ورودی، پردازش و خروجی برای نخستین بار در ماشین تفاضلی وتحلیلی **چارلز بابیج** طراحی شده بود، که به همین خاطر به وی پدر کامپیوترهای نوین می‌گویند.

اما داده چیست؟ **داده** به هرگونه اطلاعی گفته می‌شود، که در مورد یک چیز داده می‌شود. بیان مشخصات یک چیز، از قبیل اندازه، شکل، وزن و سن به منزلهٔ داده‌هایی در مورد آن چیز به شمار می‌روند. به عنوان مثال، نام یک دانش‌آموز، نام‌خانوادگی، سال تولد، نام مدرسه، نام درسهای اختیار شده توسط دانش‌آموز، شماره شناسنامه، نام پدر و مادر و محل سکونت عبارت از داده‌هایی در مورد آن دانش‌آموز هستند، هر یک از این داده‌ها، اطلاعات خام هستند و به تنهایی ارزشی ندارند. بنابراین به اطلاعات خام، که هیچ پردازشی روی آن انجام نشده باشد، **داده** می‌گویند.

پردازش یا به بیان صحیح‌تر **پردازش داده‌ها** به مجموعهٔ عملیاتی گفته می‌شود که روی داده‌ها انجام می‌شود، تا بتوان از داده‌ها برای انجام یک کار معین استفاده و بر روی نتایج آن تصمیم‌گیری کرد. در کامپیوتر بر روی داده‌ها، عملیات ریاضی و منطقی یا مقایسه‌ای انجام می‌شود.

اطلاعات چیست؟ در کامپیوتر به داده‌های پردازش شده **اطلاعات** می‌گویند.

به مثال زیر که در مورد دادهٔ ورودی، پردازش و اطلاعات است توجه کنید: پنبهٔ خامی وارد کارخانهٔ پنبه‌زنی می‌شود (دادهٔ ورودی). در کارخانه دانه‌های پنبه و مواد اضافی آن گرفته می‌شود و به عنوان ضایعات از پنبه دور می‌شود (پردازش) و در نهایت پنبهٔ زده شده و تمیز و حتی ضدعفونی شده جهت مصرف در اختیار ما قرار می‌گیرد (اطلاعات خروجی). داده‌های کامپیوتری را اعداد، ارقام و حروف، تصاویر و صوت تشکیل می‌دهد، روی این داده‌ها عملیاتی انجام می‌شود تا بتواند مورد استفاده قرار گیرد. به این عمل **داده‌پردازی یا پردازش داده‌ها** می‌گویند.



مقایسهٔ انسان و کامپیوتر

انسان دارای عیبهای مختلفی به شرح زیر است که می‌توان این عیوب را با استفاده از کامپیوتر برطرف کرد:

۱ ـ انسان فراموش کار است حال آن که فراموشی در کامپیوتر معنی ندارد. ۲ ـ انسان در کارها سرعت عمل ندارد، در حالی که سرعت عمل در کامپیوتر در مقایسه با انسان بسیار بیشتر است. ۳ ـ اشتباه کاری در انسان زیاد است، در حالی که کامپیوتر بدون خطا عمل می‌کند. ۴ ـ انسان توانایی حفظ مقدار محدودی اطلاعات را در ذهن خود دارد، در حالی که کامپیوتر می‌تواند مقدار نامحدودی اطلاعات را ذخیره کند و در مورد آن تصمیم بگیرد. ۵ ـ انسان در انجام محاسبات طولانی و تکراری خستگی‌پذیر است، در حالی که کامپیوتر هیچ‌گاه خسته نمی‌شود. ۶ ـ بازیابی اطلاعات در انسان اکثراً با اشتباه همراه است، در حالی که در کامپیوتر این‌گونه نیست.

اما تنها مزیت انسان نسبت به کامپیوتر، داشتن هوش و قدرت تفکر است، اما کامپیوتر فقط می‌تواند داده‌های ورودی را بگیرد، اما قدرت تجزیه و تحلیل پردازش داده‌ها را ندارد، مگر آن که به کمک دستورهایی که گرفته است، نحوهٔ پردازش خود را مشخص کند و سپس از طریق خروجی، نتیجهٔ پردازش را دریافت کند.

حمل و نقل، امور پزشکی، اجرای قوانین، عرصهٔ هنر، در دانشگاهها و مدارس استفاده می‌شود.

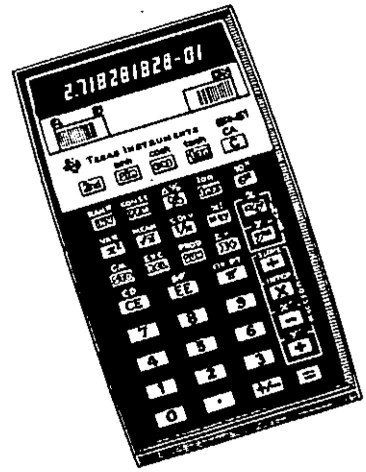
کامپیوترها از **نظر اندازه و بزرگی** به چهار دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند:

۱ ــ **اَبَر کامپیوتر** (Super Computer). از این کامپیوتر برای محاسبهٔ کارهای پیچیدهٔ علمی و فضایی استفاده می‌شود. این نوع کامپیوترها بسیار سریع عمل می‌کنند و از گرانترین کامپیوترها به شمار می‌روند. از ابر کامپیوترها می‌توان (cray-1) و (cray-2) را نام برد. اخیراً ژاپنیها با استفاده از یک ابر کامپیوتر تصمیم گرفته‌اند مقدار عدد π را تا شانزده میلیون رقم بعد از اعشار محاسبه کنند. cray نام یک دانشمند کامپیوتر است. سرعت محاسباتی این کامپیوترها ۱۰۰ تا ۱۴۰۰ میلیون دستور در ثانیه است.

۲ ــ **کامپیوترهای بزرگ** (Main frame). این نوع کامپیوترها سرعت پردازش و ظرفیت ذخیره‌سازی کمتری نسبت به ابر کامپیوترها دارند. این نوع کامپیوترها در بیشتر دانشگاهها و وزارتخانه‌ها برای پردازش اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتیجهٔ کنکور دانشگاهها و اعلام نتایج توسط این نوع کامپیوترها انجام می‌شود. سرعت پردازش این کامپیوترها بین ۳ تا ۲۰ میلیون دستور در ثانیه است. کامپیوترهای IBM/370، IBM4341 از این نوع کامپیوتر هستند.

۳ ــ **کامپیوترهای کوچک** Mini Computer. در مراکزی که حجم اطلاعات و تنوع کارها برای پردازش، متوسط باشد به کار می‌رود. از این نوع کامپیوتر در مراکز تجاری و دولتی و دانشگاهی استفاده می شود. سرعت پردازش این نوع کامپیوترها بین ۰/۸ تا ۴ میلیون دستور در ثانیه است. برخی از انواع کامپیوترهای PDP از این نوع هستند.

۴ ــ **ریز کامپیوترها** Micro Computer. این کامپیوترها ابعاد کوچکی دارند و کم قدرت‌ترین کامپیوترهای موجود هستند. میکروکامپیوترها، کوچکترین و همگانی ترین کامپیوترها هستند. علت نام‌گذاری آن به **میکروکامپیوتر** این است که CPU این نوع کامپیوترها، فقط در یک تراشه یا چیپ chip فشرده بنام **میکروپرسسور یا ریزپردازنده** قرار گرفته است. به



آیا می‌دانید فرق یک ماشین حساب با کامپیوتر چیست؟ کامپیوتر می‌تواند دو یا چند چیز را با هم مقایسه کند، ولی ماشین حساب قدرت انجام مقایسه اعداد و حروف را ندارد.

کامپیوترها به سه دسته تقسیم می‌شوند: ۱ ــ کامپیوتر عددی ۲ ــ کامپیوتر قیاسی ۳ ــ کامپیوتر پیوندی

در **کامپیوتر عددی یا رقمی**، ورودی از اعداد، حروف، تصویر و صدا تشکیل می‌شود. خروجی آن نیز اعداد، حروف، تصویر و صدا است. در زندگی روزمره هم که از کامپیوتر صحبت می‌شود، منظور همین کامپیوتر عددی است. کامپیوترهای عددی مقادیر گسسته را که به صورت عدد هستند اندازه می‌گیرد.

کامپیوتر قیاسی، شبیه سرعت‌سنج اتومبیل و آمپرسنج است، که برای حالتهای خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند و انعطاف‌پذیری آنها نسبت به سایر کامپیوترها کمتر است. محاسبهٔ حجم گازها، مقدار و فشار آب سدها توسط کامپیوترهای قیاسی اندازه‌گیری می‌شود و نتایج توسط علامت و گاهی اوقات عدد نشان داده می‌شود. کنتور برق مصرفی در خانه‌ها نمونه‌ای از کامپیوتر قیاسی است. به نوع ورودی و پردازش و خروجی کنتور برق توجه کنید. کامپیوترهای قیاسی مقادیر فیزیکی را که به صورت پیوسته است اندازه می‌گیرد.

کامپیوتر پیوندی یا دورگه ترکیبی از کامپیوتر عددی و قیاسی است. رادار هواپیما چه در برج مراقبت و چه در درون هواپیما نمونه‌ای از کامپیوتر پیوندی است. کنتور برق نیز نوعی کامپیوتر پیوندی است. چرا؟ از کامپیوتر معمولاً در امور آموزشی، علمی، تحقیقاتی، صنایع، بازرگانی، کتابخانه‌ها، امور

دلیل استفادهٔ شخصی از آن، به آنها اغلب کامپیوترهای شخصی PC می‌گویند. از کامپیوترهای شخصی می‌توان کامپیوترهای خانوادهٔ IBM/AT یا IBM/SX، IBM/DX و پنتیوم Pentium و کامپیوترهای خانواده Apple و همین‌طور کامپیوترهای خانگی مانند AMIGA و کمودور و کامپیوترهای قابل حمل و کیفی laptop را نام برد.

هنگام کار با کامپیوتر بلافاصله با دو مقولهٔ متفاوت روبرو می‌شویم که عبارتند از : ۱ ــ **سخت‌افزار** ۲ ــ **نرم‌افزار**

به کلیهٔ دستگاههای الکترومکانیکی و الکترونیکی کامپیوتر و دستگاههای جانبی متصل به آن **سخت‌افزار** کامپیوتر می‌گویند.

نرم‌افزار کامپیوتر در مقابل سخت‌افزار قرار گرفته است. نرم‌افزار قسمت نامرئی و لمس نشدنی کامپیوتر را تشکیل می‌دهد. به برنامه‌های کامپیوتری نیز گاهی نرم‌افزار می‌گویند. پس نرم‌افزار به مجموعه اطلاعات یا برنامه‌هایی گفته می‌شود که در درون سخت‌افزار کامپیوتر قرار می‌گیرد و باعث می‌شود کامپیوتر کار مشخصی را انجام دهد.

سخت‌افزارها و نرم‌افزارها خود به اجزای مختلفی تشکیل می‌شوند. اجزای سخت‌افزار عبارتند از :

۱ ــ واحد ورودی
۲ ــ واحد محاسبه و منطق
۳ ــ واحد حافظه
۴ ــ واحد کنترل
۵ ــ واحد خروجی

نرم‌افزارها به چهار دستهٔ مهم زیر تقسیم می‌شوند :

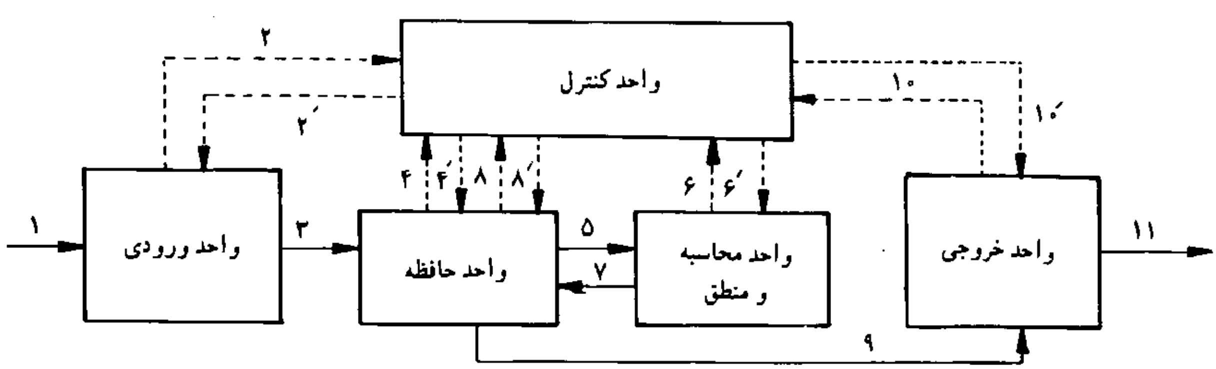
۱ ــ سیستم عامل‌ها
۲ ــ زبانهای برنامه‌نویسی
۳ ــ مترجمها
۴ ــ برنامه‌های کاربردی

جدول زیر چند مثال از سخت افزار و نرم‌افزار متناظر با آن را نشان می‌دهد :

سخت‌افزار	نرم‌افزار
کامپیوتر	برنامه‌ها
تلویزیون	فیلم و صدا
رادیو	صدا
دستگاه ویدئو	فیلم نوار ویدئو
انسان	روح و جان انسان
سیم برق	جریان برق
تاکسی	رانندهٔ تاکسی

توجه داشته باشید که فیلم سینما نرم‌افزار نیست، بلکه اطلاعات ذخیره شده در فیلم سینما نرم‌افزار محسوب می‌شود. رانندهٔ تاکسی! نرام‌افزار نیست، بلکه اعمالی که روی تاکسی انجام می‌دهد را می‌توان نرم‌افزار به حساب آورد.

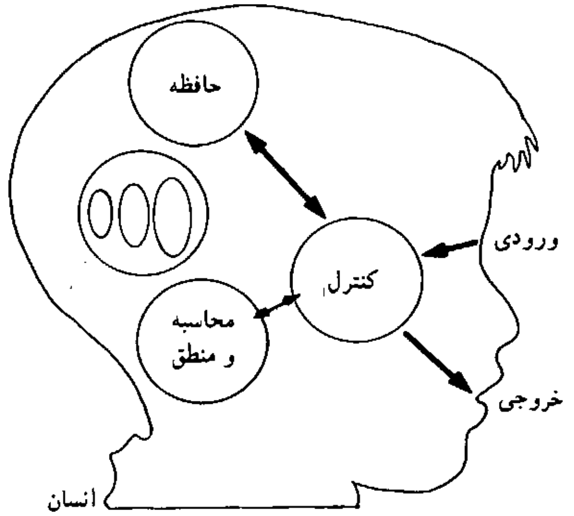
ابتدا راجع به سخت‌افزار و قسمتهای مختلف آن توضیح می‌دهیم. ارتباط بین اجزای سخت افزار را می‌توان با شکل زیر نشان داد :



هر واحد توسط دو جریان الکتریکی با واحد کنترل رابطه دارد که یکی جریان رفت و دیگری جریان برگشت است.

در شکل صفحه قبل اعداد بدون پریم جریان رفت به واحد کنترل یا واحد دیگر را نشان می‌دهد و اعداد پریم‌دار جریان برگشت از واحد کنترل را نشان می‌دهد.

آیا در ساخت کامپیوتر، از انسان الگو گرفته نشده است؟ شکل زیر را ببینید.



آیا چشم یا گوش انسان واحد ورودی وی نیست؟ داده‌های ورودی انسان با مشاهده و شنیدن دریافت می‌شود و با صدا و دهان و با دست به کمک نوشتن به دیگران منتقل می‌شود. در کامپیوتر، به سه واحد حافظه، محاسبه و منطق و واحد کنترل، **واحد پردازش مرکزی** یا **CPU** می‌گویند. امروزه واحد حافظه به صورت مستقل و به فاصلهٔ بسیار اندکی از واحد کنترل و واحد محاسبه و منطق قرار گرفته است. به این ترتیب گفته می‌شود CPU از دو واحد محاسبه و منطق و واحد کنترل تشکیل می‌شود.

۱ ــ واحد ورودی INPUT UNIT. اطلاعات وداده‌های مورد نیاز کامپیوتر از طریق واحد ورودی، وارد کامپیوتر می‌شود. داده‌ها به صورت حرف به حرف یا رقم‌به رقم وارد کامپیوتر می‌شود. مجموعه‌ای از حروف و ارقام، **کلمه** یا اعداد و مجموعه‌ای از کلمات با معنی **دستور** و مجموعه‌ای از چند دستور **برنامه** را تشکیل می‌دهند. از مهمترین وسایل ورودی می‌توان صفحه کلید، ماوس، اسکنر، دیجیتایزر، قلم‌نوری، دوربین، میکروفن را جهت دریافت صدا، کارت پانچ، دیسک گردان (DIsk Drive) و نوار خوان Tape reader را نام برد. تقریباً تمام وسایل ورودی الکترومکانیکی هستند.

صفحه کلید کامپیوتر با دو استاندارد QWERTY و Dvorak ساخته شده است که در زیر صفحه کلید QWERTY مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

از آنجا که صفحه کلید مهم‌ترین و متداول‌ترین وسیلهٔ ورودی است، آن را به طور کامل شرح می‌دهیم.

صفحه کلید یک صفحهٔ مستطیل شکل است، که مدل قدیمی آن ۸۳ کلیدی و مدلهای جدید آن ۱۰۱ کلیدی است. صفحه کلیدها شامل ارقام، حروف و علایم خاص و سایر علایم مورد استفاده در کامپیوتر است. **صفحه کلید ۱۰۱ کلیدی یا صفحه کلید پیشرفته** به **سه قسمت** و دو رنگ تقسیم شده است. رنگ سفید White و رنگ خاکستری GRAY. اجزای تشکیل‌دهندهٔ **صفحه کلید پیشرفته** عبارتند از: ۱ ــ کلیدهای ماشین تحریری ۲ ــ کلیدهای عملیاتی یا تابعی ۳ ــ کلیدهای عددی یا کلیدهای ماشین حسابی.

۱ ــ **کلیدهای ماشین تحریری**: به این کلیدها، **کلیدهای حرفی ــ عددی** نیز می‌گویند. در این قسمت از صفحه کلید، تمام حروف الفبای فارسی یا لاتین، ارقام ۰ تا ۹، علایم +، -، *، /، کلیدهای ESC و Tab، caps lock، shift، Ctrl، Alt و Enter ↵، Space Bar، کلید برگشت Back Space، کلید <، >، ?، .، و ،، ;، "، '، :، {،}، [،]، (،)، ٪ و چند کلید دیگر تعبیه شده است که مجموعاً ۵۹ کلید است. در سمت راست این کلیدها، ۱۰ کلید Insert و Home و Page up و Delete و End و Page Down و ↑ و ← و ↓ و → وجود دارد که ما آن را جزء کلیدهای ماشین تحریری به حساب می‌آوریم. این ۱۰ کلید در ماشین تحریر وجود ندارد. همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، در این قسمت از صفحه کلید، برای راحتی برنامه‌نویس یا تایپیست دو کلید shift، دو کلید ctrl، دو کلید Alt وجود دارد.

اکنون مختصری راجع به کار هر یک از کلیدها توضیح

می‌دهیم:

کلید Esc : این کلید در گوشهٔ بالایی و در سمت چپ صفحه کلیدها قرار گرفته است. Esc سه حرف اول Escape به معنی گریز یا فرار یا «انصراف» است. این کلید در ماشین تحریر وجود ندارد. در کامپیوتر معمولاً برای انصراف Cancel از اجرای یک دستور، از کلید Esc استفاده می‌کنند.

مکان‌نما چیست؟ مکان‌نما، **خط کوچکی** به اندازهٔ **خط فاصله** یا **خط تیره** یا گاهی اوقات مربع یا مستطیل توپری به صورت چشمک‌زن است که ستونی از صفحه نمایش را نشان می‌دهد، که قرار است در آن‌جا یک کاراکتر تایپ شود.

کلید TAB : این کلید در سمت چپ کلید Q و بالای کلید Caps Lock قرار دارد. TAB سه حرف اول کلمهٔ TABLE به معنی جدول یا پرش است. فشار بر روی این کلید مکان‌نما را یکباره به اندازهٔ چند فاصله مثلاً ۴ یا ۸ یا... به جلو یا سمت راست می‌برد. تعداد فاصله توسط نرم‌افزارها یا در Setup سیستم تعریف می‌شود. فشار همزمان بر روی دو کلید Shift و TAB مکان را به تعداد فاصلهٔ تعریف شده به سمت چپ برمی‌گرداند.

کلید Caps Lock : Caps مخفف Capitals به معنی **حرف بزرگ** یا **بزرگ** و Lock به معنی «قفل کردن» است. این دو کلمه یا کلید Caps Lock صفحه کلید را «در حالت تایپ حروف بزرگ» قرار می‌دهد. توجه داشته باشید که در حالت قراردادی default، با صفحه کلید می‌توان حروف کوچک الفبای انگلیسی را تایپ کرد. با فشار بر روی کلید Caps Lock ، که همزمان چراغ کلید Caps Lock در گوشهٔ بالایی و سمت راست روشن شده و به حالت روشن باقی می‌ماند، به راحتی می‌توانید حروف انگلیسی را با حرف بزرگ تایپ کنید. توجه کنید که این کلید فقط برای حروف الفبا به کار می‌رود. به جای استفاده از کلید Caps Lock برای تایپ حروف بزرگ، می‌توانید با فشار همزمان دو کلید shift و یک حرف انگلیسی، حرف بزرگ تایپ کنید. از کلید Caps Lock برای تایپ یک متن طولانی یا یک کلمه که همهٔ حرفهای آن با حروف بزرگ است استفاده می‌کنیم اما از فشار همزمان دو کلید shift و یک حرف برای تایپ یک یا چند حرف بزرگ در میان کلمه‌ای که همهٔ حرفهای آن کوچک است استفاده می‌کنیم.

کلید ⇑shift :در صفحه کلید، دوکلید shift وجود دارد که دقیقاً بالای کلید Ctrl قرار گرفته است. کلمهٔ shift به صورت تبدیل، مبدله،تغییر وضعیت ترجمه شده است. این کلید به تنهایی کاری انجام نمی‌دهد. اگر چراغ کلید Caps Lock روشن نباشد، با فشار همزمان بر روی این کلید و تایپ یک حرف، آن حرف به صورت بزرگ تایپ می‌شود و اگر چراغ کلید Caps Lock روشن باشد، با فشار همزمان بر روی کلید shift و تایپ یک حرف، آن حرف به صورت کوچک تایپ می‌شود.

بر روی کلیدهایی که دو علامت دارند مانند کلید *8 ، با فشار بر روی این کلید در حالت پیش‌فرض و قراردادی، عدد 8 تایپ می‌شود، اما اگر شما کلید shift را فشار دهید و به پایین نگهدارید به دنبال آن کلید *8 را فشار دهید، علامت ضرب یا * تایپ می‌شود. از کلید shift در حالت ترکیبی، مثلاً برای تولید Scan code نیز استفاده می‌شود که اندکی بعد راجع به آن توضیح می‌دهیم.

هر یک از دو کلید shift برای یک منظور مورد استفاده قرار می‌گیرند. کلید shift سمت چپ برای کار با دست چپ و کلید shift سمت راست برای کار با دست راست جهت راحتی تایپیست و ایجاد سرعت در کار طراحی شده‌اند.

با روشن کردن کامپیوتر و راه‌اندازی آن توسط فایلهای سیستم عامل، پس از مشاهدهٔ پیغام ...starting Ms - Dos با فشار ممتد بر روی کلید shift مستقیماً به پرامپت Dos می‌رویم.

کلید Ctrl : Ctrl مخفف Control است و کلید Ctrl را کلید کنترل می‌خوانند. این کلید در دو طرف کلید Alt و در پایین صفحه کلید قرار دارد. این کلید به تنهایی هیچ کاربردی ندارد. نوع کاربرد کلید Ctrl بستگی به نرم‌افزار مورد استفاده دارد. مثلاً در محیط Dos، برای قطع اجرای یک دستور از فشار همزمان دو کلید Ctrl و C یا Ctrl و Break استفاده می‌شود. علاوه بر این در همین محیط برای دیدن صفحه به صفحه اجرای یک دستور که محتوای آن در چند صفحه است

از فشار همزمان دو کلید Ctrl و S استفاده می‌شود. کلید Ctrl و Z برای ذخیره فایلی که با دستور Copy Con ایجاد می‌شود نیز به کار می‌رود. در محیط پاسکال و C برای کامپایل و اجرای یک برنامه از فشار همزمان دو کلید Ctrl و F9 استفاده می‌شود. در محیط Dos، فشار همزمان دو کلید Ctrl و P، محیط را برای استفاده از چاپگر PRN فراهم می‌آورد. علامت کلید Ctrl به همراه یک حرف، ^ است مانند ^C، که از فشار همزمان Ctrl و C ایجاد می‌شود.

کلیدهای Ctrl و Alt و Del برای راه‌اندازی مجدد سیستم یا Reset کردن سیستم به کار می‌رود.

از کلید Ctrl به همراه یک کلید دیگر صفحه کلید، برای تولید scan code نیز استفادهٔ زیاد می‌شود.

وجود دو کلید Ctrl در صفحه کلید، به همان تعبیر وجود دو کلید shift است که جهت سهولت و سرعت در کار است.

کلید Alt : Alt مخفف Alternate به معنی جانشین و جایگزین و حتی به معنی «حالت دوم» است. این کلید به تنهایی کاربردی ندارد و به صورت ترکیب با کلیدهای دیگر به کار می‌رود. مثلاً فشار همزمان سه کلید Alt و ctrl و del باعث راه‌اندازی مجدد سیستم یا Reset آن می‌شود. کلید Alt در دو طرف کلید **خط فاصله** Space bar قرار دارد. در محیط برنامه‌نویسی QBASIC، برای برجسته کردن رنگ منیوها menus از کلید Alt استفاده می‌شود، اما در محیط پاسکال و C برای باز شدن منیوها مثلاً فایل، همزمان دو کلید Alt و F فشار داده می‌شود.

کلید Alt به همراه کلیدهای دیگر، scan code مربوط به خود دارد که راجع به آن بعداً توضیح می‌دهیم.

با فشار بر روی کلید Alt و پایین نگهداشتن آن و تایپ یک عدد دو رقمی یا سه رقمی از قسمت عددی صفحه کلید، که در سمت راست آن است، کد اسکی کاراکترهای تعریف شده در صفحه کلید و کاراکترهای گرافیکی و نماد ریاضی یا یونانی ظاهر می‌شود. توجه داشته باشید که پس از تایپ یک عدد دو رقمی یا سه رقمی، کلیدها را آزاد کنید و دست خود را از روی آنها بردارید.

کلید Space bar : این کلید از نظر اندازه بزرگترین کلید روی صفحه کلید است و برای ایجاد یک فاصله space یا فضای خالی bolank به کار می‌رود. برای ایجاد یک یا چند فاصله بین نام و نام‌خانوادگی از کلید Space bar استفاده می‌شود.

کلید Enter : این کلید یکی از مهمترین کلیدهای صفحه کلید است. در محیط Dos پس از تایپ هر دستور، با فشار بر روی این کلید، علاوه بر اعلام پایان دستور، به کامپیوتر می‌گوییم دستور را اجرا کند. در محیط نرم‌افزارهای فارسی یا لاتین و در محیط زبانهای برنامه‌نویسی، فشار بر روی کلید Enter به معنی اعلام پایان خط و باز شدن سطر جدید برای تایپ است. همان طور که از شکل کلید Enter یعنی ↵ پیداست، این کلید از دو حرکت ↓ و ← تشکیل شده است به ↓ در کلید Enter، رفتن به خط بعد یا خط خور Line feed = LF و به ← در ↵، رفتن به سر سطر یا Carriage return = CR می‌گویند.

⇐ Line feed = LF

⇓

Carriage return = CR

کد اسکی LF، عدد دهدهی ۱۰ و کد اسکی CR عدد دهدهی ۱۳ است. بعضی از نرم‌افزارها عدد دهدهی ۱۳ را معادل Enter یا ↵ می‌گیرند و از LF صرف‌نظر می‌کنند.

کلید Enter با کلیدهای دیگر به صورت ترکیبی هم به کار می‌رود، که تعریف آن به نرم‌افزار مورد استفاده بستگی دارد.

کلید پس‌بر یا برگشت Backspace : این کلید به صورت ← در بالای کلید Enter قرار گرفته است. با هر بار فشار بر روی این کلید، کاراکترهای تایپ شدهٔ سمت چپ مکان‌نما پاک می‌شود و مکان نما را یک ستون به چپ انتقال می‌دهد.

کلیدهای دیگر این قسمت به جزء تایپ حروف و ارقام و علامتهای خاص به تنهایی یا با کلید shift، وظیفهٔ دیگری ندارند که احتیاج به توضیح بیشتر نیست.

کلید Insert : Insert به معنی «قرار دادن بین یا درج کردن بین» است. اگر کلید Insert را فشار دهید، مکان‌نما از حالت

خط تیره به صورت **مربع توپر** یا **مستطیل توپر** تبدیل می‌شود. در این حالت در محیط Dos ، با فشار بر روی یک کلید، کاراکتر آن کلید در همان ستونی که قرار داشت بین حروف کلمهٔ موجود قرار می‌گیرد. اگر یکبار دیگر کلید [Insert] را فشار دهید مکان‌نما به صورت قراردادی یعنی خط تیره تبدیل می‌شود. در این حالت با فشار بر روی یک کلید، کاراکتر تایپ شده جای کاراکتر قبلی در همان ستون قرار می‌گیرد. در محیط QBASIC و پاسکال و C کار این کلید برعکس تعریف بالا است.

کلید [Home] : Home در صفحه کلید به معنی **ابتدا یا ابتدای سطر** است. در همهٔ محیطها با فشار بر روی کلید Home ، مکان نما در هر مکانی که باشد در ابتدای آن سطر یا آن خط قرار می‌گیرد.

کلید [Page up] : اگر اطلاعات محیط ویراستارها یا (editor)ها، بیشتر از یک صفحهٔ نمایش جا اشغال کند، فشار بر روی این کلید، شما را به یک صفحه بالاتر می‌برد. مثلاً اگر در صفحهٔ ۳ باشید شما را به صفحهٔ ۲ می‌برد.

کلید [Delete] : Delete به معنی حذف کردن یا پاک کردن است. با فشار بر روی این کلید، کاراکتری که مکان‌نما در زیر آن قرار دارد پاک می‌شود.

کلید [End] : End در صفحه کلید به معنی **انتها یا انتهای سطر** است. در همهٔ محیطها با فشار بر روی کلید End ، مکان‌نما در هر مکانی که باشد به انتهای آن سطر می‌رود.

کلید [Page Down] : در محیط ویراستار چند صفحه‌ای، فشار بر روی این کلید، شما را در وضعیت مشاهده مطالب صفحهٔ بعد قرار می‌دهد. مثلاً اگر در صفحهٔ ۳ باشید، با فشار بر روی کلید [Page Down]، به صفحهٔ ۴ می‌روید.

کلید [↑] : در محیط ویراستارها با فشار بر روی کلید [↑]، یک سطر به بالا می‌روید. در محیط Dos با اجرای Doskey و فشار بر روی کلید [↑] دستورات اجرای شده، از آخرین دستور، در پرامپت Dos ، در اختیار شما قرار می‌گیرد.

کلید [←] : فشار بر روی این کلید شما را از محل مکان‌نما، در وضعیت یک ستون به چپ قرار می‌دهد.

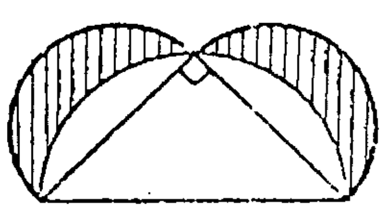
کلید [↓] : با فشار بر روی این کلید، در وضعیت یک سطر پایین قرار می‌گیرد.

کلید [→] : فشار بر روی این کلید شما را از محل مکان‌نما، در وضعیت یک ستون به راست قرار می‌دهد. دو قسمت دیگر صفحه کلید و وظایف هر کلید را در شمارهٔ بعد بخوانید :

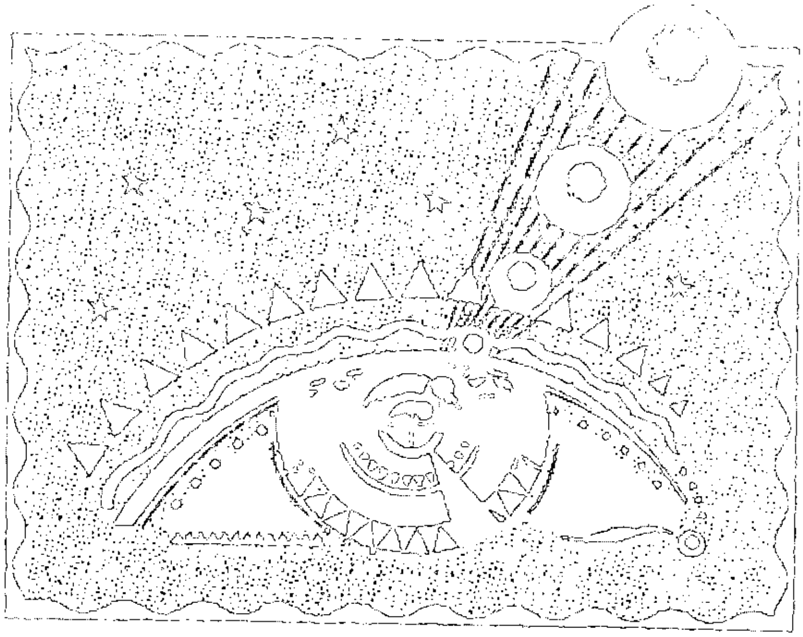


تفریح اندیشهٔ ۳

هریک از نیمدایره‌های نمایش داده شده در شکل بر روی ساقها و قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بنا شده‌اند. مساحت سطوح هاشورخورده را به‌صورت تابعی‌از Sنمایش‌دهید.



جواب در صفحه ۸۷



دانش آموزان دبیرستان نظام قدیم و جدید

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۶)

● محمدصادق عسگری

Limits of function

8.1 Limits from the left

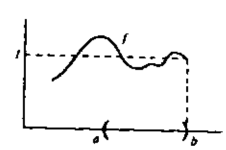
Suppose that f is defined on an interval (a, b). We say that $f(x)$ *tends* (or *converges*) to a *limit* l as x tends to b from the left and write

$$f(x) \to l \text{ as } x \to b-$$

or, alternatively,

$$\lim_{x \to b-} f(x) = l$$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\varepsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \varepsilon$
> provided that $b - \delta < x < b$.

The number $|f(x) - l|$ is the distance between $f(x)$ and l. We can think of it as the error in approximating to l by $f(x)$. The definition of the statement $f(x) \to l$ as $x \to b-$ then amounts to the assertion that we can make the error in approximating to l by $f(x)$ as small as we like by taking x sufficiently close to b on the left.

۸. حدود توابع

۱. ۸) حدود از سمت چپ

فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) تعریف شده باشد. می‌گوئیم $f(x)$ وقتی x از چپ به b نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود:

وقتی $x \longrightarrow b^-$، $f(x) \longrightarrow l$ یا به طور دیگر $\lim_{x \longrightarrow b^-} f(x) = L$ به شرط اینکه محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $b - \delta < x < b$

عدد $|f(x) - L|$ فاصله بین L و $f(x)$ است که ما این عدد را می‌توانیم به عنوان خطای تقریب عدد L به‌وسیله $f(x)$ در نظر بگیریم. تعریف گزاره، وقتی $x \longrightarrow b^-$ آنگاه $f(x) \longrightarrow L$، شامل این ادعا است، که ما می‌توانیم خطای تقریب عدد l به وسیله $f(x)$ را کوچکتر کنیم وقتی x به اندازه کافی از سمت چپ به b نزدیک شود.

8.2 Limits from the right

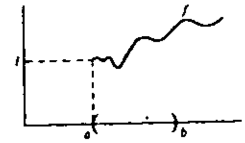
Suppose again that f is defined on an interval (a, b). We say that $f(x)$ tends (or converges) to a limit l as x tends to a from the right and write

$$f(x) \to l \text{ as } x \to a+,$$

or, alternatively,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = l$$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\epsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \epsilon$
> provided that $a < x < a + \delta$.

۸ . ۲) حدود از سمت راست

باز فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) تعریف شده باشد. در این صورت $f(x)$ وقتی x از راست به a نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود وقتی $x \longrightarrow a^+$، $f(x) \longrightarrow L$ یا به عبارت دیگر $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L$ هرگاه محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $a < x < a + \delta$

8.3 $f(x) \to l$ as $x \to \xi$

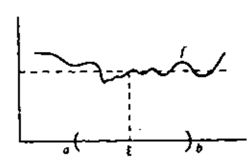
Suppose that f is defined on an interval (a, b) *except possibly* for some point $\xi \in (a, b)$. We say that $f(x)$ tends (or converges) to a limit l as x tends to ξ and write

$$f(x) \to l \text{ as } x \to \xi$$

or, alternatively,

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l$$

if the following criterion is satisfied.



> Given any $\epsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that
> $|f(x) - l| < \epsilon$
> provided that $0 < |x - \xi| < \delta$.

۸ . ۳) وقتی $x \longrightarrow \xi$، $f(x) \longrightarrow L$

فرض کنیم تابع f روی فاصله (a,b) جز احتمالاً در نقطه $\xi \in (a,b)$ تعریف شده باشد می‌گوییم $f(x)$ وقتی x به ξ نزدیک می‌شود به حد L میل می‌کند (همگراست) و نوشته می‌شود وقتی $x \longrightarrow \xi$، $f(x) \longrightarrow L$ یا بعبارت دیگر $\lim_{x \longrightarrow \xi} f(x) = L$ در صورتی که محک زیر برقرار باشد.

> به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم $\delta > 0$ای را بیابیم به‌طوری که $|f(x) - L| < \varepsilon$ به شرط این که $0 < |x - \xi| < \delta$

لغات و اصطلاحات

tends	گرائیدن ــ میل کردن
to Converge	همگرا بودن ــ متقارب بودن
from the left	از طرف چپ ــ از سمت چپ
alternately	بعبارت دیگر ــ متناوباً ــ به طور دیگر
Criterion	معیار ــ ضابطه ــ محک
Satisfied	بی‌نیاز ــ صادق ــ راضی ــ متقاعد
think of	در نظر گرفتن
Amount to	سرزدن به ــ بالغ شدن بر
Assertion	تأیید ادعا ــ اثبات ــ تأکید
We like	ــ میل داریم ــ
taking	صحبت کردن ــ گفتگو
sufficiently	به‌قدر کافی
Close to	نزدیک به
On the left	از سمت چپ
a gain	دوباره ــ باز
Provided that = Providing	به شرط اینکه = مشروط بر اینکه
as	وقتی که ــ چنانکه ــ به‌طوری که
except	بجز ــ مگر
Possibly	شاید ــ احتمالاً ــ به‌هیچ‌وجه
Often	غالباً ــ بارها ــ بیشتر اوقات ــ کراراً
useful	سودمند ــ مفید
note	در نظر گرفتن ــ ذکر کردن
equivalent	هم‌ارزش ــ هم‌ارز ــ معادل

بنابراین ــ پس ــ بدین‌معنی که ــ مثلاً	thus	یعنی ــ اقلاً	to say
جای چیزی را گرفتن ــ عوض کردن	replace	تبصره ــ نکته	remark
ــ جانشین شدن		ولو اینکه	even thought
سراسر ــ تماماً ــ به کلی ــ از هم‌جهت	through out by	کاملاً ــ خوبِ خوب	Perfectly
سرتاسر ــ در تمام مدت		پیروی کردن ــ فهمیدن ــ نتیجه بردن	follow
عوض شود با	alternativeby		



تفریح اندیشهٔ ۴

کوتاهترین فاصله

پس از سالها جنگ و نزاع سخت در مورد حقوق برداشت آب در یک ده، مالکان دو گله‌داری L و K تصمیم به ساختن مخزن آبی با پمپ گرفتند، که به هر دو قسمت آب برساند، و در مورد جمیع جزئیات کار به استثنای مهمترین آنها، یعنی محل مخزن، دوستانه موافقت کردند.

K، که از ریاضیات اطلاع چندانی نداشت، و انجام امور را ساده در نظر می‌گرفت، گفت : ببین L، گله‌داری تو در سه مایلی جنوب رودخانه است، مال من در پایین رودخانه به فاصلهٔ شانزده مایل از گله‌داری تو و در فاصلهٔ نه مایلی جنوب رودخانه است، که به طرف مشرق بین زمینهای ما جاری است، بیا پمپ را در نقطه‌ای از ساحل رودخانه قرار دهیم که فاصلهٔ آن از هر دو گله‌داری یکی باشد. در این صورت به آسانی می‌شود محاسبه کرد که هزینهٔ آبرسانی برای هردومان برابر می‌شود.

L گفت : راه ارزانتری هم موجود است. محلی در امتداد ساحل وجود دارد که در صورتی که پمپ را در آنجا نصب کنیم، کل طول مسیر به هر دو گله‌داری کمتر از هر جای دیگر می‌شود. اگر هزینهٔ هر دو مسیر را به تساوی متقبل شویم هر دو پول کمتری پرداخت خواهیم کرد.

K جواب داد : بسیار خوب، اما این محل کجاست؟

L پاسخ داد : کمی وقت بده تا محاسبه کنم، در حال حاضر نیاز به یادآوری بعضی مطالب ریاضیات عالی دارم.

روز بعد با هم ملاقات کردند و L اقرار کرد که قادر به حل مسأله نشده است. وی گفت : بیا نقشهٔ تو را اجرا کنیم. می‌توانم آن را محاسبه کنم.

K گفت : اصلاً و ابداً. نقشهٔ تو بهتر از نقشهٔ من است و من می‌توانم بدون کمک گرفتن از ریاضیات عالی تو جای پمپ را مشخص کنم.

K چگونه مسأله را حل کرد؟

جواب در صفحه ۸۷

رادیکال

(قسمت چهارم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

گویا کردن مخرج کسرها

برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان از اتحادهای زیر و نتایج آنها استفاده کرد :

اتحاد مزدوج (تفاضل مربع دو عبارت)

۱) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

(تفاضل مکعب دو عبارت)

۲) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(مجموع مکعب دو عبارت)

۳) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(اتحاد لاگرانژ)

۴) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

با توجه به اتحاد (۴) بدیهی است که اگر $a+b+c=0$ باشد، آنگاه : $a^3+b^3+c^3=3abc$

(تفاضل توان n ام دو عبارت)

۵) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل b به ‎−b‎ از اتحاد (۵) به اتحاد زیر می‌رسیم :

(مجموع توان n ام دو عبارت)

۶) $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})=a^n+b^n$

نتیجه ۱ : اگر در اتحادهای (۵) و (۶)، $a=\sqrt[n]{x}$ و $b=\sqrt[n]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم. در حالتی که n زوج باشد، x و y نمی‌توانند منفی باشند :

$x\geq 0$ و $y\geq 0$

۷) $(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x-y$

اگر n فرد باشد، داریم :

۸) $(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}-\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x+y$

نتیجه ۲ : اگر در اتحاد (۴)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ و $c=\sqrt[3]{z}$ را قرار دهیم، به اتحاد زیر می‌رسیم.

۹) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xz}-\sqrt[3]{yz})=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}$

با توجه به اتحاد (۹)، بدیهی است که اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ باشد، آنگاه : $x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$

نتیجه ۳ : اگر در اتحادهای (۲) و (۳)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم.

(اتحاد (۷) به ازای $n=3$)

۱۰) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x-y$

(اتحاد (۸) به ازای $n=3$)

۱۱) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x+y$

نتیجه ۴ : اگر در اتحاد (۱)، $a=\sqrt{x}$ و $b=\sqrt{y}$ (با فرض منفی نبودن x و y) را قرار دهیم به اتحاد زیر می‌رسیم.

۱۲) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y \quad (x\geq 0\ ,\ y\geq 0)$

۱ ــ اگر مخرج کسر فقط شامل یک عبارت رادیکالی به

شکل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد به صورت زیر عمل می‌کنیم.
(m و n عددهای طبیعی و k و s عددهای گویا و $a \neq ۰$ و $s \neq ۰$ می‌باشند.)

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} = \frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{s\sqrt[n]{a^n}}$$

با فرض این که a عددی مثبت باشد، داریم:

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}} = \frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{sa} \quad (a > ۰)$$

مثال: مخرج کسر $\frac{۲}{۵\sqrt[۳]{-۴}}$ به صورت زیر گویا می‌شود.

$$\frac{۲}{۵\sqrt[۳]{-۴}} = \frac{-۲}{۵\sqrt[۳]{۲^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}} = \frac{-۲\sqrt[۳]{۲}}{۵\sqrt[۳]{۲^۳}} = \frac{-۲\sqrt[۳]{۲}}{۵ \times ۲} = -\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۵}$$

۲ـ اگر مخرج کسر شامل دو عبارت رادیکالی با فرجه‌های زوج باشد. برای گویا کردن مخرج کسر به طور مکرر از اتحاد مزدوج (۱) یا (۱۲) استفاده می‌کنیم. مثال: با فرض $a > ۰$ و $b > ۰$، مخرج کسر $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ را گویا کنید.

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲}{(\sqrt{a})^۲ - (\sqrt{b})^۲}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲}{a - b}$$

مثال ۱۸: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵} - \sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۵} + \sqrt[۴]{۳}}$

۳) $\frac{۷\sqrt{۵} - ۴}{۷\sqrt{۵} + ۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵} - ۴\sqrt[۴]{۲}}$

حل: می‌دانیم دوجمله‌ایهای «$A - B$ و $A + B$» را مزدوج می‌گویند. همچنین دوجمله‌ایهایی نظیر: «$a + \sqrt{b}$ و $a - \sqrt{b}$» و «$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$» و «$\sqrt[۴]{a} - \sqrt[۴]{b}$ و $\sqrt[۴]{a} + \sqrt[۴]{b}$» را مزدوج نامند. برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

۱) $$\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})}{(\sqrt{۳})^۲ - (\sqrt{۲})^۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۱۵} - \sqrt{۱۰}}{۳ - ۲} = \frac{\sqrt{۱۵} - \sqrt{۱۰}}{۱} = \sqrt{۱۵} - \sqrt{۱۰}$$

۲) $$\frac{\sqrt{۵} - \sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۵} + \sqrt[۴]{۳}} \times \frac{\sqrt[۴]{۵} - \sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۵} - \sqrt[۴]{۳}} = \frac{(\sqrt{۵} - \sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵} - \sqrt[۴]{۳})}{(\sqrt[۴]{۵})^۲ - (\sqrt[۴]{۳})^۲}$$

$$= \frac{(\sqrt{۵} - \sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵} - \sqrt[۴]{۳})}{\sqrt{۵} - \sqrt{۳}} = \sqrt[۴]{۵} - \sqrt[۴]{۳}$$

۳) $$\frac{۷\sqrt{۵} - ۴}{۷\sqrt{۵} + ۴} \times \frac{۷\sqrt{۵} - ۴}{۷\sqrt{۵} - ۴} = \frac{(۷\sqrt{۵} - ۴)^۲}{(۷\sqrt{۵})^۲ - ۴^۲}$$

$$= \frac{(۷\sqrt{۵} - ۴)^۲}{۲۴۵ - ۱۶} = \frac{(۷\sqrt{۵} - ۴)^۲}{۲۲۹}$$

۴) روش اول:

$$\frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵} - ۴\sqrt[۴]{۲}} \times \frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}$$

$$= \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})^۲}{(۳\sqrt[۴]{۵} - ۴\sqrt[۴]{۲})(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})}$$

$$= \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})^۲}{(۳\sqrt[۴]{۵})^۲ - (۴\sqrt[۴]{۲})^۲} = \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})^۲}{۹\sqrt{۵} - ۱۶\sqrt{۲}} \times \frac{۹\sqrt{۵} + ۱۶\sqrt{۲}}{۹\sqrt{۵} + ۱۶\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})^۲(۹\sqrt{۵} + ۱۶\sqrt{۲})}{(۹\sqrt{۵})^۲ - (۱۶\sqrt{۲})^۲}$$

$$= \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})^۲(۹\sqrt{۵} + ۱۶\sqrt{۲})}{-۱۰۷}$$

روش دوم: می‌توان مستقیماً از اتحاد زیر که حالت خاصی از اتحاد (۷) می‌باشد، استفاده کرد.

$$(\sqrt[۴]{x} - \sqrt[۴]{y})(\sqrt[۴]{x^۳} + \sqrt[۴]{x^۲y} + \sqrt[۴]{xy^۲} + \sqrt[۴]{y^۳}) = x - y$$
$$(x \geq ۰, y \geq ۰)$$

$$\frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵} - ۴\sqrt[۴]{۲}} = \frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۳^۴ \times ۵} - \sqrt[۴]{۴^۴ \times ۲}}$$

$$= \frac{۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۴۰۵} - \sqrt[۴]{۵۱۲}} \times \frac{\sqrt[۴]{(۴۰۵)^۳} + \cdots + \sqrt[۴]{(۵۱۲)^۳}}{\sqrt[۴]{(۴۰۵)^۳} + \cdots + \sqrt[۴]{(۵۱۲)^۳}}$$

$$= \frac{(۳\sqrt[۴]{۵} + ۴\sqrt[۴]{۲})(\sqrt[۴]{(۴۰۵)^۳} + \sqrt[۴]{(۴۰۵)^۲(۵۱۲)} + \sqrt[۴]{(۴۰۵)(۵۱۲)^۲} + \sqrt[۴]{(۵۱۲)^۳})}{-۱۰۷}$$

۳ـ اگر مخرج کسر شامل بیش از دو رادیکال با فرجه‌های زوج یا شامل چند رادیکال با فرجهٔ زوج و یک عدد گویا باشد از اتحاد مزدوج می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۹: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲} + ۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۸}}{۲\sqrt{۵} + \sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$

۳) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

حل :

۱) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{4}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}\times\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$$

$$=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$

۲) $\dfrac{\sqrt{18}}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}\times\dfrac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{9\times 2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{23+4\sqrt{15}-2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{21+4\sqrt{15}}\times\frac{21-4\sqrt{15}}{21-4\sqrt{15}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{201}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{67}$$

۳) $\dfrac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\times\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(7+2\sqrt{35}-2\sqrt{6})}\times\frac{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35})^2-(2\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{28\sqrt{35}+165}\times\frac{28\sqrt{35}-165}{28\sqrt{35}-165}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})(28\sqrt{35}-165)}{215}$$

۴ ــ اگر مخرج کسر شامل دو رادیکال یا بیش از دو رادیکال با فرجه‌های فرد باشد از اتحادهای (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) و (۱۱) استفاده می‌کنیم. اگر مخرج کسر شامل رادیکالهایی با فرجه‌های فرد و زوج باشد از اتحادهای (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) نیز استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰ : مخرج کسر $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ را گویا کنید.

حل : با استفاده از اتحاد (۱۱) داریم :

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4})}{a^2+b^2}$$

$$=a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b\sqrt[3]{b}$$

مثال ۲۱ : مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ را گویا کنید.

حل : با استفاده از اتحاد (۱۰) داریم :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$$

مثال ۲۲ : مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}$ را گویا کنید $(b>0)$.

حل : ابتدا از اتحاد (۱) و سپس از اتحاد (۲) استفاده می‌کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-(\sqrt{b})^2}\overset{(b>0)}{=}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-b}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})(a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2)}{a^2-b^3}$$

مثال ۲۳ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}} \qquad 2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} \qquad 4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

حل : برای گویا کردن کسرهای فوق از اتحادهای (۱۱) (۱۰) و (۹) استفاده می‌کنیم :

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times 4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times 4}+\sqrt[3]{4^2}}$$

$$=\frac{7(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})}{3+4}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}$$

$$2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{(\sqrt[3]{1})^3+(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{6-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times 5}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times 5}+\sqrt[3]{5^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})}{7-5}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$$

$$4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}\times\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

مثال ۲۴ : حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$(n\in\mathbb{N}, n\neq 1)$$

حل : با استفاده از تساوی

$(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=1$ و یا :

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

خواهیم داشت :

$$S=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$$

تبدیل رادیکال مرکب به حاصل جمع چند رادیکال ساده

اگر بخواهیم یک رادیکال مرکب، مانند :

$$\sqrt[n]{x+a\sqrt[m]{y}+b\sqrt[p]{z}+\cdots}$$

را به صورت حاصل جمع چند رادیکال ساده بنویسیم، آن را مساوی عبارتی مانند :

$$K+A\sqrt[m]{y}+B\sqrt[p]{z}+\cdots$$

قرار داده و سپس طرفین را به توان n می‌رسانیم. پس از مساوی قرار دادن اجزای گنگ و گویای متناظر، مقادیر K و A و B و ... را پیدا می‌کنیم. برای مثال، در مورد $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ با فرض $b>0$, $(a\pm\sqrt{b})>0$ داریم :

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\Rightarrow$$

$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\quad (x>0\ ,\ y>0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ xy=\frac{b}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\\ y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\end{cases}\ (a^2-b\geq 0)$$

با فرض $a^2-b=c^2$ و $c\geq 0$، خواهیم داشت :

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}\qquad (1)$$

مثال ۲۵ : عبارت $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ را به جمع جبری دو رادیکال ساده تبدیل کنید.

حل : با استفاده از تساوی (۱) داریم :

$$c^2 = a^2 - b = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

مثال ۲۶ : حاصل عبارت

$$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

را حساب کنید.

حل : ابتدا عبارت‌های $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ و $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} + \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}} - \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین داریم :

$$A = \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

مثال ۲۷ : حاصل عبارت $B = \sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ را حساب کنید.

حل : ابتدا عبارت $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ یا $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 4^2 - 12 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$$

بنابراین داریم :

$$B = \sqrt{3+\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

همچنین عبارت $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم :

$$c^2 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس خواهیم داشت :

$$B = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

مسأله‌های زیر را حل کنید :

۱ ــ به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3-8}}}}$ دارای معنی است؟

۲ ــ عبارت $\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}$ را به جمع جبری دو عبارت ساده بنویسید.

۳ ــ حاصل عبارت

$$D = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} + \left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{2}}\right)^9 - 2^{0/3} - \sqrt[20]{64}$$

$$+ \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 3\sqrt[4]{3^{-4}}$$

را حساب کنید.

۴ ــ ثابت کنید برای هر $a \geq 0$ و $b \geq 0$، همواره داریم :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$$

۵ ــ با فرض $a \geq 0$ و $b \geq 0$، عبارت زیر را ساده کنید :

$$P = -7a^2\sqrt{ab^4} \ . \ 4b^2\sqrt[4]{a^4b^2}$$

۶ ــ اگر n عدد طبیعی فرد و $n > 1$ و a و b عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

۷ ــ اگر m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید :

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} + (\sqrt[30]{2})^9 - 2^{0/3} - (\sqrt[20]{8})^2}$$

۹ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{14}{\sqrt[6]{4} + 5\sqrt[3]{16} - 7\sqrt[6]{4} + 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}}$$

۱۰ ـ اگر a و b عددهای نامنفی باشند، ثابت کنید:

$\sqrt{a^۲+b^۲}\le a+b$

۱۱ ـ اگر $a\ge ۰$ و $b>۰$ و n عدد طبیعی و $n>۱$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

۱۲ ـ معادله‌های زیر را حل کنید و جوابها را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

۱) $x^۲+۳۴=۱۵۳$ ۲) $۳x^۴-۴۸=۰$

۳) $۴x^۲=۷$ ۴) $(x^۲)^۲+x^۴=۳۲$

۵) $a^۷+۴^{۲۱}=۰$ ۶) $x^{۱۳۷۵}+۲^{۱۱۲۵}=۰$

حل مسائل

حل:

۱ـ عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[۷]{\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{x^۳-۸}}}}=\sqrt[۴۲۰]{x^۳-۸}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$x^۳-۸\ge ۰\Rightarrow x^۳\ge ۸\Rightarrow x\ge ۲$

درنتیجه عبارت به‌ازای هر عدد حقیقی $x\ge ۲$ دارای معنی است.

۲ـ عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt[۴]{۲^۲}}=\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt{۲}}$$

در اینجا فرض می کنیم عبارت به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt{۲}}=x+y\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

دو طرف تساوی (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$۷-۵\sqrt{۲}=(x+y\sqrt{۲})^۳=x^۳+۳x^۲y\sqrt{۲}+۶xy^۲+۲y^۳\sqrt{۲}$$

$$۷-۵\sqrt{۲}=x^۳+۶xy^۲+(۳x^۲y+۲y^۳)\sqrt{۲}$$

از مقایسهٔ طرفین تساوی، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}x^۳+۶xy^۲=۷\\ ۳x^۲y+۲y^۳=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x^۲+۶y^۲)=۱\times۷\\ y(۳x^۲+۲y^۲)=(-۱)\times۵\end{cases}$$

اگر x و y عددهای درست باشند $x=۱$ و $y=-۱$ می‌تواند باشد. این مقادیر در دستگاه صدق می‌کنند؛ پس:

$$\sqrt[۳]{۷-۵\sqrt[۴]{۴}}=۱-\sqrt{۲}$$

۳ـ داریم:

$$\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲^۳\times۲\sqrt{۲}}}=\sqrt[۱۵]{\sqrt{۲^۸\times۲}}=\sqrt[۳۰]{۲^۹}$$

$$=۲^{\frac{۹}{۳۰}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$$

$$\left(\sqrt[۶]{\sqrt[۵]{۲}}\right)^۹=\left(\sqrt[۳۰]{۲}\right)^۹=\sqrt[۳۰]{۲^۹}=۲^{\frac{۹}{۳۰}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$$

و $\sqrt[۲۰]{۶۴}=\sqrt[۲۰]{۲^۶}=۲^{\frac{۶}{۲۰}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^{۰/۳}$

$$۳\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=۳\times۳^{\frac{-۴}{۴}}=۳\times۳^{-۱}=۳^۰=۱$$

$$\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}=\sqrt{۱+۳+۲\sqrt{۳}}=\sqrt{(۱+\sqrt{۳})^۲}=۱+\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow D=۲^{۰/۳}+۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}+۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱$$
$$=۰\Rightarrow \boxed{D=۰}$$

۴ـ با توجه به فرض: $a\ge ۰$ و $b\ge ۰$، می‌توان نوشت:

$$(\sqrt{ab})^۲=ab \qquad (۱)$$

و همچنین:

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b})^۲=(\sqrt{a})^۲.(\sqrt{b})^۲=ab \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt{ab}$ و $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ریشهٔ دوم مثبت ab می‌باشند. چون ریشهٔ دوم مثبت یگانه است، پس:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$$

۵ ـ با توجه به فرض: $a\ge ۰$ و $b\ge ۰$، می‌توان نوشت:

$$P=-۷a^۳\sqrt{ab^۴}.۴b^۲\sqrt[۴]{a^۴b^۲}$$
$$=(-۷a^۳)(۴b^۲)\sqrt{ab^۴}.a\sqrt[۴]{b^۲}$$
$$=(-۲۸a^۴b^۲).b^۲\sqrt{a}.\sqrt{b}$$
$$=-۲۸a^۴b^۴\sqrt{ab}$$

۶ ـ با توجه به فرض: n عدد طبیعی فرد و $n>۱$ و a و b عددهای حقیقی هستند، می‌توان نوشت:

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n=ab \qquad (۱)$$

و همچنین

$$\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt[n]{ab}$ و $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ ریشهٔ nام ab می‌باشند. چون ریشهٔ nام (درصورتی که n فرد باشد) یگانه است، پس: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

۷ـ با توجه به فرض: m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ عدد حقیقی است، می‌توان نوشت:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\,\dots.\sqrt[n]{a}}_{m\ \text{مرتبه}} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a.\,\dots.a}_{m\ \text{مرتبه}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

پس:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ ـ با توجه به حل مسأله (۳):

$$\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}} = ۲^{۰/۳} \quad \text{و} \quad \left(\sqrt[۳۰]{۲}\right)^۹ = ۲^{۰/۳} \quad \text{و}$$

$$\left(\sqrt[۲۰]{۸}\right)^۲ = \sqrt[۲۰]{۸^۲} = \sqrt[۲۰]{۲^۶} = ۲^{\frac{۶}{۲۰}} = ۲^{۰/۳}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}+(\sqrt[۳۰]{۲})^۹-۲^{۰/۳}-(\sqrt[۲۰]{۸})^۲}$$

$$=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}+۲^{۰/۳}+۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}-۲^{۰/۳}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۴}}{۲}=\sqrt[۳]{۴}$$

۹ـ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۶]{۴}+۵\sqrt[۳]{۱۶}-۷\sqrt[۶]{۴}+۲\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۵۴}+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۱۶}=$$

$$\sqrt[۶]{۲^۲}+۵\sqrt[۳]{۲^۳\times ۲}-۷\sqrt[۶]{۲^۲}+۲\sqrt[۳]{۲^۳\times ۲}-\sqrt[۳]{۳^۳\times ۲}$$

$$+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۲^۳\times ۲}=$$

$$\sqrt[۳]{۲}+۱۰\sqrt[۳]{۲}-۷\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt[۳]{۲}+۴\sqrt[۳]{۲}$$

$$-۲\sqrt[۳]{۲}=۷\sqrt[۳]{۲}$$

پس کسر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{۱۴}{۷\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۱۴\sqrt[۳]{۴}}{۷\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱۴\sqrt[۳]{۴}}{۱۴}=\sqrt[۳]{۴}$$

۱۰ـ با توجه به فرض: a و b عددهای نامنفی هستند، می‌توان دو طرف نامساوی را به توان ۲ رساند:

$$\sqrt{a^۲+b^۲} \le a+b \Rightarrow \left(\sqrt{a^۲+b^۲}\right)^۲ \le (a+b)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲ \le a^۲+b^۲+۲ab$$

$$\Rightarrow ۲ab \ge ۰ \Rightarrow ab \ge ۰$$

نامساوی $ab \ge ۰$ برای عددهای نامنفی a و b همواره درست است. بنابراین:

$$\sqrt{a^۲+b^۲} \le a+b$$

۱۱ـ راهنمایی: مشابه طریقهٔ حل مسألهٔ ۶ عمل کنید.

۱۲ـ داریم:

۱) $x^۲+۳۴=۱۵۳ \Rightarrow x^۲=۱۵۳-۳۴=۱۱۹$

$\Rightarrow x^۲=۱۱۹ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۱۹}$

۲) $۳x^۴-۴۸=۰ \Rightarrow ۳x^۴=۴۸ \Rightarrow x^۴=۱۶=۲^۴$

$\Rightarrow x=\pm ۲$

۳) $۴x^۲=۷ \Rightarrow x^۲=\frac{۷}{۴} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۴) $(x^۲)^۲+x^۴=۳۲ \Rightarrow x^۴+x^۴=۳۲ \Rightarrow ۲x^۴=۳۲$

$\Rightarrow x^۴=۱۶=۲^۴ \Rightarrow x=\pm ۲$

۵) $a^۷+۴^{۲۱}=۰ \Rightarrow a^۷=-۴^{۲۱}$

$\Rightarrow a=-\sqrt[۷]{۴^{۲۱}}=-۴^{\frac{۲۱}{۷}}=-۴^۳=-۶۴$

۶) $x^{۱۳۷۵}+۲^{۱۲۵}=۰ \Rightarrow x^{۱۳۷۵}=-۲^{۱۲۵}$

$x^{۱۱\times ۱۲۵}=-۲^{۱۲۵} \Rightarrow x=-\sqrt[۱۱]{۲}$



مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان (۱۷)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اعداد اول، تجزیه و رمزهای مخفی

(قسمت سوم)

در همایش اکتبر ۱۹۰۳ی انجمن ریاضی معتبر آمریکایی، نام فردریک *نلسون کول*[1] ریاضیدان در فهرست برنامهٔ انجمن به عنوان ارائه‌دهندهٔ مقاله‌ای با عنوان متواضعانهٔ «راجع به تجزیهٔ اعداد بزرگ[2]» آمده بود. هنگامی که نام *کول* را برای سخنرانی خواندند، وی به طرف تخته سیاه رفت و، بدون اظهار کلمه‌ای، محاسبهٔ ۲ به توان ۶۷ را انجام داد، و بعد از آن ۱ واحد از نتیجه کم کرد، و در حالی که همچنان چیزی نمی‌گفت به طرف قسمت نوشته نشده‌ای از تخته سیاه رفت و اعداد زیر را در هم ضرب کرد

۱۹۳ ۷۰۷ ۷۲۱ و ۷۶۱ ۸۳۸ ۲۵۷ ۲۸۷

پاسخهای دو محاسبه یکسان بودند. *کول* همچنان بی‌آن که کلمه‌ای ادا کند به جایش برگشت، و برای اولین و تنها دفعه جمیع حاضران در جلسهٔ انجمن آمریکایی ریاضی به پا خاسته ابراز احساسات کردند.

کاری که *کول* انجام داده بود (و ظاهراً بیست سال بعدازظهرهای یک‌شنبهٔ خود را صرف آن کرد) یافتن عاملهای اول عدد مرسن M_{67} بود. از ۱۸۷۶ مشخص بود که M_{67} مرکب است. اما این موضوع (توسط خود *ادوارد لوکاس*) با استفاده از آزمون *لوکاس* (اکنون *لوکاس ــ لمر*) کشف شده بود، که در ضمن این که پاسخی به این سؤال نیز می‌داد که عدد مرسن مفروضی اول یا مرکب است، اطلاعاتی در مورد عاملهای اعدادی که مرکب بودنشان را مشخص می‌کرد نمی‌داد. (این مطلب در مورد آزمون ARCL، چنانکه می‌توان از طرح قبلاً داده شدهٔ این روش دریافت، و در واقع در مورد هر تعداد روش سریع آزمون اول بودن اخیراً در دسترس، صادق است.)

اما چگونه می‌توان عاملهای عددی را که مرکب بودنش را می‌دانیم پیدا کرد؟ آزمایش و خطا واضحاً، به همان دلیل که در مورد آزمون اول بودن عملی نیست، کارا نیست. اما در عمل عنصری از تقسیم آزمایشی در جمیع اجراهای جاری روشهای آزمونهای اول بودن و تجزیه موجود است. و به علت سرعت انجام این کار، آغاز کردن عمل با، مثلاً، یک میلیون عدد اول اولیه معقول به نظر می‌رسد. در این صورت اگر مقسوم‌علیهی یافت شود، هر دو مسألهٔ اول بودن و تجزیه حل شده‌اند. و اگر نه، دست کم خواهیم دانست که عدد مورد نظر یا اول است، یا

اگر مرکب است، تنها عاملهای اول بزرگ دارد. کاربرد واقعیت اخیر با روش تجزیهٔ ساده‌ای انجام می‌گیرد که از *فرما* و به صورت زیر است.

فرض می‌کنیم $n = uv$، که در آن u و v هر دو اعداد بزرگ و فرد، با $u \le v$ ،اند. (این وضعیت، از آنجا که فرضمان بر این است که n تنها عاملهای اول بزرگ دارد، وضعیتی است که هنگامی با آن روبرو می‌شویم که می‌دانیم n مرکب است و مایل به یافتن عاملهای آنیم.) فرض می‌کنیم

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \text{ و } y = \frac{1}{2}(u-v)$$

دراین‌صورت $0 \le y < x$ و $u = x + y$، $v = x - y$، بنابراین

$$n = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$y^2 = x^2 - n \qquad (1)$$

برعکس، اگر x و y در معادلهٔ (۱) صدق کنند، آنگاه n دارای تجزیهٔ زیر می‌شود

$$n = (x+y)(x-y) \qquad (2)$$

در نتیجه، تجزیهٔ n به حاصلضرب دو عدد هم‌ارز یافتن عددهای x و y ی است که در معادلهٔ (۱) صدق کنند، و در این حالت تجزیهٔ حاصل توسط معادلهٔ (۲) داده می‌شود. (توجه داشته باشید که این کار لزوماً تجزیهٔ *اول* n را به دست نمی‌دهد. اما زمانی که عددی به دو عامل تقسیم شود، ممکن است خود آن دو عامل به نوبت خود تجزیه شوند، و این کاری است که بدون استثنا بسیار ساده‌تر است زیرا هر چه عدد کوچکتر باشد تجزیه‌اش آسانتر است.)

برای یافتن x و y، چنان که در معادلهٔ (۱) آمده است، با کوچکترین عدد اول k، چنان که $k \ge \sqrt{n}$، آغاز می‌کنیم، و سپس، به نوبت، به بررسی مقادیر $x = k$، $x = k+1$، $x = k+2$، ...، پرداخته ملاحظه می‌کنیم $x^2 - n$ مربع کامل است یا خیر. هنگامی که چنین x ی را یافتیم، تجزیه به گونه‌ای مؤثر کامل می‌شود. با این شرط که n دارای دو عامل تقریباً به یک اندازه باشد (و در نتیجه نزدیک به $\sqrt{n}$ که روشمان را از آن آغاز کردیم)، باید جواب را نسبتاً سریع به دست آوریم. (اگر مایل باشید که در این مرحله خودتان به بررسی این روش بپردازید، اعداد ۱۰۳۷۹ و ۹۳۳۴۳ مثالهای مناسبی به دست می‌دهند).

طرق گوناگونی در سرعت بخشیدن به فرایند فوق موجودند. به عنوان نمونه، اگر عمل مورد نظر را بدون استفاده از ابزار انجام می‌دهیم نیاز به محاسبهٔ ریشهٔ دوم $x^2 - n$، برای ملاحظهٔ عدد درست بودن آن، در هر حالت نداریم. از آنجا که هیچ مربع کاملی به یکی از ارقام ۲، ۳، ۷، یا ۸ ختم نمی‌شود، هرگاه مشخص شود $x^2 - n$ به یکی از چنین رقمهایی ختم می‌شود آن مقدار x را می‌توان بلافاصله کنار گذاشت.

خود *فرما* از این روش برای تجزیهٔ زیر استفاده کرد

$$2027651281 = 44021 \times 46061$$

اجراهای کامپیوتری برای «حذف بلافاصلهٔ» مقادیر غیرممکن x (فرایندی به دلایل آشکار معروف به *غربال کردن*) از روشهایی کاملاً پیچیده استفاده می‌کنند. در ۱۹۷۴، ریاضیدانهای دانشگاه *کالیفرنیا* در *برکلی* SRS ــ ۱۸۱، ابزار الکترونیکی به طور اختصاصی طرح شده‌ای را برای غربال کردن اعداد ساختند، که می‌توانست در هر ثانیه ۲۰ میلیون عدد را بررسی کند.

عددهای فرما

n امین عدد *فرما*[۳] با رساندن ۲ به توان n، سپس با رساندن ۲ به توان این عدد و افزودن ۱ به نتیجه، حاصل می‌شود، یعنی،

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

به این ترتیب $F_0 = 3$، $F_1 = 5$، $F_2 = 17$، $F_3 = 257$، و (هم‌اکنون نمو سریع این اعداد نظر به کاربرد مکرر تابع نمایی مربوطه آشکار شده است)

$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

علت توجه به این اعداد ادعایی است که توسط *فرما* در نامه‌ای که به مرسن در ۱۶۴۰ نوشته شده، انجام گرفته است. *فرما*، با توجه به این که هر یک از اعداد F_0 تا F_4 اول است چنین نوشته است: «دریافته‌ام اعداد به صورت $2^{2^n} + 1$ همواره عددهایی اول‌اند» و از آن زمان به بعد صدق این قضیه برای تحلیلگران دارای اهمیت شده است. این موضوع باید به عنوان

اخطاری به تمام کسانی باشد که بر مبنای مبالغ اندکی از اطلاعات به نتیجه‌گیری می‌پردازند. *فرما* با تمام تواناییهایش در مورد اعداد، در این اظهار به خطا رفته بود. این مطلب اولین‌بار به طور قاطع توسط لئونهارد اویلر[۴] ریاضیدان بزرگ سوئیسی در ۱۷۳۲ نشان داده شد: $F_5 = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$ اول نیست. شگفت اینجاست که گرچه *اویلر* این نتیجه را با استفاده از تقسیم آزمایشی به دست آورد. نتیجه‌ای مستقیم با استفاده از خود آزمون فرما موجود است که غیر اول بودن F_5 را مبرهن می‌کند. به یاد بیاورید که آزمون مزبور بر این است که اگر P اول باشد در این صورت $۳^{P-۱} \bmod P = ۱$، اما در مورد $P = F_5$ به دست می‌آوریم

$$۳^{P-۱} \bmod P = ۳۰۲۹۰۲۶۱۶۰$$

بنابراین F_5 نمی‌تواند اول باشد.

کارهای بعدی نشان داده که فرما تا چه حد به خطا بوده است. اکنون می‌دانیم F_n به ازای جمیع مقادیر n از ۵ تا ۱۶، نیز به ازای مقادیر گوناگون دیگر، مرکب است، و حدس فعلی این است که F_n به ازای جمیع مقادیر n بزرگتر از ۴ مرکب است.

اعداد فرما مثالی دیگر از عددهایی را به دست می‌دهند که صورت خاص آنها آزمون اول بودنشان را به طریقی کارا امکانپذیر می‌کند ــ یکی از روشهای معروف در این مورد قضیهٔ بروث[۵] است: عدد فرمای F_n اول است اگر، و تنها اگر

$$۳^{\frac{(F_n-۱)}{۲}} \bmod F_n = -۱$$

این دستاورد آزمون بسیار کارایی برای اول بودن اعداد فرما به دست می‌دهد. (این آزمون، همانگونه که ممکن است حدس زده باشید، رابطهٔ تنگاتنگی با آزمون *فرمای* قبلاً بحث شده دارد.) اما علاقهٔ ما در این مرحله به آزمون اول بودن اعداد فرما نیست، بلکه به تجزیهٔ اعدادی است که مرکب بودنشان مشخص است، زیرا در این زمینه است که در سالهای اخیر گسترشهای قابل توجهی انجام گرفته است، گسترشهایی که بدون کاربردهایی خارج از قلمرو ریاضیات نیستند. (بعداً بخش مربوط به رمزهای محرمانه را در این فصل ملاحظه کنید.)

همانطور که قبلاً توجه کردیم مرکب بودن عدد فرمای F_5 توسط *اویلر* به اثبات رسید. وی یک عامل اول آن، یعنی ۶۴۱، را نیز محاسبه کرد. مرکب بودن F_6 در ۱۸۸۰ توسط *لندری*[۶] ثابت شد، و بار دیگر عاملی اول به دست آمد: ۲۷۴۱۷۷. F_7 ماجرایی دگرگونه داشت. مرکب بودن آن در ۱۹۰۵ توسط مورهد[۷] و وسترن[۸] به اثبات رسید، اما تجزیهٔ آن تا سال ۱۹۷۱ زمانی که *بریلهارت*[۹] و موریسون[۱۰] (مجهز با کامپیوتر IBM.360-91) تجزیهٔ زیر را به دست آوردند میسر نشد

$$\begin{aligned} F_7 &= ۲^{۱۲۸}+۱ \\ &= ۳۴۰\ ۲۸۲\ ۳۶۶\ ۹۲۰\ ۹۳۸\ ۴۶۳\ ۴۶۳\ ۳۷۴\ ۶۰۷ \\ &\quad ۴۳۱\ ۷۶۸\ ۲۱۱\ ۴۵۷ \\ &= ۵۹\ ۶۴۹\ ۵۸۹\ ۱۲۷\ ۴۹۷\ ۲۱۷ \times ۵\ ۷۰۴\ ۶۸۹ \\ &\quad ۲۰۰\ ۶۸۵\ ۱۲۹\ ۰۵۴\ ۷۲۱ \end{aligned}$$

آنها برای انجام این کار از روشی استفاده کردند که مدتها قبل توسط *لمر* و *پاورز*[۱۱] مطرح و شامل کسرهای مسلسل بود. محاسبه ده ساعت و نیم طول کشید. نمونه‌های اصلاح شدهٔ روش *کسر مسلسل*[۱۲] (آن طور که امروزه نامیده می‌شود) بعضی از روشهای تجزیهٔ اخیراً در دسترس را به دست می‌دهند.

دو نفری که در ۱۹۰۵ مرکب بودن F_7 را نشان دادند، یعنی مورهد و وسترن، مرکب بودن F_8 را نیز در ۱۹۰۹ پیدا کردند. و تنها در ۱۹۸۱ بود که برنت[۱۳] و پولار[۱۴] تجزیهٔ آن را یافتند. محاسبهٔ این کار دو ساعت بر کامپیوتر یونیواک[۱۵] ۱۱۰۰/2 طول کشید. روش محاسبه، که توسط خود پولار اختراع شده بود، در آن زمان از این لحاظ غیرمعمول بود که، برخلاف اغلب روشهای ریاضیات، به دست دادن نتیجه را تضمین نمی‌کرد، و تنها چیزی که می‌توانست از ریاضیات زمینهٔ آن به دست آید این بود که اگر محاسبهٔ مشخصی انجام می‌گرفت، در این صورت احتمال بسیار وجود داشت که تجزیهٔ عدد طی طول معقولی از زمان به دست آید، اما امکان اندکی هم وجود داشت که این واقعه اتفاق نیفتد. بنابراین روش مزبور شبیه تقسیم آزمایشی نبود، که در آن شانس به دست آوردن پاسخ طی یک میلیارد سال اندک است. و گرچه همچنان عنصری از تصادف در روش پولار وجود دارد اما هوشمندانه بودن آن در این است که در آن شانس به مقدار زیادی به نفع تجزیه شدن

است.

در سالهای اخیر تعدادی از روشهای موسوم به روشهای مونت کارلو[۱۶]، از قبیل روش تجزیهٔ پولار موجود شده‌اند که ایقان یک نتیجه را با احتمال بالای نتیجه‌ای در زمانی بسیار کمتر تعویض کرده‌اند.

دو عامل اول F_8 (که دارای ۷۸ رقم است) عبارت‌اند از

۱ ۲۳۸ ۹۲۶ ۳۶۱ ۵۵۲ ۸۹۷

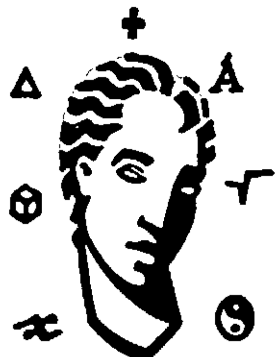
و

۹۳ ۴۶۱ ۶۳۹ ۷۱۵ ۳۵۷ ۹۷۷ ۷۶۹ ۱۶۳ ۵۵۸
۱۹۹ ۶۰۶ ۸۹۶ ۵۸۴ ۰ ۵۱ ۲۳۷ ۵۴۱ ۶۳۸
۱۸۸ ۵۸۰ ۲۸۰ ۳۲۱

از هنگام نوشتن F_9 کسی توانایی تجزیهٔ آن را نداشته است. شاید *کارل فردریش گاوس*[۱۷]، در صورتی که زنده بود، اکنون که کامپیوترهای سریع در دسترس‌اند، می‌توانست در این مورد کمک کند. وی محققاً شگفت‌آورترین نتیجه‌ها را در مورد اعداد فرما به دست داد، یعنی نتیجه‌ای که آنها را به مسأله‌ای کلاسیک از هندسهٔ یونان متصل می‌کند، این دستاورد، همان‌گونه که بسیاری از کشفیات گاوس، شایستگی ورودی استثنائی به یکی از حیرت‌انگیزترین ذهنهای ریاضی‌ای را دارند که دنیا تاکنون شناخته است.

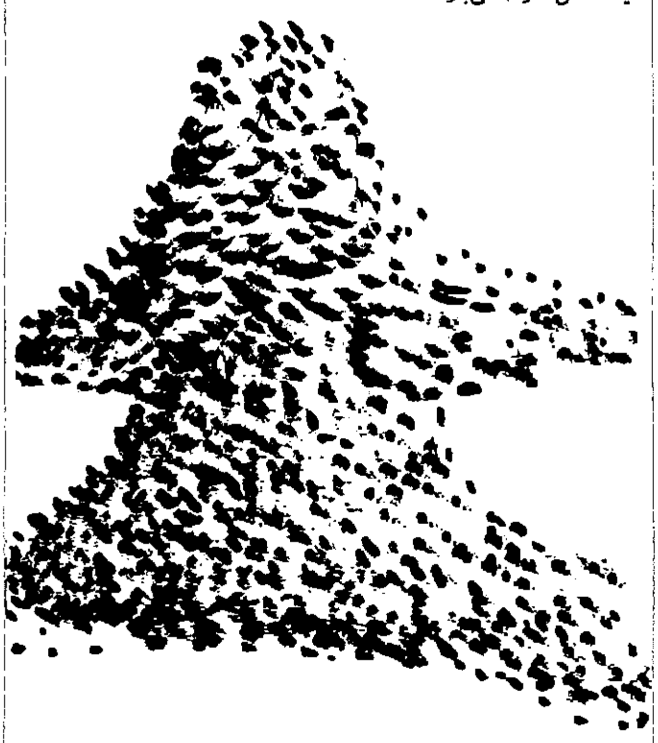
یادداشتها :

1– Fredrick Nelson Cole
2– On the factorization of large numbers
3– Fermat numbers
4– Leonhard Euler
5– Proth's theorem
6– Landry
7– Morehead
8– Western
9– Brillhart
10– Morrison
11– Powers
12– Continued fraction method
13– Brent
14– Pollard
15– Univac
16– Mont Carlo methods
17– Karl Friedrich Causs



تفریح اندیشهٔ ۵

دو توده شن داریم. دو بازیکن به نوبت (۱) یکی از توده‌ها را از محل بازی برمی‌دارد و (۲) تودهٔ باقی‌مانده را به دو تودهٔ تقسیم می‌کند. بازیکنی که نتواند توده‌ای را تقسیم کند (زیرا تودهٔ مزبور تنها یک شن دارد) می‌بازد.



جواب در صفحه ۸۸

اصل ردّ و شمول

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی)

● امیرمنصور خانمحمد و امیرفرزاد از دبیرستان سروش

● ترجمه از کتاب ریاضیات گسسته گریمالدی

اصل ردّ و شمول

اصل ردّ و شمول بازگشتی به قوانین اساسی شمارش است. هدف از آن توسعه روشهای شمارش در مورد مسائل حل شده توسط نمودار «ون» است. به عنوان مثال یکی از کاربردهای این اصل شمارش تعداد توابع تعریف شده از A به B است $(f: A \to B)$ به شرط آن که: $N(A) = m$ و $N(B) = n$ و $m \geq n$ باشد. از کاربردهای اساسی این اصل حل مسائل مختلف شمارش بروش غیرمستقیم است.

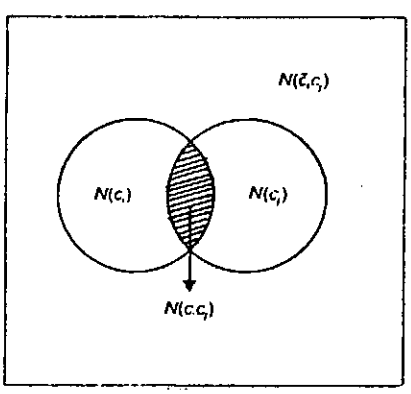
بخش اول
صورت اصل ردّ و شمول

در این قسمت ما نگارش جدیدی را تعریف کرده، سپس به خود اصل می‌پردازیم و در ادامه با بیان مثالهایی آن را توضیح می‌دهیم. فرض کنید s مجموعه‌ای باشد که $N(S) = m$ و $C_1, C_2, \ldots, C_t$ زیرمجموعه‌های آن باشند؛ مشخص است که بعضی از آنها بیش از یک عضو دارند.

بدیهی است که $N(C'_1 \cap C'_2 \cap \ldots \cap C'_t)$ تعداد عضوهایی از s هستند، که در هیچک از زیرمجموعه‌های $C_1, C_2, \ldots, C_t$ شرکت ندارند. لازم به تذکر است که این با $N(C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_t)'$ متفاوت است.

با توجه به شکل زیر اگر $N(C_i)$ تعداد اعضای مجموعه سمت چپ و $N(C_j)$ تعداد اعضای مجموعه سمت راست باشد، محدودهٔ هاشور خورده $N(C_i \cap C_j)$ خواهد بود (نمودار ون). با توجه به شکل زیر $N(C'_i \cap C'_j)$ به این صورت محاسبه می‌گردد:

$$N(C'_i \cap C'_j) = N(S) - \left[N(C_i) + N(C_j)\right] + N(C_i \cap C_j)$$



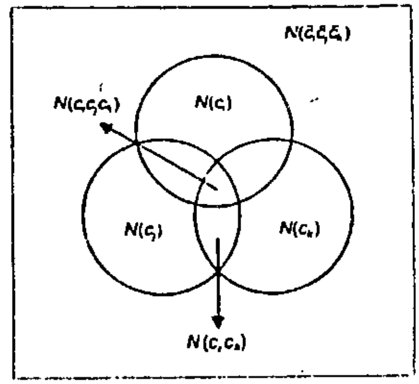
(شکل ۱)

(قسمت هاشور خورده در داخل کروشه دو بار کم شده که یک بار آن را اضافه می‌کنیم).

حالت سه‌تایی مثال فوق نیز صادق است:

$$N(C'_i \cap C'_j \cap C'_k) = N(S) - \left[N(C_i) + N(C_j) + N(C_k)\right] +$$

$$[N(C_i\cap C_k)+N(C_i\cap C_j)+N(C_j\cap C_k)]-N(C_i\cap C_j\cap C_k)$$



(شکل ۲)

(قسمتهای مشترک بین دو مجموعه در کروشه اوّل هر کدام دوبار کم شده‌اند، که در کروشه دوم این موضوع جبران شده است ؛ قسمت مشترک بین هر سه مجموعه سه بار در کروشه اوّل کم شده و سه بار در کروشهٔ دوم اضافه شده لذا باید یکبار کم شود).

حال به کمک حالتهای دوتایی و سه‌تایی به بیان اصل می‌پردازیم.

قضیه یک:

یک مجموعه n عضوی با زیرمجموعه‌های C_i $(1\le i\le t)$ را در نظر بگیرید. تعداد اعضایی از این مجموعهٔ n عضوی (S) که در هیچیک از C_i ها حضور ندارند به صورت زیر نمایش داده می‌شوند :

$$N'=N(C'_1\cap C'_2\cap C'_3\cap\ldots\cap C'_t)=$$

قضیه ردّ و شمول بیان می‌دارد :

$$N'=N(C'_1\cap C'_2\cap C'_3\cap\ldots\cap C'_t)=$$
$$N(S)-[N(C_1)+N(C_2)+\ldots+N(C_t)]$$
$$+[N(C_1\cap C_2)+N(C_1\cap C_3)+\ldots+N(C_1\cap C_t)+N(C_2\cap C_3)+\ldots+N(C_{t-1}\cap C_t)]$$
$$-[N(C_1\cap C_2\cap C_3)+N(C_1\cap C_2\cap C_4)+\ldots+N(C_{t-2}\cap C_{t-1}\cap C_t)]$$
$$+\ldots+(-1)^t N(C_1\cap C_2\cap C_3\cap\ldots\cap C_t)$$
$$\Rightarrow N'=N(S)-\sum_{i=1}^{t}N(C_i)+\sum_{1\le i<j\le t}N(C_i\cap C_j)-\sum_{1\le i<j<k\le t}N(C_i\cap C_j\cap C_k)+\ldots+(-1)^t N(C_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_t)$$

اثبات:

عضو دلخواه x از مجموعه S را در نظر می‌گیریم :

الف) یا این عضو در هیچیک از زیر مجموعه‌ها حضور ندارد ؛ در این صورت در سمت چپ تساوی یکبار شمرده می‌شود و در سمت راست نیز فقط یکبار شمرده می‌شود که آن در $N(S)$ است.

ب) و یا اینکه عضو x در r تا از این زیر مجموعه‌ها $(1\le r\le t)$ حضور دارد ؛ با توجّه به این مطلب این عضو در طرف راست تساوی :

۱) یکبار در $N(S)$ شمرده می‌شود.

۲) r بار در $\sum_{1\le i\le t}N(C_i)$ شمرده می‌شود.

۳) $\binom{r}{2}$ بار در $\sum_{1\le i<j\le t}N(C_i\cap C_j)$ شمرده می‌شود.

.
.
.

(r+1) $\binom{r}{r}$ بسار در $\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le t}N(C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap\ldots\cap C_{i_r})$ شمرده می‌شود.

پس تعداد دفعات شمارش عضو x در طرف راست تساوی برابر است با :

$$1-r+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}+\ldots+(-1)^r\binom{r}{r}=[1+(-1)]^r=0^r=0$$

که این صحّت اصل را تأیید می‌کند، زیرا این عضو در طرف راست تساوی نیز صفر بار شمرده می‌شود ؛ چرا که ما به دنبال اعضایی هستیم که اشتراک متمم زیرمجموعه‌ها را برآورده سازند.

نتیجهٔ ۱:

طبق فرض قضیه ۱ نتیجه می‌شود که $N-N'$ مشخص‌کننده تعداد عضوهایی است که حداقل در یکی از C_i ها شرکت

دارند یعنی :

$$N(C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_t) = N - N'$$

قبل از حل چند مثال در این باب تعریف می‌کنیم :

$$S_0 = N(S)$$

$$S_1 = [N(C_1)+N(C_2)+...+N(C_t)]$$

$$S_2 = [N(C_1\cap C_2)+N(C_1\cap C_3)+...+N(C_1\cap C_t)+ N(C_2\cap C_3)+...+N(C_{t-1}\cap C_t)]$$

که در حالت کلی داریم :

$$S_k = \sum_{1\le k\le t} N(C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap ...\cap C_{i_k})$$

لازم به تذکر است تعداد جمله‌هایی، که در S_k با یکدیگر جمع می‌شوند $\binom{t}{k}$ است.

مثال ۱:

تعداد اعداد صحیح و مثبت را که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیستند معین کنید. $(1\le n\le 100)$

در اینجا $S=\{1, 2, 3, ..., 100\}$ و $N(S)=100$ است.

برای حل سه زیرمجموعه در S تعریف می‌کنیم :

الف ـ C_1 : اعدادی که بر ۲ بخشپذیرند.

ب ـ C_2 : اعدادی که بر ۳ بخشپذیرند.

ج ـ C_3 : اعدادی که بر ۵ بخشپذیرند.

بدیهی است که جواب مسأله $N(C_1'\cap C_2'\cap C_3')$ است.

برای حل این مسأله از تابع جزء صحیح کمک می‌گیریم :

$$N(C_1)=[\frac{100}{2}]=50$$

$$N(C_2)=[\frac{100}{3}]=33$$

$$N(C_3)=[\frac{100}{5}]=20$$

$$N(C_1\cap C_2)=[\frac{100}{6}]=16$$

$$N(C_1\cap C_3)=[\frac{100}{10}]=10$$

$$N(C_2\cap C_3)=[\frac{100}{15}]=6$$

$$N(C_1\cap C_2\cap C_3)=[\frac{100}{30}]=3$$

با بکار بردن اصل ردّ و شمول به دست می‌آید :

$$N(C_1'\cap C_2'\cap C_3') = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$
$$= N(S) - [N(C_1)+N(C_2)+N(C_3)] + [N(C_1\cap C_2)+N(C_1\cap C_3)+N(C_2\cap C_3)] - N(C_1\cap C_2\cap C_3)$$
$$= 100 - [50+33+20] + [16+10+6] - 3 = 26$$

که این ۲۶ عدد عبارتند از :

۱ ـ ۷ ـ ۱۳ ـ ۱۷ ـ ۱۹ ـ ۲۳ ـ ۲۹ ـ ۳۱ ـ ۳۷ ـ ۴۱
ـ ۴۳ ـ ۴۷ ـ ۴۹ ـ ۵۳ ـ ۵۹ ـ ۶۱ ـ ۶۷ ـ ۷۱ ـ ۷۳ ـ ۷۷
ـ ۷۹ ـ ۸۳ ـ ۸۹ ـ ۹۱ ـ ۹۷.

مثال ۲:

با استفاده از ترکیب با تکرار می‌توانیم تعداد جوابهای صحیح غیرمنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ را بیابیم. در اینجا مسأله را طور دیگری مطرح می‌کنیم و برای آن شرط $(1\le i\le 4)x_i \le 7$ را قرار می‌دهیم. در اینجا $N(S)$ بر طبق آنچه از مسائل ترکیب با تکرار می‌دانیم برابر است با :

$$N(S)=\binom{4+18-1}{18}=\binom{21}{18}$$

باز هم برای بکارگیری اصل ردّ و شمول چهار زیرمجموعه تعریف می‌کنیم :

زیرمجموعه C_i $(1\le i\le 4)$ در بردارند کلیه جوابهای معادله فوق است وقتی که $x_i > 7$ یا آنکه $x_i \ge 8$ باشد. واضح است که جواب مسأله فوق با شرط اضافه شده عبارتست از :

$N(C_1'\cap C_2'\cap C_3'\cap C_4')$

اما در این مثال $N(C_1)=N(C_2)=N(C_3)=N(C_4)$ می‌باشد. بدیهی است که برای شمارش $N(C_1)$ باید جوابهای معادله $y_1+x_2+x_3+x_4=10$ $(x_1=y_1+8 \Rightarrow y_1\ge 0)$ را بیابیم ؛ که طبق توضیح داده شده در این معادله :

$y_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

با استفاده از مطالب آنالیز ترکیبی در مبحث ترکیب با تکرار :

$$N(C_i)=\binom{۴+۱۰-۱}{۱۰}=\binom{۱۳}{۱۰}\quad ۱\le i\le ۴$$

$$\Rightarrow S_۱=\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۱۰}$$

به همین ترتیب $N(C_۱\cap C_۲)$ برابر است با تعداد جوابهای معادله $(y_۱,y_۲,x_۳,x_۴\ge ۰)\, y_۱+y_۲+x_۳+x_۴=۲$ که برابر است با :

$$N(C_i\cap C_j)=\binom{۵}{۲}\Rightarrow S_۲=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}$$

در حالت $N(C_۱\cap C_۲\cap C_۳)$ ما به دنبال جوابهای معادله $(y_۱,y_۲,y_۳,x_۴\ge ۰)\, y_۱+y_۲+y_۳+x_۴=-۶$ هستیم، که نتیجه روشن است ؛ این معادله جواب ندارد لذا :

$$N(C'_۱\cap C'_۲\cap C'_۳\cap C'_۴)=N(S)-S_۱+S_۲-S_۳+S_۴=$$

$$\binom{۲۱}{۱۸}-\binom{۴}{۱}\binom{۱۳}{۱۰}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}-۰+۰=۲۴۶$$

بنابراین از بین ۱۳۳۰ عدد مثبتی که جواب معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۸$ هستند فقط ۲۴۶ تا از آنها هستند، که شرط $x_i\le ۷ (۱\le i\le ۴)$ را برآورده می‌سازند.

مثال ۳: یافتن تعداد توابع پوشا

مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ S را تمام توابع تعریف شده از A در B می‌نامیم. و داریم $N(S)=n^m$ زیرا از هر یک از عناصر دامنه می‌توان n فلش به سوی عناصر برد خارج نمود و چون عناصر دامنه m تا هستند بنا به اصل ضرب تعداد توابع تعریف شده از A در B، n^m خواهد بود.

$A=\{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$

$B=\{b_۱, b_۲, \ldots, b_n\}\ (m\ge n)$

باز هم برای بکارگیری اصل ردّ و شمول زیر مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم. بازای هر $۱\le i\le n$ زیرمجموعه C_i از S را تعریف می‌کنیم بعنوان توابعی که در آن b_i بعنوان برد تابع تعریف نشده است. بدیهی است که $N(C'_i)$ تعداد توابعی است که از A در B تعریف شده‌اند و b_i برد آنها است و در حالت کلی تعداد $f:A\to B$ برابر خواهد شد با :

$N(C'_۱\cap C'_۲\cap C'_۳\cap \ldots C'_n)$

برای هر $۱\le i\le n$ واضح است که $N(C_i)$ برابر خواهد شد با $(n-۱)^m$ چرا که تمام اعضای B به جز b_i می‌توانند در برد تابع شرکت جویند ؛ با توجه به اینکه n عضو داریم پس $S_۱$ بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$S_۱=[N(C_۱)+N(C_۲)+\ldots+N(C_n)]=n(n-۱)^m=\binom{n}{۱}(n-۱)^m$$

در حالتی دوتایی هم دو عضو b_i و b_j نمی‌توانند در برد متقابل شرکت کنند پس داریم :

$$S_۲=[N(C_۱\cap C_۲)+N(C_۱\cap C_۳)+\ldots+N(C_۱\cap C_n)+\ldots+N(C_{n-۱}\cap C_n)]=\binom{n}{۲}(n-۲)^m$$

در حالت کلی بازای هر k و $(۱\le k\le n)$ داریم :

$$S_k=\sum_{۱\le i_۱<i_۲<\ldots\le n} N(C_{i_۱}\cap C_{i_۲}\cap\ldots\cap C_{i_k})=\binom{n}{k}(n-k)^m$$

پس بنا به اصل ردّ و شمول داریم :

$$N(C'_۱\cap C'_۲\cap\ldots\cap C'_n)=N-S_۱+S_۲-S_۳+\ldots+(-۱)^nS_n$$

$$=n^m-\binom{n}{۱}(n-۱)^m+\binom{n}{۲}(n-۲)^m-\binom{n}{۳}(n-۳)^m+\ldots+(-۱)^n(n-n)^m$$

$$=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

مثال ۴:

به چند حالت ۲۶ حرف الفبای انگلیسی می‌توانند مرتب شوند، به طوری که در این ترتیبها هیچ یک از کلمات زیر درست نشوند.

Car, dog, pun, byte

$C_i (۱\le i\le ۴)$ را مجموعه‌ای تعریف می‌کنیم که در آن این کلمات کنار هم تشکیل شوند. به عنوان مثال $C_۱$ یعنی ترکیباتی که کلمه Car در آن ساخته شود. در واقع اگر Sرا مجموعه کلیه

ترتیبهای ۲۶ حرف بگیریم، هر کدام از مجموعه‌های C_i یک زیرمجموعه از S هستند. برای شمردن اعضای هر یک از C_iها هر یک از کلمات مطلوب را یک حرف فرض می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$N(S) = ۲۶!$

$N(C_۱) = N(C_۲) = N(C_۳) = ۲۴! \quad N(C_۴) = ۲۳!$

$N(C_۱ \cap C_۲) = N(C_۱ \cap C_۳) = N(C_۲ \cap C_۳) = ۲۲!$

$N(C_i \cap C_۴) = ۲۱! \qquad (i \neq ۴)$

$N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳) = ۲۰! \qquad N(C_i \cap C_j \cap C_۴) = ۱۹!$

$(۱ \leq i < j \leq ۳) \qquad N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳ \cap C_۴) = ۱۷!$

با توجه به اصل ردّ و شمول تعداد ترتیبهای مطلوب برابر خواهد بود با:

$$N(C'_۱ \cap C'_۲ \cap C'_۳ \cap C'_۴) = ۲۶! - [۳(۲۴!) + ۲۳!] + [۳(۲۲!) + ۳(۲۱!)] - [۲۰! + ۳(۱۹!)] + ۱۷!$$

مثال بعدی در مورد نظریهٔ اعداد است. در این مثال تابع فی‌اولر معرفی و ساخته می‌شود.

مثال ۵:

عدد صحیح و مثبت n را در نظر می‌گیریم. تابع $\varphi(n)$ را به این صورت تعریف می‌نمائیم، که تعداد اعداد کوچکتر از n را به ما بدهد که نسبت به n اول هستند. واضح است که اگر m یکی از این اعداد باشد $۱ \leq m \leq n$ می‌باشد. این تابع به تابع «فی اولر» مشهور است. برای مثال:

$\varphi(۲) = ۱ \quad , \quad \varphi(۳) = ۲ \quad , \quad \varphi(۴) = ۲ \quad ,$

$\varphi(۵) = ۴ \quad , \quad \varphi(۶) = ۲$

بدیهی است که برای هر عدد اول مثل P : $\varphi(P) = P - ۱$ زیرا کلیه اعداد کوچکتر از عدد اول P نسبت به آن اول هستند. ما به دنبال آن هستیم، که رابطه‌ای بین n و $\varphi(n)$ بیابیم و یک فرمول دقیق برای آن به دست آوریم. کاربرد اصل در این مثال مانند مثال یک است. می‌دانیم هر عدد صحیح قابل تجزیه به عوامل اول بصورت زیر است:

$n = P_۱^{a_۱} P_۲^{a_۲} \ldots P_t^{a_t} \; ۱ \leq i \leq t \; (a_i \geq ۱)$

ما این رابطه را در حالتی که عدد m حداکثر به حاصلضرب چهار عامل اول تجزیه می‌گردد، به دست می‌آوریم؛ واضح است کـــه در حـــالت کلی روش همـــین خـــواهد بود.

$(m = P_۱^{a_۱} P_۲^{a_۲} \ldots P_۴^{a_۴})$

مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, m\}$ را در نظر می‌گیریم، بازای $۱ \leq i \leq ۴$ زیرمجموعه C_i شامل اعضایی از S است که بر P_i بخش‌پذیرند؛ بنابراین طبق تعریف تابع φ اولر خواهیم داشت: $\varphi(m) = N(C'_۱ \cap C'_۲ \cap C'_۳ \cap C'_۴)$

برای به دست آوردن اعضای مجموعه C_i کافیست، که m را بر عامل اول P_i تقسیم نماییم و همچنین برای به دست آوردن تعداد اعضای مجموعه $C_i \cap C_j$ نیز کافیست m را بر عاملهای اول P_i و P_j توأماً تقسیم نماییم و این برای بقیه ادامه می‌یابد:

$$N(C_i \cap C_j \cap C_k) = \frac{m}{P_i P_j P_k} (۱ \leq i < j < k \leq ۴) ,$$

$$N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳ \cap C_۴) = \frac{m}{P_۱ P_۲ P_۳ P_۴}$$

$$\to \varphi(m) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴$$

$$= m - [\frac{m}{P_۱} + \frac{m}{P_۲} + \frac{m}{P_۳} + \frac{m}{P_۴}] + [\frac{m}{P_۱P_۲} + \frac{m}{P_۱P_۳} + \ldots + \frac{m}{P_۳P_۴}] - [\frac{m}{P_۱P_۲P_۳} + \ldots + \frac{m}{P_۲P_۳P_۴}] + \frac{m}{P_۱P_۲P_۳P_۴}$$

$$= m[۱ - (\frac{۱}{P_۱} + \ldots + \frac{۱}{P_۴}) + (\frac{۱}{P_۱P_۲} + \frac{۱}{P_۱P_۳} + \ldots + \frac{۱}{P_۳P_۴}) - (\frac{۱}{P_۱P_۲P_۳} + \ldots + \frac{۱}{P_۲P_۳P_۴}) + \frac{۱}{P_۱P_۲P_۳P_۴}]$$

$$= \frac{m}{P_۱P_۲P_۳P_۴}[(P_۱ - ۱)(P_۲ - ۱)(P_۳ - ۱)(P_۴ - ۱)]$$

$$= m\left(\frac{P_۱ - ۱}{P_۱}\right)\left(\frac{P_۲ - ۱}{P_۲}\right)\left(\frac{P_۳ - ۱}{P_۳}\right)\left(\frac{P_۴ - ۱}{P_۴}\right) =$$

$$m \prod_{i=۱}^{۴} (۱ - \frac{۱}{P_i})$$

با توجه به این مثال $\varphi(n)$ در حالت کلّی بشکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=۱}^{t} (۱ - \frac{۱}{P_i})$$

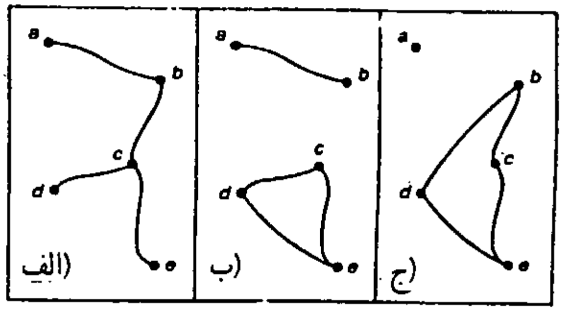
برای مثال عدد ۲۳۱۰۰ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\varphi(۲۳۱۰۰) = \varphi(۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷ \times ۱۱) = (۲۳۱۰۰)(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۳})(۱ - \frac{۱}{۵})(۱ - \frac{۱}{۷})(۱ - \frac{۱}{۱۱}) = ۴۸۰۰$$

مثال ۶:

یک مهندس تصمیم دارد بین ۵ دهکده راههایی ایجاد کند. به چند طریق او می‌تواند این کار را انجام دهد، به شرطی که در انتهای کار هیچ دهکده‌ای نباشد که به آن راهی وارد نشود؟ (ایزوله)

برای درک بهتر این مثال به شکلهای زیر توجه کنید. شکلهای «الف» و «ب» مطلوب ما هستند ولی شکل «ج» مورد قبول ما نیست ؛ چرا که دهکده a در آن ایزوله شده است.



(شکل ۳)

برای حلّ این مثال مجموعه تمام راههایی را که می‌توانیم بین این ۵ دهکده ایجاد نماییم با عنوان مجموعه S در نظر می‌گیریم. تعداد راههای موجود برابر با $۲^{۱۰}$ است. توضیح اینکه بین هر دو دهکده راه واصل می‌تواند وجود داشته باشد و می‌تواند موجود نباشد، که با توجه به اصل ضرب و قانون ترکیب تعداد راهها به این صورت محاسبه می‌شود :

$$N(S) = ۲^{\binom{۵}{۲}} = ۲^{۱۰}$$

زیرمجموعه‌های $C_i (۱ \le i \le ۵)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که هر یک از C_iها مجموعه راههایی هستند، که در آنها یک دهکده ایزوله شده است. واضح است که جواب مسأله برابر است با : $N(C'_۱ \cap C'_۲ \cap C'_۳ \cap C'_۴ \cap C'_۵)$

داریم :

$$N(C_۱) = ۲^۶ \Rightarrow S_۱ = \binom{۵}{۱} ۲^۶$$

$$N(C_۱ \cap C_۲) = ۲^۳ \Rightarrow S_۲ = \binom{۵}{۲} ۲^۳$$

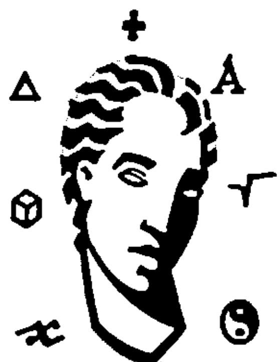
$$N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳) = ۲^۱ \Rightarrow S_۳ = \binom{۵}{۳} ۲^۱$$

$$N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳ \cap C_۴) = ۲^۰ \Rightarrow S_۴ = \binom{۵}{۴} ۲^۰$$

$$N(C_۱ \cap C_۲ \cap C_۳ \cap C_۴ \cap C_۵) = ۲^۰ \Rightarrow S_۵ = \binom{۵}{۵} ۲^۰$$

طبق اصل ردّ و شمول :

$$N(C'_۱ \cap \ldots \cap C'_۵) = ۲^{۱۰} - \binom{۵}{۱} ۲^۶ + \binom{۵}{۲} ۲^۳ - \binom{۵}{۳} ۲^۱ + \binom{۵}{۴} ۲^۰ - \binom{۵}{۵} ۲^۰ = ۷۶۸$$



تفریح اندیشهٔ ٦

خطهای متقاطع

در صورتی که شش خط در تکه‌ای کاغذ چنان رسم شوند که هر خط هر خط دیگر را قطع کند و هیچ سه خطی در یک نقطه متقاطع نباشند چند مثلث تشکیل می‌شود؟

تبصره: این معما توانایی خواننده را در شمارش روشدار امتحان می‌کند. در صورتی که در مورد آن عجولانه عمل کنید، ممکن است گیج شوید.

جواب در صفحه ۸۸

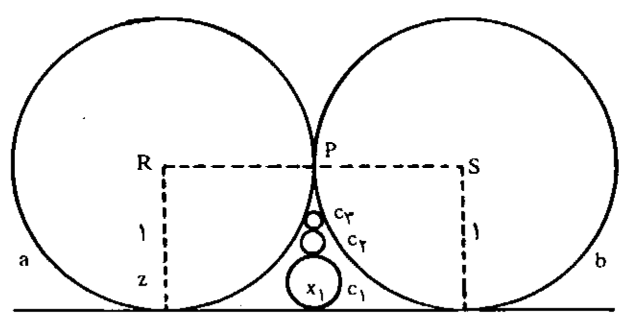
طرح و حل مسائل اساسی ریاضی به روشهای مقدماتی (۱۸)

از: 100 Great Problems of Elementary Mathematics

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مسأله پرگار ماچرونی

تکرار ترسیمات هندسی[1] می‌تواند به تعدادی سری جالب منجر شود (شکل).



شکل، دو دایرهٔ a و b به شعاع ۱ مماس در نقطهٔ P را نشان می‌دهد. t مماس مشترک این دو دایره است که با a در z و با b در z_1 مماس است. c_1 دایره‌ای مماس بر a، b و t است؛ c_2 دایره‌ای مماس بر a، b و c_1 است؛ c_3 دایره‌ای مماس بر a، b و c_2 است.

شیوهٔ ترسیم دوایر مماس بر a، b و c_k، ...، $k = 1, 2, 3, \ldots$، می‌تواند به طور پایان ناپذیر ادامه یابد. d_1، d_2، ... قطرهای دوایر c_1، c_2، ... یک دنبالهٔ عددی نامتناهی[2] تشکیل می‌دهند. مجموع $S_k = d_1 + d_2 + \ldots + d_r$، چون k افزایش یابد، بزرگتر می‌شود $(d_1 < d_1 + d_2 < d_1 + d_2 + d_3 < \ldots)$. واضح است که S_k هیچگاه از px_1، فاصلهٔ P از t، که ۱ است، بیشتر نمی‌شود؛ از طرف دیگر S_k هر اندازه که بخواهیم به px_1 نزدیک می‌شود.

به این ترتیب مجموع S_k به بینهایت میل کند، به ۱ میل می‌کند. مسأله این است:

جمله‌های سری عددی d_1، d_2، d_3، ....، d_k

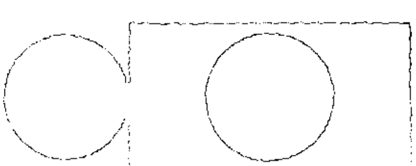
$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots 1$$

را بیابید.

تبصره. اعداد d_1، d_2، d_3، d_4، ... و مجموع آنان در مثلث همساز[3]، الگویی[4] عددی که توسط لایب‌نیتز[5] بررسی شده است، مشمول‌اند.

یادداشتها:

1. Geometric constructions
2. Infinite number sequence
3. harmonic triangle
4. Number Pattern
5. Leibnitz



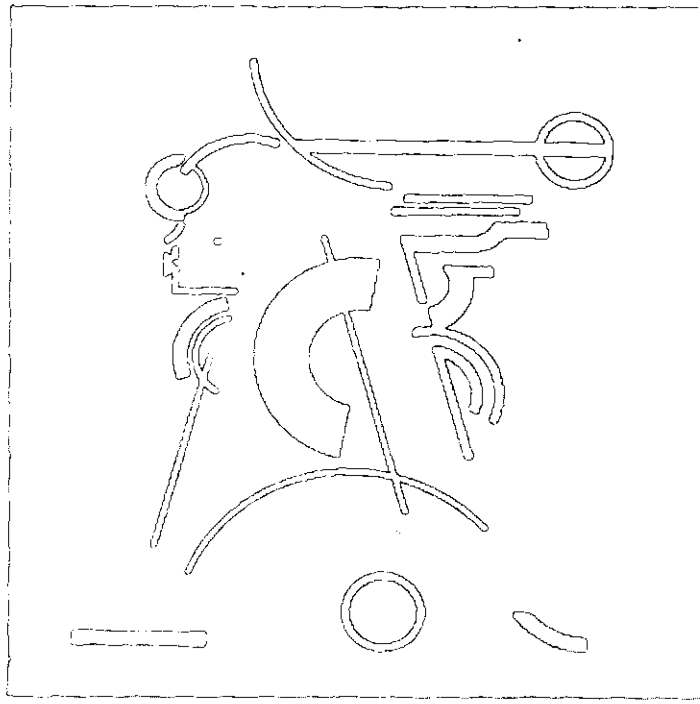
ریاضیات گسسته

قسمت پنجم

هم ارزی منطقی
قوانین منطق

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



در جمیع زمینه‌های ریاضیات نیاز به دانستن این داریم که چه وقت موجودات مورد بررسیمان مساوی یا اساساً یکسانند، برای مثال، در حساب و جبر می‌دانیم که دو عدد حقیقی و ناصفر، زمانی که دارای یک مقدار و یک علامت باشند مساوی‌اند. درنتیجه، به ازای دو عدد حقیقی و ناصفر x، y اگر $|x|=|y|$ و $xy>۰$ داریم $x=y$، و برعکس (یعنی، اگر $x=y$، آنگاه $|x|=|y|$ و $xy>۰$). در هندسه، هنگام سروکارداشتن با مثلثها، مفهوم همنهشتی رخ می‌دهد. در این جا مثلث ABC و مثلث DEF همنهشت‌اند اگر، برای مثال، اضلاع نظیر مساوی داشته باشند ــ یعنی، طول ضلع AB = طول ضلع DE، طول ضلع BC = طول ضلع EF، و طول ضلع CA = طول ضلع FD.

به مطالعهٔ منطقیمان غالباً به‌صورت *جبر گزاره*[۱] (در مقابل جبر اعداد حقیقی) اشاره می‌شود. در این جبر، برای مطرح کردن این منظور که چه زمانی دو گزاره اساساً یکسان‌اند، از جداول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. کارمان را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱.

در جدول ۱ جداول ارزش گزاره‌های $\bar{p}\vee q$ و $p\rightarrow q$ را داریم. در این جدول

◀ جدول ۱

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p}\vee q$	$p\rightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۱	۱

ملاحظه می‌کنیم که ارزشهای راستی $\bar{p}\vee q$ و $p\rightarrow q$ دقیقاً یکسان‌اند. □

این وضعیت به تعریف زیر منجر می‌شود.

تعریف ۱

به دو گزارهٔ $S_۱$ و $S_۲$ ***منطقاً هم‌ارز***[۲] می‌گوییم، و می‌نویسیم $S_۱ \Leftrightarrow S_۲$، اگر جدولهای ارزش $S_۱$ و $S_۲$ دقیقاً یکسان باشند.

به عنوان نتیجه‌ای از این مفهوم، ملاحظه می‌شود که می‌توانیم رابط استلزام را بر حسب نقیض و ترکیب فصلی بیان کنیم. به همین ترتیب، از نتیجهٔ جدول ۲ داریم:

$$(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

با استفاده از هم‌ارزی منطقی جدول ۱، می‌توان

$$(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(\bar{p}\vee q)\wedge(\bar{q}\vee p)$$

را نیز نوشت. نتیجتاً، اگر چنین اختیار کنیم، می‌توانیم رابطهای $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ را از گزاره‌های مرکبمان کنار بگذاریم.

با بررسی جدول ۳، درمی‌یابیم که نقیض، همراه با رابطهای

∧ و ∨، کل مواردی است که برای جانشینی ***یای مانع***[۳]، $\underline{\vee}$، به آنها نیاز داریم. درواقع، حتی می‌توان ∧ یا ∨ را حذف کرد. اما، به‌خاطر کاربردهای مورد بررسی، به ∧ و ∨ نیز نقیض نیازمندیم.

◀ جدول ۲

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$	$p\leftrightarrow q$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

◀ جدول ۳

p	q	$p\underline{\vee}q$	$(p\vee q)$	$(\overline{p\wedge q})$	$(p\vee q)\wedge(\overline{p\wedge q})$
۰	۰	۰	۰	۱	۰
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰

اکنون از مفهوم هم‌ارزی منطقی در بررسی بعضی از ویژگیهای مهمی که در جبر گزاره‌ها برقرارند استفاده می‌کنیم.

به ازای هر دو عدد حقیقی a، b، می دانیم که $-(a+b)=(-a)+(-b)$. آیا نتیجهٔ قابل مقایسه‌ای برای گزاره‌های p، q موجود است؟

مثال۲.

◀ جدول ۴

p	q	$p\wedge q$	$\overline{p\wedge q}$	$\bar p\vee\bar q$	$p\vee q$	$\overline{p\vee q}$	$\bar p\wedge\bar q$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰

در جدول ۴، جدولهای ارزش گزاره‌های $\overline{p\wedge q}$، $\bar p\vee\bar q$، $\overline{p\vee q}$ و $\bar p\wedge\bar q$ ستونهای ۴ و ۵ جدول فوق آشکار می‌کنند که $\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\bar p\vee\bar q$؛ ستونهای ۷ و ۸ آن نشان می‌دهند که $\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\bar p\wedge\bar q$. این نتایج به ***قوانین دومورگان***[۴] معروف‌اند، و شبیه قانون آشنای اعداد حقیقی

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$

هستند که نشان می‌دهد منفی یک مجموع مساوی مجموع منفیهای جمعوندهای آن است. اما، در این مورد تفاوتی قاطع ظاهر می‌شود: نقیض ***ترکیب عطفی*** دو گزارهٔ p، q به ***ترکیب فصلی*** نقیضهایشان، $\bar p$، $\bar q$ منجر می‌شود، درحالی که نقیض ***ترکیب فصلی*** p، q منطقاً هم ارز ***ترکیب فصلی*** نقیضهای $\bar p$، $\bar q$ است. □

در حساب اعداد حَقیقی، اعمال جمع و ضرب هردو در اصل موسوم به قانون توزیعپذیری ضرب روی جمع، آمده‌اند؛ به ازای هر سه عدد حقیقی a، b، c،

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

مثال بعدی نشان می‌دهد که قانونی مشابه برای گزاره‌ها وجود دارد. قانون وابستهٔ دومی نیز برای گزاره‌ها موجود است که مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد.

مثال ۳.

جدول ۵ شامل جدولهای ارزش گزاره‌های $p\wedge(q\vee r)$،

◀ جدول ۵

p	q	r	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$، $p\vee(q\wedge r)$ و $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ است. از این جدول نتیجه می‌شود که به ازای گزاره‌های دلخواه p، q و r،

قانون توزیعپذیری $\wedge$ روی $\vee$

$$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

قانون توزیعپذیری $\vee$ روی $\wedge$

$$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)\quad\square$$

قانون توزیعپذیری دوم مشابهی در حساب اعداد حقیقی ندارد. یعنی، راست نیست که به ازای جمیع اعداد حقیقی a، b، و c،

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

به عنوان نمونه، به ازای $a=۲$، $b=۳$، و $c=۵$، $a+(b\times c)=۱۷$ اما $(a+b)\times(a+c)=۳۵$.

پیش از ادامهٔ مطلب، توجه می‌کنیم که، در حالت عمومی، اگر S_1 و S_2 دو گزاره باشند و $S_1\leftrightarrow S_2$ صادق باشد، آنگاه S_1 و S_2 باید دارای جداول ارزش یکسان باشند و $S_1\Leftrightarrow S_2$. هنگامی که S_1 و S_2 گزاره‌هایی منطقاً هم ارز باشند (یعنی، $S_1\Leftrightarrow S_2$)، آنگاه گزارهٔ مرکب $S_1\leftrightarrow S_2$ صادق است. تحت این شرایط، این نیز راست است که $\overline{S_1}\leftrightarrow\overline{S_2}$، و $\overline{S_1}\Leftrightarrow\overline{S_2}$ صادق است.

اگر S_1، S_2، و S_3 گزاره‌هایی باشند که در آنها $S_1\Leftrightarrow S_2$ و $S_2\Leftrightarrow S_3$، آنگاه $S_1\Leftrightarrow S_3$. هنگامی که دو گزارهٔ S_1 و S_2 منطقاً هم ارز نباشند، می‌توانیم برای مشخص کردن این وضعیت بنویسیم $S_1\not\Leftrightarrow S_2$.

با استفاده از مفاهیم هم‌ارزی منطقی، صادق، و کاذب، فهرست قوانین زیر را برای جبر گزاره‌ها بیان می‌کنیم.

قوانین منطق

به ازای هر گزارهٔ p، q، r

۱.	$\overline{\overline{p}}\Leftrightarrow p$	قانون نقیض دوگانه [۵]
۲.	$\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\overline{p}\wedge\overline{q}$ $\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\overline{p}\vee\overline{q}$	قوانین دومورگان
۳.	$p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$ $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$	قوانین تعویضپذیری [۶]
۴.	$p\vee(q\vee r)\Leftrightarrow(p\vee q)\vee r$ $p\wedge(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge r$	قوانین شرکتپذیری [۷]
۵.	$p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	قوانین توزیعپذیری [۸]
۶.	$p\vee p\Leftrightarrow p$ $p\wedge p\Leftrightarrow p$	قوانین خودنمایی [۹]
۷.	$p\vee F_0\Leftrightarrow p$ $p\wedge T_0\Leftrightarrow p$	قوانین همانی [۱۰]
۸.	$p\vee\overline{p}\Leftrightarrow T_0$ $p\wedge\overline{p}\Leftrightarrow F_0$	قوانین تقابل [۱۱]
۹.	$p\vee T_0\Leftrightarrow T_0$ $p\wedge F_0\Leftrightarrow F_0$	قوانین سلطه [۱۲]
۱۰.	$p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ $p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$	قوانین جذب [۱۳]

برای اثبات جمیع مطالب فوق، می‌توانیم، همانگونه که در مثالهای ۲ و ۳ انجام دادیم، جدولهای ارزش آنها را نوشته به مقایسهٔ ارزشهای راستی هر حالت بپردازیم. اما، جمیع قوانین فوق، غیر از قانون نقیض دوگانه، به‌طور طبیعی به‌صورت جفت رخ می‌دهد. این مطلب به مفهوم زیر دلالت می‌کند.

تعریف ۲

اگر S گزاره‌ای (تنها شامل ـــ، $\wedge$، و $\vee$) باشد، **دوگان** [۱۴] S، به نمایش S^d، گزاره‌ای است که با قراردادن $\vee$ ($\wedge$) به‌جای هر ظهور $\wedge$ ($\vee$) در S و قراردادن F_0 (T_0) به جای هر ظهور T_0 (F_0) در آن به‌دست می‌آید.

گزاره‌های $p\vee\overline{p}$ و $p\wedge\overline{p}$ دوگان یکدیگرند، همانگونه که

گزاره‌های $p \vee T.$ و $p \wedge F.$ چنین‌اند.

اکنون به بیان و استفاده از قضیه‌ای، بدون اثبات آن، می‌پردازیم. اما، در آینده نتیجه‌ای را که در اینجا آشکار کرده‌ایم به اثبات می‌رسانیم.

قضیهٔ ۱

(اصل *دوگانی*[۱۵]) فرض می‌کنیم s، t گزاره‌هایی، چنان که در تعریف ۲ آمده، باشند. اگر $s \Leftrightarrow t$، آنگاه $s^d \Leftrightarrow t^d$.

به عنوان نتیجه‌ای از این اصل، می‌توان قوانین ۲ تا ۱۰ فهرستمان را با اثبات یکی از قوانین هر جفت و بعد به استناد اصل مزبور، به اثبات رساند.

می‌توان با استفاده از *قواعد جانشینی*[۱۶] زیر، هم‌ارزیهای منطقی بسیار دیگری را استخراج کرد.

۱. فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکبی را که صادق است نمایش دهد. اگر p گزاره‌ای باشد که در P ظاهر می‌شود و به جای هر ظهور p گزارهٔ یکسان q را قرار دهیم، آنگاه گزارهٔ مرکب P_1 نیز صادق است.

۲. فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکبی باشد که گزارهٔ p در آن ظاهر می‌شود، و فرض می‌کنیم q گزاره‌ای چنان باشد که $q \Leftrightarrow p$. فرض می‌کنیم در P به جای p، q را قرار دهیم. این جانشینی گزارهٔ مرکب P_2 را به‌دست می‌دهد. تحت این شرایط $P_1 \Leftrightarrow P_2$.

این قواعد را در مثالهای زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.

a) از قانون اول دومورگان می‌دانیم که، به ازای هر دو گزارهٔ p، q، گزارهٔ مرکب

$$P: \overline{p \vee q} \longleftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

صادق است. چون به جای هر ظهور p، $r \wedge s$ را قرار دهیم، از قاعدهٔ اول جانشینی نتیجه می‌شود که

$$P_1: \overline{(r \wedge s) \vee q} \longleftrightarrow [(\overline{r \wedge s}) \wedge \bar{q}]$$

نیز صادق است. در توسیع یک مرحلهٔ دیگر این نتیجه، می‌توانیم به جای هر ظهور q، $t \to u$ را قرار دهیم. اکنون، قاعدهٔ جانشینی مذکور صادق

$$P_2: \overline{(r \wedge s) \vee (t \to u)} \leftrightarrow [(\overline{r \wedge s}) \wedge (\overline{t \to u})]$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P_2': \overline{(r \wedge s) \vee (t \to u)} \Leftrightarrow (\overline{r \wedge s}) \wedge (\overline{t \to u})$$

را به‌دست می‌دهد.

b) قانون دوم سلطه بر این است که، به ازای هر گزارهٔ p، گزارهٔ مرکب

$$P: (p \wedge F.) \leftrightarrow F.$$

صادق است. اگر به جای p گزارهٔ دلخواه $[(q \vee r) \to s]$ را قرار دهیم، آنگاه همان قاعدهٔ اول جانشینی به صادق جدید

$$P_1: ([(q \vee r) \to S] \wedge F.) \leftrightarrow F.$$

و هم‌ارزی منطقی

$$P_1': [(q \vee r) \to S] \wedge F. \Leftrightarrow F.$$

منجر می‌شود. □

مثال ۵.

a) برای کاربردی از قاعدهٔ دوم جانشینی، فرض می‌کنیم P گزارهٔ مرکب $(p \to q) \to r$ را نمایش دهد. از آنجا که $(p \to q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ (چنان که در مثال ۱ و جدول ۱ آمده است)، اگر P_1 نمایشگر گزارهٔ مرکب $(\bar{p} \vee q) \to r$ باشد آنگاه $P_1 \Leftrightarrow P$.

b) اکنون گزارهٔ مرکب $p \to (p \vee q)$ را مطرح می‌کنیم. از آنجا که $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$، گزارهٔ مرکب $P_1: p \to (\bar{\bar{p}} \vee q)$ از p با قراردادن $\bar{\bar{p}}$ به جای ظهور دوم p (اما نه ظهور اول آن) استخراج می‌شود. قاعدهٔ دوم جانشینی همچنان بر این است که $P_1 \Leftrightarrow P$. (توجه داشته باشید که $P_2: \bar{\bar{p}} \to (\bar{\bar{p}} \vee q)$، که از قراردادن $\bar{\bar{p}}$ به جای هردوظهور p استخراج شده است، نیز منطقاً هم ارز P است.) □

مثال بعدی مبرهن می‌کند که چگونه می‌توان مفهوم هم‌ارزی منطقی را همراه با قوانین منطق و قواعد جانشینی به کار برد.

مثال ۶.

گزارهٔ مرکب $(p \vee q) \to r$ را نقیض و ساده کنید.

۱. $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (\overline{p \vee q}) \vee r$ (بنا به قاعدهٔ اول جانشینی، زیرا $(s \to t) \leftrightarrow (\bar{s} \vee t)$ به ازای هردو گزارهٔ s، t

صادق است.

۲. با نقیض کردن نتایج مرحلهٔ اول، داریم

$\overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)} \vee r}$

۳. از قانون اول دومورگان و قاعدهٔ جانشینی اول،

$\overline{\overline{(p \vee q)} \vee r} \Leftrightarrow \overline{\overline{(p \vee q)}} \wedge \bar{r}$

۴. اکنون قانون نقیض دوگانه و قاعدهٔ جانشینی اول می‌دهد

$\overline{\overline{(p \vee q)} \vee r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$

از مراحل ۱ تا ۴ داریم

□ $\overline{(p \vee q) \rightarrow r} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \bar{r}$

مثال ۷.

در تعریف ۲، S^d، دوگان گزارهٔ S، تنها به ازای گزاره‌های شامل نقیض و رابطهای پایه‌ای $\wedge$ و $\vee$ تعریف شده است. در این صورت چگونه می‌توان دوگان گزاره‌ای چون $S: p \rightarrow q$ را مشخص کرد؟

از آنجا که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$، S^d منطقاً هم ارز گزارهٔ $(\bar{p} \vee q)^d$ است، که $\bar{p} \wedge q$ است. □

در مثال بعد، به بررسی استلزام $p \rightarrow q$ و گزاره‌های خاص وابسته به آن می‌پردازیم.

مثال ۸.

جدول ۶ جدولهای ارزش گزاره‌های $p \rightarrow q$، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$، $q \rightarrow p$ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ را به‌دست می‌دهد.

◄ جدول ۶

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$	$q \rightarrow p$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

ستونهای سوم و چهارم این جدول آشکار می‌کنند که

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

گزارهٔ $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ به **عکس نقیض**[17] استلزام $p \rightarrow q$ موسوم است. ستونهای ۵ و ۶، جدول مزبور نشان می‌دهند که

$(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\bar{p} \rightarrow \bar{q})$

گزارهٔ $q \rightarrow p$ **عکس**[18] $p \rightarrow q$ نامیده می‌شود؛ و $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ به *وارون*[19] $p \rightarrow q$ مصطلح است.

درحالتی که p و q گزاره‌های زیر را نمایش می‌دهند

p : چهارضلعی ABCD مربع است.

q : چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است.

به‌دست می‌آوریم :

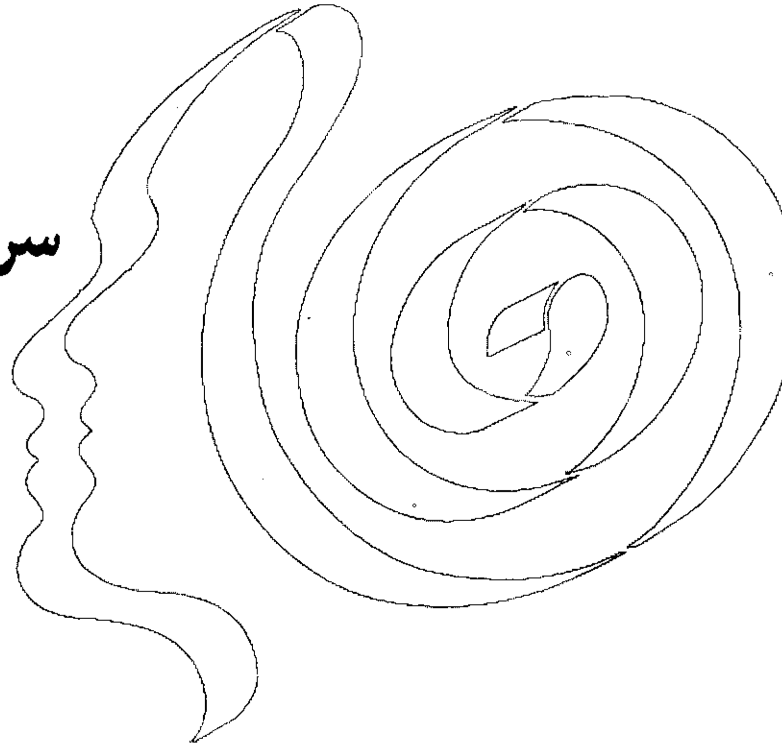
- (استلزام : $p \rightarrow q$) اگر چهارضلعی ABCD مربع باشد، آنگاه چهارضلعی ABCD متساوی الاضلاع است. (راست)
- (عکس نقیض : $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$) اگر چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع نباشد، آنگاه مربع نیست. (بازهم راست)
- (عکس : $q \rightarrow p$) اگر چهارضلعی ABCD متساوی‌الاضلاع است، آنگاه چهارضلعی ABCD مربع است. (دروغ ؛ هر لوزی که متساوی‌الزوایا نباشد همچنان متساوی‌الاضلاع است.)
- (وارون : $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$) اگر چهارضلعی ABCD مربع نباشد، آنگاه متساوی‌الاضلاع نیست. (باز هم دروغ)

همانگونه که مثال خاص فوق نشان می‌دهد، باید از «استدلال با استفاده از عکس» اجتناب کنیم. این حقیقت که استلزام (یا قضیهٔ) خاص $p \rightarrow q$ ای راست است بر این نیست که عکس آن، یعنی، $q \rightarrow p$، نیز باید راست باشد. اما، راستی عکس نقیض آن، یعنی، $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$، را ضروری می کند. □

◆ یادداشتها:

1. Algebra of propositional
2. Logically equivalent
3. Exclusive or
4. De Morgaan's Laws
5. Law of Double Negation
6. Commutative Laws
7. Associative Laws
8. Distributive Laws
9. Idempotent Laws
10. Identity Laws
11. Inverse Laws
12. Domination Laws
13. Absorption Laws
14. Dual
15. The principle of Duality
16. Substitution Rules
17. Contrapositive
18. Converse
19. Inverse

سرگرمی برای اندیشه‌ورزی



* حسن نصیرنیا * اثر: جورج سامرز

بازی با منطق*

آقای احمد گلستان دو خواهر به نامهای بهاره و ستاره دارد. خانم فهیمهٔ برومند، که همکار آقای گلستان است، دو برادر به نامهای داوود و احسان دارد. اطلاعات ما دربارهٔ حرفهٔ اعضای این دو خانواده به شرح زیر است:

خانواده گلستان:

احمد: دکتر

بهاره: دکتر

ستاره: وکیل

خانوادهٔ برومند:

داوود: دکتر

احسان: وکیل

فهیمه: وکیل

بنا به دلیل نامعلومی، یکی از این شش نفر به دست یکی از پنج نفر دیگر به قتل می‌رسد. اطلاعات کلّی ما دربارهٔ قاتل و مقتول به شرح زیر است:

۱ ــ اگر قاتل و مقتول خویشاوند باشند، قاتل مرد است.

۲ ــ اگر قاتل و مقتول خویشاوند نباشند، قاتل دکتر است.

۳ ــ اگر قاتل و مقتول هم شغل باشند، مقتول مرد است.

۴ ــ اگر قاتل و مقتول شغلهای متفاوت داشته باشند، مقتول زن است.

۵ ــ اگر قاتل و مقتول همجنس باشند، قاتل وکیل است.

۶ ــ اگر قاتل و مقتول همجنس نباشند، مقتول دکتر است.

با توجه به اطلاعات مذکور، **قاتل کیست؟**

(**رهنمود:** برای دستیابی آسان به حل معمّا، با بررسی مقدمات (فرضها) و نتایج جمله‌های ششگانه، مشخص کنید که کدام یک از «مجموعه‌های سه‌تایی» ازجمله‌ها ممکن است، درست باشد).

پاسخ معمای بازی با منطق

با بررسی مقدمات (فرضهای) جمله‌ها درمی‌یابیم که فقط یکی از جمله‌های (۱) و (۲)، یکی از جمله‌های (۳) و (۴) و یکی از جمله‌های (۵) و (۶) درست است. از نتایج این جمله‌ها درمی‌یابیم که امکان ندارد، جمله‌های (۲) و (۵) هر دو درست

---

* منبع

Summers, George, *Test Your Logic*, Dover Publications Inc. New York.

باشند. بنابراین، یکی یا بیش از یکی از جمله‌های زیر درست هستند :

الف ــ (۱)، (۴) و (۵)　　د ــ (۱)، (۳) و (۶)
ب ــ (۱)، (۳) و (۵)　　هـ ــ (۲)، (۴) و (۶)
ج ــ (۱)، (۴) و (۶)　　و ــ (۲)، (۳) و (۶)

اگر مجموعهٔ (الف) درست باشد، از نتیجهٔ جملهٔ (۱) درمی‌یابیم که قاتل مرد است ؛ از نتیجهٔ جملهٔ (۴) درمی‌یابیم که مقتول زن است و از مقدمهٔ جملهٔ (۵) درمی‌یابیم که قاتل و مقتول همجنس هستند. چون این وضع ناممکن است، مجموعهٔ (الف) نباید درست باشد.

اگر مجموعهٔ (ب) درست باشد، از مقدمات جمله‌ها درمی‌یابیم که قاتل و مقتول خویشاوند، هم شغل و همجنس هستند. چون این وضع با ترکیب هر خانواده تناقض دارد، مجموعهٔ (ب) نباید درست باشد.

اگر مجموعهٔ (ج) درست باشد، از نتایج جمله‌ها درمی‌یابیم که قاتل، مرد و مقتول، دکتر زن است. در این صورت، از مقدمات جمله‌های (۱) و (۴) درمی‌یابیم که قاتل وکیل است و قاتل و مقتول خویشاوندند. چون این وضع با ترکیب هر خانواده تناقض دارد، مجموعهٔ (ج) نباید درست باشد.

اگر مجموعهٔ (د) درست باشد، از نتیجهٔ جملهٔ (۱) درمی‌یابیم که قاتل مرد است ؛ از نتیجهٔ جملهٔ (۳) درمی‌یابیم که مقتول مرد است و از مقدمهٔ جملهٔ (۶) درمی‌یابیم که قاتل و مقتول همجنس نیستند. چون این وضع ناممکن است، مجموعهٔ (د) نباید درست باشد.

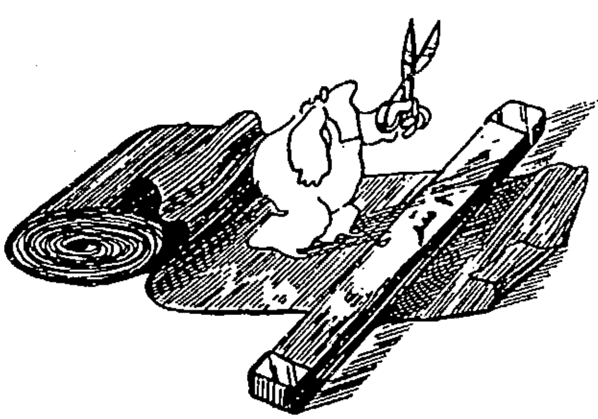
بنابراین، مجموعهٔ (و) درست است. از نتایج جمله‌های این مجموعه درمی‌یابیم که قاتل دکتر است و مقتول دکتر مرد است. سپس از مقدمهٔ جملهٔ (۶) درمی‌یابیم که قاتل زن است. آن‌گاه، با توجه به ترکیب خانوادهٔ مورد نظر درمی یابیم که **قاتل باید بهاره باشد**. مقدمهٔ جملهٔ (۲) نشان می‌دهد که داوود مقتول است. این وضع نشانگر آن است که مقدمهٔ جملهٔ (۳) با نتایج جمله‌های (۲) و (۶) همخوانی دارد.

□ □ □



تفریح اندیشهٔ ۷

پارچه‌فروشی می‌خواهد پارچه‌هایش را با ۴۰٪ سود بفروشد. اما وسیله‌ای که برای اندازه‌گیری به‌کار می‌برد طول مناسبی ندارد. به همین دلیل متوجه می‌شود که به جای ۴۰٪ سود فقط ۳۹٪ سود عایدش شده است. طول وسیله‌ای را که او برای اندازه‌گیری به کار برده است تعیین کنید.



جواب در صفحه ۸۸



مکان هندسی

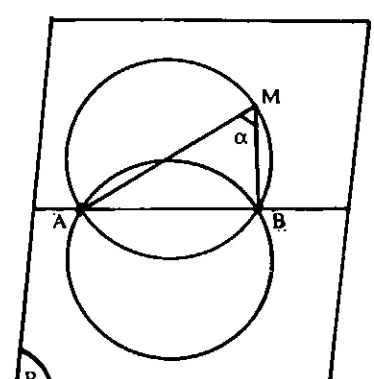
(قسمت دهم)

(اوّل، دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

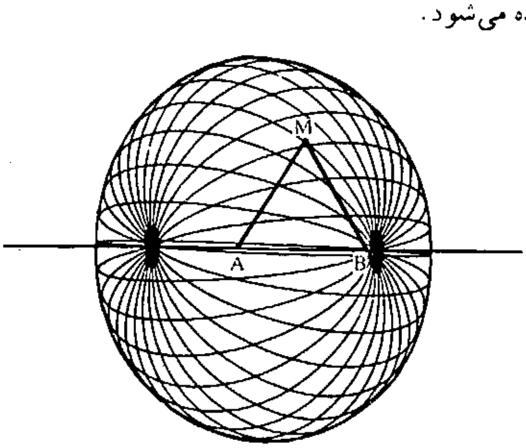
محمد هاشم رستمی

۶ــ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ثابت α دیده می‌شود، یک رویهٔ دوّار است که از دوران کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB، حول خط AB به وجود می‌آید.

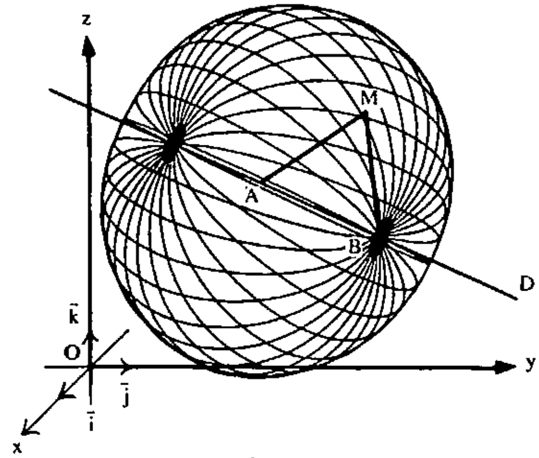
اثبات به روش هندسی ــ پاره‌خط AB را در صفحهٔ دلخواه P در نظر می‌گیریم و مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود، یعنی کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



واضح است که اگر نقطهٔ M را روی این کمان در خور اختیار کنیم، $\hat{AMB} = \alpha$ است. حال صفحهٔ P را حول خط راست AB دوران می‌دهیم. در این صورت از دوران کمان در خور زاویهٔ α یعنی از دوران کمان $\widehat{AMB}$ حول خط AB، سطحی منحنی (رویه‌ای دوار) به وجود می‌آید که این سطح، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود.



اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات $O-xyz$ در نظر می‌گیریم. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد



نظر، یعنی نقطه‌ای باشدکه $A\hat{M}B=\alpha$ است، خواهیم داشت :

$$A(x_1,y_1,z_1)\ ,\ B(x_2,y_2,z_2)\ ,\ M(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \vec{AM}(x-x_1\ ,\ y-y_1\ ,\ z-z_1)$$

$$\vec{BM}(x-x_2\ ,\ y-y_2\ ,\ z-z_2)$$

$$\Rightarrow \text{Cos}(\vec{AM},\vec{BM})=\text{Cos}\alpha=$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\cdot\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}$$

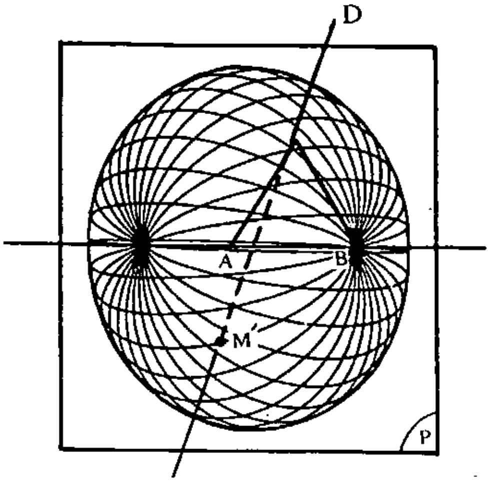
$$\Rightarrow\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right].$$
$$\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2\right]\cos^2\alpha$$

$$=\left[(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\right.$$
$$\left.(z-z_1)(z-z_2)\right]^2 \qquad (1)$$

بعکس هر نقطه‌ای از فضا که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، روی کمان در خور زاویهٔ α وابسته به پاره خط AB قرار دارد. این معادله را با استفاده از ویژگی دوران منحنیها در فضا حول یک خط راست (دوران کمان در خور زاویهٔ α حول خط AB) نیز می‌توان به‌دست آورد. برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها، می‌توان خط راست AB را منطبق بر یکی ازمحورهای دستگاه مختصات O − xyz اختیار نمود.

مـثـال ۱ـــ خط D و دو نقطهٔ A و B غـیـر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود.

حل ـــ صـفـحـهٔ دلخواه P را بر خط AB مرور می‌دهیم و کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سـپس، این کـمان درخـور را حـول خط AB دوران می‌دهیم تا

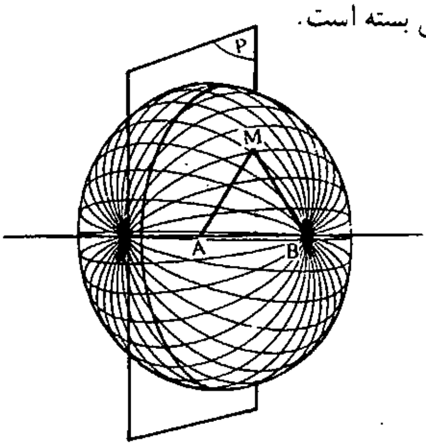


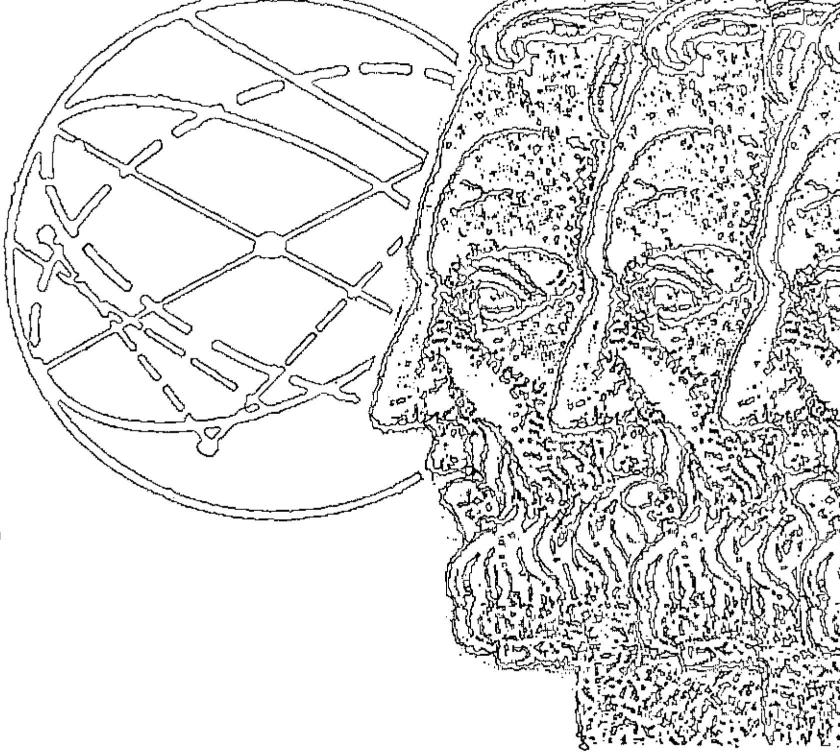
مکان هندسی نقطه‌ای از فـضـا کـه از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شـود، به‌دست آید. نقطهٔ برخـورد این مکان هندسی با خط D جواب مسأله است و حدّاکثر دو جواب وجود دارد.

نکتـه ـــ اگر هر دو نقطهٔ A و B روی خط D قـرار داشتـه باشند، مسأله جواب ندارد.

مثال ۲ـــ صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صـفـحـهٔ P را تعـیـین کنیـد کـه از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود.

حل ـــ مکان هندسی نقطه‌ای از فـضــا را کـه از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شــود رسم می‌کنیم. فــصـل مشـترک این مکان هندسی با صـفـحـهٔ P جواب مسـأله است (منحنی C). در صورتی که صـفحهٔ P بر خط AB بگذرد جواب مسـأله، کمان در خود زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB واقع در صفحهٔ P است و اگر صفحهٔ P عمود بر خط AB باشد و رویهٔ مکان هندسی را قطع کند، جـواب مسـأله یک دایرد است و اگـر صفحه نسبت به خط AB مایل باشد و رویهٔ مکان هندسی را قطع کند، جواب یک منحنی بسته است.





مشاهیر ریاضی جهان

برگرفته از: فرهنگ ریاضیات آکسفورد

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

خوارزمی[1] (حدود ۸۰۰ میلادی). کلمهٔ «الگوریتم[2]» را از نام این ریاضیدان مکتب اسلام استخراج کرده‌ایم. عنوان اثرش، **الجبر و المقابله** نیز کلمهٔ «جبر[3]» را به ما داده است.

لاگرانژ، ژوزف ـ لوئی[4] (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳). لاگرانژ، با اویلر، شاید بزرگترین ریاضیدانهای قرن هجدهم باشند. گرچه در تورین[5] تولد یافت، و قسمت اولیهٔ حیات خود را در آنجا گذراند، سرانجام در پاریس اقامت گزید و معمولاً فرانسوی قلمداد می‌شود، اما ممکن است ایتالیاییها این را عادلانه تصور نکنند. غالب کارهای مهمش در برلین، که در آکادمی آن جانشین اویلر بود، انجام گرفت. آثارش، همراه با آثار مهمترین ریاضیدانهای آن زمان، تمامی برد ریاضیات را در برمی‌گیرد. احتمالاً بیشتر به عنوان پیشرو در توسعهٔ مکانیک **نظری**[6] مشهور است. به خصوص اساساً عهده‌دار روشهای حساب تغییرات[7] و روش لاگرانژی حاصل از آن در مکانیک است. در نظریهٔ ماکسیمم ـ می‌نیمم معمولی، باید مقدار xی را که، مثلاً، مقدار $F(x)$ را می‌نیمم می‌کند، به دست آوریم. در صورت مبنایی حساب تغییرات، باید مسألهٔ بسیار مشکلتر به دست آوردن **تابع**[8] fی را که مقدار انتگرالی چون $\int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx$ را می‌نیمم می‌کند، حل کنیم. یکی از مسائل مشهور این موضوع مسألهٔ یافتن منحنی واصل دو نقطهٔ مفروض در صفحهٔ قائمی



لاگرانژ، ژوزف ـ لوئی

است، که ذره‌ای که در امتداد آن تحت نیروی ثقل می‌لغزد کمترین زمان را برای رسیدن از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی بگیرد.

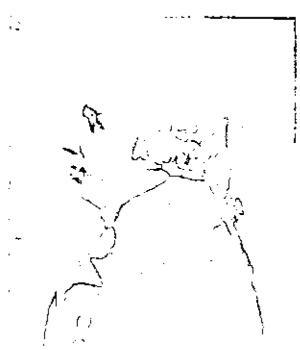
لاپلاس، پی‌یر ـ سیمون، مارکی دو[9] (۱۷۴۹ ـ ۱۸۲۷). لاپلاس فرانسوی، گرچه در طبقهٔ اشراف متولد نشد اما از شانسی که داشت در سیاست استاد بود. تحت زعامت ناپلئون وزیر داخله شد (بدون توفیق) اما به نظر می‌رسد که با پادشاهی احیا شده نیز به همین ترتیب ساخته باشد. بیشتر به خاطر اثرش در مورد حرکت سیاره‌ای که در **مکانیک آسمانی**[10] اش آمده، نیز سهم اساسی‌اش در نظریهٔ احتمال معروف است. این لاپلاس بود که نظریهٔ جاذبه‌ای نیوتن را در بررسی کل منظومهٔ شمسی به



لاپلاس، پی‌یر ـ سیمون، مارکی دو

کار برد. او این نظریهٔ قویاً جبری را که، هنگامی که شرایط آغازی[11] یک دستگاه دینامیکی بسته، نظیر کیهان را بدانیم، تکامل آیندهٔ آن کاملاً مشخص می‌شود، گسترش داد.

لـژانـدر، آدرین ـ مـاری[12] (۱۷۵۲ ـ ۱۸۳۳). سه ریاضیدان مشهور فرانسوی در ارتباط با دوران انقلاب فرانسه، در ارتباط با این واقعیت که اسامی هر سه‌شان با L آغاز می‌شود، نیز هستند : لاگرانژ، لاپلاس، لژاندر. لژاندر در قرن نوزدهم به خاطر کتاب درسی هندسه‌اش که با استاندارد آن زمان «کارسره» اقلیدسی‌ای بود، بسیار معروف بود. اثر اساسی‌اش در ارتباط بسیار با حساب دیفرانسیل و انتگرال بود، به این ترتیب که مسئولیت رده‌بندی انتگرالهای بیضوی را به صورتهای استانداردشان به عهده داشت. دانشجویان ریاضیات پیشرفته‌تر به زودی با چند جمله‌ایهای لژاندر، که در میان مهمترین توابع خاص قرار دارند، مواجه می شوند. لژاندر در زمینه‌ای کاملاً متفاوت، کاری اساسی در نظریهٔ اعداد انجام داد. قانون تقابل درجه دوم[13] را همراه با اویلر حدس زد و جزئاً اثبات کرد. اثبات



لـژانـدر، آدرین ـ مـاری

کامل این قانون در انتظار گاوس بود.

لایب‌نیتز، گوتفرید[14] (۱۶۴۶ ـ ۱۷۱۶). لایب‌نیتز فیلسوف و ریاضیدان همه فن‌حریف و مشهور آلمانی است. در ریاضیات، همراه با نیوتن، واضع حساب دیفرانسیل و انتگرال است. نیز سهم عمده‌ای در گسترش منطق علامتی داشت، و این مسیری بود که تا پایان قرن نوزدهم دنبال نشد. در حدود ۱۷۱۲، نزاعی بین‌المللی، بر سر ادعاهای رقابت‌آمیز مخترع حساب دیفرانسیل و انتگرال بودن، بین نیوتن و لایب‌نیتز در گرفت. رفتار لایب‌نیتز در این برخورد، برخلاف نیوتن، و بر خلاف رفتار خودش با اسپینوزا، جوانمردانه بود.

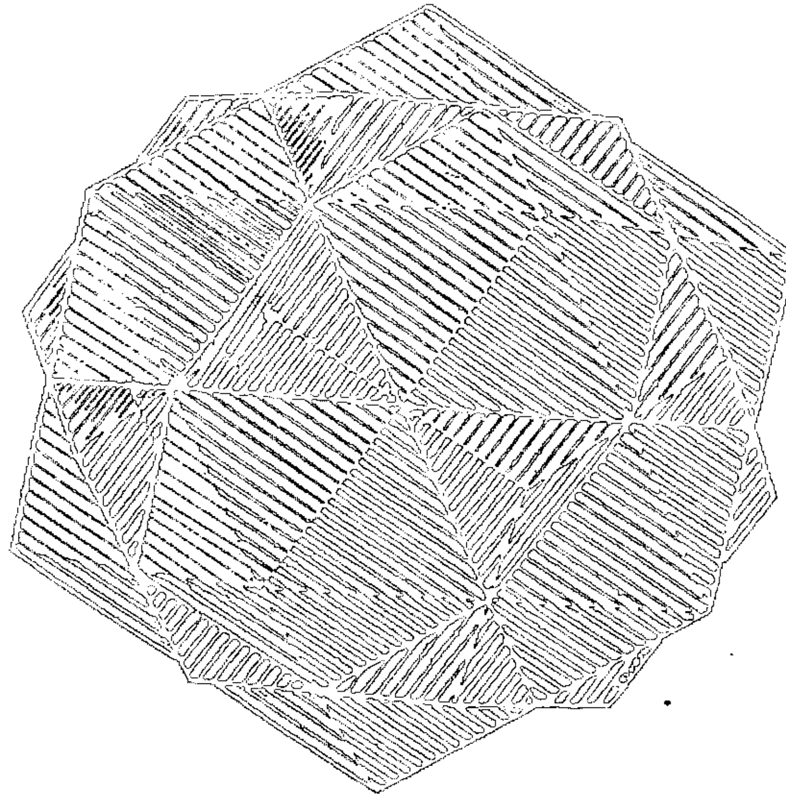


لایب‌نیتز گوتفرید

❑ یادداشتها:

1. al - Khwârizmi
2. algorithm
3. algebra
4. Lagrange, Joseph-Louis
5. Turin
6. theoretical
7. Calculus of Variations
8. function
9. Laplace, Pierre-Simon, Marquis de
10. Mécanique Céleste
11. starting conditions
12. Legendre, Adrien-Marie
13. Law of Quadratic Reciprocity
14. Leibniz, Gottfried

یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه و کاربرد آن در صنعت



● دکتر احمدشرف الدین

چکیده:

در زیر ابتدا یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را ذکر می‌کنیم و سپس کاربرد آن را در صنعت شرح می‌دهیم. در پایان مسئله زیبایی را که ابوالوفای بوزجانی طرح کرده است و با مسئله هندسی یادشده بسیار نزدیک است شرح می‌دهیم.

۱ ــ خاصیت هندسی موردنظر

الف ــ قضیه ــ در مثلث قائم‌الزاویه طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.

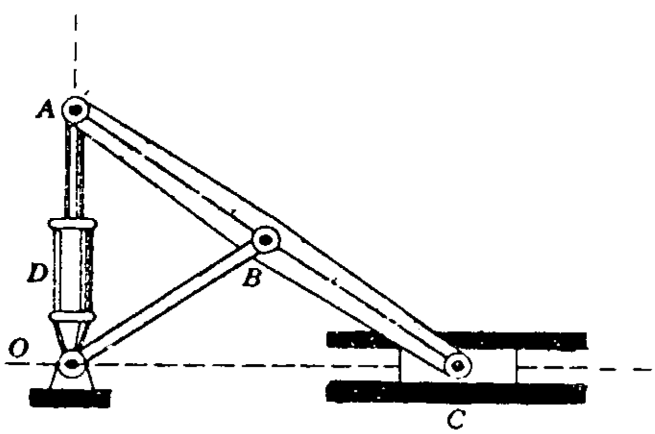
ب ــ عکس قضیه ــ اگر در مثلثی طول یک میانه نصف طول ضلع مقابل باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. دو قضیه یاد شده در بالا در کتابهای هندسه ثابت شده است. از این‌رو به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

۲ ــ کاربرد صنعتی

در زیر کاربرد صنعتی حکم (ب) را شرح می‌دهیم:

دستگاهی که در شکل زیر نموده شده است، یک حرکت مستقیم‌الخط را به یک حرکت مستقیم‌الخط عمود بر آن تبدیل می‌کند. در این شکل نقطه O نمایش یک پایه ثابت است و میله OB در نقطه O به این پایه لولا شده است. طول میله OB نصف

شکل (۱)



طول میله AC است. میله OB در نقطه B که وسط میله AC است به آن میله لولا شده است. کشو C می‌تواند روی خط راست افقی OL حرکت کند. هنگامی که کشو C حرکت می‌کند نقطه A انتهای میله BA مجبور است روی خط راستی که از نقطه A بر خط راست OL عمود است حرکت کند. این خط عمود را OK می‌نامیم. دستگاه را می‌توان طوری نصب کرد که خط OL افقی باشد و خط OK عمود بر صفحه افق باشد.

وقتی کشو C حرکت رفت‌وبرگشت انجام می‌دهد پیستون سیلندر روغنی D روی خط قائم Ok بالا و پایین می‌رود.

نقش سیلندر روغنی آن است که حرکت قائم به صورت آهسته و ملایم انجام می‌گیرد. دستگاه مذکور در بالابرها به‌کار می‌رود.

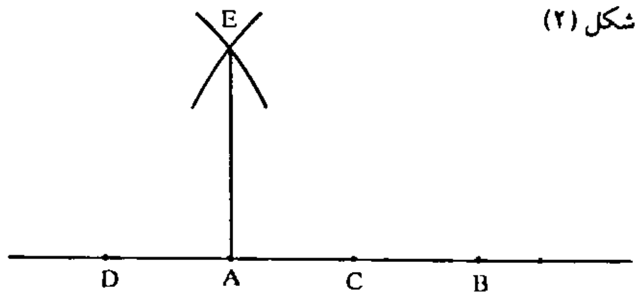
۳ ـ مسئله ابوالوفای بوزجانی

شکل بالا مسئله ابوالوفای بوزجانی را در خاطر احیا می‌کند. ابتدا رسم عمود بر یک خط راست از یکی از نقاط آن را شرح می‌دهیم:

الف ــ مسئله ــ از نقطه A واقع برخط AB عمود بر خط AB رسم کنید.

حل ــ روی خط AB و در دو طرف نقطه A دو طول مساوی AC و AD جدا می‌کنیم (با پرگار) سپس دو کمان به مرکزهای C و D و با شعاعی بزرگتر از AC رسم می‌کنیم. نقطه برخورد دو کمان را E می‌نامیم. از نقطه E به نقطه A وصل می‌کنیم. خط EA بر خط AB عمود است.

شکل (۲)

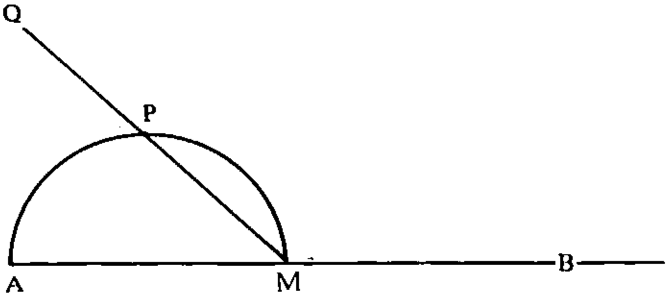


ب ــ مسئله طرح شدهٔ ابوالوفای بوزجانی ــ نقطه A از خط AB بسیار نزدیک به لبه کاغذ است. چگونه از نقطه A بر خط AB عمود رسم کنیم.

روشی که برای رسم عمود در قسمت (الف) از شماره (۳) ذکر کردیم در مسئله اخیر الذکر به‌کار نمی‌آید زیرا بنا به فرض نقطه A به لبه کاغذ بسیار نزدیک است. ابوالوفا حل زیر را عرضه می‌کند.

نقطه M را روی پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم و سپس دایره‌ای به قطر AM رسم می‌کنیم. از نقطه M به نقطه P وسط کمان AB وصل می‌کنیم. پاره‌خط MP را در جهت از M به P به اندازه خود امتداد می‌دهیم، تا نقطه Q به‌دست آید. خط QA بر خط AB عمود است.

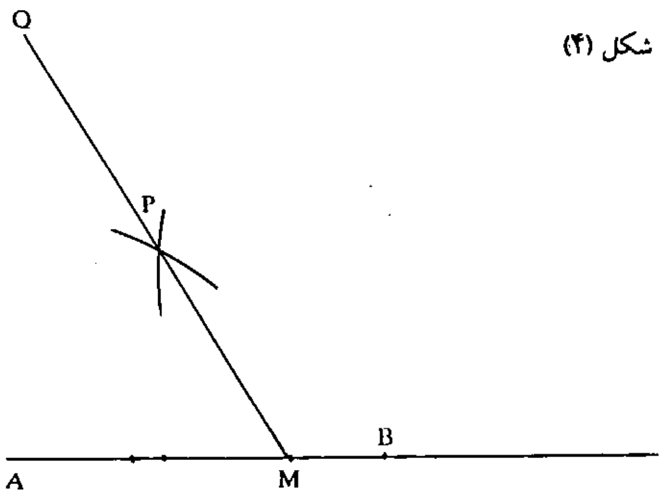
شکل (۳)



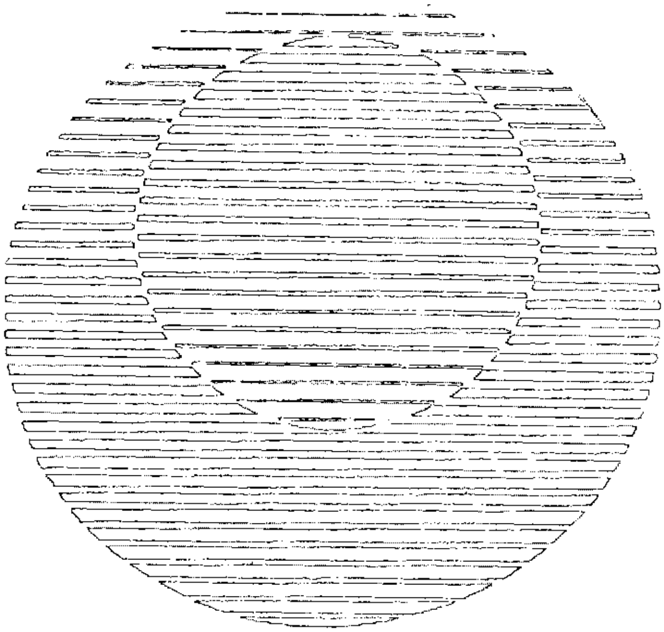
راه‌حل ابوالوفا با اندکی تغییری به‌صورت زیر در می‌آید:

بر پاره‌خط AB نقطه دلخواه M را اختیار می‌کنیم و سپس دو کمان به مرکزهای A و M و با شعاعی بزرگتر از نصف پاره‌خط AM رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این دو کمان را P می‌نامیم. پاره‌خط MP را در جهت از M به P به اندازه خود امتداد می‌دهیم، تا نقطه Q به‌دست آید. خط AQ برخط AB عمود است.

شکل (۴)



شکل (۱) که طرح کلی یک بالابر است، شکل (۴) را که طرز ترسیم خط عمود بر یک خط از یک نقطه آن، به شیوه ابوالوفا است به‌خاطر می‌آورد.



بررسی وضع دو دایره نسبت به هم

● محمدهاشم رستمی

به‌دلیل محدود بودن صفحه‌های کتابهای درسی، امکان شرح و بسط کافی برای همهٔ مفهومهای موجود در این کتابها وجود ندارد ؛ از جملهٔ این مفهومها بررسی وضع دو دایرهٔ نسبت به‌هم است، که تنها در یک صفحه از کتاب هندسهٔ سال دوم دبیرستان رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی نظام جدید آموزشی (صفحهٔ ۵۲) به‌صورت خلاصه آمده است. چون وضع دو دایره نسبت به‌هم، کاربردهای فراوانی در هندسه دارد، لذا به ارائه آن به‌صورت مشروحتری پرداخته‌ایم، برای درک بهتر مطلب :

۱ ــ این مفهوم به‌صورت فعالیت ارائه شده است، تا دانش‌آموزان با انجام این فعالیتها خود به کشف رابطه‌های مربوط به وضع نسبی دو دایره بپردازند.

۲ ــ شعاعهای دو دایره ثابت نگاه داشته شده و اندازهٔ خط‌المرکزین آنها تغییر یافته است.

نکته ــ در اینجا نیز از اثبات برخی مطالب که نیاز به اطلاعات بیشتری دارد خودداری شده است.

فعالیت ۱

۱ ــ پاره‌خط OO' را به طول ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C)، و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر رسم نمایید (دایرهٔ C').

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره را به‌دست آورید و با اندازهٔ خط‌المرکزین آنها مقایسه کنید. کدام بیشتر است؟

در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R+R'=\ldots+\ldots \qquad OO'=d=\ldots \qquad d\ldots R+R'$

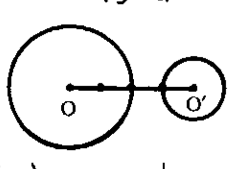
۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع شعاعهایشان بیشتر باشد، دو دایرهٔ برون هم (متخارج)، نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۱ دو دایرهٔ (C) و (C')، برون هم هستند.

در مورد دو دایرهٔ برون هم می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ (R و O) C و C' $(O'$ و $R')$ برون هم (متخارج) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $(d=OO')$ از مجموع شعاعهایشان $(R+R')$ بیشتر باشد.



$d>R+R' \Leftrightarrow$ دو دایره برون هم (متخارج)

مثال ۱ ــ دودایرهٔ (۶ و O) C و C' $(O'$ و $R')$ مفروضند.

اگر $OO'=۱۴$ باشد، حدود R' را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل ــ اگر نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، نخست باید $R'\geq ۰$ باشد، آن‌گاه برای این‌که دو دایره برون هم باشند، لازم و کافی است، $d > R+R'$ باشد.

پس : $۱۴ > ۶+R' \Rightarrow R' < ۸ \;\Rightarrow\; ۰\leq R' < ۸$

مثال ۲ ــ دودایره به شعاعهای $R=a+۳$ و $R'=۲a-۱$ و خط‌المرکزین $OO'=d=a+۱۲$ داده شده‌اند. حدود a را چنان تعیین کنید که این دو دایره برون هم باشند.

حل ــ با در نظر گرفتن نقطه به‌عنوان دایره‌ای به شعاع صفر، نخست باید :

$$\begin{cases} a+۳\geq ۰ \\ ۲a-۱\geq ۰ \\ a+۱۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\geq -۳ \\ a\geq \frac{۱}{۲} \\ a > -۱۲ \end{cases} \Rightarrow a\geq \frac{۱}{۲}$$

از طرفی شـــــرط برون هم بودن دو دایره آن است کـــــه $d > R+R'$ باشد، یعنی :

$$a+۱۲ > a+۳+۲a-۱ \Rightarrow a < ۵$$

بنابراین جواب مسأله $\frac{۱}{۲}\leq a < ۵$ است.

فعالیت ۲

۱ ــ پاره‌خط OO' را به طول ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C) و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر (دایرهٔ C') رسم نمایید.

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره را به‌دست آورید و با اندازهٔ خط‌المرکزین آنها مقایسه کنید.

نتیجهٔ مقایسه چیست؟

در جاهای خالی زیر، عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R+R'=....+....\quad OO'=d=....\quad d....R+R'$

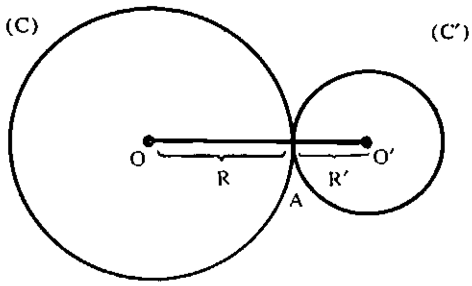
۴ ـ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه مشترک چیست؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان مساوی مجموع شعاعهایشان باشد، دو دایرهٔ مماس برون (مماس خارج) نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۲ دو دایره مماس برون هستند.

در مورد دو دایرهٔ مماس برون به‌طورکلی می‌توان گفت :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ مماس برون (مماس خارج) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) مساوی مجموع شعاعهایشان $(R+R')$، باشد.



$d=R+R' \Leftrightarrow$ دو دایرهٔ مماس برون (مماس خارج)

مثال ۱ ــ اگر دو دایرهٔ $C(O$ و$۵)$ و $C'(O'$ و $۸)$ مماس برون باشند، اندازهٔ خط‌المرکزین آنها چه‌قدر است.

حل ــ شرط آن که دو دایره، مماس برون باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر مجموع شعاعهای دو دایره باشد.

بنابراین داریم :

$$d=OO'=R+R' \Rightarrow OO'=۵+۸=۱۳$$

مثال ۲ ــ مقدار R را چنان بیابید که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $۷)$ مماس برون باشند، در صورتی که $OO'=۱۸$ باشد.

حل ــ با فرض $OO'=d$ داریم :

$$d=R+R' \Rightarrow ۱۸=R+۷ \Rightarrow R=۱۱$$

مثال ۳ ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که دو دایرهٔ به شعاعهای $R=m+۲$ ، $R'=m-۲$ با خط‌المرکزین $OO'=۳m-۱۲$ ، مماس برون باشند.

حل ــ با شرط این که نقطه را دایره‌ای به شعاع صفر در نظر بگیریم، مقدار قابل قبول برای m عبارت است از :

$$\begin{cases} m+۲\geq ۰ \\ m-۲\geq ۰ \\ ۳m-۱۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\geq -۲ \\ m\geq ۲ \\ m > ۴ \end{cases} \Rightarrow m > ۴$$

و شرط این که دو دایره مماس برون باشند آن است که :

$$d = R + R' \Rightarrow ۳m - ۱۲ = m + ۲ + m - ۲ \Rightarrow m = ۱۲$$

پس جواب مسأله $m = ۱۲$ است.

فعالیت ۳

۱ ــ پاره‌خط OO' را به‌طول ۲/۵ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر (دایرهٔ C) و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ مجموع شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟

$R + R' = ... + ...$

قدرمطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه‌قدر است؟

$|R - R'| = ...$

اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره را با مجموع و تفاضل شعاعهای دو دایره مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

جاهای خالی زیر را با عددها و علامتهای مناسب پر کنید.

$R + R' = ... + ... \quad OO' = d = ... \quad \Rightarrow d ... R + R'$

$|R - R'| = ... - ... \quad OO' = d = ... \quad \Rightarrow d ... |R - R'|$

$\Rightarrow |R - R'| ... d ... R + R'$

۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟ ... نقطه.

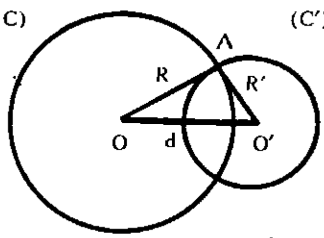
نقطه‌های مشترک این دو دایره را A و B بنامید.

پاره‌خط AB را وتر مشترک دو دایره و خط AB را خط شامل وتر مشترک دو دایره و با مسامحه، وتر مشترک دو دایره می‌نامند.

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان از مجموع شعاعهای دو دایره کمتر و از تفاضل شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشد، دو دایرهٔ متقاطع می‌نامند. در **فعالیت ۳** دو دایرهٔ (C) و (C') متقاطعند.

در مورد دو دایرهٔ متقاطع به‌طورکلی می‌توان گفت :

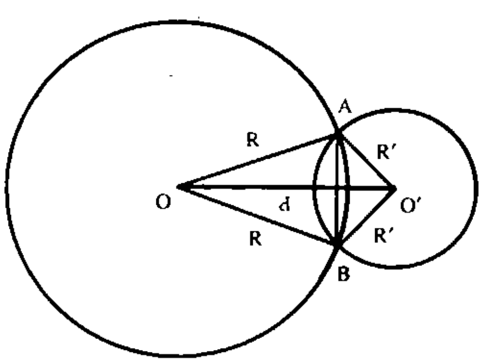
شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) از مجموع دو شعاع $(R + R')$، کمتر و از قدرمطلق تفاضل دو شعاع $(|R - R'|)$ بیشتر باشد.



$|R - R'| < d < R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع

زیرا با برقراری شرط بالا، همواره مثلث OAO' که ضلعهای آن $OA = R$، $O'A = R'$ و $OO' = d$ است، وجود دارد.

نکته: اگر A و B نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ متقاطع $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ باشند، چهار ضلعی $OAO'B$ شبه لوزی است. (چرا؟)، و در نتیجه OO' عمود منصف پاره‌خط AB است : یعنی در دو دایرهٔ متقاطع، خط‌المرکزین، عمود منصف وتر مشترک است.



مثال ۱ ــ اگر R و R' شعاعها و d خط‌المرکزین دو دایره باشد، تعیین کنید در کدام حالت از حالتهای زیر دو دایره متقاطعند.

الف ــ $R = ۴$، $R' = ۷$، $d = ۱۴$

ب ــ $R = ۸$، $R' = ۴$، $d = ۵$

ب ـ $R=9\ ,R'=3\ ,d=12$

ت ـ $R=6\ ,R'=5\ ,d=12$

حل ــ در حالت الف، دو دایره برون هم هستند؛ زیرا $14>4+7$ یعنی $d>R+R'$ است. در حالت ب، دو دایره متقاطعند؛ زیرا $8-4<5<8+4$ یعنی $|R-R'|<d<R+R'$ است. در حالت پ، دو دایره مماس برون می‌باشند چون $3+9=12$ یعنی $d=R+R'$ است. در حالت ت، دو دایره برون هم هستند، زیرا $5+6<12$ یعنی $d>R+R'$ است.

مثال ۲ ــ اگر $d=12$ خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O$ و $7)$ و $C'(O'$ و $R')$ باشد، حدود R' را چنان بیابید که این دو دایره متقاطع باشند.

حل ــ شرط متقاطع بودن دو دایره را نوشته به جای d و R مقدارهای داده شده را قرار می‌دهیم.

$$|R-R'|<d<R+R' \Rightarrow |7-R'|<d<7+R'$$
$$\Rightarrow 8<R'<22$$

فعالیت ۴

۱ ـ پاره‌خط OO' را به طول ۱ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') را رسم کنید.

۳ ــ قدرمطلق تفاضل شعاعهای این دو دایره چه قدر است؟

آیا اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره با قدرمطلق تفاضل شعاعهای آنها برابر است؟

جاهای خالی را با عددها و علامت مناسب پر کنید.

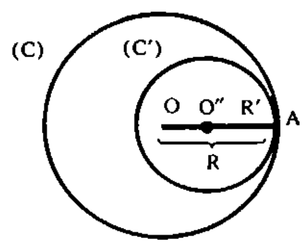
$|R-R'|=...\quad OO'=d=...\quad d...|R-R'|$

۴ ــ این دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟ ... نقطه. نام این نقطه چیست؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره باشد، دو دایره مماس درون (مماس داخل) نامیده می‌شوند. در فعالیت ۴ دو دایرهٔ (C) و (C') مماس درون هستند.

در مورد دو دایرهٔ مماس در حالت کلی می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ مماس درون (مماس داخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهایشان باشد. یعنی:



دو دایره مماس درون (مماس داخل) $\Leftrightarrow d=|R-R'|$

نکته: با فرض $R>R'$ می‌توان نوشت: $d=R-R'$.

مثال ۱ ــ مقدار R را چنان بیابید که دایرهٔ $C(O$ و $R)$ با دایرهٔ $C'(O'$ و $9)$ مماس درون باشد در صورتی که $OO'=15$ خط‌المرکزین آنها باشد.

حل ــ داریم:

$$d=|R-R'| \Rightarrow 15=|R-9| \Rightarrow R=24$$

مثال ۲ ــ اگر $d=8$ خط‌المرکزین و $R=a+3$ و $R'=2a-5$ شعاعهای دو دایره باشند، مقدار a را طوری تعیین کنید که این دو دایره مماس درون باشند.

حل ــ اگر نقطه را دایرهٔ به شعاع صفر در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases}2a-5\ge 0\\ a+3\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\ge \frac{5}{2}\\ a\ge -3\end{cases} \Rightarrow a\ge \frac{5}{2}$$

$$d=|R-R'| \Rightarrow 8=|a-3-2a+5| \Rightarrow$$
$$8=|-a+2| \Rightarrow a=10\ ,\ a=-6<0$$

جواب $a=-6$ قابل قبول نیست.

فعالیت ۵

۱ ــ پاره‌خط OO' را به طول ۰/۵ سانتی‌متر رسم کنید.

۲ ــ به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ تفاضل شعاعهای این دو دایره را تعیین کنید.

آیا اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره از تفاضل شعاعهای دو دایره کمتر است؟

در جاهای خالی عددها و علامت مناسب بگذارید.

$R-R'=\dots \quad OO'=d=\dots \quad d\dots R-R'$

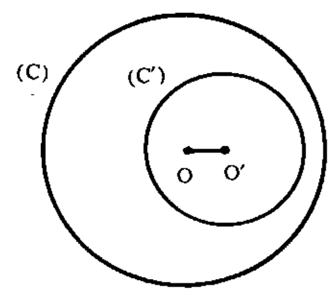
۴ ــ آیا این دو دایره، نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان کمتر از قدرمطلق تفاضل شعاعهایشان باشد، دو دایرهٔ متداخل نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۵ دو دایره، متداخل هستند.

در مورد دو دایرهٔ متداخل در حالت کلی می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ یکی درون دیگری (متداخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها (d) از تفاضل شعاعهای دو دایره $(R-R')$ کمتر باشد.



یعنی: $d<R-R' \Leftrightarrow$ دو دایرهٔ درون هم (متداخل)

مثال ۱ ــ پاره‌خط OO' به طول ۶ سانتی‌متر خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی از آنها $R=8$ سانتی‌متر است. حدود R' شعاع دیگری را چنان تعیین کنید، که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشند.

حل ــ داریم:

$$d<|R-R'| \Rightarrow 6<|8-R'|$$

$$\Rightarrow R'<2 \text{ و } 6<R'-8 \Rightarrow R'>14$$

مثال ۲ ــ دایره‌های $C(O$ و $2m-1)$ و $C'(O'$ و $2)$ با خط‌المرکزین $OO'=3$ داده شده‌اند. حدود m را چنان بیابید که این دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) باشد.

حل ــ داریم:

$$d<|R-R'| \Rightarrow 3<|2m-1-2| \Rightarrow 3<|2m-3|$$

$$\Rightarrow m>3 \text{ و } m<0$$

$m<0$ غیرقابل قبول است زیرا شرط حقیقی بودن R آن است، که

$$2m-1\geq 0 \Rightarrow \boxed{m\geq \frac{1}{2}}$$

فعالیت ۶

۱ ــ یک نقطه مانند O در نظر بگیرید.

۲ ــ به مرکز نقطهٔ O و به شعاع ۲ سانتی‌متر یک دایره (دایرهٔ C) و به مرکز O' و به شعاع ۱ سانتی‌متر دایرهٔ دیگری (دایرهٔ C') رسم کنید.

۳ ــ اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره چه‌قدر است؟

۴ ــ این دو دایره چند نقطهٔ مشترک دارند؟

تعریف ــ دو دایره که اندازهٔ خط‌المرکزینشان برابر صفر باشد، یعنی مرکزهایشان برهم منطبق باشد، دو دایرهٔ هم مرکز نامیده می‌شوند.

در فعالیت ۶ دو دایره هم‌مرکز هستند.

در مورد دو دایرهٔ هم مرکز می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره هم مرکز باشند آن است که اندازهٔ خط‌المرکزینشان برابر صفر باشد.

تمرین

دو دایرهٔ $C(O$ و $R)$ و $C'(O'$ و $R')$ داده شده‌اند. تعیین کنید که در چه حالتهایی دو دایره:

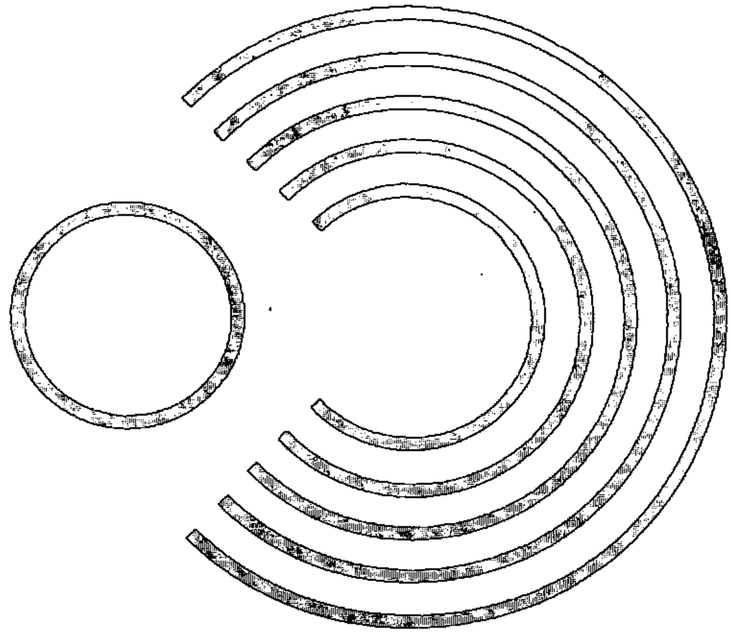
الف ــ غیرمتقاطع‌اند.

ب ــ مماس‌اند.

پ ــ متقاطع‌اند.

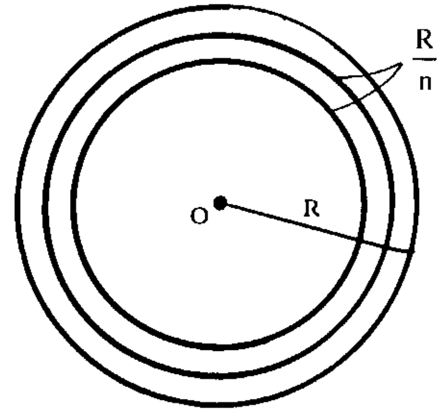
محاسبهٔ مساحت دایره

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی



برای محاسبهٔ مساحت دایره‌ای به شعاع R، ابتدا آن را مطابق شکل به نوارهای باریکی به عرض $\frac{R}{n}$ برش می‌دهیم تا حلقه‌های دایره ای شکل حاصل شود.

بدیهی است که اگر n را عددی بسیار بزرگ در نظر بگیریم، نوارهای بریده شده **مستطیلهایی** به عرض $\frac{R}{n}$ هستند. از حد مجموع مساحت برشهای حاصله به عرض $\frac{R}{n}$، وقتی n به سمت عددی طبیعی بی‌نهایت بزرگ میل کند؛ مساحت دایره به دست می‌آید:



$$S_n = \underbrace{2\pi R}_{\text{طول مستطیل}}\left(\underbrace{\frac{R}{n}}_{\text{عرض مستطیل}}\right) + 2\pi\left(R-\frac{R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) + 2\pi\left(R-\frac{2R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) + 2\pi\left(R-\frac{3R}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right) + \dots + 2\pi\left(R-\frac{nR}{n}\right)\left(\frac{R}{n}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left[\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{2}{n}\right) + \left(1-\frac{3}{n}\right) + \dots + \left(1-\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left[\frac{1}{n} + n - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{1+2+3+\dots+n}{n}\right)$$

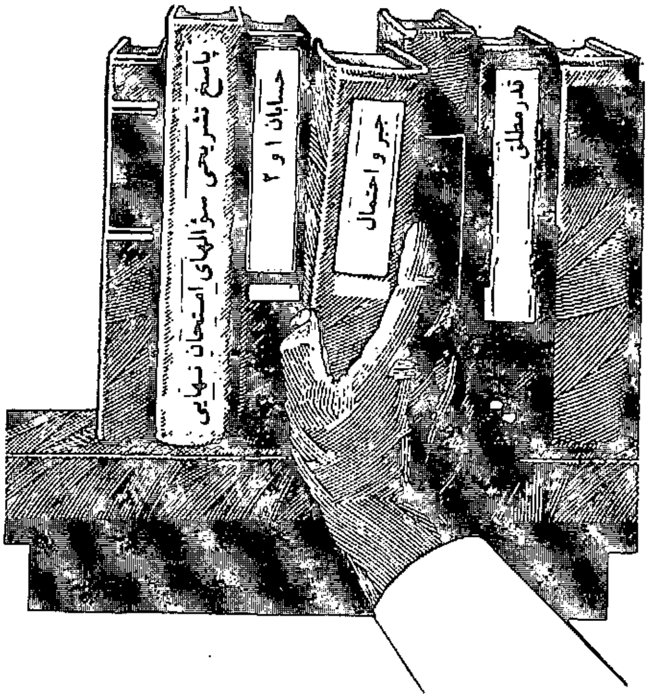
$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{n(n+1)}{2n}\right)$$

$$= \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + n - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

با فرض این که S حد مجموع مساحت برشهای حاصله باشد:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi R^2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi R^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)$$

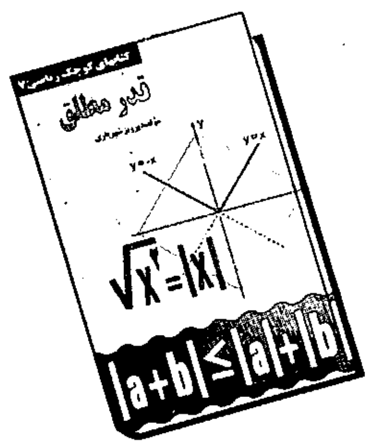
$$= 2\pi R^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{S = \pi R^2 \text{(مساحت دایره)}}$$



معرفی کتاب

قدرمطلق

تألیف: پرویز شهریاری
ناشر: انتشارات مدرسه
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵



این کتاب هفتمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی می‌باشد که در آن به موضوع و مفهوم قدرمطلق در مجموعهٔ عددهای حقیقی پرداخته شده است.

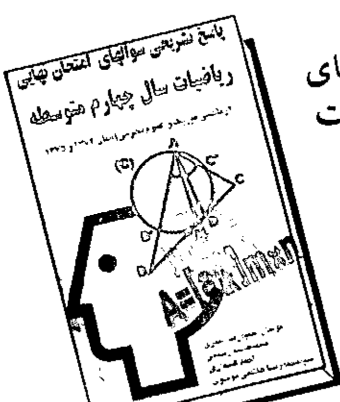
مؤلف محترم، در این کتاب سعی بر این داشته‌اند تا دشواریهای ناشی از عدم تمرکز این مفهوم در کتابهای درسی نظام جدید را رفع نموده و دانش‌آموزان و دبیران محترم همهٔ مطالب مربوط به مفهوم قدرمطلق را در یک کتاب مورد مطالعه و استفاده قرار دهند.

این کتاب شامل پنج فصل به قرار زیر می‌باشد:

فصل اوّل، تعریف‌ها و قراردادها. فصل دوم، معادله‌ها و نامعادله‌های شامل قدرمطلق. فصل سوم، نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق. فصل چهارم، نمایش تحلیلی شکلهای هندسی. فصل پنجم، یادداشتی دربارهٔ دامنه و بُرد.

همچنین در آخر کتاب همهٔ مسائل و تمرینهای مطرح شده در متن کتاب به صورت تشریحی حل و راهنمایی شده‌اند. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

پاسخ تشریحی سؤالهای امتحان نهایی ریاضیات سال چهارم متوسطه (ریاضی‌فیزیک و علوم تجربی) سال ۱۳۷۴ و ۱۳۷۵



تألیف: حمیدرضا امیری، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری و سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
ناشر: انتشارات مدرسه
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵

از آنجایی که همواره دانش‌آموزان سال آخر دورهٔ متوسطه با مسأله‌ای به نام امتحان نهایی مواجه بوده و همواره این عزیزان

در پی آشنایی بیشتر با نحوهٔ سؤالهای امتحان نهایی می‌باشند، گروه مؤلفین درصدد در دسترس قراردادن یک مجموعهٔ کامل از این امتحانها برآمده و به این منظور چند دوره از امتحانهای برگزار شده در سالهای ۱۳۷۴ و ۱۳۷۵ را با حل تشریحی کامل در اختیار علاقه‌مندان قرار داده است.

در این کتاب سعی شده است تا مسائل طرح شده به صورت کاملاً خودآموز و با توضیح کافی حل شده و حتی در بسیاری از موارد از چندین روش برای حل یک مسأله استفاده شده است.

از ویژگیهای این کتاب آن است که مؤلفین در حل تشریحی مسائل سعی بر این داشته‌اند که نکات لازم در حل مسائل گنجانده شود و در واقع نوعی آموزش در این میان موردنظر بوده است.

مطالعه این کتاب را به تمامی دانش‌آموزان سالهای سوم و چهارم متوسطه و دبیران محترم توصیه می‌کنیم.

برای اولین بار در ریاضیات دبیرستانی، شیوهٔ آموزش مفاهیم کتاب درسی از طریق طرح و حل تشریحی تستهای ۴گزینه‌ای در این کتابها به کار رفته است.

اصولاً آموزش از طریق حل مسأله جزء شیوه‌های شناخته شده در آموزش ریاضیات می‌باشد و در این راستا مسائل ۴ گزینه‌ای با توجه به تنوع در گزینه‌ها شاید به‌گونه‌ای بهتر و مفیدتر بتوانند، جوابگوی این شیوه باشند.

در این کتابها همهٔ مفاهیم، تعاریف، قضیه‌ها و حتی مثالها و تمرینهای کتاب درسی به صورت تستهای ۴گزینه مطرح و در حل تشریحی تستها این مفاهیم کاملاً توضیح داده شده و حتی در مواردی نکات پس از بیان، اثبات نیز شده‌اند.

در حل تشریحی تستها فقط به تشریح گزینهٔ موردنظر اکتفا نشده و حتی‌الامکان هر ۴ گزینه تشریح شده‌اند تا همهٔ نکات لازم بررسی شده باشند.

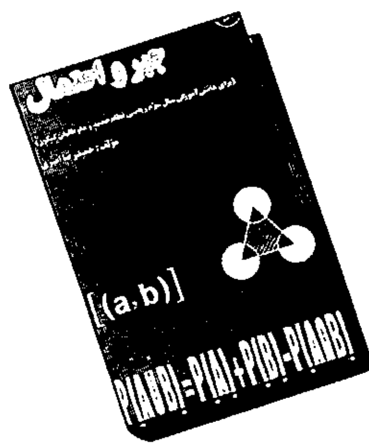
فصلهای این دو کتاب دقیقاً منطبق با فصلهای کتاب درسی جبر و احتمال و حسابان ۱ و ۲ است تا خواننده مبحث به مبحث که پیش می‌رود با برنامه درسی فاصله‌ای نداشته باشد.

در ابتدای هر فصل خلاصه‌ای از آنچه دانش‌آموز برای مطالعه آن فصل نیاز دارد به صورت فهرست‌وار، آورده شده است و در انتهای هر فصل نیز یک خودآزمایی قرار داده شده که کلید حل خودآزمایی‌ها نیز در انتهای کتاب آمده است.

مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان وداوطلبان کنکور سراسری و پیش دانشگاهی توصیه می‌کنیم.

جبر و احتمال

تألیف: حمیدرضا امیری
ناشر: محراب قلم
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵



حسابان ۱ و ۲

تألیف: احمد قندهاری
ناشر: محراب قلم
چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵



جواب نامه‌ها

آقای ابراهیم کریمی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سقز)

از این که حل تعدادی از مسایل برهان را ارسال کرده بودید، از شما متشکریم اما از این پس فقط حل مسایل مسابقه‌ای برهان را درزمان مقرر شده ارسال کنید.

آقای کیوان شهاب لواسانی؛ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی (تهران)

ضمن تشکر از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل به‌عرض می‌رسانیم که هر مسأله حل شده جالب که برای دانش‌آموزان مناسب و مفید تشخیص داده شود،را به‌اسم ارسال کننده به‌چاپ خواهیم رساند. گرچه ممکن است برخی از مسایل ارسال شده از کتابهای درسی و یا کتابهای کمک آموزشی انتخاب شده باشد. مسایل خوبی که در صورت و یا حل آن اشکالی جزیی وجود داشته باشد در حد امکان اصلاح و به‌چاپ خواهد رسید. مجلهٔ ریاضی برهان همیشه از مسایل و مقالات مفید و مناسب برای دانش‌آموزان استقبال می‌کند.

آقای حمیدرضا داوریان؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (شوشتر)

از شما برای ارسال حل مسایلی همراه با حل متشکریم. از آنان در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

خانم سهیلا جعفری (داراب)

از شما برای ارسال مطالبی پیرامون «قاعده‌ای برای جذر اعداد» و «معادلهٔ درجه دوم» متشکریم. البته در شماره‌های قبل برهان می‌توانید مطالب کاملی دربارهٔ معادلهٔ درجه دوم پیدا کنید. مطالب دیگر شما نیز در صورت لزوم و در جای مناسب چاپ خواهد شد.

خانم سکینه سیدبنکدار، دانش‌آموز رشته تجربی (خوی)

از شما برای ارسال مطالبی پیرامون «محاسبهٔ $\sin(\alpha+\beta)$» و «برش طلایی» و یک پارادوکس و گنگ بودن $\sqrt{۲}$، متشکریم. درصورت امکان در جای مناسب از آنان استفاده خواهد شد.

روجا فرهادی، دانش‌آموز رشته تجربی (قائمشهر)

از شما برای ارسال مسایلی حل شده متشکریم. در صورت امکان از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا عاقلی؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سیاهکل)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل بادرستانی، دانش‌آموز رشته ریاضی (اراک)

از شما برای ارسال یک مسأله همراه با حل متشکریم. در صورت امکان از آن استفاده خواهیم کرد. متذکر می‌شویم که اگر مسایل ارسالی در سطح دانش‌آموزان باشد و از نکات خوبی برخوردار باشد حتماً به‌چاپ خواهد رسید.

آقای بهزاد کاظمی (اهواز)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. از آنان در شماره‌های آینده استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدرضا شهریاری، دانش‌آموز رشته ریاضی (تهران)

از شما برای ارسال مطلبی در رابطه با «حل دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهولی» متشکریم. متذکر می‌شویم که الگوریتمها و روشهای پیشرفته‌ای مانند روش گاوس، کرامر و...برای حل دستگاههای n معادله و m مجهولی وجود دارد که در آینده با آنان آشنا خواهید شد.

آقای بهزاد بهنیا؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

از شما برای ارسال مسایلی حل شده متشکریم. در شماره‌های آینده از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای حمیدرضا دیرند (یزد)

از شما برای ارسال حل مسایل برهان متشکریم. متذکر می‌شویم که ارسال حل مسایل برهان لزومی ندارد و شما می‌توانید حل مسایل مسابقه‌ای را در زمان معین شده ارسال کنید.

آقای مهدی نامور: دانش‌آموز رشته ریاضی (بجنورد)

از شما برای ارسال مسایلی همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آنان استفاده خواهیم کرد.

آقای حسن جعفری؛ دانش‌آموز رشته ریاضی (سلماس)

از شما برای ارسال یک مسأله همراه با حل متشکریم. در صورت لزوم از آن استفاده خواهیم کرد.

مسائل مسابقه‌ای

● محمدصادق عسگری

۱ـ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x که $x \neq 0,1$ داریم،

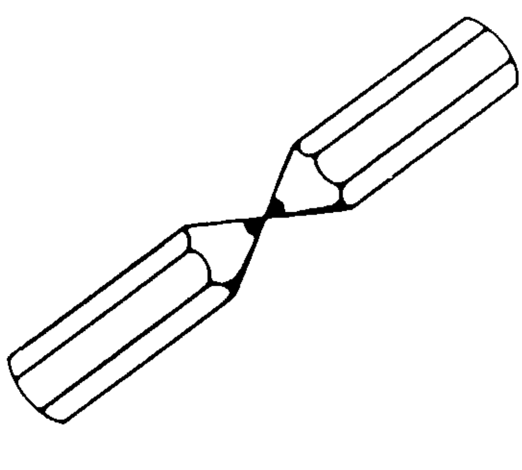
$$1 < \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} < 2$$

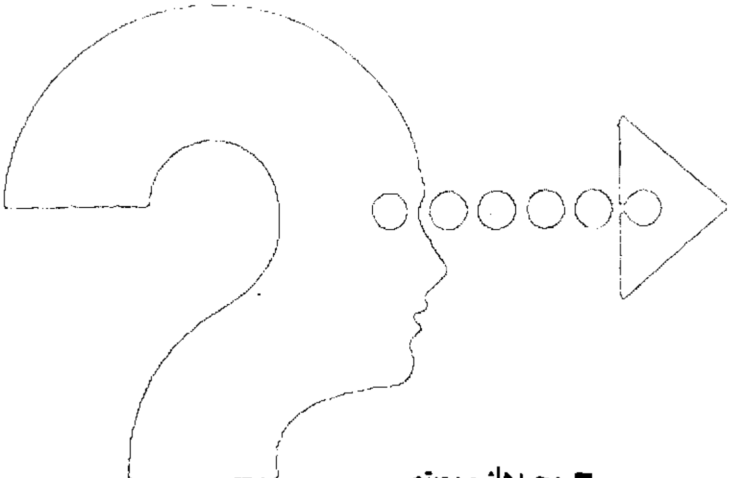
۲ـ فرض کنیم $p > 5$ یک عدد اول باشد، قرار می‌دهیم

$$S = \{p - n^2 : n \in Z^+, n^2 < p\}$$

(برای‌مثال اگر $p = 31$، دراین‌صورت $S = \{6, 15, 22, 27, 30\}$)
ثابت‌کنید S شامل دوعضو b,a است‌به‌طوری‌که $1 < a < b$ و $a \mid b$.

تذکر: حل مسائل مسابقه‌ایِ برهان ۱۸ که باید در این شماره چاپ می‌شد به شمارهٔ بعد موکول گردید.





مسائل برای حل

■ محمدهاشم رستمی
■ احمد قندهاری
■ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
■ حمیدرضا امیری
■ حسین ابراهیم‌زادهٔ قلزم

سؤالهای امتحانی ریاضی (۱) پایان ترم

۱ ــ مجموعهٔ $M=\{1,3,5,7,9,12\}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌های زیر از M را مشخص کنید.

الف: زیرمجموعه‌ای که اعضای آن اعداد فرد باشد.

ب: زیرمجموعه‌ای که اعضای آن از ۹ بزرگتر باشد.

ج: زیرمجموعه‌ای از آن که مضربی از ۳ باشد.

۲ ــ طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید.

الف: $A-\varnothing=?$

ب: $A-A=?$

۳ ــ اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

الف: $0/00005$

ب: $0/0007942$

۴ ــ با استفاده از ضرب یک‌جمله‌ایها، مقدار صحیح r را در هر یک از تساویهای زیر تعیین کنید.

الف: $(14)^{2r+5}=14^{25}$

ب: $x^{10}.x^{18}=x^{32+r}$

۵ ــ عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف: $(3x^2y^2)(-7xy)+(xy)(-5x^2y^2)$

ب: $(x^2-3x+5)+(2x^2+5x-4)-(3x^2-2x-1)$

۶ ــ عدد اعشاری زیر را به صورت کسر متعارفی بنویسید.

$0/6\overline{54}$

۷ ــ در هر یک از عبارتهای زیر به جای ... عبارتی قرار دهید که هر عبارت مربع کامل شود.

الف: $9x^2-4ax+\ldots$

ب: $4x^2+4ax+\cdots$

۸ ــ تقسیم زیر را انجام دهید.

$(x^4+3x^3-7x^2+2x+1):(x-1)$

۹ ــ اگر $x+y=p$ و $xy=q$ ، مطلوب است تعیین مقدار: x^3+y^3

۱۰ ــ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}$$

۱۱ ــ حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف: $(a^n-b^3)(a^n+b^3)$

ب: $(x^2y^3-2)^3$

۱۲ ــ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{6561}\right)$$

۱۳ ــ عبارتهای زیر را به عاملهای اول تجزیه کنید.

الف : $x^2 - 8x + 12$

ب : $x^4y^2 - x^2y^4$

۱۴ ــ در صورتی که داشته باشیم :
$$\begin{cases} A = 3x - 6y + 9z \\ B = -x + y + 2z \\ C = 2x + 3y - z \end{cases}$$

حاصل عبارت $\frac{A}{3} + 2B - C$ را به دست آورید.

۱۵ ــ اگر $a > 1$ و a عدد گویا باشد، ثابت کنید :
$$1 < \frac{2a}{a+1} < a$$

سؤالهای امتحانی ریاضی (۲) پایان ترم

۱ ــ نقاط $A(-1,2)$ و $B(3,4)$ مفروضند، مختصات نقطهٔ C واقع بر محور طولها را طوری بیابید که فاصلهٔ آن از A و B برابر باشد.

۲ ــ نقاط $A\left|\begin{matrix} a+b \\ 3a-mb \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ma-4b \\ b-2a \end{matrix}\right.$ به ازای چه مقادیری از m نمی‌توانند نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right.$ قرینهٔ یکدیگر باشند.

۳ ــ نقاط $M\left|\begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix}\right.$ و $N\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}\right.$ وسط ضلعهای یک مثلث قرار دارند، مختصات رأسهای مثلث را حساب کرده و سپس مجموع فاصله‌های مرکز ثقل مثلث (محل تلاقی میانه ها) را از رأسهای مثلث حساب کنید.

۴ ــ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 3x - 2 = 0$ مفروض است.
الف) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۵ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد. ب) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش عکس قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد. ج) معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد.

۵ ــ عبارت $p(x) = -x^2 - (m+1)x + m$ مفروض است.
الف) حدود m را چنان تعیین کنید که $p(x)$ به ازای جمیع مقادیر x منفی شود. ب) m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ $p(x) = 0$ دارای ریشهٔ حقیقی باشد.

۶ ــ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم : $x^2 + x + 1 = 0$ باشند. حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.
$$A = \frac{x_1}{x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \frac{x_2}{x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$
$$B = x_1^{3n+2} + x_2^{3n+2} + \frac{1}{x_1^{3n+2}} + \frac{1}{x_2^{3n+2}}$$

۷ ــ عبارت زیر به ازای چه مقادیری از x عدد حقیقی است :
$$p(x) = \sqrt[74]{\frac{x^2-4}{x(x^2-1)}} + \sqrt[76]{\frac{x^2+1}{-x^3}}$$

۸ ــ در سهمی $y = 2x^2 + p^{75}x + p^{76}$ مقدار p را چنان تعیین کنید که خط $x = \frac{1}{2^{76}}$ محور تقارن آن باشد.

۹ ــ مخرج کسر زیر را گویا کنید :
$$\frac{1}{3\sqrt{8} + 2\sqrt[4]{4} + 2\sqrt[12]{64} + \sqrt[3]{2} - 11\sqrt{2}}$$

۱۰ ــ نمودار هر یک از معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $(x^2 - y^2)(x + y - 1) = 0$

ب) $x^2y^2 + x^3y = x^2y$

۱۱ ــ درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $(\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

ب)
$$\frac{4\tan 135° + 2\sin 330° + \cos 240° + 5\cot 225°}{20\sin 210° + \cos 450° - \cot 135° + 10\tan 225°} = -\frac{1}{2}$$

۱۲ ــ از برابری زیر مقدار $\cos x$ را حساب کنید. $(x \neq k\pi)$
$$\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^{2n-1} + 3\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

۱۳ ــ بین دو رابطهٔ زیر پارامتر t را حذف کنید (معادلهٔ مستقل از t را بیابید) و سپس نمودار معادله را رسم کنید.
$$x = 2\sin t - 1 \quad , \quad y = 4\cos^2 t + 1$$

۱۴ ــ سه عدد متوالی چنان بیابید که حاصلضرب آنان ۵ برابر مجموعشان باشد.

۱۵ ــ ثابت کنید اگر x در ناحیهٔ اول یا چهارم باشد، نامساوی زیر برقرار است :
$$\text{tg}x + \cot\text{g}x \geq 2$$

سؤالهای امتحانی ریاضی (۳) پایان ترم

۱ ــ نقاط $A(2\beta\ ,\ \beta)$ و $B(\beta+3\ ,\ \beta-4)$ دو رأس مثلث ABC باشد و معادله میانه نظیر رأس C خط $y=5$ مختصات وسط AB را بدست آورید.

۲ ــ نقاط $A(2,1)$ و $B(-2,-1)$ و $C(-1,-1)$ در صفحه مختصات مفروضند نقطه D رأس چهارم متوازی‌الاضلاع ABCD را بقسمی تعیین کنید که AB وAD دو ضلع آن باشند ثانیاً اگر محورهای مختصات را به نقطهٔ R محل تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع منتقل کنیم مختصات B را در دستگاه جدید تعیین کنید.

۳ ــ معادله زیر را حل کنید..

$$\frac{2y}{x+y}-\frac{(x+y)}{(x-y)}+\frac{2x}{x^2-y^2}=3$$

۴ ــ عبارت زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{3}(\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3})$

ب) $\sqrt{75}+\sqrt{48}+2\sqrt{8}+2\sqrt{32}$

ج) $\sqrt{4}+\sqrt{6}\div\sqrt{3}$

۵ ــ معادلهٔ $(a-3)^2=(a-3)+4$ را حل کنید.

۶ ــ کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$$

۷ ــ تابع با ضابطهٔ $y=2x^2-3$ روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است. نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل دهید و آن را خلاصه نمائید.

۸ ــ منحنی نمایش $y=4x^2-2$ را رسم نمائید.

۹ ــ مطلوب است رسم نمودار $y=[3x+1]$ در فاصله $[-1,2]$.

۱۰ ــ تابع‌های f و g با ضابطهٔ $f(x)=4x-1$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ در $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند. اولاً با استفاده از نمودار ثابت کنید که تابع f یک تابع یک به یک است. ثانیاً مقدار عددی $g(f(2))$ را حساب کنید.

۱۱ ــ لگاریتم زیر را محاسبه کنید.

$$2\log_2^{\sqrt{64}}-4\log_3^{81}+\log_5^{25}$$

۱۲ ــ اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد $\log 12$ را حساب کنید.

۱۳ ــ اگر جمله اول یک تصاعد عددی m و جمله پنجم آن ۳ برابر جمله سوم باشد قدر نسبت آن را برحسب m بدست آورید.

۱۴ ــ اگر جمله‌های دوم و هشتم یک تصاعد هندسی برابر با ۶ و $\frac{1}{2}$ باشند جمله چهاردهم این تصاعد را حساب کنید.

سؤالهای امتحانی ریاضی (۴) پایان ترم

۱ ــ با توجه به اعداد روبرو $\{7,11,7,8,9,8,12,11,8\}$

الف) میانگین ــ میانه ــ مُد را مشخص کنید.

ب) جدول فراوانی و انحراف معیار را مشخص کنید.

۲ ــ حدود m را به طریقی تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(m+1)x^2-8x+(m+1)<0$$

۳ ــ نامعادله زیر را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$\frac{(5x^2+4x+1)}{(5-x)(-x-x^2+6)}<0$$

۴ ــ اگر $\tan(\alpha+\beta)=\frac{-1}{2}$ و $\tan\alpha=3$ باشد، $\tan\beta$ را محاسبه کنید.

۵ ــ اگر $\vec{OA}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ و $\vec{OB}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ و $\vec{OC}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$ باشند مطلوبست تعیین $\vec{OX}$ با شرط $\vec{AX}=\vec{XB}+2\vec{AC}$

۶ ــ بردارهای $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}$ و $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$ مفروضند،

الف) طول بردار $\vec{u}+\vec{v}$ را محاسبه کنید.

ب) ضرب درونی $\vec{u}.\vec{v}$ را محاسبه کنید.

۷ ــ به ازای چه مقادیری از m دستگاه زیر جواب ندارد.

$$\begin{cases}mx-y=6\\-4x+my=2\end{cases}$$

۸ ــ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ و $f(x)=x^2-x$ باشد، مطلوبست $f(A)$.

۹ ــ اگر $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$ باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$$

۱۰ ــ الف) چند عدد طبیعی چهار رقمی وجود دارد؟

ب) چند عدد چهار رقمی طبیعی با ارقام مختلف وجود دارد؟

ج) چند عدد چهار رقمی که همهٔ ارقامش فرد باشد وجود دارد؟

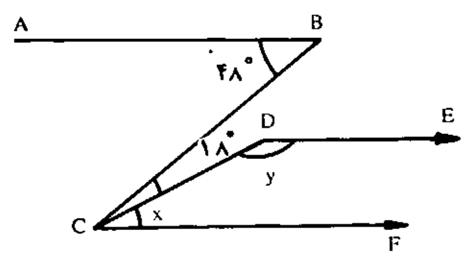
۱۱ ــ در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه:

الف) هر دو مهره سیاه باشد.

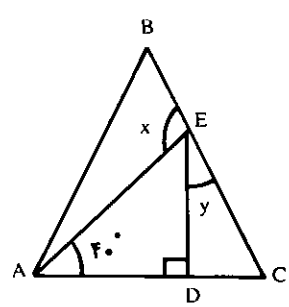
ب) یک مهره سیاه و یک مهره سفید باشد.

مسأله‌های هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی

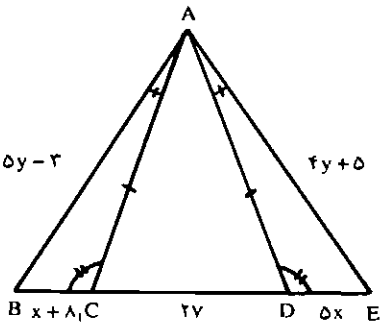
۱ ــ در شکل زیر، پیکانها خطهای موازی را مشخص می‌کنند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲ ــ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اندازهٔ x و y را تعیین کنید.

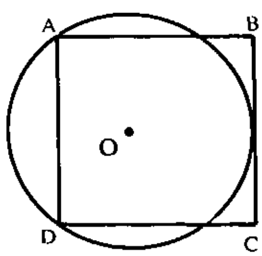


۳ ــ در دو مثلث متساوی ABC و ADE، ضلعها و زاویه‌های متناظر مشخص شده‌اند. اندازهٔ x و y و محیط مثلث ABE را تعیین کنید.



۴ ــ در مثلث ABC، ضلع $a = x - 1$، ارتفاع $h_a = 2x - 6$ و مساحت مثلث $S = x^2 - 13$ است. الف ــ اندازهٔ ضلع a را به دست آورید. ب ــ اگر ضلع $b = 2\sqrt{2}$ باشد، اندازهٔ ضلع c و دو ارتفاع دیگر را تعیین کنید.

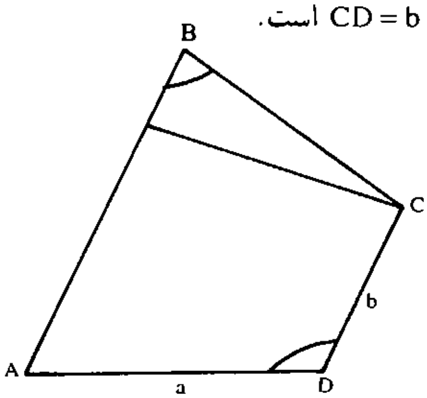
۵ ــ اندازهٔ ضلع مربع ABCD برابر ۸cm است. دایره‌ای که از رأسهای A و D گذشته بر ضلع BC مماس است.



اندازهٔ شعاع این دایره چه قدر است؟

«فرستنده آتوسا علی‌اکبری از تهران»

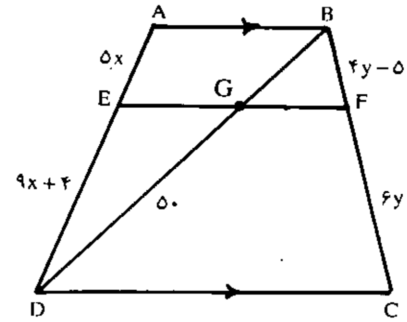
۶ ــ در ذوزنقه ABCD، $\hat{D} = 2\hat{B}$ و ساق $AD = a$ و قاعدهٔ $CD = b$ است.



اندازهٔ AB را برحسب a و b تعیین کنید.

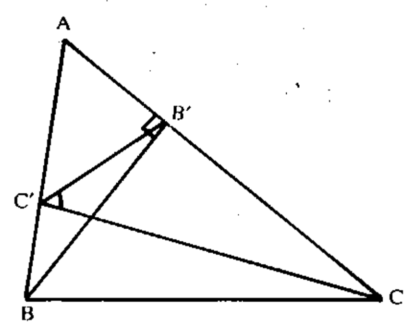
«فرستنده از نیشابور دانش‌آموز سروری»

۷ ــ با توجه به مقدارهای داده شده در ذوزنقه ABCD ، اندازهٔ x و y و ساقهای ذوزنقه را تعیین کنید.



۸ ــ در مثلث ABC ارتفاعهای ′BB و ′CC را رسم کرده‌ایم:

الف ــ ثابت کنید دو مثلث ′ACC و ′ABB متشابه‌اند و رابطهٔ $AC'.AB = AB'.AC$ برقرار است.

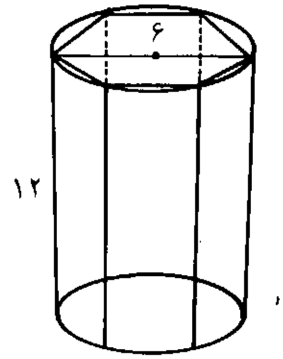


ب ــ ثابت کنید مثلث ′AB′C با مثلث ABC متشابه است.

پ ــ مثلثهای دیگری را که از رسم سه ارتفاع پدید می‌آیند و با مثلث ABC متشابه‌اند، مشخص کنید.

۹ ــ حجم مکعب مستطیلی به ابعاد a و b و c برابر ۶۴۸ سانتی‌متر مکعب و ابعاد آن در رابطهٔ $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$ صدق می‌کنند. اندازهٔ قطر این مکعب مستطیل و سطح کل آن را تعیین کنید.

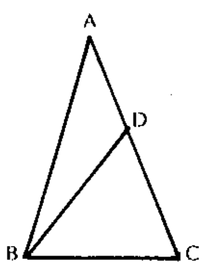
۱۰ ــ در استوانهٔ دواری به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر و شعاع قاعدهٔ ۸ سانتی‌متر منشور شش پهلوی منتظمی محاط کرده‌ایم. اندازهٔ حجم این منشور و نسبت سطح جانبی منشور به سطح جانبی استوانه را تعیین کنید.



مسأله‌های هندسهٔ ۲ ، نظام جدید آموزشی

۱ ــ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که ذوزنقه‌ای محاطی باشد، آن است که متساوی الساقین باشد.

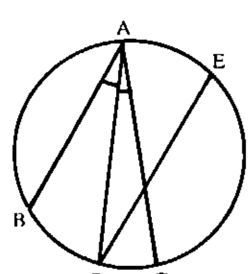
۲ ــ در مثلث متساوی الساقین $ABC(AB = AC)$، نقطهٔ B را به نقطهٔ D که روی ساق AC (بین دو نقطه A و C) است وصل می‌کنیم. ثابت کنید $BD > DC$ است.



۳ ــ حدود m را به قسمی بیابید که $۳ - ۲m$ و $m - ۴$ و ۳ ضلعهای یک مثلث باشند.

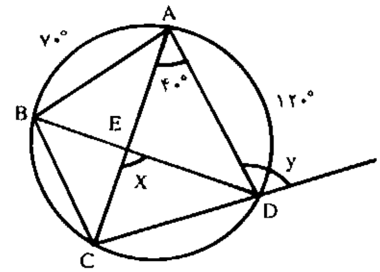
۴ ــ از مثلثی اندازهٔ سه میانه معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

۵ ــ زاویهٔ BAC در یک دایره محاط است. نیمساز این زاویه دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید وتر DE که

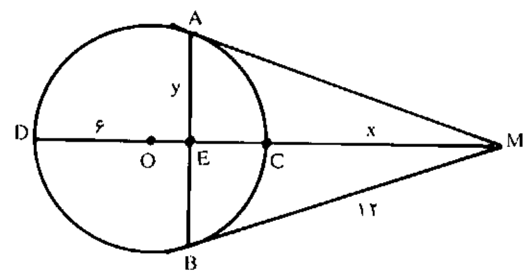


موازی AB رسم شود، با وتر AC برابر است.

۶ ــ اندازهٔ x و y را تعیین کنید (ABCD چهارضلعی محاطی و AC و BD قطرهای آن می‌باشند).



۷ ــ در شکل داده شده خطهای MA و MB در نقطه‌های A و B بر دایره مماسند، با توجه به مقدارهای داده شده اندازهٔ x و y را تعیین کنید.



۸ ــ دو دایره $C(O,5)$ و $C'(O',3)$ داده شده‌اند. اگر $OO'=10$ باشد، نسبت اندازهٔ مماس مشترک درونی به اندازهٔ مماس مشترک برونی این دو دایره را تعیین کنید.

۹ ــ نقطه‌های $A=(3,0)$ و $B=(-2,4)$ و $C=(-1,2)$ رأسهای مثلث ABC می‌باشند.

الف ــ مختصات نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های این مثلث را تعیین کنید (می‌توانید از رابطه‌های $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$ و $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ استفاده کنید).

ب ــ مثلث ABC و تصویرش را تحت تبدیلی که رأس A را بر روی نقطهٔ G تصویر می‌کند رسم کنید.

پ ــ قاعدهٔ این نگاشت را بنویسید.

ت ــ مختصات نقطه‌های تبدیل یافته تحت انتقال بالا (مختصات رأسهای مثلث $A'B'C'$) را به دست آورید.

۱۰ ــ معادلهٔ خط D' تبدیل یافته خط $D: 2x+y-3=0$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(2x-1, y+2)$ به دست آورید. اگر A نقطه‌ای به طول ۲ و B نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط باشند، مختصات نقطه‌های A' و B' تصویرهای این دو نقطه روی خط D' را تعیین کنید. طول پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. آیا این تبدیل یک ایزومتری است؟

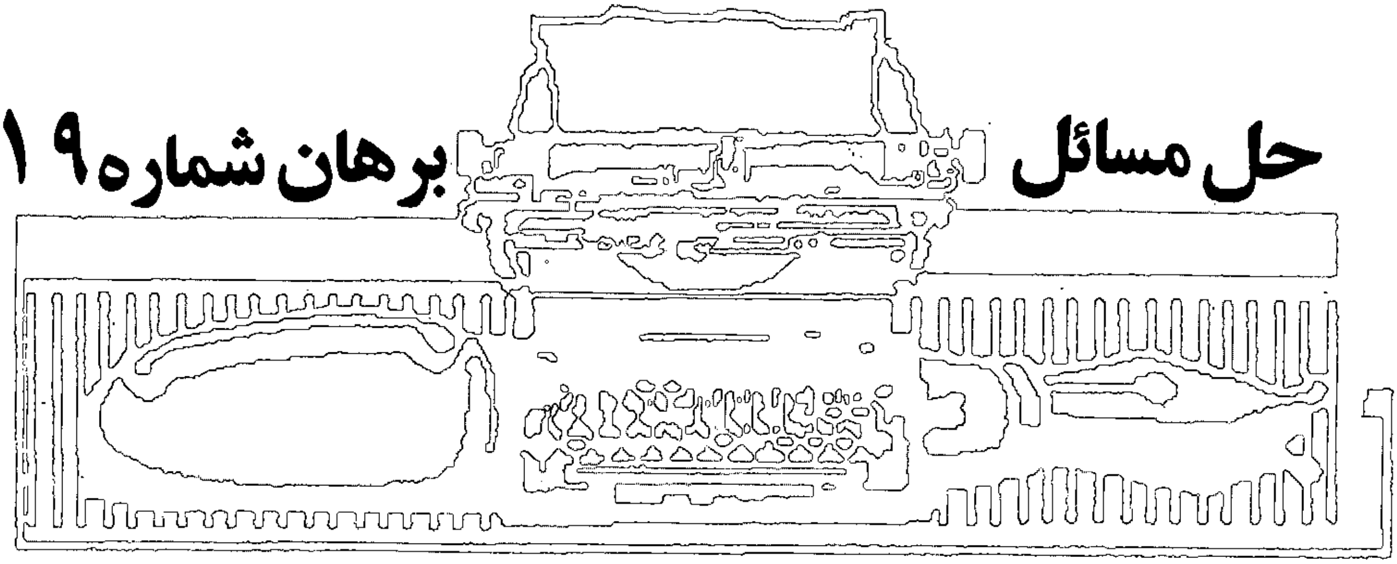


ادب ریاضی

تمام مسائلی از ریاضیات که ذهن بزرگترین ریاضی‌دانان قرن هفدهم را مشغول می‌داشت امروزه در داخل تئوریهای بزرگتری مستهلک شده‌اند و یا وارد اطلاعات عمومی ریاضیات شده‌اند و هر محصل دبیرستانی قادر به درک آنها است، به جز مسائل تئوریِ اعداد. به طوری که امروزه اطلاعات ما دربارهٔ بسیاری از مسائلی که ذهن فرما را به خود مشغول کرده بود، بیش از آن نیست که در زمان فرما بوده است.

کتاب ریاضی‌دانان نامی،
یادداشت مترجم

حل مسائل برهان شماره ۱۹



حل مسائل ریاضیات ۲:

۱ـ از تلاقی معادلات خطوط دو قطر، مختصات مرکز مربع به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -2x-1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{5}\ ,\ y=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow G(-\frac{3}{5}\ ,\ \frac{1}{5}) \quad \text{و} \quad OG=\sqrt{(-\frac{3}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow OG=\frac{\sqrt{10}}{5}$$ (فاصلهٔ مرکز مربع از مبدأ مختصات)

۲ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-1,2)$ از خط $2x-y+h=0$ چنین است:

$$AH=\frac{|-2-2+h|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|h-4|}{\sqrt{5}} \quad \text{و}$$

$$AH=\frac{\sqrt{5}}{h} \Rightarrow \frac{|h-4|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{h}$$

$$\Rightarrow h(h-4)=\pm 5 \Rightarrow h^2-4h-5=0 \Rightarrow h=2\pm\sqrt{4+5}$$

$$\Rightarrow h=2\pm\sqrt{9}=2\pm 3 \Rightarrow h=5 \ \text{یا}\ h=-1$$

معادلهٔ $h^2-4h+5=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین مقدار مثبت h چنین است:

$$\boxed{h=5}$$

۳ـ شیب خطی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad A(-1,1) \Rightarrow$$

$$y-1=\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-3=x+1 \Rightarrow 3y-4=x$$

$$C(m,\frac{1}{3}):\ 3(\frac{1}{3})-4=m \Rightarrow \boxed{m=-3}$$

۴ـ می‌دانیم:

$$\overline{AM}=x_M-x_A \ \text{و}\ \overline{BM}=x_M-x_B \ \text{و}\ x_A=-3 \ \text{و}\ x_B=4$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1} \ \text{یا}\ \boxed{m=2}$$

بنابراین:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{x_M+3}{x_M-4}=\frac{-5}{6} \Rightarrow 6x_M+18=-5x_M+20$$

$$\Rightarrow \boxed{x_M=\frac{2}{11}}$$

۵ـ با توجه به برابریهای زیر:

$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\times 2^3}=2\sqrt[3]{2} \quad \text{و} \quad \sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\times 3^3}=3\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{2\sqrt[3]{4}}{5\times 2\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}+2\times 2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{2}}=\frac{-\sqrt[3]{2}}{2}$$

۶ـ الف) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$3m^3x-27x=m^2 \Rightarrow (3m^3-27)x=m^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{m^2}{3m^3-27}$$

معادله وقتی جواب ندارد که داشته باشیم:

$$\begin{cases} m^2\neq 0 \\ 3m^3-27=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^3=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\sqrt[3]{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=\sqrt[3]{9}}$$

ب) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(m^2-3m+2)x=-2m-1 \Rightarrow x=\frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2}$$

معادله وقتی جواب ندارد که داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2m+1\neq 0 \\ m^2-3m+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq -\frac{1}{2} \\ (m-1)(m-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq -\frac{1}{2} \\ m=1 \ \text{یا}\ m=2 \end{cases}$$

۷ـ با توجه به شرط $0<x<\frac{\pi}{2}$، عبارت را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{1-\sin^2 x}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]$$

$$=\sqrt{\cos^2 x}\left[\frac{\cos^2 x+(1+\sin x)^2}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$=|\cos x|\left[\frac{\cos^2 x+1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$\underset{(0<x<\frac{\pi}{2})}{=} \cos x\left[\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$=\cos x\left[\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}\right]$$

$$\underset{(1+\sin x\neq 0)}{=} \cos x\left(\frac{2}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos x}$$

$$\underset{(\cos x\neq 0)}{=} 2$$

۸ـ با توجه به برابریهای زیر:

$$\sin(150^\circ)=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2} \quad \text{و}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

خواهیم داشت:

$$(y-x)^2(\frac{1}{2})^2-(x+y)^2(-\frac{1}{2})^2+xy=0 \qquad (1)$$

و یا:

$$\frac{1}{4}(y^2-2yx+x^2)-\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)+xy=0$$

و یا:

$$\frac{y^2-2xy+x^2-x^2-2xy-y^2}{4}+xy=0$$

$$\Rightarrow \frac{-4xy}{4}+xy=0$$

و درنتیجه :

$$-xy+xy=0 \qquad (2)$$

تساوی (۲) به‌ازای هر عدد حقیقی x و y همیشه درست است. بنابراین تساوی (۱) یک اتحاد است.

۹ـ معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ عمومی $y=ax^2+bx+c$ چنین است :

$$x=-\frac{b}{2a}$$

بنابراین معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^2-mx$ چنین است :

$$x=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2} \quad و \quad x=2 \Rightarrow \frac{m}{2}=2 \Rightarrow \boxed{m=4}$$

حل مسایل ریاضیات ۴

۱ـ مجموعهٔ جوابهای مشترک از حل دستگاه نامعادلات توأم زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases}2x^2-6x>0\\ -3x^2-4x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(x-3)>0\\ (x+1)(3x+1)>0\end{cases} \qquad (1)$$

برای حل دستگاه نامعادلات (۱) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		0		3	$+\infty$
$x(x-3)$	+		+		+		−		+
$(x+1)(3x+1)$	+		−		+		+		+
	جواب $x<-1$				جواب $-\frac{1}{3}<x<0$				جواب $x>3$

از شرط $x^2<\frac{1}{16}$ نتیجه می‌شود :

$$|x|<\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4} \qquad (2)$$

بنابراین مجموعهٔ جوابهای مشترک نامعادلات، با شرط (۲) چنین است :

$$\text{(۲) مجموعهٔ جوابهای مشترک با شرط} = \left\{x \,|\, x\in\mathbb{R} ,\ -\frac{1}{4}<x<0\right\}$$

۲ـ برای این که عبارت P تعریف شده باشد، باید داشته باشیم :

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x>0\\ x-\sqrt{x}\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x>0\\ x\neq 0 ,\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow x>0 ,\ x\neq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\mathbb{R}^+-\{1\}}$$

۳ـ ابتدا ریشهٔ هر یک از عاملها را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم :

$$-x^2+3x-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \ \text{یا}\ x-2=0 \Rightarrow x=1 \ \text{یا}\ x=2$$

$$x=0 \quad و \quad x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=-1$$

$x^4+1=0$ (ریشهٔ حقیقی ندارد)

اکنون جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$-x^2+3x-2$	−		−		−		+		−
x	−		−		+		+		+
x^2-1	+		−		−		+		+
x^3+1	−		+		+		+		+
x^4+1	+		+		+		+		+
علامت P	−	تعریف نشده	−	$P=0$	+	مبهم	+	$P=0$	−

۴ـ برای حل نامعادله دو حالت درنظر می‌گیریم :

$$1)\ \begin{cases}x-1\geq 0\\ \frac{x-1}{x+2}<1\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases}x-1<0\\ \frac{-(x-1)}{x+2}<1\end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases}x\geq 1\\ \frac{x-1}{x+2}-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ \frac{-3}{x+2}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq 1\\ \frac{3}{x+2}>0\end{cases}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

۱) از اشتراک $x\geq 1$ و $x>-2$، نتیجه می‌شود :

$x\geq 1$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	−		+
$\frac{3}{x+2}$	−	تعریف نشده	+

$$2)\ \begin{cases}x<1\\ \frac{-x+1}{x+2}-1<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<1\\ \frac{-2x-1}{x+2}<0\end{cases}$$

$$-2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

۲) از اشتراک $x<1$ و $x>-\frac{1}{2}$ و $x<-2$ نتیجه می‌شود :

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x-1$	+		+		−
$x+2$	−		+		+
$\frac{-2x-1}{x+2}$	−		+		−

$$x<-2 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{2}<x<1$$

بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله چنین است :

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{x \,|\, x\in\mathbb{R}, x<-2 \ \text{یا}\ x>-\frac{1}{2}\right\}$$

۵ ـ ابتدا دو طرف نابرابری را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ac$$

سپس همهٔ جملات را به طرف اول نابرابری می‌آوریم :

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geq 0$$

نابرابری بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)\geq 0$$

و یا :

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$$

طرف اول نابرابری بالا همیشه نامنفی است. بنابراین نابرابری مورد نظر برای هر a و b و c حقیقی همیشه برقرار است.

۶ ـ با استفاده از اتحادهای $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ و $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$، خواهیم داشت :

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

۷ـ فرض کنیم :

$$A: x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$B: Kx_1+b, Kx_2+b, \ldots, Kx_n+b$$

می‌دانیم $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ و $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)}$ بنابراین برای داده‌های آماری مسألهٔ B داریم :

$$\bar{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Kx_i+b)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Kx_i+\sum_{i=1}^{n}b}{n}=K\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\frac{nb}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_B=K\bar{x}_A+b$$

$$S_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(Kx_i+b)-\bar{x}_B\right]^2}{(n-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(Kx_i+\cancel{b})-K\bar{x}_A-\cancel{b}\right]^2}{(n-1)}$$

$$\Rightarrow S_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}K^2(x_i-\bar{x}_A)^2}{n-1}=K^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_A)^2}{(n-1)}=K^2S_A^2$$

$$\Rightarrow S_B^2=K^2S_A^2 \Rightarrow S_B=KS_A$$

۸ ـ فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}$ و طبق مفروضات مسأله داریم :

$$\begin{cases}a+c=b+d=3\\ e+g=f+h=3\end{cases}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix} \quad و$$

$$(ae+bg)+(ce+dg)=$$

$$=(a+c)e+(b+d)g$$

$$=3e+3g=3(e+g)=3\times 3=9$$

۹ـ

$$\begin{cases}4x-5y=3\\ 3x+2y=4\end{cases} \quad A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 3 & 2\end{bmatrix} ,\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} ,\ B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B \qquad (1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(4\times 2)-(3\times -5)}\begin{bmatrix}2 & 5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۲۳} & \frac{۵}{۲۳} \\ -\frac{۳}{۲۳} & \frac{۴}{۲۳} \end{bmatrix}$

$\overset{(۱)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۲۳} & \frac{۵}{۲۳} \\ \frac{-۳}{۲۳} & \frac{۴}{۲۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲۶}{۲۳} \\ \frac{۷}{۲۳} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = \frac{۲۶}{۲۳} \ , \ y = \frac{۷}{۲۳}$

۱۰ــ دستگاه معادلات درصورتی فاقد جواب است که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مساوی با صفر باشد پس داریم:

$\begin{cases} -mx + y = ۴ \\ ۲x - my = ۲ \end{cases} \Rightarrow m^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۲ \Rightarrow m = \pm\sqrt{۲}$

$\begin{cases} ۲x - my = ۱ \\ ۲mx + y = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ + ۲m^۲ = ۰ \Rightarrow ۲m^۲ = -۲$

و معادلهٔ $۲m^۲ = -۲$ فاقد جواب است.

پس دستگاه مزبور همواره دارای جواب است.

۱۱ــ

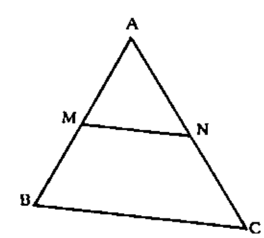
$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & x & x^۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۶$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+x & ۱+x^۲ & ۱+x^۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۶$

$\Rightarrow ۲ + ۲x + ۱ + x^۲ = ۶ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱ , x = -۳$

۱۲ــ با توجه به شکل اگر M وسط AB و N وسط AC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $۲\vec{MN} = \vec{BC}$

طبق فرض $\vec{BA} = ۲\vec{MA}$ و $\vec{AC} = ۲\vec{AN}$



$\vec{MA} + \vec{AN} = \vec{MN}$ (۱)

$\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$ (۲)

(۳) $(۱) \Rightarrow ۲\vec{MA} + ۲\vec{AN} = ۲\vec{MN} \overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} \vec{BA} + \vec{AC} = ۲\vec{MN}$

(۲) و (۳) $\Rightarrow ۲\vec{MN} = \vec{BC}$

۱۳ــ ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ مفروض می‌باشند

الف) [۳] [۳] [۲] [۱] [۲] (۲ یا ۴) $۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۳۶$

[۴] [۳] [۲] [۱] [۱] (صفر) $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$

۶۰ = ۲۴ + ۳۶ = تعداد اعداد زوج ۵ رقمی که زوج هستند
(اعداد زوج را دو دسته کردیم، یکی زوج با رقم یکان ۲ یا ۴ و دیگری با رقم یکان صفر)

ب) [۲] [۴] [۳] [۲] [۱] (۳ یا ۴) $۲ \times ۴! = ۴۸$

(اعداد بزرگتر از سی هزار، رقم یکان ۳ یا ۴ باید باشد)

ج) [۳] [۳] [۲] [۱] [۱] $۳ \times ۳! = ۱۸$

(رقم یکان فقط می‌تواند ۵ باشد تا عدد حاصل مضرب ۵ و فرد باشد)

۱۴ــ سه دانش‌آموز سال اول و چهار دانش‌آموز سال دوم داریم و سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم در این صورت:

الف) (احتمال آنکه سه نفر همکلاسی باشند) $\dfrac{\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$

ب) (فقط ۲ نفر از کلاس دوم) $\dfrac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۳}}$

ج) (لااقل ۱ نفر از کلاس اول باشد) $\dfrac{\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۱} + \binom{۳}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$

د) (حداکثر ۲ نفر از کلاس دوم باشند) $\dfrac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$

حل مسائل حسابان (۲)

۱ــ

$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx & x \geq ۲ \\ ۲bx + ۴ & x < ۲ \end{cases}$

ابتدا از روی تعریف مشتق، مشتق راست و مشتق چپ را در نقطه $x_۰ = ۲$ محاسبه می‌کنیم سپس آنها را مساوی قرار می‌دهیم.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{ax^۲ + bx - ۴a - ۲b}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{a(x^۲ - ۴) + b(x - ۲)}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{a(x - ۲)(x + ۲) + b(x - ۲)}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{(x - ۲)(ax + ۲a + b)}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲^-} (ax + ۲a + b) = ۲a + ۲a + b$

مشتق راست در نقطه $x_۰ = ۲$: $= \boxed{۴a + b = f'_+(۲)}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{۲bx + ۴ - ۴b - ۴}{x - ۲}$

$= \lim\limits_{x \to ۲^-} \dfrac{۲b(x - ۲)}{x - ۲} = ۲b$

مشتق چپ در $x_۰ = ۲$: $\Rightarrow \boxed{۲b = f'_-(۲)}$

$۴a + b = ۲b \Rightarrow \boxed{۴a = b}$

چون تابع در $x_۰ = ۲$ مشتق‌پذیر است پس این تابع در $x_۰ = ۲$ پیوسته است پس حد دارد.

حد راست: $x \to ۲^+ \Rightarrow \lim f(x) = ۴a + ۲b$

حد چپ: $x \to ۲^- \Rightarrow \lim f(x) = ۴b + ۴$

$\Rightarrow ۴a + ۲b = ۴b + ۴ \Rightarrow \boxed{۴a - ۲b = ۴}$

$\begin{cases} ۴a - b = ۰ \\ ۴a - ۲b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -۴ \ , \ a = -۱}$

۲ــ

$y = \sqrt[۳]{۱ - x^۲} \Rightarrow y' = \dfrac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۲}}$

$D_f = R$

$y'' = -\dfrac{۲}{۳} \times \dfrac{\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۲} - \dfrac{-۴x^۲}{۳\sqrt[۳]{۱ - x^۲}}}{\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۴}}$

$= -\dfrac{۲}{۳} \times \dfrac{\dfrac{۳(۱ - x^۲) + ۴x^۲}{۳\sqrt[۳]{۱ - x^۲}}}{\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۴}}$

$y'' = -\dfrac{۲}{۳} \times \dfrac{۳ + x^۲}{۳\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۵}} = -\dfrac{۲}{۹} \times \dfrac{۳ + x^۲}{(۱ - x^۲)\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۲}}$

علامت y'' به علامت $(۱ - x^۲)$ بستگی دارد.

$y'' = \dfrac{۲(۳ + x^۲)}{۹(x^۲ - ۱)\sqrt[۳]{(۱ - x^۲)^۲}}$

$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in D_f \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\infty \\ x = -۱ \in D_f \Rightarrow m_{\text{مماس}} = +\infty \end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		$+۱$		$+\infty$
y''		+		−		+	
انحنای y		∪	عطف	∩	عطف	∪	

۳ــ

$f(x) = nx - [nx] \quad D_f = R \ , \ n \in N$

$f(x + T_۱) = n(x + T_۱) - [n(x + T_۱)]$

$= nx + nT_۱ - [nx + nT_۱]$

$nT_۱$ باید عضو N باشد تا بتواند از جزء صحیح خارج شود و با $nT_۱$ بیرون جزء صحیح حذف شود به این شکل

$f(x + T_۱) = nx + nT_۱ - [nx] - nT_۱$

کوچکترین مقدار $nT_۱$، (۱) است پس

$nT_۱ = ۱ \Rightarrow T_۱ = \dfrac{۱}{n}$

حال این مقدار $T_۱$ را T می‌نامیم پس

$\boxed{T = \dfrac{۱}{n}}$

۴ــ

$y = \cos^۲ x - \cos x \quad ۰ \leq x \leq ۲\pi$

$y' = -۲\sin x \cos x + \sin x = ۰$

$\sin x(-2\cos x+1)=0$

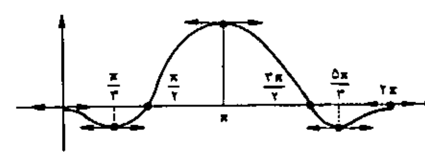
$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=K\pi\Rightarrow x=0,\pi,2\pi\\ -2\cos x+1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\end{cases}$

$x=0$ یا $2\pi\Rightarrow y=1-1=0$

$y=0\Rightarrow \cos^2 x-\cos x=0\Rightarrow \cos x(\cos x-1)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \cos x=1\Rightarrow x=0,2\pi\end{cases}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0



۵ ـ این عبارت به‌صورت مبهم $(1)^{\infty}$ است

$\begin{cases}\text{حد}\ (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}\\ x\to 1\end{cases}$

می‌نویسیم

$y=(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

$\operatorname{Ln}y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\operatorname{Ln}(2-x)\Rightarrow \lim \operatorname{Ln}y$

$=\lim_{x\to 1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\operatorname{Ln}(2-x)=\infty\times 0$

$\underset{x\to 1}{\operatorname{Ln}y}=\dfrac{\operatorname{Ln}(2-x)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}=\dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{Ln}(2-x)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}(1+\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{2})}=\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\operatorname{Ln}y=\frac{2}{\pi}\Rightarrow \boxed{\lim y=e^{\frac{2}{\pi}}}$

۶ـ

$y=x^2e^x$

$y'=2xe^x+e^x.x^2=xe^x(x+2)=0$

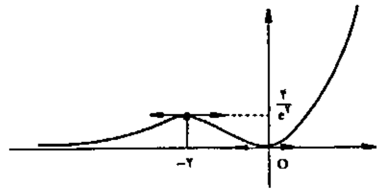
$\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \Rightarrow y=0\\ x=-2\ \Rightarrow y=\frac{4}{e^2}\end{cases}$

$x\to+\infty\ \Rightarrow\ y\to+\infty$

$\begin{cases}x\to-\infty\Rightarrow \lim y=\infty\times 0\\ \Rightarrow \lim y=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\frac{-1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}-2xe^x=\infty\times 0\\ =\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{-\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0\end{cases}$

معادله مجانب افقی $\Rightarrow x\to-\infty\Rightarrow y\to 0\Rightarrow \boxed{y=0}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$



۷ـ

$y=e^{\frac{x}{\operatorname{Ln}x}}\Rightarrow \operatorname{Ln}y=\frac{x}{\operatorname{Ln}x}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$\Rightarrow \dfrac{y'_x}{y}=\dfrac{\operatorname{Ln}x+\frac{1}{x}\times x}{(\operatorname{Ln}x)^2}\Rightarrow \dfrac{y'_x}{y}=\dfrac{\operatorname{Ln}x+1}{(\operatorname{Ln}x)^2}$

$\Rightarrow y'_x=y\times\dfrac{\operatorname{Ln}x+1}{(\operatorname{Ln}x)^2}\Rightarrow y'_x=e^{\frac{x}{\operatorname{Ln}x}}\times\dfrac{\operatorname{Ln}x+1}{(\operatorname{Ln}x)^2}$

۸ـ

$y=\log\dfrac{x}{x-1}$

$\dfrac{x}{x-1}>0\Rightarrow D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

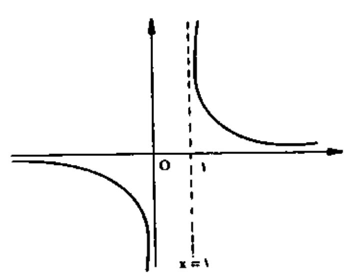
$y'=\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\log e=\dfrac{-1}{x(x-1)}\log e<0$

$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to 0\Rightarrow \boxed{y=0}$ معادله مجانب افقی

$x\to 0^-\Rightarrow y\to-\infty\Rightarrow \boxed{x=0}$ معادله مجانب قائم

$x\to 1^+\Rightarrow y\to+\infty\Rightarrow \boxed{x=1}$ معادله مجانب قائم

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		▨		$-$	
y	0	↘	$-\infty$	▨	$+\infty$	↘	0



۹ـ

$4x^2-y^2-8x-2y-1=0$

$4x^2-8x-y^2-2y=1$

$4[x^2-2x]-[y^2+2y]=1$

$4[(x-1)^2-1]-[(y+1)^2-1]=1$

$4(x-1)^2-4-(y+1)^2+1=1$

$4(x-1)^2-(y+1)^2=4\ \Rightarrow\ \dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

$a^2=1\Rightarrow a=1$

$b^2=4\Rightarrow b=2$

$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$

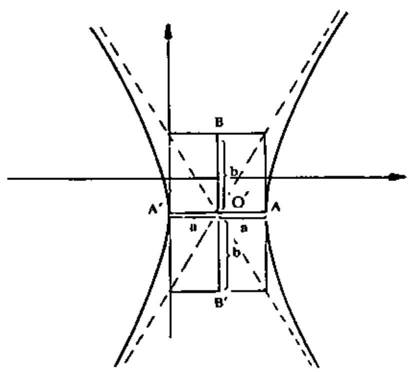
$O'\begin{vmatrix}k=1\\ h=-1\end{vmatrix}$ مرکز هذلولی

چون a^2 در مخرج کسر (x) است پس هذلولی افقی است.

$\dfrac{x-1}{1}=\pm\dfrac{y+1}{2}$ معادلات مجانبها

$\Rightarrow y+1=\pm2(x-1)$

$\boxed{y=-1\pm2(x-1)}$



$F\begin{vmatrix}c+k=\sqrt{5}+1\\ h\ =-1\end{vmatrix}$

$F'\begin{vmatrix}-c+k=-\sqrt{5}+1\\ h\ =-1\end{vmatrix}$

۱۰ـ

$\int_0^2\dfrac{dx}{4+x^2}=\dfrac{1}{4}\int_0^2\dfrac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2}=(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{x}{2})_0^2$

$=(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}1)-(\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}0)=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})-0=\frac{\pi}{8}$

$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{8dx}{\sqrt{1-x^2}}=8\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=(8\operatorname{Arcsin}x)_0^{\frac{1}{2}}$

$=(8\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2})-(8\operatorname{Arcsin}0)=8(\frac{\pi}{6})-0=\frac{4\pi}{3}$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

۱ـ

$f(x)=\begin{cases}x-1-1 & x>1\ \text{اگر}\\ -1 & x=1\ \text{اگر}\\ -x+1-1 & x<1\ \text{اگر}\end{cases}$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & x>1\ \text{اگر}\\ \text{وجود ندارد} & x=0\\ -1 & x<1\end{cases}\Rightarrow$

این تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست

شرط مشتق‌پذیری قضیه رول برقرار نیست لذا نقطه‌ای مانند C بین دو عدد ۰ و ۲ وجود ندارد که $f'(c)=0$ به قضیه رول توجه کنید.

اگـر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسـتـه و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه حداقل یک نقطه به طول c، $a<c<b$ وجود دارد که $f'(c)=0$

ـ۲

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \qquad [0,2]$$

اوّل قضیه مقدار میانگین را بیان می‌کنیم : هرگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، حداقل یک نقطه به طول c، $a<c<b$ وجود دارد که :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

حال قضیه مقدار میانگین را در این تابع مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{4}{5}-0}{2}=\frac{2}{5}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow(x^2+1)^2=5-5x^2\Rightarrow x^4+2x^2+1=5-5x^2$$
$$x^4+7x^2-4=0\Rightarrow x^2=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}}$$

$$c_1=\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}} \quad \text{و} \quad c_2=-\sqrt{\frac{-7+\sqrt{65}}{2}}$$

ـ۳

$$f(x)=x^3(x-2)^2 \qquad [-1,3]$$
$$f'(x)=3x^2(x-2)^2+2x^3(x-2)$$
$$f'(x)=x^2(x-2)(3x-6+2x)$$
$$f'(x)=x^2(x-2)(5x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\\x=\frac{6}{5}\end{cases}$$

$x=0$ یک نقطه بحرانی است $\qquad f(0)=0$

$x=2$ یک نقطه بحرانی است که اکسترمم نسبی است

$f(2)=0$

$x=\frac{6}{5}$ یک نقطه بحرانی است که اکسترمم نسبی است

$f(\frac{6}{5})=\frac{3456}{625}$

$x=-1$ یک نقطه بحرانی است که می‌نیمم مطلق است

$f(-1)=-1(-3)^2=-9$

$x=3$ یک نقطه بحرانی است که ماکزیمم مطلق است

$f(3)=27(1)^2=27$

توجه : نقطه بحرانی، نقطه‌ایست که در آن نقطه یا مشتق صفر است یا مشتق وجود ندارد.

ـ۴

آن دو عدد را a و b می‌نامیم داریم : $\quad K>0$ ، $a.b=K^2$

$$\Rightarrow b=\frac{K^2}{a}$$

$$y=a+b=a+\frac{K^2}{a}=\frac{a^2+K^2}{a}$$

$$y'=\frac{2a^2-a^2-K^2}{a^2}=\frac{a^2-K^2}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow a^2=K^2\Rightarrow a=\pm K$$

$$\Rightarrow a=K\ \Rightarrow b=K$$

ـ۵

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

$$x^2+2x\neq0\Rightarrow x\neq0,-2$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-(2x+2)(x-1)}{(x^2+2x)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}=0$$

$$-x^2+2x+2=0\ \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$$

جدول رفتار تابع چنین است :

x		-2		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$	
y'	−	‖	−	0	+	‖	+	0	−
y	↘	‖	↘		↗	‖	↗		↘

این تابع در بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(-2,1-\sqrt{3})$ و $(1+\sqrt{3},+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(1-\sqrt{3},0)$ و $(0,1+\sqrt{3})$ اکیداً صعودی است. $x=1+\sqrt{3}$ یک نقطه بحرانی است و طول ماکزیمم نسبی تابع است و $x=1-\sqrt{3}$ یک نقطه بحرانی است و طول نقطه می‌نیمم نسبی است.

ـ۶

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال تابع را با نماد H نشان می‌دهیم.

$$H_1:\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{5x^4}=\frac{0}{0}$$

$$H_2:\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{20x^3}=\frac{0}{0}$$

$$H_3:\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{60x^2}=\frac{0}{0}$$

$$H_4:\ \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{120x}\sim\lim_{x\to0}\frac{-x}{120x}=-\frac{1}{120}$$

ـ۷

$$\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx$$

اگر m کران پایین تابع f و M کران بالای آن باشند داریم :

$$f(x)=x^3+6x^2-15x+1$$
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$f'(x)=3x^2+12x-15=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-5\notin\left[\frac{1}{4},3\right]\end{cases}$$

کران پایین = می‌نیمم نسبی و مطلق

کران بالا : $\begin{cases}f(1)=1+6-15+1=-7\\f(3)=37\\f(\frac{1}{4})=\frac{74}{64}\end{cases}$

$$-7(3-\frac{1}{4})\le\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx\le37(3-\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow-\frac{77}{4}\le\int_{\frac{1}{4}}^{3}(x^3+6x^2-15x+1)dx\le\frac{407}{4}$$

ـ۸

الف) $\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(4x^5+6x^4)dx$

$$=\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(x^2)(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int x^{20}(x^2+2x)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int(x^2)^{10}(x^2+2x)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int(x^4+2x^3)^{10}(4x^3+6x^2)dx$$

$$u=x^4+2x^3\Rightarrow du=(4x^3+6x^2)dx$$

$$=\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c=\frac{(x^4+2x^3)^{11}}{11}+c$$

ب) $\int\frac{e^{tgx}dx}{\cos^2x(e^{tgx}+e)}=\int\frac{(1+tg^2x)e^{tgx}}{e^{tgx}+e}dx$

$$u=e^{tgx}+e\Rightarrow du=(1+tg^2x)e^{tgx}dx$$

$$=\int\frac{du}{u}=Ln(u)+c=Ln(e^{tgx}+e)+c$$

ج) $\int\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}dx \qquad x>0$

ابتدا کسر داخل انتگرال را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{(A+c)x^2+(A+B)x+(B+C)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=4\\A+B=2\\B+C=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C-B=2\\C+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=2\\B=0\\A=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{2}{x+1}$$

$$=Ln(x^2+1)+2Ln(x+1)+C$$

د) $\int Arctgxdx$ $\qquad$ روش جزء به جزء

$$\begin{cases} u = Arctgx \Rightarrow du = \frac{۱}{۱+x^{۲}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int Arctgxdx = xArctgx - \int \frac{x}{۱+x^{۲}}dx$$

$$\int Arctgxdx = xArctgx - \frac{۱}{۲}Ln(۱+x^{۲}) + C$$

حل مسائل امتحان درس هندسه ۱ نظام جدید خرداد ۷۵ (بعدازظهر)

۱ـ الف : به یک فاصله‌اند ب : استقرایی پ : استنتاجی

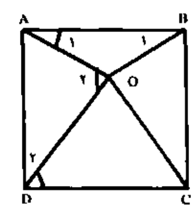
ـ۲

$B_۱ = C_۱ = ۳۰$

$\hat{O} = ۱۸۰ - (۳۰+۳۰)$

$\hat{O} = ۱۲۰$

ـ۳



$\hat{D}_۱ = ۶۰ \quad \hat{O}_۱ = ۱۵۰$

$\hat{D}_۲ = ۳۰$

$\hat{A}_۲ = \hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰-۳۰}{۲} = ۷۵$

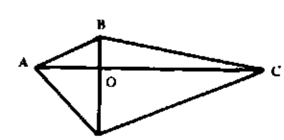
$\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = ۱۵$

ـ۴

مساحت $ABC = \frac{۱}{۲}AC \times OB$

مساحت $ACD = \frac{۱}{۲}AC \times OD$

مساحت $ABCD = \frac{۱}{۲}AC(OB+OD) = \frac{۱}{۲}AC \times BD$



ـ۵

مساحت مثلث $SQB = \frac{۱}{۲}bh$

مساحت مثلث $SPQ = \frac{۱}{۲}ah$

مساحت ذوزنقه $SPQB = \frac{۱}{۲}bh + \frac{۱}{۲}ah = \frac{۱}{۲}h(a+b)$

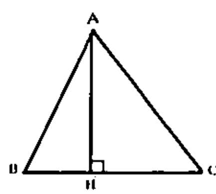
ـ۶

$AH^{۲} = AB^{۲} - BH^{۲}$

$AH^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴}$

$AH = \sqrt{\frac{۴a^{۲} - a^{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$S = a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$



ـ۷

$AD = \sqrt{AQ^{۲} + QD^{۲}}$

$AD = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + a^{۲}}$

$AD = \sqrt{۲a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}$

$۲a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = (b+c)^{۲}$

$۲a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + ۲bc$

$a^{۲} = bc$

ـ۸

$DE \parallel FB \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EB}$

$FE \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$

$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$

ـ۹

$\frac{AC}{OC} = \frac{AB}{OD} \qquad C_۱ = C_۲$

$\frac{۵۰}{۱۲۰} = -\frac{۳۰}{x}$ به حالت (ززز) $\hat{ACB} \sim \hat{OCD}$

$x = \frac{۳۰ \times ۱۲۰}{۵۰} \qquad x = ۷۲$

ـ۱۰

$۲۱ + ۱۳/۵ + ۱۰/۵ = ۴۵$

$\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } PQR} = K$

$\frac{۴۵}{x} = \frac{۱۰/۵}{۷} \qquad x = ۳۰$

ـ۱۱

$d = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}} = \sqrt{۹+۱۶+۲۵} = \sqrt{۵۰}$

۱۲ـ فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آنها قطعه‌هایی با طولهای مساوی ایجاد کند مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

ـ۱۳

$v_۱ = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$

$v_۲ = \frac{۱}{۳}\pi(۹R^{۲})۲h$

$\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi \times ۹R^{۲} \times ۲h}{\frac{۱}{۳}\pi \times R^{۲} \times h} = ۱۸$

ـ۱۴

$$\begin{cases} v = ۴\pi R^{۲} = ۱۱۳/۰۴ \\ R^{۲} = ۹ \Rightarrow R = ۳ \end{cases}$$

$v = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = ۱۱۳/۰۴$

جوابهای تفریح اندیشه

جواب ۱:

هنگامی که مربع وفقی مورد بحث را سر و ته کنیم باز هم می‌تواند به عنوان یک مربع وفقی درنظر گرفته شود.

جواب ۲:

بگذارید حریفتان اول بازی کند. اگر ۲ یا بیش از دو چوب کبریت بردارد می‌توانید همیشه با حرکتی مقابله کنید که ترکیبی برنده از ردیفها را به‌جا می‌گذارد. ترکیبات برندهٔ ساده عبارت‌اند از ۱ـ۴ـ۵، ۱ ـ ۲ ـ ۳ و ۱ ـ ۱ ـ ۱. هر ترکیب از جفتها (۵ـ۵، ۱ـ۱ـ۴ـ۴، و غیره) نیز، با استثناهای آشکار ۱ـ۱، ۱ـ۱ـ۱ـ۱، برنده‌اند.

هنگام به‌جا گذاشتن ردیفهای جفت‌دار بسادگی حرکتهای حریفتان را چنان جور می‌کنید که فرصت به‌جاگذاشتن آخرین چوب کبریت را برای وی به‌دست خواهید آورد. به‌عنوان مثال، اگر ۱ـ۱ـ۵ـ۵ را به‌جا بگذارید، و ۱ و ۳ چوب کبریت از یک ردیف بردارد، شما ۳ چوب کبریت از ردیف جفتش برداشته ۱ـ۱ـ۲ـ۲ را به‌جا می‌گذارید، و بی‌توجه به‌حرکت بعدیش می‌توانید برنده باشید.

هر حرکتی که حریفتان بر ترکیبی ۱ ـ ۴ ـ ۵ می‌کند می‌تواند توسط شما به‌ترکیب ۱ ـ ۲ ـ ۳ یا ۱ ـ ۱ ـ ۱، یا ترکیبی جفت‌دار تبدیل شود. فایدهٔ ترکیبهای ۱ ـ ۲ ـ ۳ یا ۱ ـ ۱ ـ ۱ آشکار است.

اگر حریف هر بار تنها یک چوب کبریت بردارد، حرکاتش را با برداشتن هر بار یک چوب کبریت از ردیفی دست‌نخورده، تا زمانی که ۲ یا بیش از ۲ چوب کبریت از هر ردیف منفرد برداشته شود، تنظیم می‌کنید. وی همواره حرکت سرنوشت‌ساز را یا در بازی دوم یا در بازی سوم خود انجام می‌دهد. در این صورت، باز هم با اندکی فکر می‌توانید ترکیب برنده را یافته تا نتیجه‌ای موفقیت‌آمیز بازی کنید.

تبصره: آرایهٔ آغازکنندهٔ مسأله ۱ و ۳ و ۵ و ۷ ـ خود ترکیبی برنده است؛ به‌همین دلیل است که استراتژی بردن در این سرگرمی کوچک می‌خواهد که دوم بازی کنید.

جواب ۳:

$\frac{S^2}{2}$. مساحت هر یک از نیمدایره‌های کوچک برابر $\frac{\pi S^2}{8}$ است و مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر $\frac{S^2}{2}$ است. بنابراین مجموع مساحات این دو $(\frac{S^2}{4})(\pi+2)$ است. سطح نیمدایرهٔ بزرگتر برابر

$$\boxed{(\frac{1}{2})(\frac{\pi}{4})\times(S\sqrt{2})^2=\frac{(\pi S^2)}{4}}$$

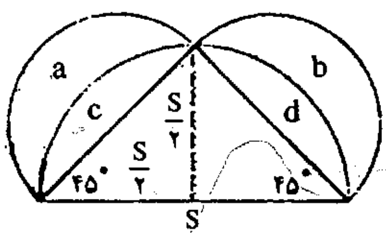
می‌باشد. چنانچه مجموع آن مساحتها را منهای این مقدار کنیم، دیده می‌شود که مقدار $\frac{S^2}{2}$ به‌دست می‌آید.

راه دیگر:

می‌دانیم که عموماً قضیهٔ فیثاغورس برای هر شکلی که وابسته به یک مثلث قائم‌الزاویه بنا شده باشد، قابل تعمیم است. بنابراین مساحت نیمدایرهٔ بنا شده روی وتر همواره برابر مجموع مساحتهای هر یک از دو نیمدایره‌ای است که بر روی قاعده‌ها واقعند. پس سطح قسمت هاشور خورده معادل مساحت مثلث قائم‌الزاویه است.

در اینجا: $A=(\frac{1}{2})S(\frac{S}{2})=\frac{S^2}{4}$

زیرا $a+b+c+d=c+d+e$ ، $a+b=e$.

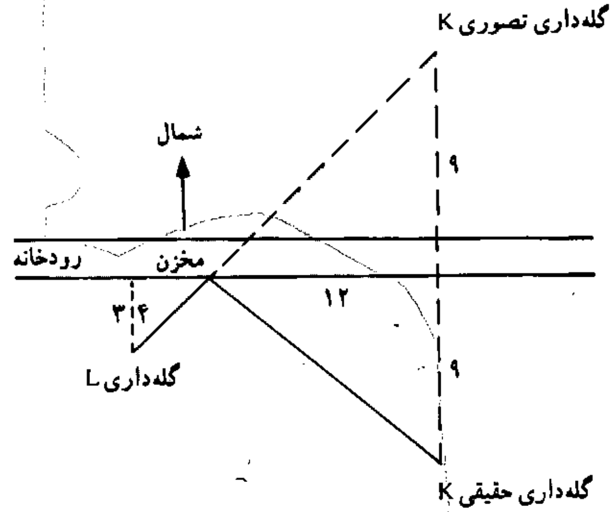


جواب ۴:

گله‌داری تصوری K را در ۱۸ مایلی شمال گله‌داری حقیقی او قرار می‌دهیم، در این صورت ساحل جنوبی رودخانه از وسط آنها می‌گذرد. توجه داشته باشید که مخزن سزبور بی‌توجه به قرار گرفتن محل آن در امتداد ساحل جنوبی از گله‌داری حقیقی و تصوری K دقیقاً به یک فاصله است. به این ترتیب، کل فاصلهٔ گله‌داری L از مخزن و هر یک از دو گله‌داری حقیقی و تصوری K یکسان است. از آنجا که کوتاه‌ترین فاصلهٔ L از گله‌داری تصوری K خط راست رسم شده بین آنهاست، مخزن را در محلی قرار می‌دهیم که این خط

ساحل جنوبی را قطع می‌کند.

از مثلثهای مشابه شکل ملاحظه می‌شود، که دو مسیر آب زاویه‌هایی مساوی با رودخانه تشکیل می‌دهند، و بنابراین مخزن در پایین رودخانه در ۴ مایلی گله‌داری L قرار دارد و طول کل مسیر ۲۰ مایل است.



جواب ۵:

اگر در مرحلهٔ اوّلیّه هر دو توده «فرد» باشند (یعنی، شامل تعداد فردی شن باشند)، بازیکن اوّل می‌بازد، چه، بی‌توجه به اقدامی که می‌کند، دو توده، که حداقل یکی از آنها «زوج» است، به‌جا می‌گذارد، دراین صورت بازیکن دوم می‌تواند آن را به دو تودهٔ فرد تقسیم کرده، تودهٔ دیگر را کنار گذاشته، وضعیت اوّلیّه را برقرار کند. اندکی تأمل نشان می‌دهد که این کار مستلزم این است که بازیکن دوم همواره می‌تواند اقدام کند.

اگر در ابتدا حداقل یکی از توده‌ها زوج باشد، دراین صورت بازیکن اوّل آن را به دو تودهٔ فرد تقسیم کرده (با توجه به استدلال فوق)، وضعیتی بازنده برای بازیکن دوم به‌وجود می‌آورد.

جواب ۶:

خطهای مورد بحث، بی‌توجه به چگونگی رسم آنها، در صورتی که شرایط مسأله را به جا آورند، ۲۰ مثلث تشکیل می‌دهند.

هر گروه سه خطی یک مثلث تشکیل می‌دهد. تعداد گروههای حاصل از ۶ خط در صورتی که هر بار ۳ خط آنها در نظر گرفته شود عبارت است از:

$$\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱} = ۲۰ \text{ گروه}$$

در صورتی که بدون روش سعی در شمارش آنها کنید، احتمالاً بعضی از آنها را به شمارش نمی‌آورید.

جواب ۷:

فرض کنیم پول خرید یک متر پارچه یک تومان و طول وسیله‌ای که برای اندازه گیری مورد استفاده قرار گرفته است L باشد. هنگامی که پارچه‌فروش گمان می‌کند که یک متر پارچه فروخته است، در واقع L متر فروخته است و قیمت خرید آن L تومان می‌باشد. پس در واقع این مقدار پارچه را به ۱/۴۰ تومان فروخته است و L ـ ۱/۴۰ تومان برای L تومان خرید، سود برده است. بنابراین درصد سود او برابر است با:

$$\frac{۳۹}{۱۰۰} = \frac{۱/۴۰ - L}{L} \Rightarrow L = \frac{۱۴۰}{۱۳۹} = ۱/۰۰۷۱$$

پس وسیلهٔ اندازه گیری او قدری بیشتر از ۷ میلیمتر، بزرگتر از یک متر بوده است.

Borhan
Vol. 6 No. 3
Serial numbers: 20 Spring 1997

In the name of God

Borhan is a mathematics journal published four times a year by Madrasse Publications. Each issue includes articles related to mathematics and its various topics specifically those concerning highschool education in Iran.

All communications should be sent to the editor at the following address:

Madrasse Publication - No. 36. Haghighat talab Street, Sepahbod gharany Ave, Tehran, Iran
Post code: 14155/1949

Contents:

1. Function and concept of function II — H.R. Amiri
2. A property of right-angled triangle ... — A. Sharafeddin
3. Variations of curves — A. Ghandehari
4. Solving of a fundamental problem of mathematics by elementary methods. — G. R. Yassipour
5. The principle of Inclusin and Exclusion — A. Khanmohammad and A. Farzad
6. Instruction of translation of mathematics articles. — M. S. Asgari
7. You, Too, can be successful in your mathematics lessons. — P. Shahriari
8. Foundations of computer. — H. E. Gholzom
9. A brief history of mathematics magazins in Iran.
10. Descrete mathematics. — G. R. Yassipour
11. Contest Problem
12. Locus (9) — M. H. Rostami
13. Radical — S. M. R. Hashemi mosavi
14. Problems.

روش ابراهیم بن سنان

ریاضیدان مشهور و مسلمان قرن سوم هجری در رسم سهمی

مورخین غربی تاریخ علم در مورد این دانشمند بزرگ که نوهٔ ثابت بن قره ریاضیدان مشهور و مسلمان، قرن دوم هجری قمری بوده، چنین می‌نویسند:

«گرچه روزگار ابراهیم‌بن سنان بر اثر یک غدّهٔ کبدی در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سرآمد، ولی آثار باقی‌مانده از او شهرتش را به عنوان شخصیتی مهمّ در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند. روش او در یافتن مساحت یک قطعهٔ سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دورهٔ پیش از رنسانس به ما رسیده است.

روش او در رسم سهمی نیز به نوبهٔ خود جالب و به صورت زیر می‌باشد:

روی خط AG پاره‌خط ثابت AB را جدا و BE را عمود بر AB رسم کنید. اینک بر BG نقاط H، D، Z، و... را به تعداد دلخواه انتخاب کنید. با شروع از H، نیمدایرهٔ به قطر AH را رسم، و فرض کنید که عمود BE آن را در T قطع کند. از T خطی به موازات AB و از H خطی به موازات BE رسم کنید. فرض کنید این خطها یکدیگر را در K قطع کنند.

سپس، نیمدایره‌ای به قطر AD رسم، و فرض کنید که این نیمدایره BE را در I قطع کند. مانند قبل، خطوطی از I و D به ترتیب به موازات AG و BE رسم، و فرض کنید که این دو خط یکدیگر را در L قطع کنند. همین عمل ترسیم را در مورد نقاط باقی‌ماندهٔ Z، ... انجام دهید تا نقاط متناظر را به‌دست آورید. در این صورت نقاط B، K، L، M، ... روی سهمی به رأس B، محور BG، و پارامتر AB قرار دارند. اگر K'، L'، M'، ... بر امتدادهای KH، LD، MZ، ... انتخاب شوند به طوری که $KH=HK'$، $LD=DL'$، $MZ=ZM'$، ...، در این صورت آنها هم روی سهمی قرار دارند.

روش ابراهیم بن سنان برای اثبات اینکه K روی سهمی‌ای است که رسم کرده، چنین است: اگر سهمی از نقطهٔ K نگذرد فرض کنید از نقطهٔ دیگری روی KH، مثلاً N بگذرد. در این صورت بنابر خاصیت سهمی، $NH^2=AB.BH$. از سوی دیگر، چون TB بر قطر نیمدایرهٔ ATH عمود است، از قضیهٔ ۱۴ مقالهٔ دوم اصول اقلیدس نتیجه می‌شود که $TB^2=AB.BH$. به‌علاوه، بنابر ترسیم، TBHK متوازی‌الاضلاع است لذا $TB=KH$. بنابراین $KH^2=TB^2=AB.BH=NH^2$، و لذا $KH=NH$، که یک تناقض است. بنابراین K روی سهمی‌ای که رسم کردیم قرار دارد، و همین برهان، با تعویض نامهای نقطه‌ها، در مورد L، M،... صادق است و لذا معتبربودن ترسیم‌رانشان داده‌ایم.

خواننده‌ای که می‌خواهد روش ابراهیم‌بن سنان را بیازماید، می‌تواند در موقع رسم نیمدایره‌های متوالی ماربر A به جای از پیش معلوم بودن قطرها، آنها را دلخواه بگیرد و این روش را ساده‌تر نماید. در این کار به نصف کردن خطوط AH و غیره نیازی پیدا نمی‌شود.

